Sebastian Vollmer

Diplom-Kaufmann

Europa Universität Flensburg

Statistische Inferenz und die Unsicherheit von Kapitalkosten in der Unternehmensbewertung

Dissertation

Juli 2016

Dissertation zur Erlangung des
akademischen Grades eines Doktors
der Wirtschaftswissenschaften (Dr. rer. pol.)
der Europa Universität Flensburg

Erstgutachter (Betreuer): Prof. Dr. Holger Hinz, Europa Universität Flensburg.

Zweitgutachter: Prof. Nils Karl Sørensen, Ph.D., University of Southern Denmark.

Inhalt

Abbildungsverzeichnis vi

Tabellenverzeichnis viii

Vorwort - R x

1 Einleitung 1

1.1 Kapitalkosten in der Unternehmensbewertung - IDW-Verfahren und CAPM 2

1.2 Problemstellung 3

1.3 Forschungsbedarf 6

1.4 Relevanz des Themas 7

1.5 Untersuchungsumfang und Zielsetzung 8

2 Grundlagen: Unternehmensbewertung, Kapitalkosten und Parameterrisiken 11

2.1 Parameterunsicherheit und Parameterrisiko 11

2.2 Unternehmensbewertung 11

2.3 Wertbegriff und Bewertungstheorien 12

2.3.1 Wertbegriff 12

2.3.2 Objektive Unternehmensbewertung 13

2.3.3 Subjektive Unternehmensbewertung 14

2.3.4 Funktionale Unternehmensbewertung 15

2.4 Bewertungsanlässe und Unternehmenswerte 16

2.5 Bewertungsverfahren und Kapitalkosten 17

2.5.1 Einzelbewertungsverfahren 18

2.5.2 Gesamtbewertungsverfahren 19

2.6 Der konzeptionelle Rahmen: Kapitalkostenermittlung als ökonometrischer Prozess 28

2.6.1 Ökonomische Theorie 30

2.6.2 Ökonomisches Modell 30
2.6.3 Ökonometrisches Modell 31
2.6.4 Daten 32
2.6.5 Quantifizierung 33
2.6.6 Kapitalkostenschätzung als ökonometrischer Prozess 33
3 Basiszins 36
3.1 Einleitung: Basiszins 36
3.2 Zinsstruktur und Anleihen 37
3.2.1 Empirische Daten 38
3.2.2 Renditen, Termin- und Spotzinssätze 38
3.2.3 Anleihen und Barwerte 40
3.2.4 Implizite Terminzinsen 41
3.3 Verfahrensstandard: Die Svensson Methode 45
3.3.1 Ökonometrisches Model: Nelson-Siegel-Svensson 46
3.3.2 Modellanpassung 48
3.3.3 Schätzfehler 51
3.4 Statistische Inferenz für die Zinsstruktur: Delta-Methode 51
3.4.1 Delta-Methode und Taylor Reihenentwicklung 52
3.4.2 Delta-Methode und Stichprobenverteilung der Svensson Zinsstruktur 54
3.5 Anwendung der Delta-Methode auf die Deutsche Zinsstruktur 55
3.6 R-Code Basiszins 60
4 Betafaktoren 64
4.1 Einleitung: CAPM und Betafaktoren 64
4.2 Ökonomische Theorie: CAPM und Betafaktoren 64
4.2.1 Portfoliotheorie 65
4.2.2 CAPM 65

4.3 Verfahrensstandard: Betafaktoren nach IDW 67
4.3.1 CAPM und Marktmodell nach IDW 67
4.3.2 Marktmodell 69
4.3.3 Daten 70
4.3.4 Quantifizierung der Betafaktoren mittels Kleinste-Quadrate Regression 71
4.4 Statistische Inferenz für Betafaktoren 73
4.4.1 Modell: CAPM und Marktmodell 73
4.4.2 Daten 73
4.4.3 Spezifikation: Inferenzstatistik 75
4.5 Die Beurteilung von Betafaktoren mittels statistischer Inferenz 79
4.5.1 Bestimmtheitsmaß 79
4.5.2 Signifikanztest 81
4.5.3 Konfidenzintervalle und Standardfehler 82
4.6 Das CAPM und Betafaktoren in der Diskussion 84
4.7 Anwendung: Beta-Schätzung 86
4.8 R-Code Beta 88
5 Marktrisikoprämie 89
5.1 Einleitung: Marktrisikoprämie 89
5.1.1 Marktrisikoprämie in der Unternehmensbewertung 89
5.1.2 Theorie zur Marktrisikoprämie 91
5.2 Praktische Ermittlung der Marktrisikoprämie 91
5.2.1 Ökonomisches und ökonometrisches Modell 92
5.2.2 Daten 93
5.2.3 Schätzfunktion 94
5.3 Statistische Inferenz für die Marktrisikoprämie 94
5.3.1 Ökonomisches und ökonometrisches Modell 96

5.3.2 Daten und Stichprobe 97
5.3.3 Schätzfunktion: Arithmetisches Mittel vs. geometrisches Mittel 104
5.3.4 Schätzfunktion: Stichprobenverteilung der Marktrisikoprämie 106
5.4 Anwendung: Schätzung der Deutschen Marktrisikoprämie 108
5.4.1 Ökonomisches und Ökonometrisches Modell 109
5.4.2 Schätzfunktion: Stichprobenverteilung der Marktrisikoprämie 115
5.4.3 Marktrisikoprämie als Differenz von gepaarten Mittelwerten 116
5.4.4 Empirische Stichprobenverteilung der Marktrisikoprämie 117
5.5 R-Code Marktrisikoprämie 119
6 Verteilung von Kapitalkosten 124
6.1 Einleitung 124
6.2 Verteilungen: Basiszins, Beta und Marktrisikoprämie 125
6.2.1 Basiszins 126
6.2.2 Betafaktor 126
6.2.3 Marktrisikoprämie 126
6.3 Multivariate Verteilung 127
6.3.1 Momente 127
6.3.2 Stichprobenverteilung von Kapitalkosten 130
6.3.3 Abhängigkeit der Stichprobenverteilung von der Beta-Schätzung 137
6.3.4 Abhängigkeit der Stichprobenverteilung von Basiszins und Marktrisikoprämie 144
6.4 Statistische Inferenz für Kapitalkosten 144
6.4.1 Hypothesentests für Kapitalkostenschätzer 144
6.4.2 Konfidenzintervalle für Kapitalkostenschätzer 146
6.4.3 Abhängigkeit der Hypothesentests und Konfidenzintervalle von der Beta-Schätzung 146
6.5 Schätzunsicherheit von Kapitalkosten und Unternehmensbewertung 151

6.6 R-Code Verteilung von Kapitalkosten 153

7 Schluss 163

Literatur 164

Anhang 173

Erklärung an Eides Statt xi

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Problem und Forschungsbeitrag. 2

Abbildung 2: Parameter der Kapitalkosten und theoretische Modelle nach IDW 3

Abbildung 3: Verfahren für die Unternehmensbewertung. 18

Abbildung 4: Standardisierte Vorgehensweise in der Ökonometrie. 30

Abbildung 5: Standardisierte Kapitalkostenermittlung als ökonometrischer Prozess 34

Abbildung 6: Struktureller Aufbau. Schätzmethoden und statistische Inferenz als Mittel zur Bemessung von Parameterrisiken. 35

Abbildung 7: Typische Termin- und Zinsstrukturkurve für den 12.09.2012 in Deutschland. 45

Abbildung 8: Komponenten der Svensson Terminstruktur für den 12.09.2012. 47

Abbildung 9: Svensson-Zinsstruktur und empirische Renditen von Bundesanleihen, Bundesschatzanweisungen und Bundesobligationen am 09.01.2014 56

Abbildung 10: Standardfehler der Zinsstruktur für Laufzeiten bis zu 30 Jahren 58

Abbildung 11: Zinsstruktur, empirische Renditen und 95 %-Konfidenzbänder 59

Abbildung 12: Die Wertpapierlinie als grafische Lokalisation der Gleichgewichtspreise in Abhängigkeit der wertpapierspezifischen Betafaktoren. 66

Abbildung 13: Drei Stichprobenverteilungen für Betafaktoren und 95 %-Konfidenzintervalle 87

Abbildung 14: Stehle-DAX und Signifikanzen für Strukturbrüche gemäß Chow-Test für die Perioden 1949-2003 und 1949-2011 114

Abbildung 15:. Empirische Kerndichte und Stichprobenverteilung der geschätzten Marktrisikoprämie mit 95 %-Konfidenzintervall 117

Abbildung 16: Statistische Inferenz für Kapitalkosten 124

Abbildung 17: Dichtefunktion von Kapitalkostenschätzern 133

Abbildung 18: QQ-Plot für die Verteilung von Kapitalkosten gegen die Normalverteilung 134

Abbildung 19: Kerndichte der Monte-Carlo-Simulation von Kapitalkostenschätzungen. 200.000 Wiederholungen 136

Abbildung 20: Verteilungsfunktion von Kapitalkostenschätzern. 137

Abbildung 21: Dichtefunktionen von Kapitalkostenschätzern für signifikante Betafaktoren mit Erwartungswerten für Beta von 0,5, 1 und 1,5 139

Abbildung 22: Dichtefunktionen von Kapitalkostenschätzern 142

Abbildung 23: Kritische Bereiche der Kapitalkostenschätzer für signifikante Betafaktoren mit Betafaktoren von 0,5, 1 und 1,5. 148

Abbildung 24: Kritische Bereiche von Kapitalkostenschätzern für Betafaktoren von eins .. 150

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Funktionen eines Wirtschaftsprüfers bei der Bewertung von Unternehmen..... 16

Tabelle 2: Bewertungsanlässe nach dominierten Situationen und Neustrukturierungen……17

Tabelle 3: Cashflows der Ertragswert- und DCF-Verfahren als zu diskontierende Erfolgsgrößen. 23

Tabelle 4: Methode zur Berechnung der Zinsstruktur nach Nelson-Siegel-Svensson. 50

Tabelle 5: Geschätzte Parameter der Zinsstruktur und ihre Standardfehler für den 09.01.2014. 57

Tabelle 6: Komponenten der Wertpapierlinie im CAPM. 67

Tabelle 7: Komponenten der Varianzzerlegung von Wertpapierrenditen in der Regression des Marktmodells. 75

Tabelle 8: Drei Situationen für Beta-Schätzungen. Beta = 1 und drei Standardfehler der Beta-Schätzung 87

Tabelle 9: Historische Schätzungen von Marktrisikoprämien in Deutschland 92

Tabelle 10: Verzerrungen des arithmetischen und geometrischen Mittels historischer Renditen für den Aufzinsungs- und Abzinsungsfall. 105

Tabelle 11: Arithmetisches Mittel und Standardfehler der Jahresrenditen der Marktrisikoprämie sowie des CDAX und REXP. 109

Tabelle 12: Augmented Dickey-Fuller Test für Zeiträume von 1955-2011……111

Tabelle 13: Chow Test, F-Statistiken und p-Werte für den logarithmierten Stehle-Dax. Ausschnitt von untersuchten Strukturbrüchen von 1949 – 1982 113

Tabelle 14: Varianzen und Kovarianzen der Marktrisikoprämie als Differenz von Mittelwerten. 116

Tabelle 15: Erwartungswerte, absolute und relative Standardabweichungen und Schiefe von Kapitalkosten-Schätzern für signifikante Betafaktoren mit Erwartungswerten für Beta von 0,5, 1 und 1,5. 140

Tabelle 16: Standardfehler und Schiefe für Kapitalkosten mit erwarteten Betas von eins. 143

Tabelle 17: Konfidenzintervalle für signifikante Betafaktoren mit Erwartungswerten für Beta von 0,5, 1 und 1,5. 149

Tabelle 18: Konfidenzintervalle für Kapitalkosten mit erwarteten Betas von eins..... 151

Vorwort - R

In der vorliegenden Arbeit wird die Programmiersprache R verwendet. Der R-Code ist so programmiert, dass das angefügte Skript im Ganzen ausgeführt werden kann. Die Berechnungen und das Erstellen von Grafiken werden in der Reihenfolge durchgeführt, wie sie in dieser Arbeit vorzufinden sind.

Die benötigten Daten sind in zwei Dateien enthalten:

```
stehle_dax.txt
Nelson Siegel Svensson.txt
```

Der R-Code befindet sich in der folgenden Datei:

```
R Code Dissertation Vollmer.R
```

An den folgenden Stellen zu Beginn des R-Codes müssen die Dateipfade des Speicherortes dieser mitgelieferten Dateien angegeben sein:

```
#Packages installieren,laden, Daten einlesen und extrahieren
install.packages("msm")
library(msm)
install.packages("tseries")
library(tseries)

#Daten einlesen und extrahieren
rm(list=ls())
daxdata<- read.table(file = "d:/sicherung10/Diss/Dissertation
Vollmer/R Daten/stehle_dax.txt", sep = "\t",dec=",",
header=TRUE)
anleiherenditen<- read.table(file =
"d:/sicherung10/Diss/Dissertation Vollmer/R Daten/Nelson
Siegel Svensson.txt", sep = "\t",dec=",", header=TRUE)
```

Zum Ausführen des R-Codes eignet sich für die vorliegende Arbeit insbesondere die Software RStudio und kann unter der folgenden Adresse heruntergeladen werden:

https://www.rstudio.com/products/RStudio/#Desktop

1 Einleitung

Wird ein Unternehmenswert als Barwert mittels Kapitalwertmethode errechnet, stellen Kapitalkosten die Kalkulationszinsen dar, mit denen zukünftige Zahlungsströme abgezinst werden.

In der Kapitalmarkttheorie ist das ‚Capital Asset Pricing Modell' (CAPM) zur Erklärung von Kapitalkosten etabliert. In der Unternehmensbewertung ist die Anwendung des CAPM insbesondere durch die fachtechnischen Normen des *Instituts der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e.V*. (IDW) vorherrschend.

Die verfügbaren Methoden zur Kapitalkostenermittlung führen in der Anwendung zu Ergebnissen, die mit Unsicherheit behaftet sind. Hieraus können ökonomisch unvorteilhafte Entscheidungen resultieren.[1]

Thema der vorliegenden Dissertation ist die Unsicherheit von Kapitalkosten in der betriebswirtschaftlichen Unternehmensbewertung. Zur Beurteilung von Kapitalkosten wird eine Methodik zur Bemessung der Unsicherheit mittels statistischer Inferenz vorgeschlagen und angewandt.

Es werden darauf aufbauend Fragen danach beantwortet, wie Parameterrisiken von Kapitalkosten bemessen und mittels statistischer Inferenz beurteilt werden können, wodurch die Parameterrisiken beeinflusst sind und was dies für die Unternehmensbewertung bedeutet.

Hierzu wird eine neue Wahrscheinlichkeitsfunktion zur Bemessung der Schätzunsicherheit von Kapitalkosten hergeleitet und analysiert.

[1] Gleißner, W. (2009): *Kapitalmarktorientierung statt Wertorientierung: Volkswirtschaftliche Konsequenzen von Fehlern bei Unternehmens- und Risikobewertungen*; WSI Mitteilungen 6/2009, S. 312 f.

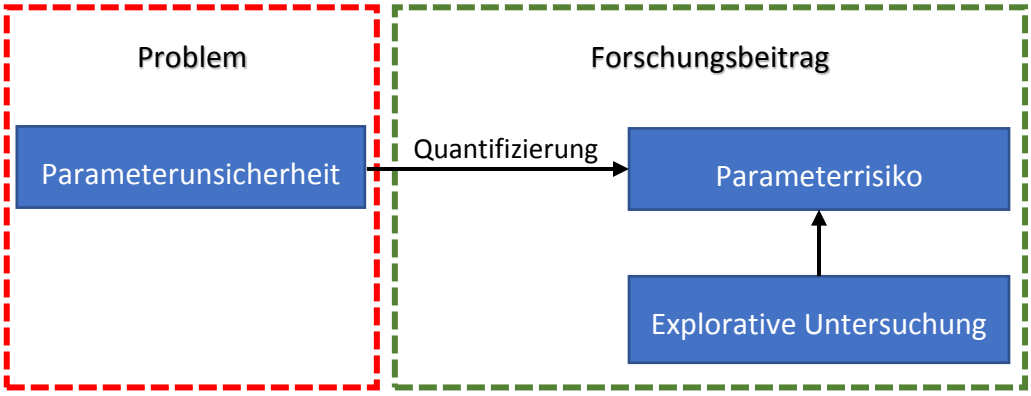

Abbildung 1: Problem und Forschungsbeitrag. Quelle: Eigene Darstellung.

1.1 Kapitalkosten in der Unternehmensbewertung - IDW-Verfahren und CAPM

Im Rahmen der Unternehmensbewertung gelten die Verlautbarungen vom Berufsverband der Wirtschaftsprüfer IDW als Standard für öffentliche Verfahren der Unternehmensbewertung in der derzeitigen Fassung IDW S1 i.d.F. 2008.[2] Diese fachtechnischen Normen fundieren, inwieweit wissenschaftliche Erkenntnisse in praktische Verfahren der Unternehmensbewertung einzubeziehen sind.[3] Nach den IDW-Verlautbarungen kann das CAPM für die Ermittlung von Kapitalkosten herangezogen werden.[4]

Die Kapitalkosten $E[r_i]$ setzen sich dem CAPM zufolge aus einem Basiszinssatz und einer Risikoprämie zusammen.[5] Während der Basiszinssatz r_f aus einer sog. risikolosen Anlageform abgeleitet wird, besteht die Risikoprämie aus einem unternehmensspezifischen Betafaktor β_i und einer landesspezifischen Marktrisikoprämie $E[r_{M,t}] - r_f$:[6]

---

[2] Vgl. Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e. V. (2008): *IDW Standard: Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen (IDW S1 i.d.F. 2008)*; IDW Verlag, Düsseldorf.

[3] Vgl. Stehle, R., (2004): *Die Festlegung der Risikoprämie von Aktien im Rahmen der Schätzung des Wertes von börsennotierten Kapitalgesellschaften*; Die Wirtschaftsprüfung, Heft 17 / 2004, S. 908.

[4] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 19 Tz. 92.

[5] Vgl. ebd.

[6] Ballwieser, W. (2011): *Unternehmensbewertung – Prozeß, Methoden und Probleme*; 3. Auflage, Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, S. 97.

$$E[r_i] = r_f + \beta_i \cdot \left(E[r_M] - r_f\right).$$

Zur Begründung eines kapitalmarktorientierten Modells im IDW Standard S1 wird ausgeführt, dass sich die Zinszuschlagsmethode auf empirisch beobachtbares Verhalten stützen kann und eine marktorientierte Vorgehensweise einen Vorteil darstellt.[7]

Ausgehend von den Verlautbarungen im IDW-Standard S1 werden die Methoden durch Veröffentlichungen des *Fachausschusses Unternehmensbewertung* (FAUB) des IDW weiter konkretisiert. Danach erfolgt in der Anwendung eine Schätzung der einzelnen Größen anhand theoretischer Modelle, die mit empirischen Marktbeobachtungen spezifiziert werden. Für den Basiszins wird die Zinsstruktur nach der Svensson-Methode herangezogen, Betafaktoren werden durch das Marktmodell mittels historischer Aktien- und Marktrenditen per Regression berechnet und für die Marktrisikoprämie kommt eine Zeitreihe historischer Index- und Anleiherenditen zum Einsatz. Die zu ermittelnden Parameter der Kapitalkosten und ihre theoretischen Modelle sind in Abbildung 2 dargestellt.

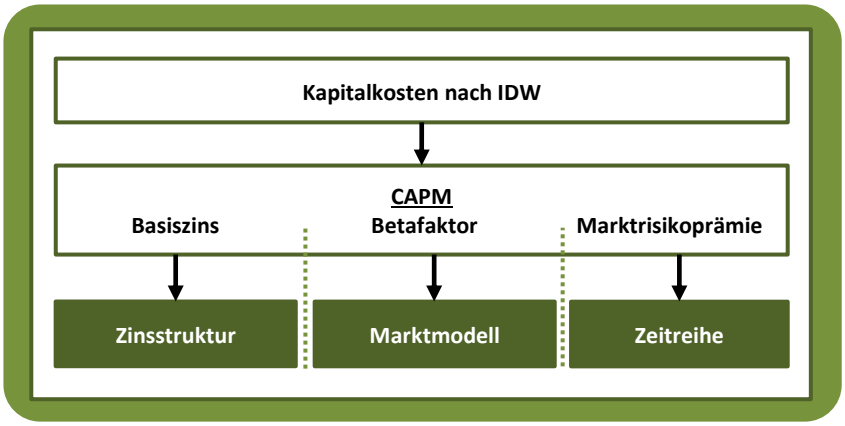

Abbildung 2: Parameter der Kapitalkosten und theoretische Modelle nach IDW. Quelle: Eigene Darstellung.

1.2 Problemstellung

In der Unternehmensbewertung stellen die Kapitalkosten den Kapitalisierungszinssatz dar, mit dem ein Unternehmenswert als Barwert prognostizierter zukünftiger Zahlungsströme ermittelt wird. Die Kapitalkosten haben daher maßgeblichen Einfluss auf resultierende

[7] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 19 Tz. 90.

Unternehmenswerte.[8] Die Zulässigkeit der vom IDW vorgeschlagenen Methodik zur Ermittlung von Kapitalkosten wird in der wissenschaftlichen und anwendungsorientierten Literatur teilweise kontrovers diskutiert.

Die im CAPM recht einfache funktionale Beschreibung von Risikozuschlägen in Form einer linearen Funktion lässt sich aufgrund der empirisch verfügbaren Marktbeobachtungen in der Anwendung bei Bewertungsverfahren nicht problemlos spezifizieren.

Die Kapitalkostenbestimmung bringt eine Unsicherheit mit sich, die in wissenschaftlichen Veröffentlichungen breit diskutiert und kritisiert wird.[9] So ist nach Ballwieser (2002) der Kapitalisierungszinssatz in der Unternehmensbewertung die umstrittenste und gleichzeitig einflussreichste Größe:

> „Keine Größe scheint bei der Bewertung von Unternehmen in der Praxis so umstritten zu sein wie der Kalkulationszinsfuß. […] Sein Hebeleffekt ist bekannt und berüchtigt: Schon geringe Verminderungen des Zinssatzes können den Wert überproportional erhöhen; Erhöhungen des Zinssatzes senken den Unternehmenswert. Diese Effekte machen ihn bei Parteien, die Einfluss auf den Wert nehmen wollen, so beliebt.“[10]

Weiterhin wird die Aussagefähigkeit historischer Marktdaten für Prognosezwecke angezweifelt. Nach Dörschel et al (2008) führt eine in den IDW-Verlautbarungen mangelnde

---

[8] Vgl. Gleißner, W. (2005): *Kapitalkosten: Der Schwachpunkt bei der Unternehmensbewertung und im wertorientierten Management*; Finanz Betrieb, Heft 4 / 2005, S. 217-229.

[9] Vgl. für die Diskussion der Beta-Schätzung: Knoll, L., Erhardt, J., Bohnet, F. (2007): *Kleines Beta – kleines Bestimmtheitsmaß – großes Problem;* CFO aktuell, S. 210-213. Vgl. Franken, L.; Schulte, J. (2010): *Beurteilung der Eignung von Betafaktoren mittels R² und t-Test: Ein Irrweg? – Auch eine Replik zu Knoll*; Die Wirtschaftsprüfung, Heft 22 / 2010, S. 1110-1116.

Vgl. für die Diskussion des Basiszinses: Gebhardt, G., Daske, H. (2004): *Zukunftsorientierte Bestimmung von Kapitalkosten für die Unternehmensbewertung*; Working paper series / Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt am Main, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften : Finance & Accounting 134, S. 1-9: [http://www.econstor.eu/dspace/handle/10419/23399 (05.09.2012)].

Vgl. für die Diskussion der Marktrisikoprämie: Wenger, E. (2005): *Verzinsungsparameter in der Unternehmensbewertung – Betrachtungen aus theoretischer und empirischer Sicht;* Die Aktiengesellschaft, Jg. 50, Sonderheft 2005, S. 9-22.

[10] Vgl. Ballwieser, W. (2002): *Der Kalkulationszinsfuß in der Unternehmensbewertung – Komponenten und Ermittlungsprobleme*; WPg 2002, S. 736-743.

Konkretisierung der kapitalmarktorientierten Methodik zu einer Diskussion um die Aussagekraft vergangener Risikoprämien für zukünftige Entwicklungen.[11]

In einem relativ aktuellen Bewertungsgutachten zur Ermittlung einer Barabfindung im Rahmen eines Minderheitenausschlusses von Aktionären heißt es zur Anwendbarkeit des CAPM:

> „Die grundsätzliche Anwendung des CAPM für Zwecke der Ermittlung des Risikozuschlags ist in Literatur und Rechtsprechung nicht unumstritten. In der Rechtsprechung wird vereinzelt unter Hinweis auf die zahlreichen grundsätzlichen Bedenken gegen das Modell die Anwendung des CAPM abgelehnt. Begründet wird dies unter anderem damit, dass der Kapitalmarkt aufgrund seiner Unvollkommenheit keine zuverlässigen Informationen über den zukünftigen Risikoumfang eines Unternehmens biete."[12]

Die Kritiken bedeuten für die Unternehmensbewertung, dass zur Anwendung kommende Ergebnisse einer Unsicherheit unterliegen und der genannten Kritik gleichermaßen ausgesetzt sind.

In der Literatur werden verschiedene Alternativen diskutiert, die mögliche Verbesserungen für aufgezeigte Mängel der Standardmethoden bieten. Gebhardt und Daske (2004) haben eine zukunftsorientierte Vorgehensweise für die Ermittlung von Risikoprämien vorgeschlagen, die auf Zinsstrukturkurven und Analystenprognosen für die Kapitalkostenermittlung basiert.[13]

Es stellt sich die Frage, wie mit dieser Unsicherheit umzugehen ist. Obwohl verschiedene in der Literatur vorzufindende Alternativen die Unsicherheit reduzieren und zu genaueren Ergebnissen führen könnten, haben sie sich nicht als obligatorischer Standard durchgesetzt und werden z.B. nur bei besonderen Bewertungsanlässen angewandt. Ausgangspunkt der

---

[11] Vgl. Dörschel, A., Franken, L., Schulte, J. & Brütting, C. (2008): *Ableitung CAPM-basierter Risikozuschläge bei der Unternehmensbewertung – eine kritische Analyse ausgewählter Problemkreise im Rahmen von IDW S 1 i.d.F. 2008*; Die Wirtschaftsprüfung, Heft 24 / 2008, S. 1152 f.

[12] Vgl. Stüttgen & Haeb AG, Wirtschaftsprüfungsgesellschaft (2012): *Bericht über die Prüfung der Angemessenheit der Barabfindung gemäß § 327c Abs. 2 Satz 2 AktG im Verfahren der Übertragung der Aktien der Minderheitsaktionäre der Utimaco Safeware AG Oberursel auf die Sophos Holdings GmbH Wiesbaden*; S. 59.

[13] Vgl. Gebhard, G., Daske, H. (2004), S. 6.

vorliegenden Arbeit ist der Umstand, dass in der Anwendung einer IDW-basierten Kapitalkostenschätzung Ergebnisse hingenommen werden müssen, die mit Unsicherheit behaftet sind.

1.3 Forschungsbedarf

Es herrscht also ein Forschungsbedarf, der sich aus der folgenden Zusammenstellung der in der vorhandenen Forschungsliteratur diskutierten Lösungsansätze ergibt, und dem der weitere Verlauf der Arbeit gerecht werden soll.

Ballwieser (2011) sieht für die Komponenten Basiszins, Marktrisikoprämie und Betafaktor einen gemeinsamen Bedarf zur Bestimmung der Aussagekraft historischer Beobachtungen: „Deren vergangene Höhe lässt sich erheben, über ihre zukünftige Entwicklung sind Wertungen nötig.“[14] Für die Aussagefähigkeit von historischen Renditen als wesentliche Kapitalmarktinformation besteht hiernach ein Bedarf nach einer Wertung in der CAPM-basierten Methodik.

Die derzeitige Standard Methodik zur praktischen Anwendung der theoretischen Modelle bedingt zudem zusätzliche Prämissen, worin Franken und Schulte (2010) weiteren Klärungsbedarf sehen:

> „[…] Dass diese Prämissen im Einzelfall erfüllt sind, kann nicht ohne weiteres bejaht werden; eine solche Beurteilung bedarf ihrerseits geeigneter Operationalisierung.“[15]

Für die Wertung ermittelter Ergebnisse besteht nach diesen Ausführungen ein Bedarf nach einer geeigneten Operationalisierung. Schließlich ist die Notwendigkeit der Angabe einer messbaren Unsicherheit der Bewertungsergebnisse in Form von zu begründenden Intervallbreiten den IDW-Verlautbarungen direkt zu entnehmen:

> „Im Bewertungsgutachten muss der Wirtschaftsprüfer einen eindeutigen Unternehmenswert bzw. eine –wertspanne nennen und begründen.“[16]

---

[14] Ballwieser, W. (2011), S. 223.
[15] Vgl. Franken, L.., Schulte, J. (2010), S. 1112.
[16] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 34 f. Tz. 175.

Statistische Kriterien zur Beurteilung von Schätzergebnissen scheinen weitgehend anerkannt zu sein, stehen jedoch vereinzelt in der Diskussion. Knoll et al (2007) kritisieren, dass in der Praxis von Abfindungsfällen angegebene statistische Grenzwerte zur Beurteilung der Schätzgenauigkeit „ohne entsprechende Quellen gemachte Feststellungen“ [17] seien.

Die aktuelle Forschungsdebatte offenbart, dass die Ermittlung von Kapitalkosten mit einer erheblichen Unsicherheit behaftet ist. Um die Zuverlässigkeit der Methoden und Ergebnisse objektiv beurteilen zu können, bedarf es einer geeigneten Operationalisierung der Unsicherheit. Hieraus wird ein Bedarf nach einer Methodik zur quantitativen Bemessung der Unsicherheit abgeleitet.

1.4 Relevanz des Themas

Die Kapitalkosten in der Unternehmensbewertung sind in dieser Arbeit der Betriebswirtschaftslehre zuzuordnen. Allerdings kann bei der Deutung des Begriffs „Kapitalkosten“ nach Stehle zwischen der Volks- und Betriebswirtschaftslehre differenziert werden.[18]

In der betriebswirtschaftlichen Theorie über Finanzierung und Investition stellen Kapitalkosten eine Mindestrendite dar, die Investitionen erzielen sollten.[19] Fehlerhaft bestimmte Kapitalkostensätze führen zu suboptimalen Investitionsentscheidungen. Weiterhin sind Kapitalkosten in der Unternehmenssteuerung „für eine wertsteigernde Allokation des Kapitals […] maßgeblich.“[20] Werden Kapitalkosten unzureichend erfasst, bleiben wertsteigernde Investitionen aus, was sich wiederum negativ auf das Wachstum von Unternehmen und Volkswirtschaft auswirkt.[21]

In der volkswirtschaftlichen Investitionstheorie spiegeln Kapitalkosten den Gebrauch des Produktionsfaktors Kapital wider. Ökonomische Konsequenzen einer Fehlbeurteilung wären

---

[17] Vgl. Knoll, L., Erhardt, J., Bohnet, F. (2007), S. 211.

[18] Vgl. Stehle, R. (1994): *Die betriebs- und die volkswirtschaftliche Verwendung des Begriffs Kapitalkosten*; in Betriebswirtschaftslehre und Unternehmensforschung, Helmut Wagner (Hrsg.), S. 150-168, hier: S. 150 f.

[19] Vgl. ebd, S. 157.

[20] Gleißner, W. (2009), S. 314.

[21] Vgl. ebd.

Fehlallokationen dieses Produktionsfaktors,[22] woraus suboptimale Wohlfahrtsergebnisse folgen.

Das Ausmaß der Unsicherheit geschätzter Kapitalkosten beeinflusst die Informationsqualität bei Entscheidungsprozessen. Werden Parameterunsicherheiten in messbare Parameterrisiken überführt, bringt dies eine erhöhte Informationsqualität mit sich. Eine objektive Bemessung über die Zuverlässigkeit der ermittelten Kapitalkosten ist daher ein entscheidungsrelevanter Informationsbeitrag, der durch eine geeignete Informationsverarbeitung seitens der Akteure ein ökonomisches Wohlfahrtsergebnis verbessern kann.

1.5 Untersuchungsumfang und Zielsetzung

Ausgehend von der Problemstellung der Unsicherheit praktisch ermittelter Kapitalkosten ist die generelle Zielsetzung der vorliegenden Arbeit die systematische Entwicklung einer wissenschaftlich fundierten Methodik zur Quantifizierung von Parameterrisiken in der Kapitalkostenermittlung.

Die ausgehende Problematik hat ihren Ursprung in der IDW-standardisierten Methodik, die als obligatorisch für Bewertungsverfahren angenommen wird. Daher bilden die verlautbarten Methoden den Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit betrachteten Verfahren zur Ermittlung von Kapitalkosten.

Die Arbeit grenzt sich von Diskussionen um die Gültigkeit der IDW-Methodik an sich ab, welche z.B. auf Kritiken an der Theorie des CAPM oder anderen grundlegenden Theorien beruhen. Eingegrenzt wird auf die Unsicherheit in Form einer Ungenauigkeit, die mit der Anpassung der theoretischen Modelle an empirische Marktbeobachtungen für die Kapitalkostenkomponenten entsteht. Diese Ungenauigkeit wird im weiteren auch ‚Schätzunsicherheit' bezeichnet.

Eine erste Aufgabenstellung ergibt sich aus den Anforderungen, die eine Methodik zur Erfassung der Parameterrisiken erfüllen sollte. Die vorgeschlagene Methodik soll für den Zweck der Bemessung von Schätzunsicherheit Vollständigkeit und Willkürfreiheit

[22] Vgl. Stehle, R. (1994), S. 151 f.

beanspruchen können. Durch eine ökonometrisch fundierte Konzeption können diese Anforderungen erfüllt werden, da die Ökonometrie als ökonomischer Anwendungsbereich der Statistik die grundlegende Wirtschaftswissenschaft ist, die die in dieser Arbeit betrachtete Konfrontation von ökonomischen Theorien mit empirischen Beobachtungen umfasst.[23] Die erste Teilaufgabe lautet daher:

1. *Konzeptualisierung der Entwicklung einer Methodik zur Erfassung und Bemessung von Parameterrisiken durch eine ökonometrische Perspektivierung.*

In einem zweiten Schritt wird aus den Verlautbarungen des IDW ein standardisiertes Verfahren zur Kapitalkostenermittlung aufgearbeitet und dargestellt. Dazu werden neben Veröffentlichungen des IDW auch Forschungen zur Unternehmensbewertung sowie veröffentlichte Bewertungsfälle herangezogen, um so einen hinreichenden Grad der Methoden- und Modellkonkretisierung zu erzielen.

Die zweite Teilaufgabe lautet also:

2. *Aufarbeitung und Darstellung einer hinreichend standardisierten IDW Methodik zur Kapitalkostenbestimmung.*

Zusätzlich wird für die erfassten Teilmethoden der Kapitalkostenermittlung jeweils eine Methode zur Bemessung der Parameterrisiken ausgearbeitet. Im Vordergrund stehen hierbei die Stichprobenverteilungen, die eine Schätzunsicherheit aufgrund der Anpassung empirischer Kapitalmarktbeobachtungen an theoretische Modelle beschreiben. Die dritte Teilaufgabe lautet:

3. *Ausarbeitung einer Methodik zur Bemessung von Parameterrisiken der Komponenten Basiszins, Betafaktor und Marktrisikoprämie.*

Die Schätzunsicherheit von Kapitalkosten ergibt sich aus einem Zusammenwirken der einzelnen Parameterrisiken aus den Teilmethoden der Kapitalkostenbestimmung. Um die Unsicherheit von Kapitalkosten zu bemessen, werden schließlich die jeweiligen Parameterrisiken zusammengeführt. Die vierte Teilaufgabe lautet:

[23] Vgl. von Auer, L. (2011): *Ökonometrie, eine Einführung*; 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, S. 3.

4. *Zusammenführung der Parameterrisiken zur Bemessung der Schätzunsicherheit von Kapitalkosten.*

Zum Abschluss werden die gewonnenen Ergebnisse zur quantitativen Bemessung der Schätzunsicherheit von Kapitalkosten hinsichtlich ihrer Einflussfaktoren und der Bedeutung für die Unternehmensbewertung explorativ untersucht:

5. *Explorative Untersuchung der quantifizierten Schätzunsicherheit von Kapitalkosten.*

2 Grundlagen: Unternehmensbewertung, Kapitalkosten und Parameterrisiken

An dieser Stelle soll das Thema zunächst in den wissenschaftlichen Kontext einordnet werden. Dazu wird die Basistheorie zur Unternehmensbewertung dargestellt, woraus sich die praktischen Verfahren ergeben, in denen geschätzte Kapitalkosten zum Einsatz kommen. Vorher werden aber die in dieser Arbeit häufig verwendeten Begriffe ‚Risiko' und ‚Unsicherheit' unterschieden.

2.1 Parameterunsicherheit und Parameterrisiko

Eine Differenzierung des Begriffs ‚Unsicherheit' für die Wirtschaftswissenschaften liefert Frank Knight (2012). Dieser unterscheidet nach einer Messbarkeit anhand von Wahrscheinlichkeiten. Liegen über Wahrscheinlichkeiten logische (a priori) oder empirische Kenntnisse vor, kann der Begriff ‚Risiko' verwendet werden. Einer Unsicherheit kann bei Risikosituationen z.B. mittels Versicherung begegnet werden, da das Ausmaß der Unsicherheit bekannt ist. Sind Wahrscheinlichkeiten nicht ausreichend quantifiziert, spricht Knight von echter Unsicherheit.[24]

Bei Parameterunsicherheit ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht ausreichend bekannt, sodass auch die Möglichkeit der statistischen Inferenzbetrachtung entfällt. Können nun für die ermittelten Parameter der Kapitalkosten Wahrscheinlichkeiten objektiv bestimmt werden, z.B. mittels Stichprobenverteilungen, wird in der vorliegenden Arbeit der Begriff ‚Parameterrisiko' verwendet.

2.2 Unternehmensbewertung

Eine kompakte Beschreibung der praktischen Anforderungen an die Unternehmensbewertung sowie ihrer Funktionen liefert Peemöller (2012):

[24] Vgl. Knight, F. H. (2012): *Risk, Uncertainty and Profit*; Dover Publications, New York.

„Die Unternehmensbewertung dient dazu, potentielle Preise für ganze Unternehmen oder Unternehmensteile zu ermitteln. Dabei sind alle Erfolgspotentiale des bestehenden Unternehmens und alle darauf einwirkenden Einflüsse zu berücksichtigen. In der Theorie, in der Rechtsprechung und in der Praxis haben sich Ertragswerte – und dazu zählen auch die Discounted Cashflow-Methoden – als Werte herausgebildet, welche die Anforderungen erfüllen, die an die Unternehmensbewertung gerichtet werden".[25]

Als Anforderungen an die Unternehmensbewertung werden 1. Zukunftsbezogenheit genannt, da künftige Erträge von Investoren vergütet werden; 2. Nutzenbewertung, da zwar finanzielle Ziele zu Grunde liegen, die Nutzenbeträge aber zu berücksichtigen sind; 3. Chancen und Risiken, um die Unsicherheit mit Prognoseverfahren zu erfassen und 4. ein Investorenbezug, da nur aus Investorensicht ein relevanter Wert abgeleitet werden kann.[26]

Die zweckorientierte Definition und die genannten Anforderungen an die Unternehmensbewertung finden sich in der Literatur als Begründungen für die gebräuchlichen Verfahren Discounted Cashflow- und Ertragswertmethode wieder.[27]

2.3 Wertbegriff und Bewertungstheorien

2.3.1 Wertbegriff

Eine Diskussion um den Wertbegriff kann auch in dieser Arbeit nicht ausbleiben, wird aber im Verhältnis zu anderen Darstellungen in der Literatur recht knapp gehalten. Die maßgebende Frage ist, was als Wert angesehen werden kann, wie die Begriffe ‚Wert' und ‚Preis' zusammenspielen und wie sich dies schließlich in den Kapitalkosten widerspiegelt.

Die in der Betriebswirtschaftslehre dem Begriff ‚Wert' bevorzugte Bezeichnung ‚Bewertung' wird als Ergebnis eines Bewertungsverfahrens verstanden. Ein ‚Wert' beruht auf einem Wertesystem, das wiederum durch individuelle Wertvorstellungen konstituiert wird und u.a.

---

[25] Vgl. Peemöller, V. H. (2012): *Praxishandbuch der Unternehmensbewertung*; 5. Auflage; NWB Verlag, Herne, S. 3.

[26] Vgl. ebd.

[27] Eine Zukunftsbezogenheit sowie die Berücksichtigung von Chancen und Risiken sind in dem Standard IDW S1 i.d.F. 2008 insbesondere in den Ausführungen zur DCF- und Ertragswertmethode durchweg vorzufinden.

auf Konventionen beruht. Werturteile sind daher persönliche und keine wissenschaftlichen Erkenntnisse und das jeweilige Wertesystem bestimmt den übergeordneten Zweck, für den der Begriff ‚Wert' oder ‚Bewertung' gebraucht wird.[28]

Die Beurteilung ökonomischer Werte beruht dagegen nicht auf normenbasierten Werturteilen sondern auf Feststellungen rationalen Entscheidens.[29] Die Bestimmung eines Wertes ist die Bemessung eines Bewertungsgegenstandes in Geldeinheiten, die bei gegebenem Informationsstand von jedem nachvollzogen werden kann. Da eine Ökonomie durch eine Knappheit von Gütern und unbegrenzten menschlichen Bedürfnissen charakterisiert ist, resultiert ein ökonomischer Wert aus einem Gebrauchs-, Tausch- oder Ertragswert.[30]

Ein Gebrauchswert ist von einem individuellen Gebrauch abhängig und ein Tauschwert entspricht aufgrund von Angebot und Nachfrage Marktpreisen. Güter, die durch Leistungserstellung Erträge erzielen, besitzen einen Ertragswert, der von der Nutzungsdauer und den zukünftigen Marktentwicklungen der Leistungen abhängig ist. Daher ist ein Unternehmenswert dem Ertragswert zuzuordnen.[31]

Es soll im Folgenden gezeigt werden, wie sich diese Klassifikation des Wertbegriffs in den verschiedenen Bewertungsverfahren widergespiegelt.

2.3.2 Objektive Unternehmensbewertung

Eine objektive Unternehmensbewertung ist unabhängig von den individuellen Wertvorstellungen einzelner Investoren.[32] Der Unternehmenswert ergibt sich nur aus dem Unternehmen selbst und besitzt für alle Individuen eine allgemeine Gültigkeit. Ein Bewertungsverfahren ist damit auch nicht durch einen Bewertungszweck charakterisiert. Der objektiven Werttheorie sind das Substanzwert- und Liquidationswertverfahren zuzuordnen,

[28] Vgl. Peemöller, V. H. (2012), S. 3.

[29] Vgl. ebd. Vgl. Matschke, M. J., Brösel, G. (2013): *Unternehmensbewertung*; 4. Auflage, Springer Gabler, Wiesbaden, S. 6 f.

[30] Vgl. Peemöller, V. H. (2012), S. 3.

[31] Vgl. ebd., S. 4 ff.

[32] Vgl. Matschke, M. J., Brösel, G. (2013), S. 14.

da realisierbare Marktpreise den Wertvorstellungen aller am Markt teilnehmenden Investoren unterliegen und somit einem objektiven Wert entsprechen.[33]

Diese Theorie ist über die Zeit in der Bewertungslehre v. a. aufgrund der Gegenwarts- bzw. Vergangenheitsorientierung in den Hintergrund geraten, auch weil unterschiedliche Wertvorstellungen z.B. bei Verhandlungen zwischen Käufer und Verkäufer unberücksichtigt bleiben.

Es bleibt jedoch festzuhalten, dass das heute vorliegende Verständnis eines ‚objektivierten Unternehmenswertes' zum Teil der objektiven Werttheorie entstammt, der zufolge ein (theoretischer) objektiver Unternehmenswert Ausgangspunkt für einen Bewertungsprozess ist. Diesem Unternehmenswert kommt vor allem Bedeutung bei einer neutralen Gutachterfunktion zu, die in den IDW Verlautbarungen genannt wird.[34] Der Begriff ‚objektivierter Unternehmenswert' ist weiter gefasst als der Begriff ‚objektiver Wert', da nicht nur das Unternehmen an sich, sondern auch dessen Zusammenspiel am Kapitalmarkt z.B. aufgrund von Chancen und Risiken maßgeblich ist.

2.3.3 Subjektive Unternehmensbewertung

Ein nicht zu widerlegendes Verhältnis von einem Bewertungsobjekt und einem interessierten Subjekt liegt der subjektiven Werttheorie zugrunde. Diese beruht auf der Tatsache, dass ein Bewertungsobjekt für verschiedene Individuen unterschiedliche Werte besitzen kann. Bei einer subjektiven Unternehmensbewertung stehen individuelle Interessen der an einer Transaktion beteiligten Investoren im Vordergrund.[35] Dieser Werttheorie kann z.B. der Gebrauchswert zugeordnet werden.[36]

Ein wesentlicher Schritt in dieser Weiterentwicklung der Bewertungstheorie ist die Zukunftsbezogenheit, da künftige Erträge einen Nutzen für alle Investoren darstellen. Hierin liegt auch ein Ursprung des Ertragswertverfahrens. Diese der objektiven Werttheorie

[33] Vgl. ebd., S. 6.

[34] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 5 Tz. 12.

[35] Vgl. Obermeier, T., Gasper, R. (2008): *Investitionsrechnung und Unternehmensbewertung*; Oldenbourg Verlag, München, Wien, S. 150.

[36] Vgl. Peemöller (2012): S. 6 f.

gegensätzliche Werttheorie hat allerdings den Nachteil einer erschwerten objektiven Nachvollziehbarkeit der Bewertung, da individuelle Wertvorstellungen grundlegend sind.[37]

2.3.4 Funktionale Unternehmensbewertung

Die funktionale Werttheorie beruht auf der sog. ‚Kölner Funktionenlehre', die in den 1970er Jahren bezeichnenderweise an der Universität Köln entstand. Wesentlich ist die Zusammenführung von subjektiven Wertvorstellungen mit Elementen der objektiven Werttheorie, die eine nachvollziehbare Allgemeingültigkeit mit sich bringen.

Bei einer funktionalen Unternehmensbewertung sind individuelle Wertvorstellungen aller Investoren Ausgangspunkt. Die Interessen und der Entscheidungsraum der beteiligten Investoren bestimmen die Bewertung. Der Bewertung liegt ein Zweck zugrunde, der sich besonders aus dem Anlass der Bewertung ergibt. Hieraus resultiert eine nachvollziehbare Bewertungsfunktion.[38]

Durch zweckgebundene Bewertungsfunktionen werden subjektive Wertvorstellungen berücksichtigt und durch die Charakteristik einer Bewertungsfunktion ist eine Objektivität gewährleistet, die eine Nachvollziehbarkeit der Unternehmensbewertung mit sich bringt.

Als Hauptfunktionen des Bewerters werden eine Beratungs-, Vermittlungs-, Argumentations- und neutrale Gutachterfunktion genannt, wobei sich die Kategorisierung von Bewertungsfunktionen zwischen denen der Kölner Funktionenlehre und denen der Verlautbarungen IDW S1 teilweise unterscheidet. So wird z.B. die neutrale Gutachterfunktion nur in den Verlautbarungen des IDW genannt.[39]

Die funktionale Werttheorie, in der objektive Werte und subjektive Wertvorstellungen vereint werden, stellt die Basistheorie zu vielen heute in der Praxis obligatorischen Verfahren dar.

---

[37] Vgl. ebd., S. 7.

[38] Vgl. Obermeier, T., Gasper, R. (2008), S. 150.

[39] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 5 Tz. 12.

2.4 Bewertungsanlässe und Unternehmenswerte

In der Literatur besteht nun weitgehend Einigkeit darüber, dass ein Unternehmenswert als zweckgerecht zu verstehen ist.[40] Nach Moxter (1983) etwa „ist der richtige Unternehmenswert jeweils der zweckadäquate."[41] Ausgangspunkt für ein Bewertungsverfahren ist der Bewertungsanlass, der einen Bewertungszweck bestimmt.

In Tabelle 1 sind die im IDW S1 genannten Bewertungsfunktionen und die dazugehörigen Unternehmenswerte dargestellt.

Unternehmenswert	Funktion
Objektivierter Unternehmenswert	Neutraler Gutachter
Subjektiver Entscheidungswert	Berater
Einigungswert / Arbitriumwert	Vermittler und Schiedsgutachter

Tabelle 1: Funktionen eines Wirtschaftsprüfers bei der Bewertung von Unternehmen. Quelle: IDW S1 i.d.F. 2008, S. 5 Tz. 12.

Drukarczyk und Schüler (2009) gliedern Bewertungsanlässe nach dominierten und nicht dominierten Bewertungssituationen. Eine dominierte Situation liegt dann vor, wenn eine an der Transaktion von Unternehmenswerten beteiligte Partei eine Veränderung der Eigentümerstruktur und der Eigentumsverhältnisse ohne die Zustimmung anderer betroffener Parteien durchsetzen kann. In einer nicht dominierten Situation ist dagegen die Zustimmung aller betroffenen Parteien zur Transaktion von Unternehmenswerten notwendig.[42]

Eine Übersicht über die wichtigsten Bewertungsanlässe, ihre Klassifikation nach dominierten Situationen sowie der Neustrukturierung von Eigentumsrechten sind in Tabelle 2 dargestellt.

[40] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S. 1 f.

[41] Vgl. Moxter, A. (1983): *Grundsätze ordnungsgemäßer Unternehmensbewertung*; 2. Auflage, Gabler-Verlag, Wiesbaden, S. 6.

[42] Vgl. Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009): *Unternehmensbewertung*; 6. Auflage, Verlag Vahlen, München, Wien, S. 82.

Anlass	Dominiert	Umstrukturierung der Eigentumsrechte
Kauf / Verkauf eines Unternehmens oder von Unternehmensanteilen	Nein	Ja
Börseneinführung	Nein	Ja
Ausscheiden eines Gesellschafters aus einer Personengesellschaft (aufgrund von Kündigung, Ausschluss oder eines Insolvenzverfahrens)	Ja / Nein	Ja
Abfindung für Minderheitsaktionäre[43]	Ja / Nein	Ja
Impairment Tests	Nein	Nein
Kaufpreisallokation	Nein	Nein
Bewertung von Beteiligungen	Nein	Nein

Tabelle 2: Bewertungsanlässe nach dominierten Situationen und Neustrukturierungen. Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 83. Eine abstraktere Kategorisierung von Bewertungsanlässen kann z.B. Ballwieser, W. (2011), S. 1 entnommen werden.

Der Bewertungsanlass ist auch für die Methode zur Bestimmung der Kapitalkosten maßgebend. Ein subjektiver Entscheidungswert führt aus Sicht des Interessierten auch zu subjektiv orientierten Kapitalkosten. Ein objektivierter Unternehmenswert geht mit marktorientierten Kapitalkosten einher und die Ermittlung eines Einigungswertes entspricht einer Kompromisslösung.

2.5 Bewertungsverfahren und Kapitalkosten

Es folgt eine Einordnung von Kapitalkosten in die Systematik von Bewertungsverfahren in der Betriebswirtschaftslehre. Die Klassifizierung der Verfahren erfolgt mittels IDW-

[43] Hierzu zählen: Abschluss von Gewinnabführungs- oder Beherrschungsverträgen, Eingliederung durch Mehrheitsbeschluss, Umwandlung durch Übertragung des Vermögens und formwechselnde Umwandlung. Squeeze-Out Verfahren, Verschmelzung. Vgl. Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 83.

Verlautbarungen sowie betriebswirtschaftlicher Literatur. In Abbildung 3 ist eine Systematik von Bewertungsverfahren dargestellt. Die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Kapitalkosten kommen in den Gesamtbewertungsverfahren zum Einsatz.

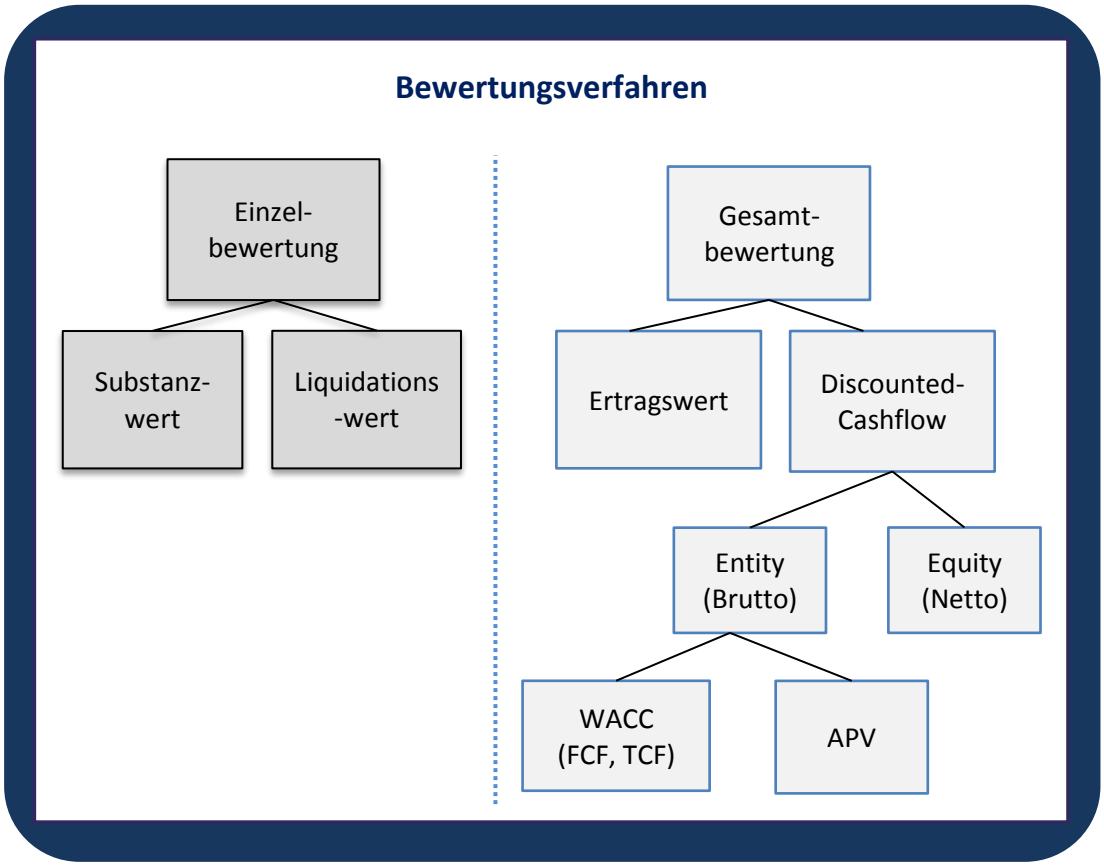

Abbildung 3: Verfahren für die Unternehmensbewertung. In den Gesamtbewertungsverfahren werden Kapitalkosten verwendet. Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Ballwieser, W. (2011), S. 8.

2.5.1 Einzelbewertungsverfahren

Ein Liquidationswert ergibt sich aus den erzielbaren Marktpreisen bei einer Veräußerung der gesamten Vermögensgegenstände abzüglich der Ablösewerte der Schulden und der Liquidationskosten.[44] Dieser Unternehmenswert sollte sich bei der Auflösung eines Unternehmens realisieren lassen.

[44] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S. 199 und IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 28. Tz. 141.

Im Substanzwertverfahren werden die gesamten Vermögenswerte anhand von Wiederbeschaffungskosten ermittelt und um den Liquidationswert des nicht betriebsnotwendigen Vermögens sowie die Schulden vermindert. Zusätzlich sind dem Alter der Substanzwerte entsprechend Abschläge vorzunehmen, die auf der Restnutzungsdauer im Verhältnis zur Gesamtnutzungsdauer basieren.[45]

Betriebsnotwendige Schulden werden mit nominalen Werten und nicht betriebsnotwendige mit Ablösebeträgen angesetzt.[46]

Diese Einzelbewertungsverfahren haben den Nachteil, dass eine Profitabilität, die sich aus zukünftigen finanziellen Überschüssen ergibt, unberücksichtigt bleibt. Da Kapitalkosten für diese Verfahren somit keine Rolle spielen, werden sie im Weiteren auch nicht betrachtet. Es bleibt jedoch festzuhalten, dass der Liquidationswert eine Wertuntergrenze darstellt, der bei schlechter Ertragslage einen Fortführungswert übersteigen kann. Besteht keine zwangsweise Fortführung des Unternehmens, ist nach IDW S1 diese Wertuntergrenze zu berücksichtigen.[47]

2.5.2 Gesamtbewertungsverfahren

Das Discounted Cashflow- und das Ertragswertverfahren beruhen auf dem Kapitalwertkalkül.[48] Für eine Reihe zukünftiger Erfolgsgrößen wird ein Kapitalwert mittels Barwertmethode ermittelt. Hieraus entstammt auch die Bezeichnung ‚Gesamtbewertungsverfahren', da die gesamten finanziellen Vorteile, die einem Investor zukommen, die Grundlage für den Unternehmenswert bilden. Es ist nicht nur die Gegenüberstellung von Aktiva und Passiva wie in den Einzelbewertungsverfahren, sondern das Zusammenwirken aller Vermögenswerte, das einen Unternehmenswert ausmacht.[49]

[45] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 33f. Tz. 170.
[46] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S. 200.
[47] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 4 Tz. 5 und S. 28 Tz. 140.
[48] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S. 8.
[49] Vgl. ebd., S. 9.

2.5.2.1 Ertragswert

Im Ertragswertverfahren werden geplante zukünftige Erträge als Erfolgsgrößen prognostiziert und diskontiert.[50]

In den Verlautbarungen IDW S1 heißt es hierzu:

> „Das Ertragswertverfahren ermittelt den Unternehmenswert durch Diskontierung der den Unternehmenseignern künftig zufließenden finanziellen Überschüsse, wobei diese üblicherweise aus den für die Zukunft geplanten Jahresergebnissen abgeleitet werden. Die dabei zugrunde liegende Planungsrechnung kann nach handelsrechtlichen oder nach anderen Vorschriften (z.B. IFRS, US GAAP) aufgestellt sein."[51]

Die Erfolgsgrößen sind demnach zukünftige Jahresergebnisse, die aus der Unternehmensplanung abgeleitet werden können. Diese müssen nicht exakt den Plan Gewinn- und Verlustrechnungen entstammen, da sachgerechte Adjustierungen der Vergangenheitswerte vorgenommen werden sollten. Im IDW S1 werden hierfür u. a. „Aufwendungen und Erträge des nicht betriebsnotwendigen Vermögens" und Bereinigungen „zur Ermittlung eines periodengerechten Erfolgsausweises" genannt, die auch „zum Ausgleich ausgeübter Bilanzierungswahlrechte" dienen können.[52]

Die Berechnung eines Ertragswertes ergibt sich formal dann wie folgt:[53]

$$V_{EW} = \sum_{t=1}^{T} \frac{E_t}{(1 + r_{EK})^t} + \frac{E_{T+1}}{r_{EK}(1 + r_{EK})^T},$$

mit

V_{EW} Unternehmenswert,

E_t Ertrag in Periode *t* und

---

[50] Vgl. Schierenbeck, H., Wöhle, C. B. (2012): *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*; 18. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, S. 484.

[51] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 22 Tz. 102.

[52] Vgl. ebd., S. 22 Tz. 103.

[53] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S. 62.

r_{EK} Kapitalisierungszinssatz.

Im ersten Term werden Erträge E_t der Detailplanungsphase diskontiert und im zweiten Term der Barwert eines konstant gleichbleibenden Ertrags E_{T+1} ermittelt, der eine ewige Rente darstellt. Dieser wird gewöhnlich aufgrund der zunehmenden Prognoseunsicherheit auf der Basis der zeitlich letzten prognostizierten Erträge fortgeschrieben und ggf. um einen Wachstumsfaktor ergänzt.[54] Unter der Voraussetzung, dass die Jahresergebnisse nach Abzug von Fremdkapitalzinsen vorliegen, dienen als Kapitalisierungszinssatz die Eigenkapitalkosten r_{EK}.[55]

Ein wesentlicher Grundsatz für einen zu verwendenden Kapitalisierungszinssatz ist die Vergleichbarkeit einer für den „Investor zur Verfügung stehenden Anlagealternative“ zum Bewertungsstichtag.[56] Als Kriterien für eine Adäquanz der Alternativanlage werden in den IDW-Verlautbarungen Fristigkeit, Risiko und Besteuerung des Zahlungsstroms genannt.[57] Die Äquivalenz im Sinne einer ausgelassenen Opportunität beruht nach Ballwieser zusätzlich auf den Kriterien Währung, Kapitaleinsatz und Verfügbarkeit.[58]

Für objektivierte Unternehmenswerte ist bei differenzierter Betrachtung von Basiszins und Risikoprämie zusätzlich das Kriterium der Laufzeitäquivalenz für den risikofreien Zinssatz geboten. Das IDW schlägt zwecks Erfüllung dieser Anforderung eine Ableitung aus öffentlichen Anleihen sowie Zinsstrukturkurven vor.[59]

Für subjektive Entscheidungswerte sind individuelle Verhältnisse und Entscheidungsräume maßgebend. Für den Kapitalisierungszinssatz gelten somit individuelle Renditeerwartungen von Alternativinvestitionen, Zinssätze von Ablösekrediten oder subjektiv orientierte Zinszuschlagsmethoden als Richtgrößen.[60]

---

[54] Vgl. ebd., S. 63.
[55] Vgl. Schierenbeck, H., Wöhle, C. B. (2012), S. 484.
[56] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 23 Tz. 113.
[57] Vgl. ebd., S. 23 Tz. 114.
[58] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S. 84.
[59] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 24 Tz. 116-117.
[60] Vgl. ebd., S. 25 Tz. 123.

2.5.2.2 Discounted Cashflow-Verfahren

Das DCF-Verfahren beruht ebenfalls auf der Kapitalwertmethode. Im Gegensatz zum Ertragswertverfahren sind die zu diskontierenden Erfolgsgrößen zukünftige Cashflows, die zur Ausschüttung an Kapitalgeber zur Verfügung stehen.[61] Verschiedene Ansätze existieren hinsichtlich der Berechnung des Cashflows, die sich vor allem in der Berücksichtigung der Finanzierungsstruktur unterscheiden.

Im Equity-Verfahren (oder auch Netto-Verfahren genannt) werden zukünftige Cashflows um Fremdkapitalkosten gemindert und der resultierende Zahlungsüberschuss wird *Flow to Equity* bezeichnet. Der Kapitalwert dieser den Eigenkapitalgebern zur Verfügung stehenden Cashflows entspricht dem zu ermittelten Marktwert des Eigenkapitals.

In den Entity- oder Brutto-Verfahren wird der Wert des Eigenkapitals indirekt ermittelt, indem zunächst ein gesamter Kapitalwert von Eigen- und Fremdkapital anhand zukünftiger Cashflows berechnet und anschließend um einen Marktwert des Fremdkapitals vermindert wird. Als zu diskontierende Erfolgsgrößen existiert eine Variante mit dem *Free Cashflow* und eine mit dem *Total Cashflow*.

In Tabelle 3 sind die Berechnungen des Free Cashflow, Total Cashflow und Flow to Equity sowie ihre rechnerischen Zusammenhänge dargestellt.

[61] Vgl. Spreemann, K., Ernst, D. (2011): *Unternehmensbewertung*; 2. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, S. 68.

	Jahresergebnis
+	Fremdkapitalzinsen
-	Steuerschutz (tax shield)
+	zahlungsunwirksame Aufwendungen
-	zahlungsunwirksame Erträge
-	Investitionszahlungen abzgl. Einzahlungen aus Desinvestitionen
+/-	Verminderung / Erhöhung des Nettoumlaufvermögens
=	**Free Cashflow**
+	Steuerschutz (tax shield)
=	**Total Cashflow**
-	Fremdkapitalzinsen
+/-	Kreditaufnahme / Kredittilgung
=	**Flow to Equity**

Tabelle 3: Cashflows der Ertragswert- und DCF-Verfahren als zu diskontierende Erfolgsgrößen. Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Ballwieser, W. (2011), S. 133; Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 140 und IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 26 Tz. 127.

2.5.2.2.1 WACC

Die Methode der gewogenen durchschnittlichen Kapitalkosten (im Folgenden WACC, *engl.: weighted average cost of capital*) existiert in zwei Varianten, denen der Free Cashflow oder der Total Cashflow als zu diskontierende Erfolgsgröße zugrunde liegt.[62]

2.5.2.2.1.1.1 Free Cashflow

Bei den Free Cashflows handelt es sich um Zahlungsüberschüsse nach Investitionen und Steuern sowie vor Zinsen und Veränderungen des Nettoumlaufvermögens. Durch die

[62] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 26 Tz. 125.

Berücksichtigung von Investitionszahlungen sowie den Änderungen des Nettoumlaufvermögens haben z.B. thesaurierte Gewinne keinen mindernden Einfluss auf den Free Cashflow.[63]

Da der Free Cashflow unabhängig von der Kapitalstruktur ist, stellt diese Größe Zahlungsüberschüsse dar, bei der eine reine Eigenfinanzierung fiktiv angenommen wird.[64] Das Jahresergebnis wird um die Fremdkapitalzinsen erhöht und um den Steuerschutz vermindert. Der FCF ist also der Zahlungsüberschuss, der insgesamt zur Ausschüttung an die Kapitalgeber zur Verfügung steht.

Daher können diese bei der Kapitalwertmethode zur Ermittlung des gesamten Unternehmenswertes als zu diskontierende Erfolgsgröße verwendet werden. Da der Steuerschutz zum Unternehmenswert beiträgt, wird dieser bei der Free Cashflow Methode in dem gewichteten Kapitalisierungszins erfasst:[65]

$$r_{WACC,FCF} = r_{EK}\frac{V_{EK}}{V} + r_{FK}\frac{V_{FK}}{V} \cdot (1 - s).$$

Hierbei sind r_{EK} die Eigenkapitalkosten und r_{FK} die Fremdkapitalkosten, die die Zinszahlungen für das Fremdkapital widerspiegeln. Mit *V* ist der gesamte Unternehmenswert, durch die Indexierung die Wertanteile von Eigen- und Fremdkapital und mit *s* der Unternehmenssteuersatz angegeben.

Der gesamte Unternehmenswert errechnet sich dann aus Diskontierung der Free Cashflows:

$$V = \sum_{t=1}^{T} \frac{FCF_t}{(1 + r_{WACC,FCF})^t} + \frac{FCF_{T+1}}{r_{WACC}(1 + r_{WACC,FCF})^T},$$

wobei der letzte Term den Kapitalwert der ewigen Rente mit konstanten Free Cashflows nach der Detailplanungsphase wiedergibt.

[63] Vgl. ebd, S. 26 Tz. 127.

[64] Vgl. Obermeier, T., Gasper, R. (2008): *Investitionsrechnung und Unternehmensbewertung*; Oldenbourg Verlag, München, Wien, S. 159.

[65] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S 161.

Um den Wert des Eigenkapitals zu ermitteln, wird schließlich der Unternehmenswert *V* um den Wert des Fremdkapitals vermindert.[66]

2.5.2.2.1.2 Total Cashflow

Im Total Cashflow sind die echten Steuern erfasst, da der Steuerschutz zum fremdkapitalzinsfreien Free Cashflow addiert wird. In dem gewichteten Kapitalisierungszinssatz r_{WACC} entfällt daher die Steuer-Adjustierung:[67]

$$r_{WACC,TCF} = r_{EK}\frac{V_{EK}}{V} + r_{FK}\frac{V_{FK}}{V}.$$

Der gesamte Unternehmenswert ist dann im TCF-Verfahren:

$$V = \sum_{t=1}^{T}\frac{TCF_t}{(1+r_{WACC,TCF})^t} + \frac{TCF_{T+1}}{r_{WACC}(1+r_{WACC,TCF})^T}.$$

Der Eigenkapitalwert ergibt sich dann ebenfalls aus der Minderung des gesamten Unternehmenswertes *V* durch den Wert des Fremdkapitals.

Unterschiede zwischen FCF- und TCT-Methode liegen in der Behandlung des Steuerschutzes bei der Kapitalwertberechnung. Im FCF-Verfahren ist dieser im Nenner in dem gewichteten Kapitalisierungszins r_{WACC} erfasst, im TCF-Verfahren im Zähler durch Erfassung im TCF.

Für die Kapitalkosten im WACC-Verfahren ist der Verschuldungsgrad maßgebend, da sich der Steuervorteil aus der Abzugsfähigkeit von Fremdkapitalzinsen ergibt. Für die Fremdkapitalkosten sind nach Fremdkapitalpositionen gewogene Zinssätze zu ermitteln.[68] Darüber hinaus entsprechen die Grundsätze zur Ermittlung der Kapitalkosten für einen objektivierten Unternehmenswert im DCF-Verfahren denen des Ertragswertverfahrens,[69] wie diese in 2.5.2.1 bereits dargestellt wurden.

---

[66] Vgl. ebd., S. 184.
[67] Vgl. Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 118.
[68] Vgl. IDW S1 i.d.F. 2008, S. 27 Tz. 133.
[69] Vgl. ebd., S. 27 Tz. 135.

2.5.2.2.2 Adjusted Present Value - APV

Für den angepassten Barwert (im Folgenden APV, *engl.: adjusted present value*) wird zunächst von einer fiktiven reinen Eigenfinanzierung ausgegangen, indem der FCF als zu diskontierender Zahlungsüberschuss verwendet wird. Zum ermittelten Marktwert des fiktiv unverschuldeten Unternehmens wird im Gegensatz zu den DCF-Verfahren der Barwert des Steuervorteils addiert.[70] Dieser gesamte Unternehmenswert wird dann um den Marktwert des Fremdkapitals vermindert, um den Wert des Eigenkapitals als Unternehmenswert zu bestimmen:[71]

$$V_{EK} = V_{unverschuldet} + V_{Tax\ Shield} - V_{FK}.$$

Zur Berechnung des Wertes des unverschuldeten Unternehmens mit den Free Cashflows als Erfolgsgrößen sind die Eigenkapitalkosten als Kapitalisierungszinssatz anzusetzen:

$$V_{unverschuldet} = \sum_{t=1}^{T} \frac{FCF_t}{(1 + r_{EK})^t} + \frac{FCF_{T+1}}{r_{APV}(1 + r_{EK})^T}.$$

Da der Free Cashflow eine fiktive Steuerzahlung bei reiner Eigenfinanzierung beinhaltet, ist der gesamte Unternehmenswert $V_{unverschuldet}$ ein Barwert ohne Berücksichtigung des Steuervorteils. In dem Free Cashflow Verfahren wird dieser ja im Kapitalisierungszinssatz r_{WACC} berücksichtigt. Weil die Free Cashflows nun jedoch mit Eigenkapitalkosten r_{EK} diskontiert werden, muss der Barwert des Steuerschutzes $V_{Tax\ Shield}$ zum Wert des unverschuldeten Unternehmens addiert werden.

Der Barwert des Steuerschutzes resultiert als Barwert aller zukünftigen Steuervorteile in Form einer ewigen Rente:[72]

$$V_{Tax\ SHield} = \frac{V_{FK} \cdot r_{FK} \cdot s}{r_{FK}} = V_{FK} \cdot s.$$

[70] Vgl. Spreemann, K., Ernst, D. (2011), S. 93 f.
[71] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S. 134 f.
[72] Vgl. ebd., S. 135.

Im Zähler steht der Steuerschutz je Periode, der als ewige Rente betrachtet wird und als Diskontierungszinssatz sind die Fremdkapitalzinsen r_{FK} anzusetzen.[73]

Da hier die Kapitalkosten genauso zu ermitteln sind, wie für ein unverschuldetes Unternehmen,[74] gelten die für die Ertragswertverfahren angegebenen Grundsätze ebenso.

2.5.2.2.3 Equity-Verfahren

Im sog. Equity- oder Netto-Verfahren wird der Wert des Eigenkapitals direkt durch die Kapitalisierung der Cashflows ermittelt, die den Eigenkapitalgebern zur Verfügung stehen. Ein Umweg über die Bestimmung des gesamten Kapitalwertes und anschließenden Abzug des Fremdkapitals – wie dies bei den Brutto-Verfahren der Fall ist – erfolgt hierbei nicht. Die zu diskontierenden zukünftigen Netto Cashflows werden um Kreditzahlungen adjustiert, woraus der sog. ‚Flow to Equity' resultiert.[75] Die bewertungsrelevanten Überschüsse entsprechen mindestens definitorisch denen des Ertragswertverfahrens.[76] Der Flow to Equity ist der Cashflow, der in den Verfügungsbereich der Eigenkapitalgeber kommt. Dieser setzt sich aus Ausschüttungen an Eigenkapitalgeber und Substitute für Ausschüttungen, „die im Sinn der [Eigen-, d. Verf.] Kapitalgeber vorgenommen werden"[77], zusammen. Hierzu zählen z.B. die Investitionszahlungen.

Unterschiede zwischen Equity- und Ertragswertverfahren sind bei den anzusetzenden Kapitalisierungszinssätzen vorzufinden, je nachdem ob ein objektivierter oder subjektiver Unternehmenswert gesucht wird.[78]

Objektivierte Unternehmenswerte sind marktorientiert, weshalb die vom IDW als vorteilhaft genannte Risikozuschlagsmethode mittels CAPM anwendbar ist. Subjektive Unternehmenswerte werden hingegen eher dem Ertragswertverfahren zugesprochen. So wird z.B. von Drukarczyk, und Schüler (2009) die Orientierung des Ertragswertverfahrens an

---

[73] Vgl. IDW S1, i.d.F. 2008, S. 28, Tz. 137.

[74] Vgl. ebd., S. 28 Tz. 136-137.

[75] Vgl. Nowak, K. (2000): *Marktorientierte Unternehmensbewertung*; Springer Fachmedien, Wiesbaden, S. 29.

[76] Vgl. Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 203.

[77] Vgl. Spreemann, K., Ernst, D. (2011): *Unternehmensbewertung*; 2. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, S 70.

[78] Vgl. Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 203.

der „individuellen Risikoeinstellung des Investors“ als Ansatzpunkt für eine „eigene Positionierung“ bezeichnet.[79]

Der Kapitalkostensatz sollte das operative Risiko und das aus dem Verschuldungsgrad resultierende Finanzierungsrisiko des Unternehmens widerspiegeln.[80] Die anzusetzenden Kapitalkosten entsprechen denen eines verschuldeten Unternehmens. Eine geeignete Adjustierung ist wie folgt:[81]

$$r_{EK,L} = r_{EK}(1 + L) - r_{FK}L,$$

mit L als Verschuldungsgrad, $L = \frac{V_{FK}}{V_{EK}}$.

Schließlich ergibt sich der Wert des Eigenkapitals mittels Equity-Verfahrens wie folgt:

$$V_{Equity} = \sum_{t=1}^{T} \frac{FTE_t}{(1 + r_{EK,L})^t} + \frac{FTE_{T+1}}{r_{EK}(1 + r_{EK,L})^t}.$$

Die Grundsätze zur Ermittlung der unverschuldeten Eigenkapitalkosten r_{EK} entsprechen dann denen des Ertragswertverfahrens, wobei das CAPM zur Anwendung kommen kann.[82]

2.6 Der konzeptionelle Rahmen: Kapitalkostenermittlung als ökonometrischer Prozess

Die initiierende Problemstellung der Unsicherheit geschätzter Kapitalkosten beruht wie in Abschnitt 1.2 und 1.4 dargestellt vor allem auf einer bemängelten Aussagefähigkeit von Marktbeobachtungen, für deren Beurteilung es an einer geeigneten Grundlage mangelt. Für die Entwicklung einer Methodik zur Bemessung von Parameterunsicherheit sei daher die Theorie der statistischen Inferenz grundlegend, in der das Ziehen von Rückschlüssen von

[79] Vgl. Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 203.
[80] Vgl. IDW S1 i.d.F. 2008, S. 28 Tz. 138.
[81] Vgl. Spreemann, K., Ernst, D. (2011), S. 85.
[82] Vgl. Nowak, K. (2000), S. 29.

Daten auf zugrundeliegende Populationen oder datengenerierende Mechanismen behandelt wird.[83]

In der vorliegenden Arbeit dient eine ökonometrische Vorgehensweise als Rahmenkonzept, da sich dieser Bereich der Wirtschaftswissenschaften mit der Gegenüberstellung von Theorie und Empirie beschäftigt: „Die Ökonometrie analysiert anhand von beobachtbaren Daten (ökonomische Realität) ökonomische Wirkungszusammenhänge (ökonomische Theorie).“[84]

Eine standardisierte ökonometrische Vorgehensweise wird zunächst formal dargestellt und dann auf ein IDW-konformes Verfahren zur Kapitalkostenermittlung projiziert. Für die Erfassung eines Verfahrens zur Kapitalkostenermittlung sind die Verlautbarungen und fachtechnischen Normen des IDW maßgebend und weiterführende Konkretisierungen werden anhand von Veröffentlichungen aus der Literatur vorgenommen. Die im Folgenden vorgestellten ökonometrischen Prozessschritte bilden im weiteren Verlauf der Arbeit die Basis für die Aufarbeitung und Erfassung der Parameterrisiken.

Eine standardisierte Vorgehensweise der Ökonometrie ist in Abbildung 4 dargestellt.

[83] Vgl. Schlittgen, R. (2010): *Statistische Inferenz*; 2. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, S. 1 und S. 113.

[84] Vgl. von Auer, L. (2011), S. 3.

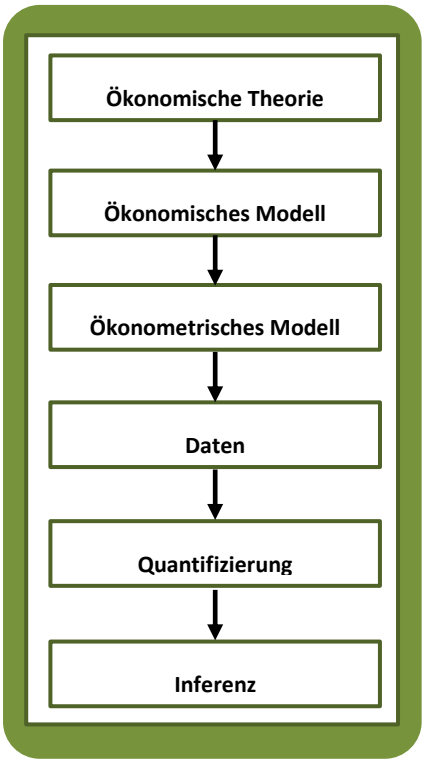

Abbildung 4: Standardisierte Vorgehensweise in der Ökonometrie. Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an: von Auer, L. (2011), S. 8.

Ausgehend von einer grundlegenden Theorie hin zu praktisch ermittelten Kapitalisierungszinssätzen lässt sich die IDW-basierte Methodik der Kapitalkostenermittlung diesen einzelnen ökonometrischen Prozessschritten zuordnen.

2.6.1 Ökonomische Theorie

Als grundlegende ökonomische Theorie kann für die IDW-Methodik die Risikotheorie genannt werden wonach für Risikozuschläge von einer am Markt vorherrschenden Risikoaversion ausgegangen und diese auch explizit benannt wird.[85]

2.6.2 Ökonomisches Modell

Als ökonomisches Modell kann den IDW-Verlautbarungen zufolge das CAPM verwendet werden.[86] Es beschreibt ein Kapitalmarktgleichgewicht für Preise von risikobehafteten

[85] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 18 f. Tz. 88 & Tz. 91.
[86] Vgl. ebd., S. 19 Tz. 92.

Wertpapieren unter dem Annahmebündel „vollkommener Kapitalmarkt“.[87] Aus den Gleichgewichtspreisen resultieren die von Investoren erwarteten und geforderten Renditen, die aus Unternehmenssicht Kapitalkosten darstellen. Aus der Theorie der Risikoaversion folgt also im Kapitalmarktgleichgewicht ein Preis für die Übernahme von Risiken. Aus diesen Gleichgewichtspreisen für die Kapitalüberlassung resultieren die Kapitalkosten, die als eine lineare Funktion von Unternehmensrisiko β_i und Marktrisikoprämie $E[r_M] - r_f$ modelliert werden.[88] Die Anforderung einer Risikoäquivalenz von Kapitalisierungszinssätzen in den Ertragswert- und Discounted Cashflow Verfahren kann mit der Anwendung des CAPM erfüllt werden.[89]

2.6.3 Ökonometrisches Modell

Während ein ökonomisches Modell lediglich einen funktionalen Zusammenhang aufweist, ist ein ökonometrisches Modell so spezifiziert, dass eine Quantifizierung des funktionalen Zusammenhangs mittels empirischer Daten ermöglicht wird. Insofern besteht hinsichtlich der Modellspezifikation oftmals ein Zielkonflikt zwischen einer adäquaten Formulierung der ökonomischen Theorie und der Verfügbarkeit von Daten.

Dieser Konflikt macht das wesentliche Problem in der Anwendung des CAPM deutlich: Das CAPM an sich scheidet als ökonometrisches Modell aus, da z.B. für die Erwartungswerte keine ausreichenden empirischen Beobachtungen vorliegen. Es ist schlichtweg nicht möglich, die von Investoren erwarteten Wertpapierrenditen und zeitlich dazugehörige Erwartungswerte von Marktrisikoprämien empirisch zu erfassen, um damit einen funktionalen Zusammenhang verlässlich zu quantifizieren. Zur Unmöglichkeit einer

[87] Vgl. Stehle, R. (2004), S. 908.

[88] Vgl. Wöhe, G. (2000): *Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre*; 20. Auflage, Verlag Vahlen, München, S. 796 f.

[89] Das CAPM ist in der wissenschaftlichen Lehre und Literatur weit verbreitet und versammelt umfangreiche Kritiken. Eine häufig zitierte Modellkritik stammt von Roll, R. (1977). Kernpunkt dieser Kritik ist die Unbeobachtbarkeit des Marktportfolios, das gemäß CAPM alle risikobehafteten Anlagen umfasst. Roll kommt zu dem Ergebnis, dass eine exakte Zusammensetzung des Marktportfolios unmöglich ermittelt werden kann, und dass es daher keine Möglichkeit gibt, das Modell empirisch zu testen. Ein Vergleichswert für das Marktportfolio stellt die Eigenschaften der im Modell angenommenen alleinigen Rendite-Risiko-Effizienz des Marktportfolios infrage. Vgl. Roll, R. (1977), S. 130.

empirischen Evidenz des CAPM sei an dieser Stelle auf die Arbeit von Roll (1977) und Kapitel 4.6 verwiesen.[90]

Damit die Komponenten Basiszins, Betafaktor und Marktrisikoprämie quantifizierbar sind, kommen stattdessen jeweils einzelne ökonometrische Modelle zum Einsatz. Gemäß weiterführender Konkretisierungen der IDW-Verlautbarungen wird der Basiszins aus der Zinsstruktur abgeleitet, die von der Bundesbank durch das Nelson-Siegel-Svensson Verfahren bestimmt wird. Betafaktoren werden mit dem Marktmodell geschätzt und für die Marktrisikoprämie wird die Prognose einer historischen Zeitreihe verwendet.

2.6.4 Daten

Wird eine empirische Beobachtung als Stichprobe betrachtet, werden mittels statistischer Inferenz Aussagen über eine zugrunde liegende Grundgesamtheit getroffen, aus der die Stichprobe eine Teilmenge darstellt.[91] Für Zeitreihen und historische Beobachtungen ist zusätzlich die Prognosequalität maßgeblich. Von Auer (2011) bezeichnet die historische Variante der Empirie als das „Ergebnis eines nicht kontrollierten Experimentes".[92] Hierfür besteht die Notwendigkeit zusätzlicher Aussagen über die Prognosekraft. Zeitreihenanalytisch können zu diesem Zweck z.B. Tests auf Stationarität oder Strukturbrüche zur Anwendung kommen, die in den folgenden Kapiteln Anwendung finden.

In der Ökonometrie werden Daten üblicherweise nach Zeitreihen-, Querschnitts- und Paneldaten klassifiziert.[93] Für den Basiszins gelten die Renditen von Bundesanleihen als der zu verwendende risikolose Zins, der v.a. seit der Finanzkrise 2008 häufiger auch „quasi risikolos" bezeichnet wird. Die empirischen laufzeitabhängigen Renditen von Bundesanleihen dienen der Spezifikation der Zinsstruktur zu festen Zeitpunkten. Diese empirischen Renditen zur Schätzung der Zinsstruktur stellen Querschnittsdaten dar. Das Marktmodell zur Schätzung der Betafaktoren wird von historischen Unternehmens- und Indexrenditen gespeist und die Marktrisikoprämie wird durch historische Index- und

---

[90] Vgl. Roll, R. (1977): *A critique of the asset pricing theory's tests Part I: On past and potential testability of the theory*; Journal of Financial Economics, Band 4, Ausgabe 2, S. 129-176.

[91] Vgl. Schlittgen, R. (2004): *Statistische Auswertungen mit R*; Oldenbourg Verlag, München, Wien, S. 41 f.

[92] Vgl. von Auer, L. (2011), S. 2 f.

[93] Vgl. ebd., S. 11.

Anleiherenditen ermittelt. Die Marktbeobachtungen zur Spezifikation dieser Modelle stellen Zeitreihendaten dar.

2.6.5 Quantifizierung

Als Schätzfunktionen für die Zinsstruktur dient eine Nicht-Lineare Optimierung, wobei die Parameter des Nelson-Siegel-Svensson Zinsstrukturmodells mittels Newton-Raphson-Algorithmus bestimmt werden. Für das Marktmodell kommt eine Kleinste-Quadrate Schätzung im Rahmen der linearen Regression und für die Marktrisikoprämie eine Zeitreihenprognose von Index- und Anleiherenditen zum Einsatz. In den nächsten Kapiteln werden die Schätzverfahren angewandt und deren Anforderungen hinsichtlich der Kapitalkostenermittlung zur Unternehmensbewertung dargestellt.

2.6.6 Kapitalkostenschätzung als ökonometrischer Prozess

Ausgehend von der grundlegenden Theorie über die Modellquantifizierung bis hin zur statistischen Inferenz lässt sich die IDW-standardisierte Kapitalkostenermittlung wie in Abbildung 5 dargestellt als ökonometrischer Prozess darstellen.

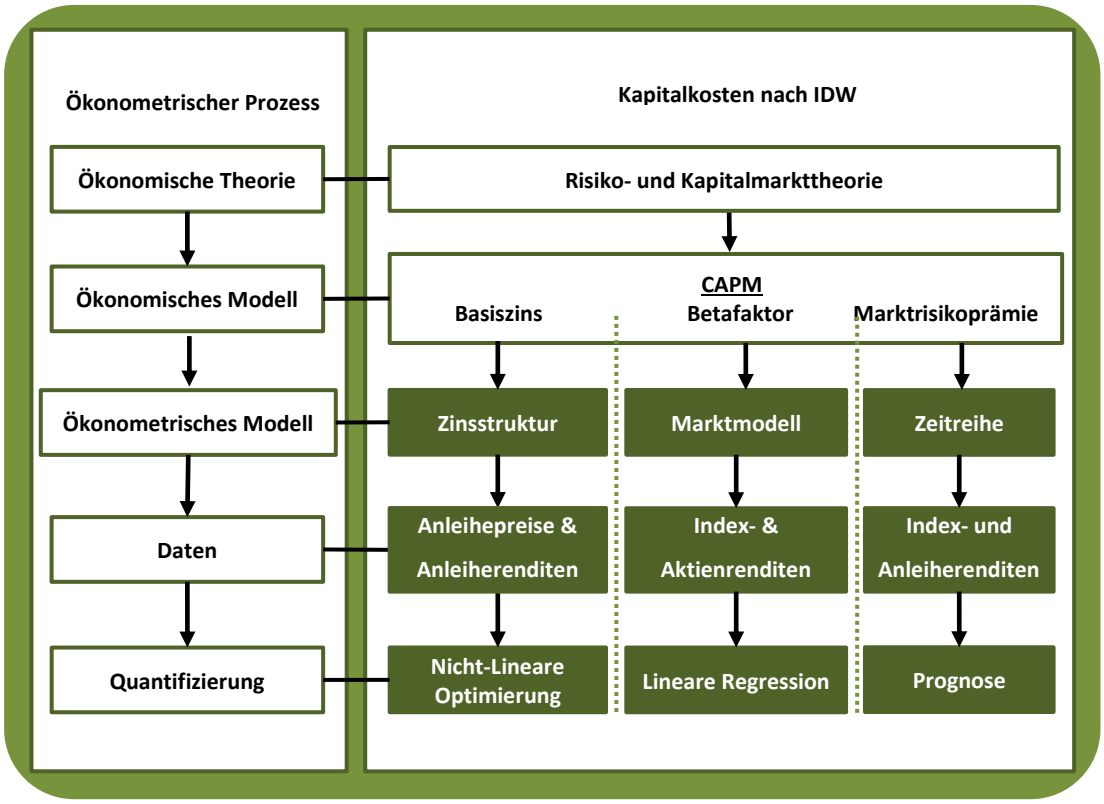

Abbildung 5: Standardisierte Kapitalkostenermittlung als ökonometrischer Prozess. Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an: von Auer, L. (2011), S. 8.

Der Vorteil dieser Betrachtungsweise ergibt sich aus der Problemstellung. Wird die Kapitalkostenermittlung derart ökonometrisch betrachtet, lässt sich die Erfassung der Parameterunsicherheit in der Kapitalkostenschätzung ökonometrisch strukturieren, womit den gestellten Anforderungen ‚Vollständigkeit' und ‚Willkürfreiheit' gerecht werden soll. Für die drei ökonometrischen Teilverfahren bietet die Statistik Methoden zur Bemessung der jeweiligen Parameterrisiken an.

Das Ziel und den Abschluss dieser Arbeit bildet die Zusammenführung der einzelnen Inferenzmethoden, um schließlich Inferenzaussagen über Kapitalkosten gewinnen zu können. Die jeweiligen Inferenzmethoden werden in den nächsten drei Kapiteln ausgearbeitet und angewandt. Die Anforderungen und Besonderheiten der jeweiligen Methoden hinsichtlich der zu schätzenden Kapitalkosten werden ausgearbeitet und aufgezeigt. Resultierende Stichprobenverteilungen werden für die Zusammenführung der Inferenzmethoden im sechsten Kapitel übernommen. Das zentrale Forschungsergebnis ist die Stichprobenverteilung von Kapitalkosten, die im sechsten Kapitel analytisch bestimmt

wird und aus der Erkenntnisse über die Schätzeigenschaften von Kapitalkosten gewonnen werden.

Abbildung 6 zeigt zusammenfassend den strukturellen Aufbau dieser Arbeit.

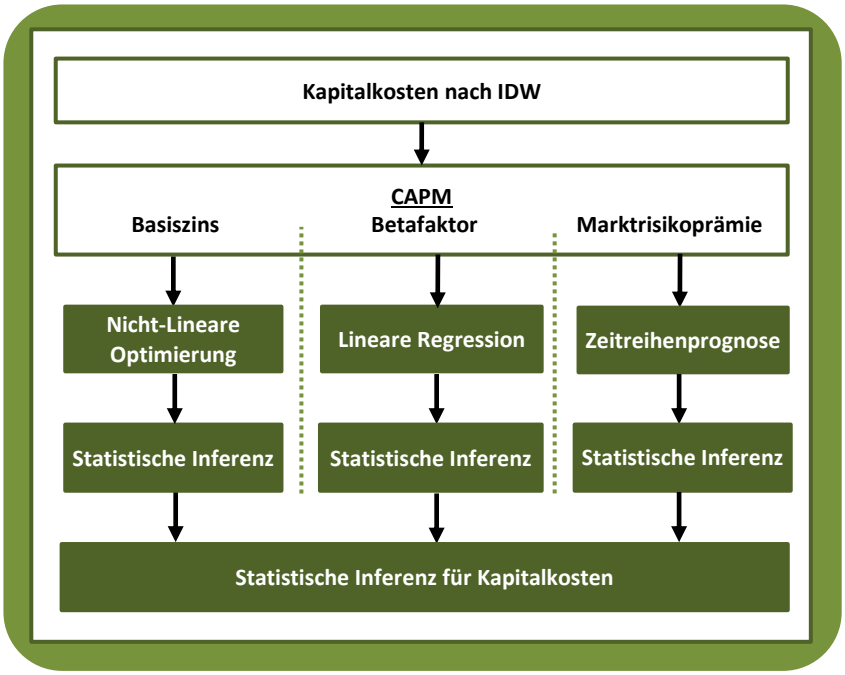

Abbildung 6: Struktureller Aufbau. Schätzmethoden und statistische Inferenz als Mittel zur Bemessung von Parameterrisiken. Quelle: Eigene Darstellung.

3 Basiszins

3.1 Einleitung: Basiszins

Der Basiszins stellt die Rendite einer risikolosen Anlage dar, die Investoren an Kapitalmärkten zur Verfügung steht. Für den Zweck einer objektivierten Unternehmensbewertung werden am Kapitalmarkt Staatsanleihen als diejenigen Finanzinstrumente angesehen, die den Eigenschaften einer risikolosen Anlageform am ehesten entsprechen.[94]

In früheren Verlautbarungen des IDW wurde von einem einheitlichen sog. „quasi risikofreien" Zins ausgegangen, der für beliebige Laufzeiten Anwendung fand und auf der Basis historischer Daten berechnet wurde. Dieser Basiszinssatz wurde einmal jährlich anhand 15-jähriger Bundesanleihen ermittelt. Das Verfahren wurde jedoch kritisiert, da bei der Unternehmensbewertung vor allem die Anforderungen der Laufzeitäquivalenz hinsichtlich der zu bewertenden Zahlungsströme und das Stichtagsprinzip nicht erfüllt wurden.[95] Die vergangenheitsorientierte Ermittlung von risikolosen Zinssätzen ist 2005 vom IDW durch eine marktorientierte Methode abgelöst worden,[96] und es wird derzeit die Ableitung des Basiszinssatzes aus der Zinsstrukturkurve der Deutschen Bundesbank empfohlen.[97]

Die Zinsstruktur basiert auf einem Modell, das durch empirische Marktbeobachtungen spezifiziert wird. Aus einer begrenzten Anzahl tatsächlich gehandelter Staatsanleihen werden Zinssätze für beliebige Laufzeiten von bis zu 30 Jahren abgeleitet. Insofern unterliegen die Zinssätze der veröffentlichten Zinsstruktur einem Schätzfehler.

In diesem Kapitel wird zunächst das Verfahren der Zinsstrukturermittlung nach der Nelson-Siegel Methode mit Svensson-Erweiterung (im Weiteren „Svensson-Methode") aufgezeigt. Anschließend folgen statistische Inferenzmethoden zur Bemessung einer Schätzgenauigkeit

---

[94] Vgl. Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 211.

[95] Vgl. Gebhard, G., Daske, H. (2004), S. 6.

[96] Vgl. Obermaier, R. (2006): *Marktzinsorientierte Bestimmung des Basiszinssatzes in der Unternehmensbewertung*; Finanz Betrieb vom 07.07.2006, Heft 7-8, S. 472.

[97] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 24 Tz. 117. Vgl. Dörschell, A., Franken, L., Schulte, J. (2010): *Kapitalkosten 2010 für die Unternehmensbewertung*; IDW-Verlag, Düsseldorf, S. 31.

der Zinssätze, die von der Bundesbank nach der Svensson-Methode ermittelt werden. Hierzu kommt die sog. Delta-Methode zum Einsatz.

3.2 Zinsstruktur und Anleihen

Die Zinsstruktur beschreibt zu festen Zeitpunkten das Verhältnis zwischen Laufzeiten und risikofreien Zinssätzen.[98] Deren grafische Darstellung als kontinuierliche Funktion von Zinssätzen in Abhängigkeit der Laufzeiten bildet die Zinsstrukturkurve. Die Zinsstruktur beschreibt Zinssätze für hypothetische Nullkuponanleihen, die sich nicht am Markt gebildet haben, jedoch anhand von Marktbeobachtungen geschätzt werden.

Bei den Zinssätzen handelt es sich um sog. Kassakurse und diese werden häufiger, aus dem Englischen abgeleitet, als Spotzinssätze bezeichnet, die bei einfachen Investitionen ohne eine Wiederanlage oder Auszahlungen vor Laufzeitende gültig sind. Am Anleihemarkt entsprechen diese Verzinsungen denen von Nullkuponanleihen (engl.: ‚zero bonds') mit einer einmaligen Auszahlung am Laufzeitende.[99] Aufgrund der Risikolosigkeit ermöglichen die Nullkuponanleihen eine Vergleichbarkeit von Zinssätzen mit verschiedenen Laufzeiten.[100] Die Zinsstrukturkurve wird in Deutschland für Laufzeiten bis zu 30 Jahren von der Deutschen Bundesbank veröffentlicht.[101] Dabei handelt es sich um einen theoretischen Modellverlauf, der an stichtagsbezogene Marktbeobachtungen von Anleihepreisen und -renditen angepasst wird.

Am Markt quotierte Spotzinssätze von Nullkuponanleihen sind jedoch nicht für beliebige Laufzeiten verfügbar. Dies gilt genauso für Terminkontrakte, bei denen eine Zinsperiode für einen zukünftigen Zeitraum gültig ist. Für hohe Laufzeiten liegen zudem größtenteils

---

[98] Vgl. Schich, S. T. (1997): *Schätzung der deutschen Zinsstrukturkurve*; Diskussionspapier 7/97, Volkswirtschaftliche Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank, Frankfurt am Main, S. 2.

[99] Vgl. Hartmann-Wendels ,T., Pfingsten, A., Weber, M. (2010): *Bankbetriebslehre*; 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, S. 280.

[100] Vgl. Hewicker, H., Cremers, H. (2011): *Modellierung von Zinsstrukturkurven*; Working Paper Series No. 165, Frankfurt School of Finance & Management, S. 8.

[101] Vgl. Deutsche Bundesbank (2015): *Zinsstruktur am Rentenmarkt*:
[http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Geld_und_Kapitalmaerkte/Zinssaetze_und_Renditen/Zinsstruktur_am_Rentenmarkt/zinsstruktur_am_rentenmarkt.html (07.04.2015)].

Kuponanleihen vor, bei denen Spotzinssätze nicht direkt beobachtbar sind.[102] Um den Informationsgehalt von Kuponanleihen und Terminkontrakten bei der Spezifikation einer Zinsstruktur zusätzlich zu berücksichtigen, schlagen Nelson und Siegel sowie Svensson eine Methode vor, in der zunächst eine sog. *unmittelbare Terminzinskurve* (engl.: *implied forward rate*) geschätzt wird und aus der anschießend die Zinsstruktur abgleitet werden kann. Dieses als ‚Svensson-Methode' bezeichnete Verfahren wird von der Deutschen Bundesbank derzeit angewendet.[103]

3.2.1 Empirische Daten

Zur Bestimmung der Datenbasis für die Zinsstrukturschätzung können entweder wenige Anleihen mit möglichst gleichartigen Charakteristika oder mehrere verschiedenartige Anleihen verwendet werden, die das Laufzeitspektrum besser abdecken.[104] Bei der Methode der Deutschen Bundesbank werden als Kompromiss zwischen Datenumfang und Eignung folgende börsennotierte Bundeswertpapiere zur Schätzung verwendet:[105]

- Bundesanleihen
- Bundesobligationen
- Bundesschatzanweisungen[106]

3.2.2 Renditen, Termin- und Spotzinssätze

Zunächst sollen die zusammenhängenden Zinssätze vorgestellt werden, die bei der Ermittlung der Zinsstruktur mittels Anleihen Gültigkeit finden. Die für die Schätzung der Zinsstruktur relevanten Zinssätze sind Spotzinssätze, Renditen (engl. *yield-to-maturity*) und Terminzinssätze (engl. *forward rate*).

---

[102] Vgl. Deutsche Bundesbank: *Schätzung von Zinsstrukturkurven*; Monatsbericht Oktober 1997, S. 65. Vgl. Svensson, L. E. O. (1995): *Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method*; Quarterly review, Central Bank of Sweden, Stockholm, S. 14. Vgl. Schich, S. (1997), S. 2.

[103] Vgl. Deutsche Bundesbank (2015):
[http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Makrooekonomische_Zeitreihen/its_list_node.html?listId=www_s140_it03a (07.04. 2015)].

[104] Vgl. Schich, S. T. (1997), S. 21.

[105] Vgl.: Bundesrepublik Deutschland Finanzagentur GmbH: [http://www.deutsche-finanzagentur.de/private-anleger/bundeswertpapiere/ (05.04. 2013)]. Vgl. Deutsche Bundesbank (1997): *Schätzung von Zinsstrukturkurven*; Monatsbericht Oktober 1997, S. 65.

[106] Vgl. Schich, S. T. (1997), S. 21.

Als Notation der verschiedenen relevanten Zeitpunkte gilt Folgendes: Der Start einer Zinsperiode sei mit t und der Zeitpunkt der Quotierung mit t_0 angegeben. Der Fälligkeitszeitpunkt *T* einer Anleihe ist der Zeitpunkt der fälligen Auszahlung des Nennwertes und ggf. eines letzten Kupons und markiert somit das Ende der Laufzeit.

Der **Spotzinssatz** (oder auch Kassazinssatz) entspricht der Rendite einer Investition mit genau einer Auszahlung zum Laufzeitende und findet z.B. für Nullkuponanleihen Anwendung. Die Spotzinssätze seien mit $i(t,T)$ oder $i_{t,T}$ bezeichnet und, wenn nicht anders angegeben, entsprechen die Startzeitpunkte der Zinsperioden dem Zeitpunkt der Quotierung $t_0 = t$. Mit der Restlaufzeit *m=T-t* der Anleihe kann dieser Zinssatz auch durch $i(t, t+m)$ angegeben werden. Ein Spotzinssatz $i(t_0, t, T)$ zum Beispiel gibt zum Quotierungszeitpunkt t_0 die Verzinsung für die Periode von *t* bis *T* an.

Die **Rendite** einer Kuponanleihe stellt eine durchschnittliche Verzinsung über die gesamte Laufzeit dar. Es ist also der effektive Zins, den ein Investor beim Halten der Anleihe bis zur Fälligkeit erzielt. Der Durchschnitt wird aus den Verzinsungen der einzelnen Zahlungsströme gebildet, die sich aus den Kupons während der Laufzeit sowie Nennwert zum Fälligkeitstermin zusammensetzen.[107] Um die Rendite einer Kuponanleihe zu berechnen, wird der Marktpreis als Barwert der Zahlungsströme betrachtet und die gesuchte Rendite entspricht dem internen Zinsfuß. Diese Rendite sei mit $r(t,T)$ angegeben.[108]

Schließlich ist der **Terminzinssatz** der Zins, der für eine zukünftige Periode gültig ist. Sei im Zeitpunkt der preislichen Quotierung t_0 einer Anleihe der zukünftige Laufzeitbeginn der ersten Zahlung mit t' angegeben ($t' > t_0$) und das Laufzeitende mit der letzten Zahlung des Nennwertes im Zeitpunkt *T*. Es erfolgt z.B. eine zukünftige Investition in *t'* und die Zinsperiode endet zu einem späteren Zeitpunkt *T* mit Rückzahlung des Nennwertes. Der Terminzinssatz entspricht der Verzinsung für diese zukünftige Periode zum Zeitpunkt der Quotierung t_0 und

[107] Vgl. Schuster, T., Uskova, M. (2015): *Finanzierung: Anleihen, Aktien, Optionen*; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, S. 12 f.

[108] Diese Renditen entsprechen jedoch nicht laufzeitäquivalenten Zinssätzen, da bei einer nicht flachen Zinsstruktur die Zinssätze laufzeitverschieden sind. Angenommen es liegt eine steigende Zinsstrukturkurve vor und man betrachtet die Renditen und implizite Spotzinssätze einer Kuponanleihe. Dann wären die Spotzinssätze der Kupons mit kürzerer Laufzeit niedriger und die Spotzinssätze längerer Laufzeiten höher als die durchschnittliche Rendite. Vgl. hierzu Svensson, L. E. O. (1995), S. 14-15.

wird im Folgenden mit $f(t_0, t', T)$ angegeben oder auch vereinfacht ohne Quotierungsangabe mit $f_{t',T}$.

Von besonderer Bedeutung bei der Schätzung der Zinsstruktur sind die verschiedenen Renditen von Kuponanleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten. Die Differenzen der Renditen liefern Informationen für einen impliziten Terminzins, der für die zukünftige Differenzenperiode gültig ist.

3.2.3 Anleihen und Barwerte

Es sei durch $d(t,T)$ die Diskontierungsfunktion für den Nennwert einer Geldeinheit einer Nullkuponanleihe gegeben. Die Beziehung zum dazugehörigen Spotzinssatz $i(t,T)$ ist bei kontinuierlicher Verzinsung:

$$d(t,T) = exp\left(-\frac{i(t,T)}{100}(T-t)\right). \qquad \textbf{3.1}$$

Eine Nullkupon-Anleihe mit der Zahlung einer Geldeinheit in *m=T-t* Jahren besitzt danach den Diskontierungsfaktor $d(t,T)$ als ‚Nullkuponanleihepreis' zum Zeitpunkt t und spiegelt den Zeitwert des Geldes wider.[109]

Der Marktpreis einer Kuponanleihe sei der Barwert aller zukünftigen Auszahlungen mit laufzeitabhängigen Diskontierungsfaktoren oder Spotzinssätzen. Der in t aktuelle Barwert einer Kuponzahlung *c* zum Zeitpunkt *k* sei durch die Diskontierung c$d(t, t+k)$ gegeben und der Barwert des Nennwertes *F* dann mit der Restlaufzeit *m* analog zu den Kupons, $Fd(t, t+m)$. Es ergibt sich der Preis als Barwert der Kuponanleihe aus der Summe aller Barwerte von Kupons *c* und Nennwert *F*:

[109] Vgl. Schich, S. T. (1996): *Alternative Spezifikationen der deutschen Zinsstrukturkurve und ihr Informationsgehalt hinsichtlich der Inflation;* Diskussionspapier 8/96, Volkswirtschaftliche Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank, Oktober 1996, S. 5:
[http://www.bundesbank.de/Redaktion/DE/Downloads/Veroeffentlichungen/Diskussionspapiere_1/1996/1996_10_01_dkp_08.pdf?__blob=publicationFile (19.10. 2013)]

$$P(t,t+m) = \sum_{k=1}^{m} cd(t,t+k) + Fd(t,t+m).$$

3.2

Die Rendite von Kuponanleihen entspricht dem internen Zinsfuß mit dem Marktpreis als Barwert der Kupons und des Nennwertes.[110] Diese Rendite $r(t,t+m)$ der Kuponanleihe ist dann der konstante Zins in der Barwertbeziehung

$$P(t,t+m) = \sum_{k=1}^{m} c \cdot exp\left(-\frac{r(t,t+m)}{100}k\right) + F \cdot exp\left(-\frac{r(t,t+m)}{100}m\right).$$

3.3

Die Zinsstruktur gibt die Spotzinssätze an, die diese Barwertbedingungen für beobachtete Marktpreise mit den geringsten Abweichungen erfüllen.

Für kurze Laufzeiten am Geldmarkt sind Spotzinssätze von Nullkuponanleihen direkt beobachtbar. Längerfristige Anleihen besitzen sehr häufig Kuponzahlungen. Die wie o.a. berechnete Rendite der Kuponanleihen ist zur direkten Modellierung der Zinsstruktur nicht geeignet. Damit die Marktinformationen der Kuponanleihen mit in die Zinsstrukturkurve eingehen, werden laufzeitabhängige Spotzinssätze aus sog. impliziten Terminzinssätzen abgeleitet.[111]

3.2.4 Implizite Terminzinsen

Die folgenden Zusammenhänge zwischen Renditen, Termin- und Spotzinssätzen setzen die Gültigkeit der Erwartungshypothese voraus, die eine Grundlage für die Ermittlung und Interpretation der Zinsstruktur ist. Hiernach stehen die Spotzinssätze unter der Annahme von Arbitragefreiheit und Risikoneutralität in eindeutiger Beziehung zu impliziten Terminzinssätzen.[112]

---

[110] Vgl. Svensson, L. E. O. (1995), S. 15.

[111] Vgl. ebd., S. 16.

[112] Vgl. Hartmann-Wendels, T., Pfingsten, A., Weber, M. (2007): *Bankbetriebslehre*; 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, S. 261.

Ein impliziter Terminzinssatz aus verschiedenen Zero Bonds ergibt sich aus folgendem einfachen Zusammenhang bei diskreter Verzinsung:

$$\left(1 + i_{0,1}\right)\left(1 + f_{1,2}\right) = (1 + i_{0,2})^2.$$

Der implizite Terminzinssatz (hier: $f_{1,2}$) erfüllt die Anforderungen der Arbitragefreiheit.[113] Unter der Wiederanlageprämisse entspricht die Rendite von einperiodiger Nullkuponanleihe und Wiederanlage zum Terminzinssatz für eine weitere Periode der Rendite einer zweiperiodigen Nullkuponanleihe. Dieser Terminzinssatz $f_{1,2}$ stellt in diesem Beispiel die marginale Änderung der Spotzinssätze für die Laufzeit von einer und zwei Perioden dar. Sind die Spotzinssätze bei flacher Zinsstruktur konstant, entsprechen sie den Terminzinssätzen. Bei steigender Zinsstrukturkurve folgt $i_{0,1} < i_{0,2}$. Dann ist der Terminzinssatz $f_{1,2}$ größer als der Spotzinssatz der ersten Periode $i_{0,1}$, bei fallender Zinsstruktur ist dieser geringer.

Allgemein gilt dann für Spot- und Terminzinssätze[114]

$$(1 + i_{0,T})^T = \prod_{t=0}^{T-1}(1 + f_{t,t+1}).$$

Ein Spotzinssatz entspricht also dem Produkt der Terminzinssätze innerhalb einer Periode. Für Terminzinssätze mit beliebigen Laufzeiten länger als eine Periode gilt dann

$$\left(1 + f_{t,t',T}\right)^{T-t} = \frac{(1 + i_{t,T})^{T-t}}{(1 + i_{t,t'})^{t'-t}}.$$

Ein Terminzinssatz gibt demnach die marginale Änderung zwischen laufzeitverschiedenen Spotzinssätzen wieder. Diese Darstellung für kontinuierliche Zinssätze ergibt

$$e^{f(t,t',T)(T-t')} = e^{i(t,T)(T-t)} - e^{i(t,t')(t'-t)}.$$

Und nach Logarithmieren folgt

$$f(t,t',T)(T-t') = i(t,T)(T-t) - i(t,t')(t'-t).$$

[113] Vgl. Deutsche Bundesbank (1997), S. 66.

[114] Vgl. Schich, S. T. (1997), S. 5.

Bei kontinuierlicher Verzinsung ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Spotzinssätzen und impliziten Terminzinssätzen für Zinsperioden $[t';T]$:[115]

$$f(t,t',T) = \frac{(T-t)i(t,T) - (t'-t)i(t,t')}{T-t'}.$$

3.4

Von wesentlicher Bedeutung für die Schätzung der Zinsstruktur ist nun der sog. fristigkeits-unmittelbare Terminzins (engl.: *instantaneous forward rate*). Als anschauliches Beispiel für Zinsen mit kürzesten zukünftigen Laufzeiten werden von Svensson (1995) zukünftige Übernachtraten von Zentralbanken genannt.[116] Dieser unmittelbare Terminzinssatz für die Folge der zukünftigen Zeitpunkte *t'* folgt aus der Grenzwertbestimmung

$$f(t,t') = \lim_{T \to t'} f(t,t',T).$$

Der Terminzins für zukünftige Perioden $[t';T]$ ist ein Durchschnitt aller unmittelbaren Terminzinsen in diesem Zeitraum. Durch Integralbildung über $[t';T]$ und Division durch diese Periodenlänge ist dann der Terminzins für beliebige Periodenlängen[117]

$$f(t,t',T) = \frac{\int_{\tau=t'}^{T} f(t,\tau)d\tau}{T-t'}.$$

Wird nun der Beginn der Periode von aufeinanderfolgenden unmittelbaren Terminzinsen zum Zeitpunkt der Quotierung $t_0 = t = t'$ gewählt, entspricht der Terminzins über die gesamte Periode gedanklich einem Spotzinssatz zu diesem identischen Periodenbeginn. Ein Zusammenhang zwischen Spot- und Terminzinssätzen folgt dann aus der vorherigen Beziehung und der Spotzinssatz entspricht dem Integral der Terminzinsen von $\tau = t$ bis *T* dividiert durch die Periodenlänge *T-t*:[118]

[115] Vgl. Svensson, L. E. O. (1995), S. 16.

[116] Vgl. ebd., S. 16.

[117] Bei diskreter Verzinsung ist die Verknüpfung eine multiplikative Folge der unmittelbaren Terminzinsen, bei kontinuierlicher Verzinsung liegt eine Summenfolge vor und es folgt die Integralbildung.

[118] Vgl. Svensson, L. E. O. (1995), S. 17. Vgl. Deutsche Bundesbank (1997), S. 62.

$$i(t,T) = \frac{\int_{\tau=t}^{T} f(t,\tau)d\tau}{T-t}.$$

3.5

Hiermit können schließlich Spotzinssätze aus den unmittelbaren Terminzinssätzen abgleitet werden. Dies ist notwendig, da nach der Svensson-Methode die Terminstruktur an Stelle der Zinsstruktur ökonometrisch modelliert wird.

Es soll zur Erläuterung die Betrachtungsweise Svenssons aufgegriffen werden. Dieser vergleicht Renditen und Terminzinssätze mit der Systematik von Durchschnitts- und Grenzkosten aus der betriebswirtschaftlichen Kostentheorie. Wenn die Laufzeit eine Ausbringungsmenge darstellt, verhalten sich unmittelbarer Terminzins und Renditen wie Grenz- und Durchschnittskosten. Der unmittelbare Terminzins beschreibt die marginale Änderung der Rendite bei Erhöhung der Laufzeit um eine marginale Zeiteinheit.

Aus diesem Grund werden Terminzinskurven als theoretische Grundlage der Modellierung von Zinsstrukturen verwendet. Der Terminzins stellt den erwarteten Pfadverlauf der Zinsen über die Laufzeit dar und erlaubt daher eine auch aus geldpolitischer Sicht vorteilhafte getrennte Betrachtungsweise von kurz-, mittel- und langfristigen Erwartungen.[119] Vor allem für die Zinserwartungen am längeren Laufzeitende ist die Terminzinsstruktur nicht durch eine Durchschnittsbildung über die gesamte Laufzeit beeinflusst und ermöglicht eine bessere Betrachtungsweise.[120]

Ein typischer Verlauf der Termin- und Zinsstrukturkurve ist in Abbildung 7 dargestellt. Die Kurven beginnen im gleichen Ursprung, bei steigender Zinsstruktur liegt der Terminzins oberhalb der Zinsstruktur, sonst darunter. Ähnlich wie bei der betriebswirtschaftlichen Kostensystematik schneidet der Terminzins die Zinsstruktur in dem Punkt, in dem die Zinsstruktur flach verläuft. Der Terminzins gleicht den ‚Durchschnittszinsen', so wie Grenzkosten die Durchschnittskosten schneiden. Weiterhin ist zu erkennen, dass der

[119] Vgl. Svensson, L. E. O. (1995), S. 14.

[120] Für den Termin- und Spotzinssatz kann noch folgende nützliche Relation angegeben werden, nach der ein Terminzins dem (durchschnittlichen) Spotzins plus einem marginalen Grenzzins entspricht: $f(t,T) \equiv i(t,T) + (T-t)\frac{\partial i(t,T)}{\partial T}$.

zeitliche Pfadverlauf der Zinsentwicklung durch die Terminzinskurve insbesondere im Bereich langer Laufzeiten deutlicher zum Vorschein kommt.

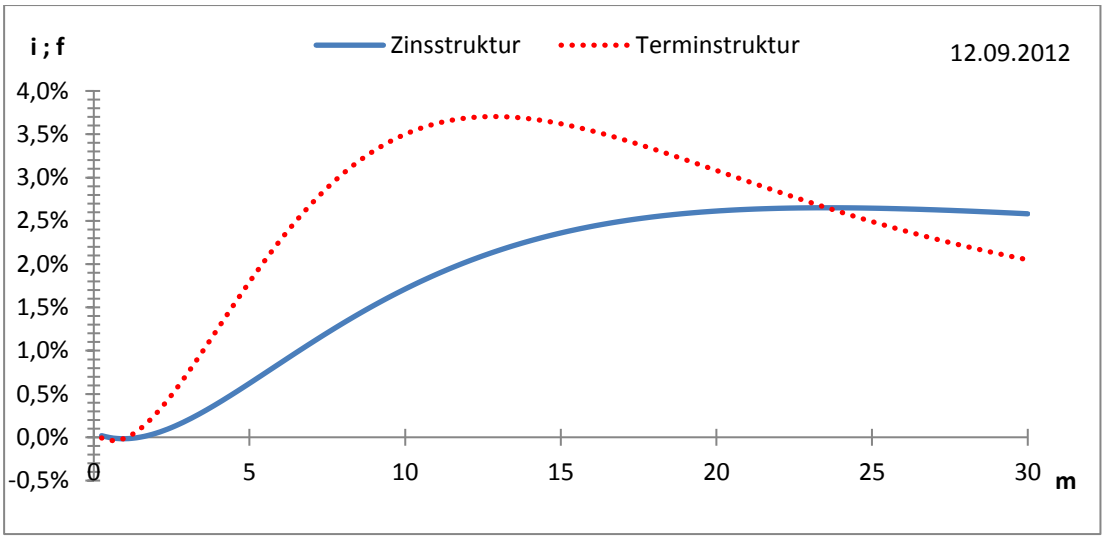

Abbildung 7: Typische Termin- und Zinsstrukturkurve für den 12.09.2012 in Deutschland. Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung gem. Veröffentlichung der Parameter durch die Deutsche Bundesbank.[121]

3.3 Verfahrensstandard: Die Svensson Methode

Die von der Bundesbank veröffentlichte Zinsstrukturkurve gibt Spotzinssätze für Laufzeiten von bis zu 30 Jahren an. Da Marktbeobachtungen nicht für alle Laufzeiten vorliegen, handelt es sich bei einer kontinuierlichen Zinsstrukturkurve um eine Modellanpassung an einen empirischen Datenbestand.

Ein Modell für die Zinsstrukturkurve unterliegt zwei wesentlichen teilweise konkurrierenden Anforderungen: Zum einen soll eine ausreichende Glätte vorliegen, um den Verlauf ausreichend zu plausibilisieren. Zum anderen sollte eine Flexibilität vorhanden sein, die eine ausreichende Anpassungsfähigkeit an Datenbestände gewährleistet.[122] Die im Folgenden vorgestellten Methoden von Nelson, Siegel (1987) und Svensson (1995) erfüllen diese Eigenschaften und werden von der Deutschen Bundesbank und auch vielen anderen

[121] Die Parameter der Termin- oder Zinsstruktur werden durch die Deutsche Bundebank veröffentlicht: [http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Makrooekonomische_Zeitreihen/its_list_node.html?listId=www_s140_it03c (02.01 2016)]

[122] Vgl. Deutsche Bundebank (1997), S. 63.

Zentralbanken derzeit verwendet.[123] Ausgangspunkt ist eine zu modellierende Terminstrukturkurve aus der dann die Zinsstruktur gemäß 3.5 abgeleitet wird.

3.3.1 Ökonometrisches Model: Nelson-Siegel-Svensson

Für unmittelbare Terminzinssätze typische Verläufe können als flach, U-förmig oder buckelig sowie S-förmig beschrieben werden.[124]

Als ursprüngliche Version ist das Nelson-Siegel-Modell Ausgangspunkt für die aktuell verwendete Svensson-Methode. Als Modell für eine Terminzinsstruktur wurde von Nelson und Siegel folgende Funktion vorgeschlagen,[125] die von Svensson um einen Term erweitert wurde, und so eine zusätzliche Flexibilität ermöglicht.[126] Der theoretische unmittelbare Terminzins ist danach:

$$f(m, \mathbf{b}) = \beta_0 + \beta_1 e^{\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)} + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} e^{\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)} + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} e^{\left(-\frac{m}{\tau_2}\right)}, \qquad \textbf{3.6}$$

mit

m: Laufzeit,

τ_1, τ_2: Modellkoeffizienten die konstante Zeitpunkte darstellen,

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$: Modellkoeffizienten,

und $\beta_0, \tau_1, \tau_2 > 0$.

Die Koeffizienten des Parametervektors $\mathbf{b} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$ bestimmen den charakteristischen Verlauf und sind für den Zweck der vorliegenden Arbeit inhaltlich eher

[123] Vgl. Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 211. Vgl. Hewicker, H., Cremers, H. (2011): *Modellierung von Zinsstrukturkurven*; Frankfurt School of Finance & Management, Working Paper Nr. 165, S. 29.

[124] Vgl Vgl. Schich, S. T. (1996), S. 3.

[125] Vgl. Nelson, C. R., Siegel, A. F. (1987): *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, The Journal of Business, Band 60, Ausgabe 4, S. 475.

[126] Vgl. Deutsche Bundesbank (1997): *Schätzung von Zinsstrukturkurven*; Monatsbericht Oktober 1997, S. 64.

unbedeutsam.[127] Relevant ist dagegen, dass diese Koeffizienten anhand empirischer Marktbeobachtungen geschätzt werden, den Basiszins in der Unternehmensbewertung bestimmen und einem Schätzfehler unterliegen.

In Abbildung 8 sind die Svensson-Komponenten (nach den vier Termen aus 3.6) aus der Zins- und Terminstruktur nach Abbildung 7 dargestellt.

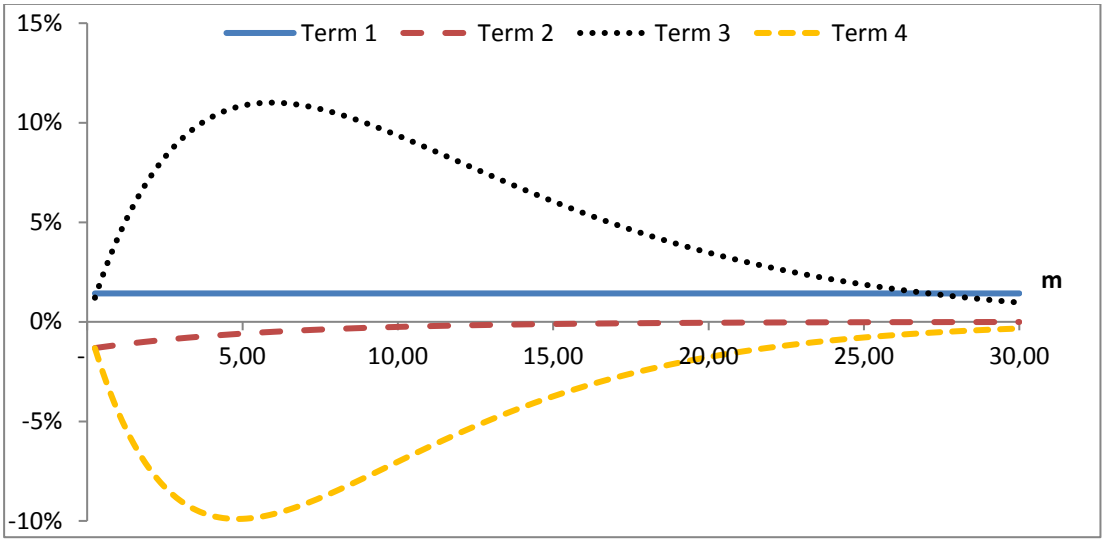

Abbildung 8: Komponenten der Svensson Terminstruktur für den 12.09.2012. Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung gemäß den veröffentlichten Parametern der Deutschen Bundesbank.

Um aus der unmittelbaren Terminzinsstruktur die Spotzinsen zu ermitteln, wird aus

$$i(t,T) = \int_{\tau=t}^{T} f(t,\tau)d\tau \cdot \frac{1}{T-t}$$

[127] Vgl. Svensson, L. E. O. (1995), S. 17 f. Zusätzlich ist bei der Svensson Erweiterung für eine Maximum Likelihood Schätzung die Bedingung $\tau_1 \neq \tau_2$erforderlich, da eine Überparametrisierung eine Berechnung von Varianzen und Kovarianzen nicht zulässt. Der Svensson-Erweiterungsterm wäre in diesem Fall nicht zu verwenden. Vgl. Svensson, L. E. O. (1995), S. 24 f. Die Koeffizienten lassen sich wie folgt veranschaulichen. Mit β_0 ist eine asymptotische Forward Rate gegeben, da der Terminzins mit steigender Laufzeit gegen β_0 strebt. Der zweite Term $\beta_1 e^{\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}$ lässt den Terminzins für positive β_1 monoton steigen, für negative β_1 monoton fallen. Durch den dritten Term $\beta_2 \frac{m}{\tau_1} e^{\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}$ wird für negative β_2 ein U-förmiger, für positive β_2 ein buckliger Zinsverlauf generiert. Svenssons hinzugefügter vierter Term ermöglicht zusätzliche Modellflexibilität für längere Laufzeiten.

nach 3.5 das Integral über die Laufzeitperiode von $t = t_0$ bis T ermittelt und durch die Periodenlänge $m = T - t$ dividiert.

Die resultierende Nelson-Siegel-Svensson Zinsstruktur ist dann:[128]

$$i(m, \mathbf{b}) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{\frac{m}{\tau_1}} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{\frac{m}{\tau_1}} - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}}{\frac{m}{\tau_2}} - e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)} \right). \quad \textbf{3.7}$$

Die theoretischen Diskontierungsfaktoren ergeben sich dann durch Einsetzen der theoretischen Spotzinssätze in die Diskontierungsfunktion aus 3.1.

3.3.2 Modellanpassung

Die Modellanpassung der theoretischen Zinsverläufe erfolgt mittels Marktbeobachtungen von täglichen Preisen für die in 3.2 angegebenen Anleihen. Die Anpassung kann durch die Minimierung von Preis- oder Renditefehlern erfolgen.

Die Zinsstruktur hat insbesondere aus geldpolitischen Zwecken vordergründig die Erklärung von Renditen bzw. Zinsen an Stelle von Marktpreisen als Ziel. Weiterhin ist die Minimierung von Preisfehlern mit teilweise erheblichen Renditeabweichungen für kürzere Laufzeiten verbunden, da die Preissensitivität bezüglich der Zinsen für kürzere Laufzeiten abnimmt.[129] Daher wird die Minimierung von Renditefehlern in der Literatur bevorzugt und derzeit auch von der Deutschen Bundesbank angewandt.[130]

Die Renditefehler ergeben sich aus der Differenz zwischen beobachteten Renditen $r(t)$ und den theoretischen geschätzten Renditen $\hat{r}\left(t, \hat{\mathbf{b}}\right)$. Die Anzahl der zur Schätzung verwendeten Anleihen sei mit *N* angegeben. Der geschätzte Parametervektor $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$ ist nach Erfüllung des folgenden Optimierungskriteriums der minimalen Quadratsumme der Renditefehler gefunden:

---

[128] Vgl. Svensson, L. E. O. (1995), S. 18.

[129] Vgl. ebd., S. 19. Vgl. Schich, S. T. (1997), S. 18. Vgl. Deutsche Bundesbank (1997), S. 66.

[130] Vgl. ebd., S. 65. Vgl. Schich, S. T. (1997), S. 3.

$$\sum_{n=1}^{N} \left[\hat{r}_n(m, \hat{\mathbf{b}}) - r_n(m)\right]^2 \rightarrow min!$$

Im ersten Schritt werden anhand der Svensson-Funktion nach 3.7 Spotzinssätze $\hat{\imath}(m, \hat{\mathbf{b}})$ für einen Startwert von $\hat{\mathbf{b}}$ berechnet. Daraus werden die theoretischen Diskontierungsfaktoren aus 3.1 abgeleitet, um hiermit theoretische Preise nach 3.2 als Barwerte der Kupons und des Nennwertes zu ermitteln. Anhand der ermittelten theoretischen Preise sowie der Zahlungsströme von Kupons und Nennwert werden dann theoretische Renditen $\hat{r}(t, \hat{\mathbf{b}})$ nach 3.3 für die betrachteten Anleihen als Interner Zinsfuß durch den Newton-Raphson Algorithmus ermittelt.[131]

Empirische Renditen $r(t)$ werden aus Marktpreisen und Zahlungsströmen in Form von Kupons und Nennwert ebenfalls durch den Newton-Raphson Algorithmus errechnet. Diese empirischen Renditen werden dann den zuvor ermittelten modelltheoretischen Renditen gegenübergestellt.

Da der Renditefehler einer nicht-linearen Funktion des gesuchten Parametervektors $\hat{\mathbf{b}}$ in Form einer nicht-linearen Kleinste-Quadrate-Optimierung entstammt,[132] wird der zu schätzende Parametervektor $\hat{\mathbf{b}}$ iterativ ermittelt. Ausgehend von einem beliebigen Startwert für $\hat{\mathbf{b}}$ werden die Parameter so oft variiert, bis das Optimum der minimalen Renditefehler erreicht ist. Für die Wahl eines Startwertes für $\hat{\mathbf{b}}$ ermöglichen die Nebenbedingungen von 3.6 plausible Ergebnisse.[133]

In Tabelle 4 sind die einzelnen Berechnungsschritte zur Ermittlung der Zinsstruktur nach der hier beschriebenen und von der Bundesbank verwendeten Nelson-Siegel-Svensson Methode zusammenfassend dargestellt.[134]

---

[131] Vgl. ebd., S. 17 ff.

[132] Vgl. ebd., S. 18.

[133] Vgl. Deutsche Bundesbank (1997), S. 65.

[134] In der Nicht-linearen Regression wird als Schätzalgorithmus häufig die Gauss-Newton Iteration verwendet. Es sei an dieser Stelle jedoch Bezug auf die Darstellung des Verfahrens der Dt. Bundesbank genommen. Das Ergebnis dieser Optimierung entspricht einem Maximum-Likelihood Schätzer, der sich im Hinblick auf die Inferenzmethoden von den Eigenschaften der Gauss-Newton Ergebnisse nicht unterscheidet.

Schritt	Beschreibung	Berechnung
1.	Initialisierung durch Festlegung eines Startwertes für $\hat{\mathbf{b}}$	$\hat{\mathbf{b}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$
2.	Berechnung der theoretischen Spotzinsen anhand der Zinsstruktur und der Parameter $\hat{\mathbf{b}}$ aus Schritt 1.	$i(m, \hat{\mathbf{b}}) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\hat{\tau}_1}\right)}}{\frac{m}{\hat{\tau}_1}} + \hat{\beta}_2 \left(\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\hat{\tau}_1}\right)}}{\frac{m}{\hat{\tau}_1}} - e^{\left(\frac{-m}{\hat{\tau}_1}\right)} \right) + \hat{\beta}_3 \left(\frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\hat{\tau}_2}\right)}}{\frac{m}{\hat{\tau}_2}} - e^{\left(\frac{-m}{\hat{\tau}_2}\right)} \right)$
3.	Bestimmung der theoretischen Diskontierungsfaktoren	$\hat{d}(m, \hat{\mathbf{b}}) = exp\left(-\frac{\hat{\imath}(m, \hat{\mathbf{b}})}{100} m \right)$
4.	Berechnung der theoretischen Anleihen-Preise mittels Barwertfunktion	$\hat{P}(\hat{\mathbf{b}}, m) = \sum_{k=1}^{m} c\hat{d}(m, \hat{\mathbf{b}}) + F\hat{d}(m, \hat{\mathbf{b}})$
5.	Berechnung der theoretischen Renditen $\hat{r}$ für $n = 1 \dots N$ Anleihen anhand der Barwertbedingung mittels Newton-Raphson Verfahren	$\hat{P}_n(\hat{\mathbf{b}}, m) = \sum_{k=1}^{m} c \cdot exp\left(-\frac{\hat{r}_n(m, \hat{\mathbf{b}})}{100} k \right) + F \cdot exp\left(-\frac{\hat{r}_n(m, \hat{\mathbf{b}})}{100} m \right)$
6.	Berechnung des Zielwertes des minimalen quadrierten Renditefehlers	$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\hat{r}_n(m, \hat{\mathbf{b}}) - r_n(m) \right]^2} \rightarrow min!$
7.	Überprüfung des Abbruchkriteriums: Renditefehler = min!, sonst Wiederholung mit neuem Parametervektor $\hat{\mathbf{b}}$ in Schritt 1.	$RMSE = min!$

Tabelle 4: Methode zur Berechnung der Zinsstruktur nach Nelson-Siegel-Svensson.

3.3.3 Schätzfehler

Ein empirischer Schätzfehler ergibt sich aus der Differenz von geschätzten und empirischen Renditen. Dieser wird in der Literatur auch ‚Root mean squared error' (RMSE) bezeichnet:[135]

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\hat{r}_n(m, \hat{\mathbf{b}}) - r_n(m)\right]^2} \qquad \textbf{3.8}$$

Historisch gesehen beträgt der mittlere Renditefehler der Svensson-Zinsstruktur in Deutschland für den Zeitraum 1972-1996 ca. 0,12 %, und im Durchschnitt der 1990er Jahre 0,094 %.[136] Reese und Wiese haben für den 19.06.2006 anhand von 49 Bundesanleihen eine Svensson-Schätzung vorgenommen und einen mittleren Renditefehler von 0.022 % festgestellt.[137] Wie Schich (1997) gezeigt hat, variieren die Renditefehler erheblich im historischen Zeitverlauf, wobei eine Verringerung des Fehlers über die Jahre erkennbar ist.[138]

3.4 Statistische Inferenz für die Zinsstruktur: Delta-Methode

Für das Betreiben statistischer Inferenz stellt sich nun die Frage, welche Verteilung die geschätzten Zinssätze besitzen.

Der geschätzten Parameter der Zinsstruktur $\hat{\mathbf{b}}$ entsprechen einer Maximum-Likelihood Schätzung.[139] Mittels zentralem Grenzwertsatz ist dieser ML-Schätzer konsistent und asymptotisch normalverteilt.[140]

Die Spot- und Terminzinssätze sind in dem vorgestellten Modell der Svensson-Methode nicht-lineare Funktionen der geschätzten Parameter. Sind die als Zufallsvariablen zu betrachtenden geschätzten Modellparameter asymptotisch normalverteilt, kann auf eine asymptotische Normalverteilung einer nicht-linearen Funktion dieser Zufallsvariablen

---

[135] Vgl. Barrot, C. (2006): *Methodik der empirischen Forschung*; 1. Auflage, Albers, Klapper, Konradt, Wolf (Hrsg.), Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden, S. 434.

[136] Vgl. Schich, S. T. (1997), S. 23.

[137] Vgl. Reese, R., Wiese, J. (2006), S. 10.

[138] Vgl. Schich, S. T. (1997), S. 24.

[139] Vgl. Dormann, C. (2013): *Parametrische Statistik*; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, S. 51.

[140] Vgl. Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 46.

geschlossen werden.[141] Aufgrund einer anzunehmenden Normalverteilung der Schätzparameter $\hat{\mathbf{b}}$ mittels zentralem Grenzwertsatz seien nun die Spotzinssätze $\hat{\imath}(m, \hat{\mathbf{b}})$ als nicht-lineare Funktion der Parameter ebenfalls normalverteilt angenommen.

Dann ist noch die Frage zu klären welche Parameter ‚Erwartungswert' und ‚Varianz' die Normalverteilung besitzt. Die Delta-Methode ist ein Verfahren, mit dem Erwartungswerte und Varianzen von nicht-linearen Funktionen approximativ bestimmt werden können.[142] Ist die Verteilung parametrisiert, können für die geschätzten Spot- und Terminzinssätze statistische Inferenzaussagen wie z.B. mittels Signifikanztest oder Konfidenzintervallen getroffen werden.

3.4.1 Delta-Methode und Taylor Reihenentwicklung

Die formale Herleitung der Delta-Methode beruht auf der Taylor Entwicklung einer nicht linearen Funktion, die im Folgenden knapp skizziert ist.

Eine Funktion $f(x)$ besitzt als Approximation an der Stelle *a* die Taylor-Entwicklung:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + r(x).$$

Sei die Approximation ersten Grades, $n = 1$, als ausreichend und das Restglied $r(x)$ als vernachlässigbar erachtet, folgt an der Stelle $a = \mu$ die Approximation[143]

$$f(x) \approx f(\mu) + f'(\mu)(x-\mu).$$

Um Erwartungswert und Varianz eines Funktionswertes $f(X)$ einer Zufallsvariable *X* zu bestimmen, kann diese Taylor-Approximation herangezogen werden:[144]

---

[141] Vgl. Schlittgen, R., Streitberg, H. J. (2001): *Zeitreihenanalyse*; 9. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, S. 512.

[142] Vgl. Oehlert, G. W. (1992): *A Note to the Delta Method*; The American Statistician, Band 46, Ausgabe 1, S. 27-29. Der Name Delta-Methode beruht anscheinend auf der Tatsache, dass die angegebenen Näherungen nur in einer unmittelbaren Umgebung um den Erwartungswert gelten. Diese Umgebung wird als Delta-Umgebung bezeichnet, für die die Taylor-Approximation ebenfalls Anwendung findet, sodass das Restglied *r(x)* vernachlässigt werden kann.

[143] Auch in anderen Anwendungen wird nach dem ersten Glied die Taylor-Reihe abgebrochen, vgl. z.B. Schlittgen, R., Streitberg, H. J. (2001), S. 513.

[144] Vgl. Ver Hoef, J. M. (2012): *Who invented the Delta Method?*; The American Statistician, Band 66, Ausgabe 2, S. 124-127.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[f(X)] &\approx \mathrm{E}[f(\mu)] + \mathrm{E}[f'(\mu)(X-\mu)] \\ &= \mathrm{E}[f(\mu)] + f'(\mu)\mathrm{E}[(X-\mu)] \\ &= \mathrm{E}[f(\mu)].\end{aligned}$$

Unterliegt der geschätzte Parametervektor keinen Verzerrungen und ist somit erwartungstreu, also $\mu_{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}$, folgt der Erwartungswert der geschätzten Spotzinsen

$$\mathrm{E}[\hat{\imath}(m,b)] = E[i(m,\hat{\mathbf{b}})].$$

Und für die Varianz folgt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[f(X)] &\approx \mathrm{Var}[f(\mu)] + \mathrm{Var}[f'(\mu)(X-\mu)] \\ &= \mathrm{Var}\lfloor f'(\mu)(X-\mu)\rfloor \\ &= \lfloor f'(\mu)\rfloor^2 \mathrm{Var}[X-\mu] \\ &= \lfloor f'(\mu)\rfloor^2 \mathrm{Var}[X].\end{aligned}$$

Die Varianz eines Funktionswertes lässt sich demnach durch das Produkt der quadratischen Ableitung an der Stelle μ und der Varianz der Zufallsvariable *X* approximieren.[145] Daraus folgt die gesuchte Varianz von geschätzten Spotzinsen

$$\mathrm{Var}[\hat{\imath}(m,b)] \approx [i(m,\hat{\mathbf{b}})]^2 \mathrm{Var}[\hat{\mathbf{b}}].$$

Für den hier vorliegenden multivariaten Fall gilt dann in analoger Weise[146]

$$\mathrm{Var}[\hat{\imath}(m,b)] = \boldsymbol{D\Sigma D}'.$$

3.9

mit $\boldsymbol{\Sigma}$ als Kovarianzmatrix von $\hat{\mathbf{b}}$ und $\boldsymbol{D}$ als Matrix der partiellen Ableitungen von $i(m,\hat{\mathbf{b}})$ an der Stelle $\mu = \hat{\mathbf{b}}$. Wie bei den quadrierten Ableitungen im univariaten Fall wird die Kovarianzmatrix mit der Matrix der partiellen Ableitungen an der Stelle $\boldsymbol{\mu}$ zweimal multipliziert.

[145] Die Approximation darf für ein ausreichend schmales Intervall angenommen werden, bei dem z.B. ausreichend Wahrscheinlichkeitsmasse lokalisiert werden kann. Dies darf für die Umgebung um den Erwartungswert μ angenommen werden.

[146] Vgl. Schlittgen, R. (2010), S. 157 f.

3.4.2 Delta-Methode und Stichprobenverteilung der Svensson Zinsstruktur

Es müssen also die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ von $\hat{\mathbf{b}}$ und die Matrix $\boldsymbol{D}$ der partiellen Ableitungen von $i(m, \hat{\mathbf{b}})$ für die jeweilige Laufzeiten *m* bestimmt werden.

Der Vektor der partiellen Ableitungen $\boldsymbol{D}$ für die Spotzinsen aus 3.7 folgt aus:

$$\boldsymbol{D} = \left[\frac{\partial i(m, \hat{\mathbf{b}})}{\partial \mathbf{b}} | \mathbf{b} = \boldsymbol{\mu}\right],$$

3.10

mit $\hat{\mathbf{b}}$ als Schätzer des Erwartungswertes $\boldsymbol{\mu}$.[147] Es wird also die Funktion der Zinsstruktur partiell nach den sechs Parametern abgeleitet.

Dann ist noch die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ der geschätzten Parameter $\hat{\mathbf{b}} = (\widehat{\boldsymbol{b_0}}, \widehat{\boldsymbol{b_1}}, \widehat{\boldsymbol{b_2}}, \widehat{\boldsymbol{b_3}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}_1, \hat{\boldsymbol{\tau}}_2)$ zu bestimmen:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{\widehat{b_0}}{}^2 & \cdots & \boldsymbol{\sigma}_{\widehat{\tau_2},\widehat{b_0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{\widehat{b_0},\widehat{\tau_2},} & \cdots & \boldsymbol{\sigma}_{\widehat{\tau_2}}{}^2 \end{pmatrix}.$$

Es kann hierfür die Tatsache genutzt werden, dass der ermittelte Schätzvektor $\hat{\mathbf{b}}$ nach dem Kleinste-Quadrate Kriterium aus dem Newton-Raphson Verfahren Eigenschaften eines Maximum-Likelihood Schätzers besitzt.[148] Bei Erfüllung des zentralen Grenzwertsatzes mit großen Stichprobenumfängen ist dieser Schätzer konsistent und asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert $\hat{\mathbf{b}}$ und die Varianz konvergiert gegen die inverse Fisher-Informationsmatrix.[149]

Die Informationsmatrix folgt aus dem negativen Erwartungswert der Hesse-Matrix, $I^{-1}(\mathbf{b}) = -E[H(\mathbf{b})]^{-1}$, welche durch $H(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 lnL(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{b'}}$ gegeben ist. Der Erwartungswert der Hesse-

[147] Vgl. Schlittgen, R., Streitberg, H. J. (2001), S. 515.

[148] Vgl. Dormann, C. (2013), *Parametrische Statistik*; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, S. 51.

[149] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 131. Dieser Schätzer besitzt zusätzlich die Eigenschaft der minimalen Varianz (Effizienz).

Matrix kann für die Berechnung der Informationsmatrix mit der Likelihoodfunktion *L* an den empirischen Beobachtungen ersetzt werden:

$$H(\hat{\mathbf{b}}) = \frac{\partial^2 lnL(\widehat{\boldsymbol{b}})}{\partial \hat{\mathbf{b}} \partial \hat{\mathbf{b}}'}$$

Es wird hierbei von der beobachteten Informationsmatrix gesprochen und die gesuchte Kovarianzmatrix der Schätzkoeffizienten kann mit $I^{-1}(\hat{\mathbf{b}}) = H(\hat{\mathbf{b}})^{-1}$ berechnet werden:[150]

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}(\hat{\mathbf{b}}) = \frac{I^{-1}(\hat{\mathbf{b}})}{n}.$$

3.11

Mit dem Vektor ***D*** der partiellen Ableitungen und der geschätzten Kovarianzmatrix $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ ist die Normalverteilung der Spotzinssätze aus der Zinsstruktur nun spezifiziert:

$$\hat{\imath}(m, \widehat{\boldsymbol{b}}) \sim \mathrm{N}\big(i(m, \widehat{\boldsymbol{b}}), \boldsymbol{D}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}(\hat{\mathbf{b}})\boldsymbol{D}'\big).$$

3.12

3.5 Anwendung der Delta-Methode auf die Deutsche Zinsstruktur

Im Folgenden wird die deutsche Zinsstruktur für den 09.01.2014 nach dem angegebenen Verfahren ermittelt. Die verwendeten Daten entstammen Veröffentlichungen der Deutschen Bundesbank. Es handelt sich um 59 Kurse sowie Renditen von Kupon- und Nullkuponanleihen der Bundesrepublik Deutschland, die sich aus Bundesschatzanweisungen, Bundesobligationen und Bundesanleihen zusammensetzen.[151] Die verwendeten Daten sind in Anhang 1 angegeben.

[150] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 47.

[151] Deutsche Bundesbank: Kurse und Renditen börsennotierter Bundeswertpapiere: [https://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Service/Bundeswertpapiere/Kurse_und_Renditen/kurse_und_renditen.html (13.02.2016)].

In einem ersten Schritt werden mittels Newton-Raphson Verfahren die Parameter bestimmt, die das Zielkriterium des kleinsten ‚Root Mean Squared Errors' (RMSE) nach 3.8 erfüllen. Der optimierende Parametervektor ergibt einen minimalen $RMSE$ von 0,1828.

In Abbildung 9 sind die geschätzte Zinsstruktur sowie die zugrundeliegenden empirischen Renditen der 59 Anleihen dargestellt. Die berechneten Zinssätze der Zinsstruktur sind in Anhang 2 angegeben.

Die Anzahl der beobachteten Renditen nimmt mit längeren Restlaufzeiten ab. Auch wenn das Svensson-Modell eine hohe Flexibilität ermöglicht, sind Abweichungen zwischen Nelson-Siegel-Svensson Modell und empirischen Renditen erkennbar.

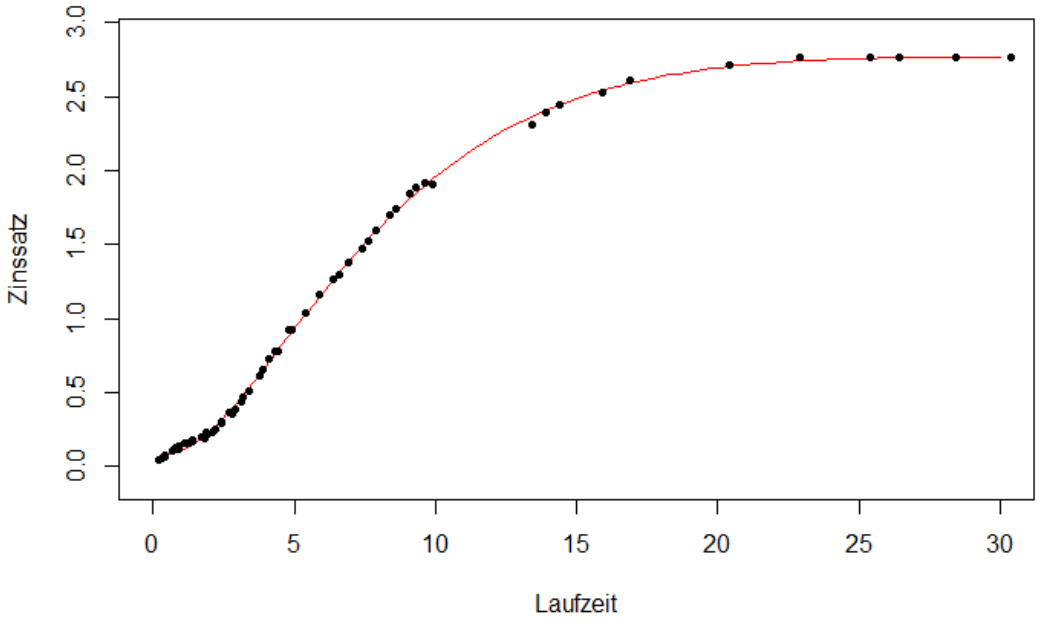

Abbildung 9: Svensson-Zinsstruktur (rot) und empirische Renditen (schwarz) von Bundesanleihen, Bundesschatzanweisungen und Bundesobligationen am 09.01.2014. Quelle: Renditen von Bundesanleihen, Bundesschatzanweisungen und Bundesobligationen der Deutschen Bundesbank. Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.

Um die Standardfehler sowie die Kovarianzen der Modellparameter zu bestimmen, wird zunächst die Hesse-Matrix als Matrix der zweiten partiellen Ableitungen nach den Parametern berechnet. Die Kovarianzmatrix folgt dann aus der Invertierung der Hesse-Matrix

nach 3.11. Diese beobachtete Fisher Informationsmatrix enthält die Varianzen und Kovarianzen der Parameter und ist in Anhang 3 angegeben.

Die Quadratwurzel der Diagonalelemente der Kovarianzmatrix ergibt dann die Standardfehler der Schätzparameter, die in der folgenden Tabelle 5 dargestellt sind.

Parameter	$\widehat{b}_0$	$\widehat{b}_1$	$\widehat{b}_2$	$\widehat{b}_3$	$\hat{\tau}_1$	$\hat{\tau}_2$
Schätzwert	2,59	-2,49	-10,69	10,62	3,61	5,05
Standardfehler	0,410	0,392	9,592	9,779	0,629	1,267

Tabelle 5: Geschätzte Parameter der Zinsstruktur und ihre Standardfehler für den 09.01.2014. Quelle: Eigene Berechnungen in R.

Aus der Kovarianzmatrix und der Matrix der partiellen Ableitungen der Zinsstruktur nach 3.10 folgen schließlich nach Anwendung der Delta-Methode gemäß 3.12 die Standardfehler der geschätzten Spotzinssätze aus der Zinsstruktur. In Abbildung 10 sind die Standardfehler für jährliche Restlaufzeiten bis zu 30 Jahren dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Standardfehler mit steigenden Restlaufzeiten tendenziell zunehmend ist. Für Laufzeiten unter fünf Jahren beträgt dieser ca. 0.02 %-Punkte und für 30-jährige Laufzeiten steigt der Standardfehler auf bis zu 0,05 %-Punkte an.

Der verwendete Basiszins besitzt demnach mit höherer Laufzeit eine höhere Schätzunsicherheit. Diese beruht auch auf einer geringeren Anzahl von Marktbeobachtungen für hohe Laufzeiten.

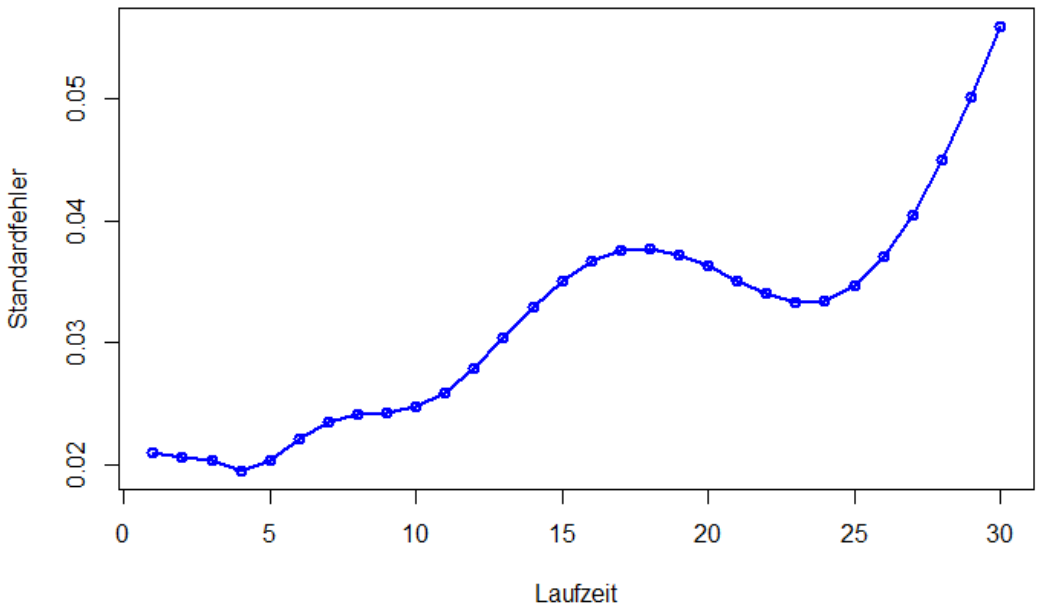

Abbildung 10: Standardfehler der Zinsstruktur für Laufzeiten bis zu 30 Jahren in Prozentpunkten.
Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.

Mit dem Quantil $z_{0,975} = 1{,}96$ der Normalverteilung ergibt sich dann ein symmetrisches 95 %-Konfidenzintervall für die ermittelte Zinsstruktur:

$$\hat{\imath}\left(m, \widehat{\boldsymbol{b}}\right) \pm z_{0,975} \cdot \boldsymbol{D}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\left(\hat{\mathbf{b}}\right)\boldsymbol{D}'.$$

Abbildung 11 zeigt die Zinsstruktur, deren empirische Beobachtungen und die 95 %-Konfidenzbänder. Die höhere Schätzunsicherheit für Spotzinssätze mit hohen Restlaufzeiten wird durch die Verbreiterung des Konfidenzbandes deutlich. Die Ober- und Untergrenzen der Konfidenzintervalle sind für die geschätzte Zinsstruktur ebenfalls in Anhang 2 angegeben.

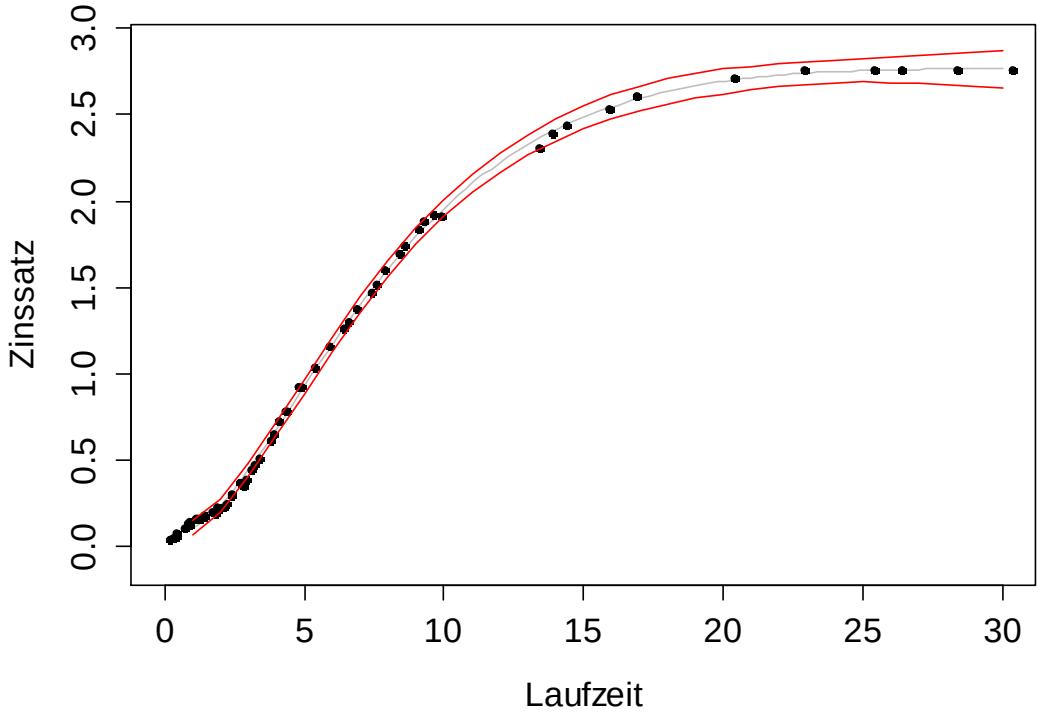

Abbildung 11: Zinsstruktur, empirische Renditen und 95 %-Konfidenzbänder. Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.

Für kurze Laufzeiten von bis zu fünf Jahren liegt die Intervallbreite bei ca. 0,08 %-Punkten, für Laufzeiten von 25 Jahren bei ca. 0,14 %-Punkten und für 30-jahrige Laufzeiten bei über 0,2 %-Punkten.

3.6 R-Code Basiszins

```
#Kapitel 2: Der Basiszinssatz



#Packages installieren,laden, Daten einlesen und extrahieren
install.packages("msm")
library(msm)

#Daten einlesen
rm(list=ls())
anleiherenditen<- read.table(file =
"d:/sicherung10/Diss/Daten/Nelson Siegel Svensson.txt", sep =
"\t",dec=",", header=TRUE)
renditeempirisch<-anleiherenditen[,6]
laufzeit<-anleiherenditen[,5]

#Nelson Siegel Svensson Zinsstruktur
svensson<- function(m){
    b0+b1*((1-exp(-m/tau1))/(m/tau1))+b2*((1-exp(-
m/tau1))/(m/tau1)-exp(-m/tau1))+b3*((1-exp(-m/tau2))/(m/tau2)-exp(-
m/tau2))
}

#Fehlersumme
renditefehler<-function(theta){
  m<-laufzeit
  modellwert<-theta[1]+theta[2]*((1-exp(-
m/theta[5]))/(m/theta[5]))+theta[3]*((1-exp(-
m/theta[5]))/(m/theta[5])-exp(-m/theta[5]))+theta[4]*((1-exp(-
m/theta[6]))/(m/theta[6])-exp(-m/theta[6]))
  fehler<-(renditeempirisch-modellwert)^2
  sum(fehler)
}

#Newton Raphson Optimierung
newraph<-nlm(renditefehler,c(0.599,-0.6464025,-
5.8822219,12.0981763,3.9999471,8.9009201),hessian=TRUE,iterlim=100,
check.analyticals = TRUE)
```

```
newraphschatzer<-newraph$estimate #ML-Schatzer (Newton Raphson)
newraphgradient<-newraph$gradient #Newton-Raghson Gradient
bfi<-solve(newraph$hessian)/length(laufzeit)#Inverse der Hessschen: Beobachtete Fisher Informationsmatrix
sf<-sqrt(diag(bfi)) #Quadratwurzel der Diagonalelemente: Standardfehler


#Standardfehler Basiszins
standardfehler_basiszins<-c()
  for (i in 1:30) {
  m<-i
  standardfehler_basiszins[i]<-deltamethod(~ x1+x2*((1-exp(-m/x5))/(m/x5))+x3*((1-exp(-m/x5))/(m/x5)-exp(-m/x5))+x4*((1-exp(-m/x6))/(m/x6)-exp(-m/x6)), newraphschatzer, bfi)
}


#Schätzwerte
b0<-newraphschatzer[1]
b1<-newraphschatzer[2]
b2<-newraphschatzer[3]
b3<-newraphschatzer[4]
tau1<-newraphschatzer[5]
tau2<-newraphschatzer[6]

zinsstruktur<-c()
for (i in 1:30) {
  zinsstruktur[i]<-svensson(i)
  }


#RMSE
m<-laufzeit
term<-  b0+b1*((1-exp(-m/tau1))/(m/tau1))+b2*((1-exp(-m/tau1))/(m/tau1)-exp(-m/tau1))+b3*((1-exp(-m/tau2))/(m/tau2)-exp(-m/tau2))
fehler<-(renditeempirisch-term)^2
```

```
rmse<-sum(fehler)^0.5


#Konfidenzintervall
up<-c()
down<-c()
for (i in 1:30) {
   up[i]<- svensson(i)+qnorm(0.975)*standardfehler_basiszins[i]
   down[i]<- svensson(i)-qnorm(0.975)*standardfehler_basiszins[i]
}


#Plots
#Svensson Zinsstruktur
curve(svensson, from=0, to=30,ylim=range(-0.1:3),col = "red" ,lwd =
1,xlab = "Laufzeit", ylab = "Zinssatz")
points(laufzeit,renditeempirisch,pch=20,col="black")

#Standardfehler
plot(standardfehler_basiszins, type="o", col="blue",lwd = 2,xlab =
"Laufzeit", ylab = "Standardfehler")

#Konfidenzintervalle
curve(svensson, from=0, to=30,ylim=range(-0.1:3),col = "grey" ,lwd
= 1,xlab = "Laufzeit", ylab = "Zinssatz")
points(laufzeit,renditeempirisch,pch=20,col="black")
lines(up, col="red")
lines(down, col="red")

# Schaetzergebnisse
print("NewtonRaphsonParameterschätzer")
newraphschatzer
print("RMSE")
rmse
print("Kovarianzmatrix der Parameter, Beobachtete Fisher
Information")
bfi
print("Standardfehler der Parameter")
```

```
sf
print("Zinsstruktur")
zinsstruktur
print("Standardfehler der Zinsstruktur")
standardfehler_basiszins
print("Konfidenzintervall der Zinsstruktur")
up
down

#Uebernahme der Parameterwerte
mur1<-svensson(1)
mur10<-svensson(10)
mur30<-svensson(30)
sr1<-standardfehler_basiszins[1]
sr10<-standardfehler_basiszins[10]
sr30<-standardfehler_basiszins[30]
```

4 Betafaktoren

4.1 Einleitung: CAPM und Betafaktoren

Die Verwendung des CAPM nach IDW-Verlautbarung beruht auf einem vom IDW genannten Vorteil einer marktgestützten Ermittlung von Risikozuschlägen. Das in der Anwendung zum Tragen kommende Marktmodell ist eine Umdeutung des CAPM und hat seine Begründung in der Anwendbarkeit anhand historischer Renditen. Insofern ist eine zulässige Anwendung des Marktmodells als Konkretisierung des CAPM normativ gegeben.

Theoretisch formulierte CAPM-Gleichgewichtssituationen sind an den Kapitalmärkten schwer erkennbar. Die theoretische Modellkonstruktion beruht auf einer starken Vereinfachung gegenüber der Komplexität empirischer Wertpapierpreise. Hieraus resultiert ein Bündel von Unsicherheitsfaktoren in der praktischen Anwendung und insbesondere die Prognosefähigkeit historischer Renditezusammenhänge ist mit Unsicherheit behaftet.

Es wird im Folgenden gezeigt, wie ausgehend von der Theorie des CAPM eine Methode zur Schätzung von Betafaktoren bei der Unternehmensbewertung zur Anwendung kommt. Dabei wird gezeigt, welche Ursachen für Schätzunsicherheit vorliegen und wie diese beurteilt werden können.

4.2 Ökonomische Theorie: CAPM und Betafaktoren

Das CAPM von Sharpe, Lintner und Mossin (1964) umfasst ein Kapitalmarktgleichgewicht für die Bewertung von risikobehafteten Wertpapieren und baut auf der Portfoliotheorie von Markowitz (1952) auf. Zentrales Element des CAPM ist die Wertpapierlinie mit den Betafaktoren, die eine lineare Beziehung zwischen Risiko- und Renditeerwartungen der Investoren beschreibt.[152] Individuelle Risikopräferenzen führen bei rationalem Verhalten und

[152] Vgl. Sharpe (1964): *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*; The Journal of Finance, Band 19, Ausgabe 3, S. 425 ff. Vgl. Markowitz, H. (1952): *Portfolio Selection*; The Journal of Finance, Band 7, Ausgabe 1, S. 77-91. Eine kompakte Darstellung liefert Wöhe, G. (2000), S. 796 ff.

Ausschöpfung von Diversifikationsmöglichkeiten zu Portfolioallokationen entsprechend der Wertpapierlinie. Es gelten folgende Prämissen:[153]

- Die Märkte sind effizient und vollkommen hinsichtlich der Verfügbarkeit und Verarbeitung von Informationen sowie nicht vorhandener Transaktionskosten,
- die Inverstoren an den Kapitalmärkten haben homogene Erwartungen bzgl. Rendite und Risiko aller Wertpapiere,
- Investoren sind risikoavers und maximieren ihren Erwartungsnutzen,
- und es existiert die Möglichkeit, in eine risikolose Anlage zu einem risikolosen Zins zu investieren. Zu diesem risikolosen Zins kann ebenfalls Kredit aufgenommen werden.

4.2.1 Portfoliotheorie

Markowitz' Portfoliotheorie behandelt das Verhalten von Investoren bei Nutzenoptimierung mittels einer Diversifikation, die aus einer Bündelung von Wertpapieren zu einem Portfolio resultiert. Dabei ist das sog. Marktportfolio, das alle risikobehafteten Wertpapiere umfasst, Rendite-Risiko effizient. Durch Kreditaufnahme oder Anlage zu einem risikolosen Zinssatz ist zusätzlich jede Kombination der risikolosen Anlageform mit dem Marktportfolio Rendite-Risiko effizient, und Investoren wählen Kombinationsanteile nach dem Grad ihrer individuellen Risikopräferenz.[154]

Im Ergebnis von Markowitz' portfoliotheoretischer Allokation resultiert ein ex ante Gleichgewicht, in dem alle rational agierenden Investoren eine Kombination aus Marktportfolio und risikoloser Anlage wählen. Die Kapitalmarktlinie ist eine grafische Lokalisation aller effizienten Portfolios in einem Rendite-Risiko-Diagramm.[155]

4.2.2 CAPM

Sharpe (1964) hat mit dem CAPM die Portfoliotheorie um Gleichgewichtsbewertungen für einzelne Wertpapiere erweitert. Demnach resultiert unter den genannten Annahmen ein Marktgleichgewicht für Wertpapierpreise, nach denen die Renditeerwartung für die Wertpapiere eine lineare Funktion des unternehmensspezifischen unsystematischen Risikos

[153] Vgl. Wöhe (2000), S. 796 f.
[154] Vgl. ebd., S. 798.
[155] Vgl. ebd., S. 799.

ist. Der Betafaktor spiegelt dieses Risiko wider, das nach Ausschöpfung aller Diversifikationsmöglichkeiten verbleibt. Eine grafische Lokalisation von Betafaktor und erwarteter Rendite für Wertpapiere im CAPM-Gleichgewicht wird als Wertpapierlinie bezeichnet.[156]

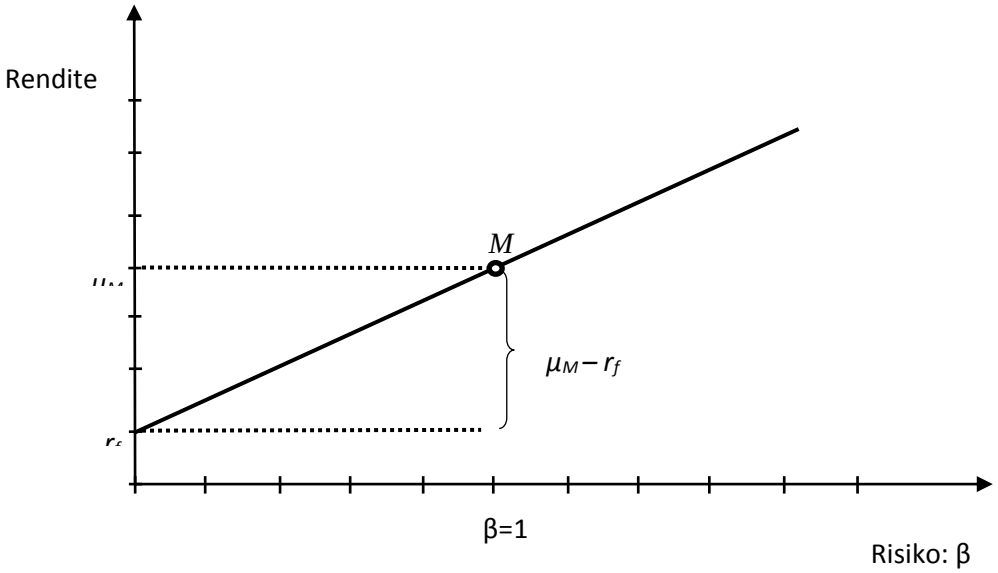

Abbildung 12: Die Wertpapierlinie als grafische Lokalisation der Gleichgewichtspreise in Abhängigkeit der wertpapierspezifischen Betafaktoren. Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Wöhe, G. (2000), S. 802.

Die Betafaktoren besitzen im CAPM die folgende formale Darstellung:[157]

$$E[r_{i,t}] = r_{f,t} + \beta_i(E[r_{M,t}] - r_{f,t}).$$

4.1

In Tabelle 6 sind die Komponenten beschrieben.

[156] Vgl. ebd., S. 801. Vgl. Sharpe, W. F. (1964*)*, S. 425-442.

[157] Vgl. Wöhe, G. (2000), S. 801 f.

$E[r_{i,t}]$	Erwartungswert der Rendite von Wertpapier *i* im Zeitpunkt *t*. Dieser Erwartungswert entspricht aus Unternehmenssicht einem Kapitalkostenzinssatz.
$r_{f,t}$	Risikofreier Zins für risikolose Anlage und Kreditaufnahme in *t*.
$E[r_{M,t}]$	Erwartete Rendite des Marktportfolios im Zeitpunkt t.
$E[r_{M,t}] - r_{f,t}$	Marktrisikoprämie: systematisches Risiko des Kapitalmarktes. Am Kapitalmarkt insgesamt bewertetes Risiko in Form einer erwarteten Marktüberrendite über dem Basiszinssatz.
β_i	Betafaktor für das unternehmensspezifische unsystematische Risiko.

Tabelle 6: Komponenten der Wertpapierlinie im CAPM.

Die resultierenden erwarteten Renditen stellen aus Unternehmenssicht Kapitalkosten dar und können daher als Abzinsungsfaktor für risikobehaftete zukünftige Zahlungsströme von Unternehmen herangezogen werden.[158]

4.3 Verfahrensstandard: Betafaktoren nach IDW

4.3.1 CAPM und Marktmodell nach IDW

Eine Verwendung von Betafaktoren zur Berücksichtigung eines Unternehmensrisikos wird durch eine IDW-Verlautbarung vorgeschlagen. Zur Begründung einer Zinszuschlagsmethode wird im IDW S 1 i.d.F. 2008 der Vorteil empirisch beobachtbaren Verhaltens genannt, welches nämlich eine marktgestützte Ermittlung von Risikozuschlägen ermöglicht. Dieser marktorientierte Ansatz kann nach IDW mit dem CAPM vorgenommen werden.[159] Die Verwendung von Betafaktoren für die Unternehmensbewertung resultiert daraus, weil sie zentrale Komponenten des verlautbarten CAPM darstellen.

Das CAPM erklärt als theoretisches Modell die Erwartungen von Renditen zu bestimmten Zeitpunkten. In der Anwendung besteht das Problem darin, das Modell durch geeignete empirische Beobachtungen zu spezifizieren, da das CAPM die Erwartungswerte von Markt-

[158] Vgl. Wöhe, G. (2000), S. 800 f.
[159] Vgl. Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 19 Tz. 90- Tz. 92.

und Aktienrenditen beschreibt. Geeignete Beobachtungen von Erwartungswerten sind an Kapitalmärkten für eine hinreichend qualifizierte Modellspezifikation schwer verfügbar. Die Verwendung von Kursprognosen von Analysten als Messgröße für Erwartungswerte ist in der Literatur vorzufinden, hat jedoch in der praktischen Anwendung keine breite Anerkennung gefunden.[160]

Stattdessen hat sich in der Praxis zur Unternehmensbewertung das sog. Marktmodell insbesondere aufgrund einer leichten Datenverfügbarkeit als ökonometrische Variante zur Beta-Bestimmung etabliert.[161] In der Anwendung des Marktmodells werden realisierte historische Aktien- und Marktrenditen gegenübergestellt.[162]

In einer Studie der Wirtschaftsprüfungsgesellschaft KPMG von 2012 gaben 96 % der Teilnehmer an, historische Betafaktoren zur Ermittlung von Kapitalkosten zu verwenden. An der Studie haben 122 Unternehmen aus Deutschland, der Schweiz und Österreich teilgenommen, darunter 80 % der deutschen DAX-30-Unternehmen.[163]

Die Bestimmung von Betafaktoren anhand des Marktmodells zur Ermittlung unternehmensindividueller Risikozuschläge kann daher als ein Standard in der Bewertungspraxis angesehen werden. Dieser Standard ist zwar nicht normativ gegeben, hat sich aber aufgrund eines Zusammenwirkens von IDW-Verlautbarungen, wissenschaftlicher Literatur und praktischen Anwendungsmöglichkeiten gebildet.

In der wissenschaftlichen Diskussion ist das Marktmodell als praktische Anwendung des CAPM nicht unumstritten. Zu nennen ist nach Dörschel et al (2008) vor allem die Frage nach der Aussagekraft vergangener, realisierter Risikoprämien für zukünftige Entwicklungen sowie die Überlassung der notwendigen Parametrisierung auf ein individuelles Ermessen im

---

[160] Die Approximation von Erwartungswerten durch realisierte Renditen wird z.B. von Merton, R. C. (1980): *On Estimating the Expected Return of the Market: An Explanatory Investigation*; Journal of Finance, Band 8, Ausgabe 4 als ungenau kritisiert. Andere Untersuchungen verwenden Kursprognosen von Analysten zur Schätzung für Erwartungswerte von Renditen, so z.B. Brav, A., Lehavy, R., Michaely, R. (2005): *Using Expectations to Test Asset Pricing Models*; Financial Management, Band 34, Ausgabe 3. Zur Diskussion über die Anwendbarkeit des CAPM sei auch auf Abschnitt 4.6 verwiesen.

[161] Vgl. Franken, L., Schulte, J. (2010), S. 1111.

[162] Vgl. Spreeman, K., Ernst, D. (2011), S. 165.

[163] Vgl. KPMG AG Wirtschaftsprüfungsgesellschaft (2012): *Corporate Finance - Kapitalkostenstudie 20102/2013*, S. 31.

Anwendungsfall.[164] Eine unzureichende Konkretisierung der Daten zur Modellschätzung erzeugt Oenschläger (2001) zufolge „Raum für Willkür."[165] Diese Kritiken haben in der Bewertungspraxis auch dazu geführt, die Qualität geschätzter Betafaktoren mittels statistischer Inferenzmethoden zu beurteilen, um so einer möglichen Willkür entgegenzuwirken.[166]

4.3.2 Marktmodell

Der Ursprung des Marktmodells kann auf das Single-Index-Modell von Sharpe (1963) zurückgeführt werden. Sharpe hat die Portfoliotheorie in der Art erweitert, dass der Preis für einzelne Wertpapiere von einem einzelnen Indikator oder Index bestimmt wird. Da durch diesen Index der gesamte Wertpapiermarkt getrieben wird, bietet sich die Rendite eines Börsenindexes als Abbild des Marktportfolios für diesen einheitlichen Indikator an.[167] In der Anwendung wird mit dem Marktmodell eine vom IDW benannte „marktgestützte Ermittlung" ermöglicht.[168]

Eine Spezifikation des Marktmodells erfolgt üblicherweise durch univariate Regression historischer Renditen.[169] Das ökonometrische Modell zur linearen Regression von Marktindex- und Unternehmensrenditen für das Wertpapier *i* lautet:

$$r_i = a_i + \beta_i r_M + u_i.$$

4.2

---

[164] Vgl. Dörschel, A., Franken, L., Schulte, J. & Brütting, C. (2008), S. 1152 f.

[165] Vgl. Oenschläger, E., Götz, A. (2001): *Ermittlung von Diskontierungsfaktoren in der Unternehmensbewertung über das CAPM;* Discussion Papers, Nr. 12/11, Duale Hochschule Baden-Württemberg Villingen-Schwenningen, S. 22:
[http://www.dhbw-vs.de/fileadmin/content/01_UEBER_UNS/04_Studienangebot/02_Fakultaet_Wirtschaft/Bachelor/Bank/Schriftenreihe-Dateien/12-11-Diskontierungsfaktoren_CAPM.pdf (01.12. 2013)].
Vgl. zur Diskussion einer unzureichenden Konkretisierung auch: Dörschel, A., Franken, L., Schulte, J. & Brütting, C. (2008), S. 1152 f.

[166] Vgl. Franken, L., Schulte, J. (2010), S. 1110.
Vgl. Knoll, L. (2010): *Äquivalenz zwischen signifikanten Werten des Betafaktors und des Bestimmtheitsmaßes – Anmerkungen zu Dörschell/Franken/Schulte/Brütting*; WPg 2010, S. 1106.

[167] Vgl. Sharpe, W. (1963): *A Simplified Model of Portfolio Analysis*; Management Science, Band 9, Ausgabe 2, S. 277-293.

[168] Vg. Franken, L., Schulte, J. (2010), S. 1111. und IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 19 Tz. 90- Tz. 92.

[169] Vgl. Spreeman K., Ernst, D. (2011), S. 165.

Mit *r* sind die Renditerealisationen von Marktindex *M* und Aktie *i* gegeben, mit α_i ein inhaltlich untergeordneter Achsenabschnitt und mit $u_{i,t}$ eine theoretische stochastische Komponente in Form von Residuen. Der theoretische Regressionsparameter β_i ist dann der zu schätzende Parameter, der als Betafaktor im CAPM nach 4.1 zum Einsatz kommt.[170]

Nach Franken und Schulte (2010) gelten für eine zulässige Verwendung der nach dem Marktmodell geschätzten Betafaktoren folgende Prämissen:[171]

1. Verfügbare Informationen werden unmittelbar sowohl im Aktienkurs als auch im Marktindex verarbeitet, so dass die von der Börse veröffentlichten Kassakurse einen tatsächlichen, ökonomischen Wert von Unternehmen und Marktportfolio reflektieren.
2. Für die Prognosefähigkeit gilt, dass die historischen Varianzen und Kovarianzen der Renditen zeitkonstant sind und für zukünftige Entwicklungen erwartet werden können.

4.3.3 Daten

Die zur Modellspezifikation notwendigen Daten sind historische Renditen des Wertpapiers und des zugrundeliegenden Marktportfolios. Die Renditen des Wertpapiers entstammen üblicherweise veröffentlichen Kursen der zuständigen Börse, die den Aktienmarkt regelt.

Die Renditen des Marktportfolios werden aus Indexen der jeweiligen Aktienmärkte abgeleitet. Für den deutschen Markt kommen hierfür z.B. der DAX-30 oder der C-DAX der Deutschen Börse AG in Betracht.

Für die Renditedaten zur linearen Regression müssen folgende Parametrisierungen vorgenommen werden:[172]

- Renditeintervall (Wochen- oder Tagesrenditen)
- Länge der Renditehistorie (Schätzperiodenlänge)

[170] Vgl. ebd., S. 166.
[171] Vgl. Franken, L., Schulte, J. (2010), S. 1111 f.
[172] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S 99.

Das Renditeintervall ist die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kursen, aus denen die einzelnen Renditen berechnet werden. Die Länge der Renditehistorie ist der gesamte Zeitraum, innerhalb dessen ein linearer Zusammenhang der Renditen untersucht wird. In der Praxis werden häufig Wochen- und Tagesrenditen für einen Zeitraum von ein bis zwei Jahren verwendet, wobei Wochenrenditen für gewöhnlich auf Freitagsschlusskursen beruhen.[173]

Es bleibt zunächst festzuhalten, dass das Marktmodell v.a. aufgrund der Datenverfügbarkeit eine Best-Practice-Lösung darstellt, bei der die Ergebnisse auf Abwandlungen der grundlegenden ökonomischen Theorie des CAPM beruhen.

4.3.4 Quantifizierung der Betafaktoren mittels Kleinste-Quadrate Regression

Die Schätzungen der Modellparameter α_i und β_i erfolgen durch die Methode der Kleinste-Quadrate Regression, aus der die sog. KQ-Schätzer resultieren.[174]

Aus dem ökonometrischen Modell

$$r_i = a_i + \beta_i r_M + u_i$$

resultiert die geschätzte Regressionsfunktion mit den empirischen Beobachtungen für die Zeitpunkte t:

$$r_{i,t} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i r_{M,t} + \varepsilon_{i,t}.$$

Mit u sind die theoretischen und mit ε die sog. Kleinste-Quadrate-Residuen (KQ-Residuen) angegeben, die aus der Regression resultieren. Diese zu schätzenden Modellparameter

[173] Monatsrenditen können problematisch sein, da diese einen langen Beobachtungszeitraum erfordern. So halten z.B. Dörschel, Franken und Schulte Monatsrenditen für ungeeignet. Vgl. Dörschel, A., Franken, L., Schulte, J. (2010): *Kapitalkosten 2010 für die Unternehmensbewertung: Branchenanalysen für Betafaktoren, Fremdkapitalkosten und Verschuldungsgrad*; IDW-Verlag, Düsseldorf, S. 52.

[174] Im CAPM sind Marktüberschussrenditen die Einflussgröße von Aktienrenditen. Da die Marktrenditen hierbei um die Konstante r_f subtrahiert werden, führt die Regression von Markt- und Aktienrenditen zu gleichen Ergebnissen.

folgen aus der Minimierung der quadrierten Residuensumme.[175] Unter der Annahme $\mathrm{E}[u_i] = \mathrm{E}[\varepsilon_i] = 0$ resultieren bei der KQ-Schätzung

$$\hat{r}_{i,t} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i r_{M,t}$$

für N Renditepaare die Schätzer, die das Kleinste-Quadrate-Kriterium mit $\boldsymbol{\varepsilon_i} = r_{i,t} - \hat{r}_{i,t}$ erfüllen:

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{\varepsilon_i}^2 = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{N}} \left[r_{i,j} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i r_{M,j}\right]^2 \rightarrow \boldsymbol{min}!$$

Die Lösung der Minimierung der quadrierten Residuensumme ergibt unter bestimmten Annahmen den erwartungstreuen KQ-Schätzer für Beta: [176]

$$\hat{\beta}_i = \frac{Cov(r_M, r_i)}{Var(r_M)}.$$

Dieser geschätzte Betafaktor im Marktmodell entspricht dem Anteil der gemeinsamen Variabilität von Markt- und Unternehmensrenditen, gemessen durch deren Kovarianz, im Verhältnis zur Varianz der Marktrenditen. Anders ausgedrückt: Die Reaktionsstärke der Aktienrenditen wird im Verhältnis zur Variabilität der Marktrenditen beschrieben.[177]

Werden für die Regression folgende Annahmen getroffen, sind die KQ-Schätzer erwartungstreu, unter allen linearen Schätzungen varianzminimal und damit effizient:[178]

1. Die Residuen sind identisch verteilt mit $\mathrm{E}[u_i] = \mathrm{E}[\varepsilon_i] = 0, Var(u_i) = \sigma_u^2$

---

[175] Vgl. Hartung, J., Elpelt, B., Klösener, K.-H (2005): *Statistik – Lehr und Handbuch der angewandten Statistik*; 14. Auflage, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, Wien, S. 574 f. Diese KQ-Schätzer besitzen unter gewissen Voraussetzungen die statistischen Optimalitätseigenschaften der Effizienz und Erwartungstreue. Diese Eigenschaften sind die wesentlichen statistischen Qualitätskriterien für eine Schätzfunktion. Vgl. hierzu z.B. Schlittgen (2004), S. 231. Vgl. Fahrmeir, L., Künstler, R., Pigeot, I. & Tutz, G. (1999): *Statistik - Der Weg zur Datenanalyse*; 2. Auflage, Springer-Verlag, Heidelberg, S. 362 ff.

[176] Vgl. Fahrmeir et al (1999), S. 153. ff und S. 463 ff.

[177] Vgl. Wöhe, G. (2000), S. 801. Für den inhaltlich unbedeutsamen Achsenabschnitt folgt aus dem Kleinste-Quadrate Kriterium: $\hat{\alpha} = \overline{r_i} - \hat{\beta} \cdot \overline{r_M}$.

[178] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 231. Es kann anhand einer Äquivalenz der KQ-Schätzung und der Maximum-Likelihood-Methode gezeigt werden, dass für die Optimalitätseigenschaften Erwartungstreue und Effizienz der KQ-Schätzer eine Normalverteilungsannahme nicht notwendig ist. Die Normalverteilung der Residuen ist jedoch eine Voraussetzung für interpretierbare Inferenzergebnisse.

2. und unterliegen keiner Autokorrelation, $Cov(u_{i,t}, u_{i,s}) = 0, t \neq s$.

4.4 Statistische Inferenz für Betafaktoren

4.4.1 Modell: CAPM und Marktmodell

Die Umdeutung des CAPM zum Marktmodell ist eine in der Praxis notwendige Operationalisierung und mögliche Bewertungsfehler können hierdurch nicht ausgeschlossen werden. Das CAPM kann nach strenger Auslegung der Modellvoraussetzungen unmöglich spezifiziert werden. So müssten z.B. die Erwartungswerte aller Investoren oder ein Marktportfolio mit allen verfügbaren risikobehafteten Wertpapieren erfasst werden. Daher existiert auch kein Maßstab, an dem sich diese praktische Umsetzung messen ließe und eine Betrachtung der statistischen Beurteilung entfällt daher für diese Modellumdeutung.[179]

4.4.2 Daten

Im Anwendungsfall ist eine Spezifikation der Renditeintervalle und der Schätzperiodenlänge für die verwendeten Renditen notwendig. Der Einfluss dieser Parametrisierung auf die Beta-Schätzung wird im Folgenden dargestellt.

4.4.2.1 Renditeintervalle

Ein sog. Intervalling Effekt beruht auf der Abhängigkeit der Schätzergebnisse von der Länge der Renditeintervalle.[180] In der Literatur wird die Hauptursache des Intervalling Effektes in der Liquidität des Aktienmarktes und damit einhergehenden möglichen verzögerten Kursanpassungen angesehen. Bei illiquiden Aktien treten informationsbedingte Kursanpassungen eher verzögert ein. Bei zu kurzen Renditeintervallen kann durch eine verringerte Kovarianz von Markt- und Wertpapierrenditen davon ausgegangen werden, dass

[179] Vgl. zur Unmöglichkeit der empirischen Überprüfung des CAPM z. B. Roll, R. (1977): *A critique of the Asset Pricing Theory's Tests Part I: On Past and Potential Testability of the Theory*; Journal of Financial Economics, Band 4, Ausgabe 2, S. 130. Es sei für eine kritische Betrachtung dieser Modellvereinfachung auf den Abschnitt 4.6 „Das CAPM und Betafaktoren in der Diskussion“ verwiesen.

[180] Vgl. Opfer, H. (2004): *Zeitvariable Asset-Pricing-Modelle für den deutschen Aktienmarkt*; Bessler, W. (Hrsg.), Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden, S. 172.

per Marktmodell geschätzte Betafaktoren systematisch nach unten verzerrt sind.[181] Die gemessenen Renditepaare wären dann gegenüber einem ‚wahren' renditegenerierenden Prozess verzerrt.[182]

4.4.2.2 Schätzperiodenlänge

Eine Erhöhung der Schätzperiodenlänge kann die mittels Inferenz beurteilte Genauigkeit der Schätzergebnisse verbessern, da sich z.B. mit vergrößertem Stichprobenumfang die Trennschärfe eines Hypothesentests erhöht.[183] Die geschätzten Betafaktoren können allerdings mit zunehmendem Beobachtungszeitraum eine geringere Repräsentativität hinsichtlich der im CAPM modellierten gegenwärtigen Erwartungen von Renditen besitzen.[184]

Zusätzlich birgt eine zu große Schätzperiodenlänge die Gefahr eines Strukturbruchs innerhalb der historischen Datenreihe, z.B. wenn relevante Ereignisse die risikobedingten Kapitalkosten des Unternehmens verändert haben. Bleibt ein Strukturbruch unerkannt, entstammen die historischen Daten nicht mehr einer homogenen Population und es kann zu einer statistischen Fehlaussage über eine vermeintlich einheitlich angesehene Population kommen, die die gegenwärtige Kapitalmarktsituation widerspiegeln soll. In der Literatur scheint es keinen Konsens über die korrekte Länge des Beobachtungszeitraumes zu geben. Als Entscheidungshilfe wird eine weiterführende Analyse der Kurshistorie vorgeschlagen, z.B. durch Vergleiche aufeinanderfolgender Betafaktoren.[185]

Strukturbrüche in Zeitreihen können nach statistischen Kriterien durch einen Chow-Test auf wechselnde Regressionskoeffizienten bei zeitlicher Verlängerung der Historie erkannt

---

[181] Vgl. Cohen, K. J., Hawawini, G. A., Maier, S. F., Schwartz, R. A., Whitcomb, D. K. (1980): *"Implications of Microstructure Theory for Empirical Research on Stock Price Behavior"*; Journal of Finance, Band 35, Ausgabe 2, S. 249 – 257.

[182] Vgl. Dimson, E. (1979): *Risk Measurement When Shares are Subject to Infrequent Trading*; Journal of Financial Economics; Ausgabe 7, S. 198, Vgl. Stellbrinck, J., Brueckner, C. (2011): Beta-Schätzung: Schätzzeitraum und Renditeintervall unter statistischen Gesichtspunkten, BewertungsPraktiker, 6. Jg., Heft 3, S. 5. Detailliertere Ausführungen über den Intervalling Effekt liefert Frantzmann. Vgl. hierzu Frantzmann, H. J. (1990): *Zur Messung des Marktrisikos deutscher Aktien*; Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Ausgabe 1, S. 67-83.

[183] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 55 f.

[184] Vgl. Dörschell et al (2010), S, 53.

[185] Vgl. ebd., S 54.

werden. Ein signifikanter Wechsel des Steigungskoeffizienten kann zur Plausibilisierung der Bestimmung der Schätzperiodenlänge dienen.[186]

4.4.3 Spezifikation: Inferenzstatistik

Zunächst wird gezeigt, wie durch eine Varianzzerlegung von Wertpapierrenditen ein Erklärungsgehalt durch die Regression aufgezeigt wird.

Die Residualvarianz als Komponente der Varianzzerlegung wird im Anschluss für die Bestimmung der Varianzen der geschätzten Regressionsparameter benötigt. Mit der Varianz der Schätzer und unter angenommenen Verteilungseigenschaften der Residuen sind dann Inferenzaussagen über die Beta-Schätzer möglich.

4.4.3.1 Schätzverteilung von Betafaktoren

Die gesamte Varianz der Aktienrenditen lässt sich nach dem Varianzzerlegungssatz folgendermaßen darstellen:[187]

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i-\overline{r_i})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{r_i}-\overline{r_i})^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i-\widehat{r_i})^2$$
$$\Leftrightarrow s_{r_i}^2=s_{\widehat{r_i}}^2+s_{\varepsilon}^2.$$

4.3

$s_{r_i}^2$	Gesamte Varianz der Aktienrenditen als mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert.
$s_{\widehat{r_i}}^2$	Varianz der durch die Regression erklärten Renditen.
s_{ε}^2	Varianz der Residuen. Die Streuung der empirischen Renditen um die Regressionsgerade.

Tabelle 7: Komponenten der Varianzzerlegung von Wertpapierrenditen in der Regression des Marktmodells.

[186] Der Chow-Test wird in dem Abschnitt zur Marktrisikoprämie ausführlicher behandelt und angewandt.

[187] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 235.

Die gesamte Varianz der Wertpapierrenditen ergibt sich aus der Varianz der durch die Regression erklärten Renditen $s_{\hat{r}_i}^2$ und der verbleibenden Residualvarianz s_ε^2. Die durch die Regression erklärte Varianz entspricht der Variation entlang der Regressionsgeraden und die Varianz der Residuen der Variation um die Regressionsgerade.

4.4.3.2 Theoretische und geschätzte Varianzen

Die theoretischen Standardabweichungen der Schätzer des Marktmodells werden nun anhand empirischer Beobachtungen geschätzt. Gemäß üblicher Notation seien empirische Standardabweichungen mit *s*, theoretische mit *σ* und deren Schätzer mit einem Dach „$\hat{\sigma}$“ versehen.

Für die theoretische Varianz der Residuen $\mathrm{Var}(u) = {\sigma_u}^2$ aus dem Marktmodell nach 4.2 wird die erwartungstreue Schätzfunktion verwendet:[188]

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{n}{n-2} s_\varepsilon^2.$$

Mit der empirischen Varianz der KQ-Residuen $s_\varepsilon^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ folgt dann der erwartungstreue Varianz-Schätzer der Residuen,[189]

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2.$$

Für die theoretische Standardabweichung des geschätzten Betafaktors[190]

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{n s_{r_M}^2}$$

4.4

[188] Vgl. ebd., S. 226.

[189] Es gehen zwei Freiheitsgrade verloren, da zur Berechnung der empirischen Residuen die zwei Regressionskoeffizienten zunächst geschätzt werden müssen. Die theoretischen Residuen bleiben unbekannt, da α und β nicht bekannt sind. Somit basiert die verwendete Residualvarianz ebenfalls auf einer Schätzung.

[190] Vgl. Fahrmeir et al. (1999), S. 464.

wird mit $s_{r_M}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{M,i} - \bar{r}_M\right)^2$ als empirische Varianz der Marktrenditen der erwartungstreue Varianzschätzer des Betafaktors ermittelt:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{n \cdot s_{r_M}^2}$$
$$= \frac{1}{n-2}\frac{s_\varepsilon^2}{s_{r_M}^2}.$$

4.5

Und für die geschätzte Konstante $\hat{\alpha}$ folgt aus der theoretischen Varianz

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\sigma_u^2\left(\bar{r}_M{}^2 + s_{r_M}^2\right)}{n \cdot s_{r_M}^2}$$

der Schätzer

$$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{s_\varepsilon^2}{n-2}\frac{\left(\bar{r}_M{}^2 + s_{r_M}^2\right)}{s_{r_M}^2}.$$

Somit sind für die geschätzten Betafaktoren der Erwartungswert und die Varianz bestimmt:

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta, Var\left(\hat{\beta}\right) = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{1}{n-2}\frac{s_\varepsilon^2}{s_{r_M}^2}.$$

4.4.3.3 Stichprobenverteilung: Verteilung der geschätzten Betafaktoren

Eine Erweiterung der Modellannahmen aus Kapitel 4.3.4 um die Normalverteilung der Residuen, $u_i \sim N(0; \sigma_u)$, für alle i=1…n, wird nun für die Ermittlung der Stichprobenverteilung benötigt. Aufgrund der angenommenen Normalverteilung der Residuen sind die KQ-Schätzer ebenfalls normalverteilt, [191]

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma_{\hat{\beta}}^2).$$

[191] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 233.

Für die unbekannte theoretische Standardabweichung des Betafaktors $\sigma_{\hat{\beta}}$ nach 4.4 wird nun der Schätzer $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ aus 4.5 verwendet. Somit folgt die standardisierte Teststatistik einer zentralen t-Verteilung mit *n-2* Freiheitsgraden:[192]

$$T = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2). \qquad \textbf{4.6}$$

4.4.3.4 Signifikanzen und Hypothesentests der Koeffizienten

Zur Überprüfung der geschätzten Betafaktoren auf Einzelwerte dienen Tests der Hypothesen $\beta = \beta_0$, wobei eine zentrale Null-Hypothese $\beta_0 = 0$ lautet. Ist Beta gleich null, besteht kein Zusammenhang zwischen Markt- und Wertpapierrenditen. Durch eine signifikante Ablehnung dieser Hypothese kann dagegen eine Abhängigkeit bestätigt werden. Für rechtsseitige Tests folgt eine signifikante Ablehnung von $H_0: \beta = \beta_0$ bei

$$T > t_{1-\alpha;\, n-2}.$$

4.4.3.5 Konfidenzintervalle

Mit der t-Verteilung der Teststatistik nach 4.6 ergibt sich ein symmetrisches Konfidenzintervall für die geschätzten Betafaktoren mit *1-α* als Konfidenzniveau:[193]

$$\hat{\beta} \pm \hat{\sigma}_{\hat{\beta}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-2},$$

mit $t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-2}$ als Quantil der t-Verteilung.

Die Konfidenzintervalle für geschätzte Betafaktoren sind vor allem dazu geeignet, statistisch vertretbare Ober- und Untergrenzen anzugeben, wenn z.B. Höchst- oder Mindestwerte in der Unternehmensbewertung gesucht werden.

---

[192] Vgl. Fahrmeir et al. (1999), S. 466 f. oder Schlittgen (2004), S. 66 und S. 233. Die t-Verteilung beruht auf einem Quotienten zweier Zufallsvariablen, mit einer Normalverteilung im Zähler und einer Chi-Quadrat Verteilung im Nenner. Da der Varianzschätzer Chi-Quadrat verteilt ist, ergibt sich so die t-Verteilung.

[193] Vgl. Fahrmeir et al. (1999), S. 467. Diese Intervalle enthalten die Informationen der Hypothesentests in der Art, dass der Betafaktor signifikant verschieden von Werten außerhalb der Intervallbreiten ist.

4.4.3.6 Bestimmtheitsmaß

Das Bestimmtheitsmaß beschreibt die Güte der gesamten Modellanpassung. Es gibt an, wie viel Prozent der gesamten Varianz der Aktienrenditen durch die Varianz der Marktrenditen in der betrachteten Datenmenge erklärt werden können.[194] Die gesamte Varianz der Aktienrenditen lässt sich nach dem Varianzzerlegungssatz aus 4.3 in die Varianz der durch die Regression erklärten Renditen $\sigma_{\hat{r}_i}^2$ und die verbleibende Varianz der Residuen σ_ε^2 zerlegen:

$$\sigma_{r_i}^2 = \sigma_{\hat{r}_i}^2 + \sigma_\varepsilon^2.$$

Das Bestimmtheitsmaß ist dann durch[195]

$$R^2 = \frac{\sigma_{\hat{r}_i}^2}{\sigma_{r_i}^2}$$

gegeben. Formal ergibt sich durch Umformung das Bestimmtheitsmaß auch durch[196]

$$R^2 = r_{i,M}^2 = \frac{Cov(i,M)^2}{\sigma_i^2 \sigma_M^2}.$$

Als quadrierter Korrelationskoeffizient von Aktien- und Marktrenditen gibt dieses Maß den Anteil der Variation von Aktienrenditen wieder, der auf eine gemeinsame Bewegung mit Marktrenditen zurückzuführen ist.

4.5 Die Beurteilung von Betafaktoren mittels statistischer Inferenz

4.5.1 Bestimmtheitsmaß

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit sich das Bestimmtheitsmaß als Beurteilungskriterium der geschätzten Betafaktoren eignet.

Das Bestimmtheitsmaß R^2 kann Werte zwischen null und eins annehmen. Die Angabe einer Klassenbildung als Eignungskriterium der Beta-Schätzung erscheint hierbei nicht frei von

[194] Vgl. ebd., S. 159 f. und S. 482.
[195] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 235.
[196] Vgl. ebd.

Willkür. So sind nach Knoll et al (2007) in der Bewertungspraxis angegebene Grenzwerte zur Beurteilung der Schätzgenauigkeit „ohne entsprechende Quellen gemachte Feststellungen“.[197]

Nach Franken und Schulte (2010) ist ein geringes R^2 „betriebswirtschaftlich durchaus denkbar“, [198] da hierdurch ein geringes systematisches Risiko des Wertpapiers zum Ausdruck kommt, welches der Kapitalmarkttheorie nicht entgegensteht.

Es kann auf der anderen Seite auch nicht ausgeschlossen werden, dass ein geringes R^2 nicht durch ein geringes systematisches Risiko des zugrundeliegenden Wertpapiers verursacht wird, sondern technischer Natur ist. Methodenbedingte Ursachen für Verzerrungen wären nach den bisherigen Ausführungen die Modellumdeutung des CAPM durch das Marktmodell und die damit verbundene Ersetzung zukunftsorientierter Erwartungswerte durch historische Renditerealisationen, eine messtechnisch bedingte Verzerrung der Renditedaten von einem ‚wahren‘ renditegenerierenden Prozess sowie Strukturbrüche und andere ereignisinduzierte Umstände in der Renditehistorie.

Ein hohes Bestimmtheitsmaß zeigt einen starken Zusammenhang zwischen historischen Unternehmens- und Marktrenditen auf. Insofern liegt dann ein Argument für die Zulässigkeit der Methode und die Anwendbarkeit der Beta-Schätzungen vor.

Ein geringes R^2 bedeutet, dass ein niedriger Anpassungsgrad an die Modellgerade vorliegt. Wie in 4.4.3.6 dargestellt, sind die Streuungen der historischen Aktienrenditen dann nicht durch die Marktbewegungen erklärbar und es scheint Unabhängigkeit vorzuliegen.

Die Ursache für ein niedriges R^2 kann nun entweder auf schätztechnischen Ursachen oder auf einem niedrigen systematischen Risiko beruhen. Eine niedrige Kovarianz und ein damit verbundenes niedriges R^2 steht in keinem Widerspruch zur Kapitalmarkttheorie des CAPM. Daher erscheint das Bestimmtheitsmaß als statistisches Kriterium zur Beurteilung der Schätzgenauigkeit nicht zweifelsfrei geeignet.

---

[197] Vgl. Knoll, L., Erhardt, J., Bohnet, F. (2007): *Kleines Beta – kleines Bestimmtheitsmaß – großes Problem;* CFO aktuell-2007, S. 211.

[198] Vgl. Franken, L., Schulte, J. (2010), S. 1112.

Eine weiterführende Beantwortung der Frage zum Eignungskriterium des R^2 soll im Folgenden durch die Beurteilung der Beta-Schätzung mittels eines Signifikanztests erfolgen, der nachweisbar in einem Zusammenhang zum Bestimmtheitsmaß steht.

4.5.2 Signifikanztest

Aussagen über die Signifikanz von geschätzten Betas durch einen t-Test betreffen einen in der Test-Hypothese formulierten Wert. Für die gebräuchliche Hypothese $\beta_0 = 0$ bedeutet Signifikanz, dass bei gegebenem Signifikanzniveau Beta signifikant verschieden von null ist. Dann ist ein im Marktmodell formulierter Zusammenhang zwischen Markt- und Aktienrenditen signifikant vorzufinden.

Durch eine Bescheinigung der Signifikanz wird jedoch keine eindeutige Zuverlässigkeit der Schätzung zum Ausdruck gebracht, lediglich eine Verschiedenheit von einem Null-Hypothesenwert für Beta erscheint mehr als zufällig.

Ein nicht signifikantes Beta bei der Hypothese $\beta_0 = 0$ steht zudem nicht im Widerspruch zu den Annahmen des CAPM. Auch ein niedriges Beta nahe null ist mit dem CAPM konform, z.B. wenn das betrachtete Wertpapier ein sehr geringes systematisches Risiko aufweist.[199]

Als Beispiel sei hierzu noch einmal die Berechnung des Betafaktors im Marktmodell hervorgezogen:

$$\hat{\beta}_i = \frac{Cov(r_{M;}r_i)}{Var(r_M)}.$$

Selbst wenn das Risiko der Wertpapierrenditen größer als das Risiko des Marktes ist, wäre Beta bei einer Kovarianz von null ebenfalls gleich null und die resultierenden Kapitalkosten entsprechen dem risikolosen Zinssatz. Wenn das Wertpapierrisiko aufgrund der Kovarianz von null diversifizierbar ist, können damit keine Risikoprämien für unsystematische Risiken im Sinne des CAPM erzielt werden. Im CAPM werden ja nur nicht-diversifizierbare systematische Risiken vergütet, deren Höhe durch Beta ausgedrückt ist.

[199] Eine Analyse des mathematischen Zusammenhangs zwischen Signifikanztests und Bestimmtheitsmaßen liefert Knoll, L., Erhardt, J., Bohnet, F. (2007), S. 210-213.

In der Literatur wird im Rahmen dieser Diskussion der Zusammenhang des Signifikanztests für die Betafaktoren (H_0: $\beta = 0$) und das Bestimmtheitsmaß R^2 der Regression betrachtet. Knoll (2010) zeigt eine Äquivalenz dieser beiden Größen auf und argumentiert, dass niedrige Bestimmtheitsmaße dennoch mit signifikanten Betafaktoren einhergehen können und selbst insignifikante Betafaktoren nicht unbrauchbar sein müssen.[200] Für die Nullhypothese $\beta_0 = 0$ können bei der Einfachregression Grenzwerte für das Bestimmtheitsmaß angegeben werden, bei denen *H_0* signifikant abgelehnt wird. Bei einem Stichprobenumfang von 52 Wochenrenditen und der Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95 % ist bereits ab einem Wert von *R^2* = 0,0532 eine Signifikanz vorzufinden.[201]

Für die Zuverlässigkeit der Beta-Schätzung stellt sich daher nicht notwendigerweise die Frage, ob ein signifikanter Zusammenhang vorliegt. Dies ist die Besonderheit der Regression im Marktmodell, da bei gewöhnlichen Regressionen signifikante Koeffizienten für eine korrekte Modellspezifikation sprechen.

Im Falle einer deutlichen Signifikanz und höheren Bestimmtheitsmaßen können dagegen systematische Risiken eines Wertpapiers durch die Regression aufgedeckt werden. Im Ergebnis bleibt festzuhalten, dass ein Signifikanztest sowie das Bestimmtheitsmaß lediglich für betragsmäßig hohe Betafaktoren auf eine hohe Schätzgenauigkeit hinweisen. Da Betafaktoren nahe null mit dem grundlegenden CAPM konform sind, können der Signifikanztest und das Bestimmtheitsmaß als Kriterium der Zuverlässigkeit geschätzter Betafaktoren angezweifelt werden. Das Bestimmtheitsmaß und der t-Test können demnach als Beurteilungskriterium zur Eignung geschätzter Betafaktoren zu einer systematischen Ablehnung niedriger Betafaktoren führen und somit tendenziell höhere Unternehmenswerte vermeiden.

4.5.3 Konfidenzintervalle und Standardfehler

Als drittes Kriterium der statistischen Inferenz verbleibt noch das Konfidenzintervall zur Beurteilung der Zuverlässigkeit geschätzter Betafaktoren. Mit der Intervallbreite können

[200] Vgl. Knoll, L. (2010), S. 1106 ff.
[201] Vgl. ebd., S. 1107 f.

statistische Grenzwerte angegeben werden, die aus stichprobentheoretischer Sicht den unbekannten Mittelwert in der Grundgesamtheit ‚wahrscheinlich' enthalten.

Eine fehlerhafte Ablehnung des Modells bei niedrigen Beta-Schätzern ist insofern ausgeschlossen, als dass ein Konfidenzintervall als Maß zur Schätzgenauigkeit beliebige Werte einschließlich null umfassen kann. Für den Fall $\hat{\beta} = 0$ liegen um null symmetrische Grenzwerte vor, während ein Hypothesentest auf nicht-signifikante Betafaktoren hinweisen kann.

Allerdings sind die Konfidenzintervalle breiter, je geringer der Renditezusammenhang und somit das Bestimmtheitsmaß sowie der geschätzte Betafaktor ist. Dies liegt daran, dass die Intervallbreite durch den Standardfehler der Residuen s_ε^2 bestimmt ist. Der Varianzzerlegungssatz nach 4.3 lässt sich schreiben als

$$s_\varepsilon^2 = s_{r_i}^2 - s_{\hat{r}_i}^2.$$

Bei identischen Varianzen der Wertpapierrenditen $s_{r_i}^2$ sind die Standardfehler der Residuen umso größer, je geringer die durch die Regressionsgerade erklärte Varianz $s_{\hat{r}_i}^2$ ist.

Der Standardfehler des Beta-Schätzers nimmt dann mit steigendem s_ε^2 zu:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2 &= \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{n \cdot s_{r_M}^2} \\ &= \frac{1}{n-2}\frac{s_\varepsilon^2}{s_{r_M}^2}.\end{aligned}$$

Niedrige Betafaktoren sind nach den obigen Ausführungen nicht aufgrund einer Modellunzulässigkeit abzulehnen, wie es ein Hypothesen-Test vermuten lässt, sondern besitzen eine tendenziell niedrigere Schätzgenauigkeit, da ein Teil der Varianzen nicht auf eine gemeinsame Variation von Wertpapier- und Aktienrenditen zurückgeführt werden kann. Diese größere Schätzungenauigkeit wird durch den Schätzfehler bzw. das hieraus resultierende breitere Konfidenzintervall erkennbar.

Da eine tendenzielle methodische Ablehnung von niedrigen Betafaktoren durch die Verwendung von Konfidenzintervallen ausgeschlossen werden kann, scheint ein durch Standardfehler bestimmtes Konfidenzintervall als statistisches Kriterium dem

Bestimmtheitsmaß und dem Signifikanztest zumindest in der Beurteilung der Schätzgenauigkeit überlegen zu sein.

4.6 Das CAPM und Betafaktoren in der Diskussion

Das CAPM ist in der wissenschaftlichen Lehre und Literatur weit verbreitet und hatte entscheidende Implikationen z.B. für Theorien im Asset Management oder in der Unternehmensfinanzierung.[202] Die große Verbreitung in wissenschaftlicher Literatur und Lehre brachte auch eine umfangreiche Sammlung an Kritik mit sich.

Kritikpunkte lassen sich in vielen Bereichen von den zugrunde liegenden Prämissen bis zu den Implikationen des Modells finden. Zusammenfassend ausgedrückt, beruhen die Kritiken auf einer mangelnden Realitätsnähe der Prämissen, Widersprüchen in dem angenommenen Entscheidungsverhalten von Investoren und vor allem auch auf einer bemängelten empirischen Evidenz. Eine mangelnde empirische Nachweisbarkeit des Modells geht auch mit der Entwicklung von alternativen Modellen einher, die ein größeres Erklärungspotential empirischer Beobachtungen beinhalten.

Die Kritik an den Modellkomponenten betrifft sowohl die sichere Anlagemöglichkeit als auch das Marktportfolio. Dass eine risikolose Anlage mit einem risikolosen Zins nicht existiert, führte z.B. zur Entwicklung des alternativen Zero-Beta-CAPM von Black (1972). In diesem Modell existiert keine einzelne risikolose Anlageform, sondern ein Portfolio mit $\beta = 0$, das zum Marktportfolio unkorreliert ist.[203]

Eine häufig zitierte Modellkritik stammt von Roll (1977). Kernpunkt ist die Unbeobachtbarkeit eines Marktportfolios, das gemäß CAPM alle risikobehafteten Anlagen umfasst. Roll kommt zu dem Ergebnis, dass die Unmöglichkeit, die Zusammensetzung eines Marktportfolios zu ermitteln, auch zu einer Unmöglichkeit führt, das Modell empirisch zu testen. Ein

[202] Vgl. Oertmann, P., Zimmermann, H. (1998): *„Risk and Return": Vom CAPM zur modernen Asset Pricing Theory*; Economics Today. Konsens und Kontroverse in der modernen Ökonomie, NZZ-Verlag, Zürich, S. 6.

[203] Vgl. Jensen, M. C., Black, F., Scholes, M. S. (1972): *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests;* Studies in the Theory of Capital Markets, M.C. Jensen (Hrsg.), New York, S. 79-121.

Vergleichsportfolio für einen Marktindex, das als effizient betrachtet wird, stellt die Eigenschaften der im Modell angenommen Rendite-Risiko-Effizienz infrage.[204]

Als alternative Modelle haben sich vor allem die ‚Arbitrage Pricing Theory' (APT) von Ross (1976) und das Fama-French-Faktoren Modell etabliert.[205] Modelle der APT benötigen nicht mehr die Annahme des beobachtbaren Marktportfolios, sondern es werden Unternehmensrenditen an Stelle von Marktüberschussrenditen durch mehrere ökonomische Faktoren erklärt. Das Faktor-Modell von Fama und French (1992) erweitert das CAPM um die Faktoren ‚Marktkapitalisierung' und ‚Markt-Buchwert Verhältnis'.[206] Es konnte dabei gezeigt werden, dass diese Modelle eine bessere Anpassungsfähigkeit an empirische Renditen besitzen. Nach Griffin (2002) liefern Faktoren wie z.B. Unternehmensgröße einen höheren Erklärungsbeitrag für Aktienrenditen als das CAPM.[207] Banz (1981) kommt zu dem Ergebnis, dass die Marktkapitalisierung einen wesentlichen Erklärungsgehalt für Renditen liefert.[208] Bhandari (1988) hat einen Zusammenhang zwischen dem Verschuldungsgrad und durchschnittlichen Renditen nachgewiesen,[209] wobei diese Größe auch in anderen Theorien, insbesondere nach Miller und Modigliani (1958), als geeignetes Risikomaß angesehen wird.

Allerdings sind die alternativen Methoden mit stärkerer empirischer Evidenz ebenfalls nicht ohne Kritik. Durch das CAPM werden eben nicht realisierte Renditen erklärt, sondern die von Investoren unter Unsicherheit erwarteten Renditen. Daher sind Modelltests basierend auf realisierten Renditen unangebracht. So kommt Black (1993) zu dem Ergebnis, dass die alternativen Faktor-Modelle zwar durchschnittliche Renditen über einen bestimmten Zeitraum besser erklären, dies aber nicht für die Erwartungswerte von Renditen gelte.[210] Die Methode, Erwartungswerte von Renditen durch realisierte Renditen zu approximieren ist

---

[204] Vgl. Roll, R. (1977), S. 130.

[205] Vgl. Ross, S. (1976): *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*; Journal of Economic Theory, Band 13, Ausgabe 3, S. 341-360.

[206] Vgl. Fama, E. F., French, K. R. (1992): *The Cross-Section of Expected Stock Returns*; The Journal of Finance, Band 47, Ausgabe 2, S. 427-465.

[207] Vgl. Griffin, J. M. (2002): *Are the Fama and French Factors Global or Country Specific?*; The Review of Financial Studies, Band 15, Ausgabe 3, S. 3-56.

[208] Vgl. Banz, R. W. (1981): *The Relationship Between Return and Market Value Of Common Stocks*; Journal of Financial Economics, Band 9, Ausgabe 1, S. 3-18.

[209] Vgl. Bhandari, L. C. (1988): *Debt/Equity Ratio and Expected Common Stock Returns: Empirical Evidence*; Journal of Finance, Band 43, Ausgabe 2, S. 507-528.

[210] Vgl. Black, F. (1993): *Estimating Expected Returns*; Financial Analysts Journal, Band 49, Ausgabe 5, S. 36-38.

nach Merton (1980) sehr ungenau.[211] In anderen Untersuchungen werden daher z.B. Kursprognosen von Analysten als Proxy für die Erwartungswerte von Renditen verwendet, wie z.B. von Brav, Lehavy und Michaely (2005).[212]

4.7 Anwendung: Beta-Schätzung

Die Betafaktoren sind im Gegensatz zu Basiszins und Marktrisikoprämie die einzige unternehmensspezifische Schätzgröße in der IDW-basierten Ermittlung von Kapitalkosten. Für den Zweck der noch folgenden explorativen Untersuchung der gemeinsamen Verteilung von Basiszins, Marktrisikoprämie und Betafaktor werden per Vorgabe mehrere Beta-Schätzungen simuliert, um den Einfluss der Beta-Schätzung auf die Schätzunsicherheit von Kapitalkosten zu untersuchen.

Es werden drei Erwartungswerte und drei Standardfehler für Beta-Schätzungen vorgegeben. Als Erwartungswerte werden niedrige (0,5) mittlere (1) und hohe (1,5) Beta-Schätzer gewählt. Diese stehen für verschieden große unternehmensspezifische Finanzierungsrisiken.

Die Standardfehler stehen für die Parameterrisiken in Form von unterschiedlich genauen Beta-Schätzungen. Da argumentiert wurde, dass R^2 und Signifikanztests unzuverlässig sein können, erscheint der relative Standardfehler als Beurteilungsmaß für die folgenden Zwecke geeignet.

Für einen Betafaktor von Eins sind Stichprobenverteilungen für drei verschiedene Standardfehler in Abbildung 13 dargestellt. Diese stellen drei verschieden große Schätzunsicherheiten dar. Da der Erwartungswert von Beta per Vorgabe in diesem Beispiel jeweils eins beträgt, sind unterschiedlich große Schätzunsicherheiten auch durch verschiedene relative Standardfehler vorgegeben, was sich in der Breite der abgebildeten Konfidenzintervalle ausdrückt.

[211] Vgl. Merton, R. C. (1980), S. 323-361.
[212] Vgl. Brav, A., Lehavy, R., Michaely, R. (2005), S. 31-64.

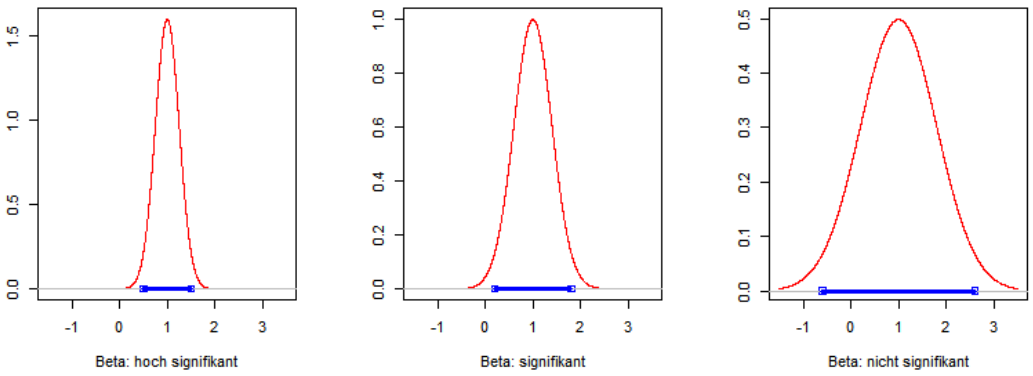

Abbildung 13: Drei Stichprobenverteilungen für Betafaktoren (rot) und 95 %-Konfidenzintervalle (blau). Beta ist gleich eins. Links beträgt der Standardfehler 0,2, in der mittleren Stichprobenverteilung 0,4 und rechts 0,8. Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.

In Tabelle 8 sind die p-Werte eines t-Tests zur Hypothese $Beta = 0$ für die drei Standardfehler angegeben. Damit wäre die Beta-Schätzung nur bei einem Standardfehler von 0,8 nicht signifikant zur Hypothese Beta = 0.

Standardfehler	**0,25**	**0,4**	**0,8**
p-Wert	0,0001	0,008	0,108

Tabelle 8: Drei Situationen für Beta-Schätzungen. Beta = 1 und drei Standardfehler der Beta-Schätzung. Der p-Wert ist für einen t-Test zur Hypothese Beta = 0 berechnet, linksseitig, mit α=0,05. Quelle: Eigene Berechnungen in R.

4.8 R-Code Beta

```
#Kapitel 3: BETA FAKTOREN

# Simulation der Stichprobenverteilung: Beta

mubeta<-1
sigmabeta<-c(0.25,0.4,0.8)
p<-c()
t<-c()
par(mfrow=c(1,3))
lab<-c("Beta: hoch signifikant","Beta: signifikant","Beta: nicht
signifikant")
x <- seq(-1.5,3.5, by=0.001)
for (i in 1:3){
  plot(x,dnorm(x, mean=mubeta, sd=sigmabeta[i]),type =
"l",col="red",main="", lwd=1, ylab="",xlab=lab[i])
  low<-mubeta+qt(0.025,51)*sigmabeta[i]
  high<-mubeta+qt(0.975,51)*sigmabeta[i]
  p[i]<-pt(1/sigmabeta[i],50,lower.tail=FALSE)

  points(low,0, pch=0,col="blue")
  points(high,0, pch=0,col="blue")
  lines(c(-2,4),c(0,0),col="grey")
  lines(c(low,high),c(0,0),lwd=3,col="blue")
}
print(p)
```

5 Marktrisikoprämie

5.1 Einleitung: Marktrisikoprämie

In der praktischen Anwendung entspricht die Verwendung einer vom IDW verlautbarten Höhe für die Marktrisikoprämie einem Verfahrensstandard. Ein IDW-Standard zur Ermittlung der Marktrisikoprämie stützt sich auf historische empirische Kapitalmarktdaten in Einklang mit der häufig zitierten Studie von Stehle (2004) als methodische Grundlage. Für die Marktrisikoprämie werden vom IDW zusätzlich Schwankungsbreiten angegeben, die im Einzelfall ausgeschöpft werden können. Sowohl die Methodik als auch damit erzielte Ergebnisse sind nicht unumstritten und werden tlw. kontrovers diskutiert.

5.1.1 Marktrisikoprämie in der Unternehmensbewertung

Das IDW geht in seinen Verlautbarungen von einer vorherrschenden Risikoaversion der Marktteilnehmer aus.[213] Aus dieser angenommenen Risikoneigung resultiert die verlautbarte Vorgehensweise.

Es wird für die Berücksichtigung des Risikos eine Zinszuschlagsmethode zum Kapitalisierungszinssatz vorgeschlagen. Diese hat gegenüber der genannten Sicherheitsäquivalenz- und Ergebnisabschlagsmethode den Vorteil, dass empirische Beobachtungen vorliegen und damit eine „marktorientierte Vorgehensweise“ möglich sei:

> „Die national und international üblicherweise angewandte Zinszuschlagsmethode hat den Vorteil, dass sie sich auf empirisch beobachtbares Verhalten stützen kann und erlaubt damit eine marktorientierte Vorgehensweise bei der Bemessung von Risikozuschlägen.“[214]

Als zu verwendendes Modell erwähnt das IDW hierzu explizit das CAPM:

[213] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 19 Tz. 88.
[214] Vgl. ebd., S. 19 Tz. 90.

„Eine marktgestützte Ermittlung des Risikozuschlags kann insbesondere auf Basis des Capital Asset Pricing Model (CAPM) […] vorgenommen werden."[215]

Eine unternehmensspezifische Risikoprämie ist im CAPM durch die Betafaktoren bestimmt. Es verbleibt als weitere Risikokomponente eine für alle Unternehmen einheitliche Marktrisikoprämie gemäß CAPM.

Eine Konkretisierung der Verfahren wird durch den Fachausschuss Unternehmensbewertung (FAUB) vorgenommen. Als Standard für die Ermittlung der Marktrisikoprämie gelten derzeit die Ergebnisse der Langzeitstudie von Stehle,[216] die eine methodische Grundlage für die Empfehlungen durch den FAUB des IDW darstellen.[217] In dieser Studie werden historische Beobachtungen von realisierten Marktrenditen als Datenbasis verwendet, aus der eine für zukünftige Perioden gültige Marktrisikoprämie abgeleitet wird.

Der derzeitige Stand ist wie folgt: Als ein für Zukunftsprognosen geeigneter Zeitraum werden in Stehles Untersuchung die Jahre von 1955 bis 2003 für den DAX, CDAX und REXP erachtet.[218] Bei der Mittelwertbildung ist das arithmetische Mittel dem geometrischen als Schätzfunktion vorzuziehen.[219] Im Ergebnis betragen die Risikoprämien vor Steuern bei Verwendung des DAX 6,02 % und für den CDAX 5,46 % bei zugrundeliegenden Rentenrenditen (REXP) von 4,5 %. Darüber hinaus wird vom IDW ein Abzug von 1 % bis 1,5 % aus „mehreren Gründen" für vertretbar gehalten.[220]

Im September 2012 hat sich der FAUB des IDW in seiner Mitteilung zur Marktrisikoprämie einer durch die Finanzmarktkrise geänderten Kapitalmarktsituation angenommen. Aufgrund einer krisenbedingt veränderten „Risikotoleranz" hat sich die Marktrisikoprämie im Vergleich zu den Vorkrisenjahren erhöht. Der FAUB des IDW empfiehlt daher seit 2012, als

[215] Vgl. ebd., S. 19 Tz. 92.
[216] Vgl. Stehle, R. (2004), S. 906-927.
[217] Vgl. Wenger, E. (2005), S. 16.
[218] Vgl. Stehle, R. (2004), S 911.
[219] Vgl. ebd., S. 910.
[220] Vgl. ebd., S. 911.

Orientierung für die Marktrisikoprämie eine Bandbreite von 5,5 % bis 7,0 % vor persönlicher Steuer anzusetzen.[221]

5.1.2 Theorie zur Marktrisikoprämie

Die Marktrisikoprämie ist im CAPM als die Differenz der von Investoren erwarteten Rendite eines marktabbildenden Marktportfolios und des risikolosen Zinssatzes definiert:[222]

$$MRP = E[r_M] - r_f.$$

Relevant ist die Zusammensetzung des Marktportfolios, dessen von Investoren zu erwartende Rendite und der zeitlich zugehörige risikofreie Zinssatz. Seien zunächst die nach der Theorie des CAPM streng zu betrachtenden Annahmen dargestellt:

1. Das Marktportfolio enthält alle risikobehafteten Wertpapiere mit den nach Marktwerten gewichteten Portfolioanteilen in der betrachteten Ökonomie.[223]
2. Der Erwartungswert der Marktrendite ist eine von Investoren erwartete und geforderte stichtagsbezogene Rendite, die sich im CAPM-postulierten Gleichgewicht bildet.[224]

5.2 Praktische Ermittlung der Marktrisikoprämie

Stehle (2004) hat für den CDAX eine mittlere jährliche Rendite von 12,4 % und für den DAX eine Rendite von 12,96 % ermittelt. Der dazugehörige risikolose Zins beträgt für den DAX und CDAX 6,94 %.

Zum Vergleich sind in Tabelle 9 verschiedene Untersuchungsergebnisse dargestellt, bei denen die Schätzungen anhand historischer Beobachtungen entweder mit dem arithmetischen oder mit dem geometrischen Mittel erfolgten.

---

[221] Vgl. IDW (2012): *Hinweise des FAUB zur Berücksichtigung der Finanzmarktkrise bei der Ermittlung des Kapitalisierungszinssatzes in der Unternehmensbewertung*; WP Handbuch 2014.

[222] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S. 97. Vgl. Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009): S. 218. Vgl. Kruschwitz, L., Löffler, A. (2008): *Kapitalkosten aus theoretischer und praktischer Perspektive*; Die Wirtschaftsprüfung, Heft 17, S. 803-810, S. 806.

[223] Vgl. Wöhe, G. (2000), S. 798.

[224] Vgl. ebd., S. 796.

Autoren	Zeitraum	Arithmetisches Mittel		Geometrisches Mittel	
		Marktrendite	Basiszins	Marktrendite	Basiszins
Stehle, R. (2004) (DAX)	1955-2003	12,96 %	6,94 %	9,6 %	6,84 %
Stehle, R. (2004) (CDAX)	1955-2003	12,4 %	6,94 %	9,5 %	6,84 %
Stehle, R. / Hartmond, A. (1991)	1954-1988			12,1 %	7,5 % (5,3 %)
Bimberg (1991)	1954-1988	15 %	6,8 %	11,9 %	6,6 %
Morawietz (1994)	1950-1992			11,94 %	7,49 %

Tabelle 9: Historische Schätzungen von Marktrisikoprämien in Deutschland. Quelle: Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009), S. 222 und Ballwieser, W. (2011), S. 100.

Die Ergebnisse sind keineswegs homogen. Erklärungsbeiträge hierfür sind über die gewählte Schätzfunktion hinaus in der Beschaffenheit der zur Schätzung verwendeten Daten zu finden.

Es wird im Folgenden zunächst eine weitgehend IDW-basierte, standardisierte Methodik aus ökonometrischer Perspektive dargestellt, um anschließend hierzu eine statistische Inferenzmethodik zur Bemessung der Schätzgenauigkeit von resultierenden Marktrisikoprämien auszuarbeiten.

5.2.1 Ökonomisches und ökonometrisches Modell

Nach Stehle (2004) sind die Ergebnisse von Studien, die der Annahme einer zeitlich variierenden erwarteten Risikoprämie unterliegen, „höchst strittig“. Darüber hinaus

betragen vorgefundene Änderungen im Zeitverlauf weniger als 1 %.,[225] weshalb eine Ausgangshypothese zeitlich konstanter Marktrisikoprämien „zweckmäßiger“ sei.[226]

Als ökonomisches Modell kann demnach ein zeitkonstanter Erwartungswert für eine erwartete Überrendite des gesamten Marktes über dem risikofreien Zins angenommen werden:

$$E\left[r_{M,t}\right] - r_{f,t} = \mu_{MRP}.$$

Stehle sieht weiterhin einen Vorteil in der Verwendung von historischen Renditezeiträumen, da die Annahmen leicht verständlich und die Daten leicht verfügbar seien.[227] Kruschwitz und Löffler (2008) argumentieren, dass auch davon ausgegangen werden kann, dass ein Investor einen historisch „beobachteten Durchschnittswert als Orientierung für seine gegenwärtige Erwartung verwendet.“[228]

Basierend auf Stehles Ausführungen besteht das ökonometrische Modell aus einer zeitkonstanten Marktüberschussrendite und Realisationen davon stellen Schwankungen um den Erwartungswert im Sinne von Residuen dar:

$$r_{MRP,t} = r_{M,t} - r_{f,t} = \mu_{MRP} + \varepsilon_t \qquad \textbf{5.1}$$

mit $E[\varepsilon_t] = 0$.

5.2.2 Daten

Als geeignete Abbildung des Marktportfolios wird der DAX und CDAX erachtet, wobei vor allem der CDAX „wegen seiner größeren Marktbreite“ geeignete Schätzwerte liefert.[229] Stehle (2004) verwendet als Approximation des zeitlichen Verlaufs des risikolosen Zinssatzes den deutschen Rentenindex REXP.[230]

---

[225] Vgl. Stehle, R. (2004), S. 918.
[226] Vgl. ebd., S. 918.
[227] Vgl. ebd., S. 917.
[228] Vgl. Kruschwitz, L., Löffler, A. (2008), S. 807.
[229] Vgl. Stehle, R. (2004), S. 921.
[230] Vgl. ebd., S. 920 f.

Diese Indizes basieren auf Beobachtungen am Kapitalmarkt, die von der Deutschen Börse in Form von gewichteten Durchschnittskursen veröffentlicht werden.

Als Renditeintervall werden für DAX, CDAX und REXP Jahresrenditen herangezogen.[231]

Als Zeitraum werden die Jahre 1955 bis 2003 verwendet, was mit den Besonderheiten der Folgelasten durch den zweiten Weltkrieg und die durch die Währungsreform 1948 ausgelösten Kursbewegungen begründet wird.[232]

5.2.3 Schätzfunktion

Als Kandidaten einer geeigneten Schätzfunktion stehen das arithmetische und das geometrische Mittel zur Verfügung. Das arithmetische Mittel

$$\bar{r}_A = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

wird derzeit vom IDW durch Rückgriff auf Stehles Ergebnisse indirekt bevorzugt. Das geometrische Mittel

$$\bar{r}_G = \sqrt[T]{\left(\prod_{t=1}^{T}(1+r_t)\right)}$$

erscheint aufgrund einer multiplikativen Verknüpfung von Renditen ebenfalls angebracht und wird z.B. von Wenger (2005) zur Berechnung der Marktrisikoprämie befürwortet.[233]

5.3 Statistische Inferenz für die Marktrisikoprämie

Ein grundlegendes Kriterium hinsichtlich der Schätzung einer Marktrisikoprämie ist die Prognosequalität historischer Renditen. Weiterführende Fragen wie z.B. zur Schätzfunktion oder zur Parametrisierung einer historischen Datenbasis sind entbehrlich, wenn eine Prognosefähigkeit historisch realisierter Renditen überhaupt nicht gegeben ist.[234]

---

[231] Vgl. ebd., S. 919-927.

[232] Vgl. ebd., S. 920.

[233] Vgl. Wenger, E. (2005), S. 9-22.

[234] Vgl. Ruiz de Vargas, S. (2012): *Bestimmung der historischen Marktrisikoprämie im Rahmen von Unternehmensbewertungen;* Der Betrieb, Heft 15, S. 815 f.

Ist die Verwendung historischer Renditen zulässig, so ist das Kriterium „Prognosefähigkeit“ hinsichtlich der Parametrisierung der verwendeten Daten weiter zu hinterfragen. Hierbei sind die Länge des historischen Zeitraums und die Bestimmung der Renditeintervalle maßgeblich.

Veränderte Kapitalmarktsituationen sind auch für die IDW-Verlautbarungen zur unternehmensunabhängigen Marktrisikoprämie von Relevanz. So hat z.B. der FAUB des IDW am 10.01.2012 aufgrund einer vorliegenden Kapitalmarktsituation Empfehlungen hinsichtlich der Marktrisikoprämie ausgegeben. Die durch die Finanz- und Schuldenkrise vorherrschende erhöhte Unsicherheit hat zu historisch niedrigen Renditen deutscher risikoloserer Staatsanleihen geführt, weshalb bei Unternehmensbewertungen geprüft werden sollte, ob die Marktrisikoprämie am oberen Rand der empfohlenen Bandbreite von 4,5 % bis 5,5 % angesetzt werden kann.[235] Am 19.09.2012 hat das IDW erneut eine geänderte Empfehlung abgegeben. Die Finanzkrise habe zu einer veränderten „Risikotoleranz“ am Kapitalmarkt geführt und die Marktrisikoprämie sei daher höher als in den Vorkrisenjahren anzusetzen. Das IDW empfiehlt seit 2012 eine Bandbreite von 5,5 % bis 7,0 % vor persönlicher Steuer.[236]

Es bleibt festzuhalten, dass die anzusetzende Höhe der Marktrisikoprämie durch besondere Kapitalmarktsituationen oder Ereignisse per IDW-Verlautbarung variiert. Das IDW weicht insofern auch situationsbedingt von einer Annahme zeitlich konstanter Marktrisikoprämien ab.

Schließlich ist es bei der Auswahl einer Schätzfunktion zur Quantifizierung der Marktrisikoprämie für die Prognosefähigkeit ausschlaggebend, ob für die Mittelwertbildung das arithmetische oder geometrische Mittel bessere Ergebnisse liefert. Es wurde gezeigt, dass beide Schätzer in ihrer Prognosefunktion zu quantifizierbaren Verzerrungen führen können.

---

[235] Vgl. IDW Nachricht v. 10.01.2012, FN 2009 S. 696. [http://www2.nwb.de/portal/content/ir/downloads/169807/FAUB_Kapitalisierungszinssatz_Unternehmensbewertung.pdf?referrer=www.google.de (17.09. 2013)].

[236] Vgl. IDW (2012).

5.3.1 Ökonomisches und ökonometrisches Modell

Gemäß ökonometrischem Modell schwanken historisch realisierte Renditen um einen zeitlich konstanten Erwartungswert μ_{MRP} und beinhalten Abweichungen in Form von Residuen ε_t.

Die Eignung von historisch realisierten Renditen für die Herleitung der von Marktteilnehmern aktuell erwarteten Renditen wird in der Literatur diskutiert.[237] Nach Creutzmann (2010) ist hierbei die Annahme immanent, dass die Marktrisikoprämie zeitlich konstant ist „oder sich zumindest nicht nennenswert ändert."[238] Insofern wird auch eine abgeschwächte Annahme der Zeitkonstanz als ausreichend erachtet. Stehles Argument einer leichteren Verfügbarkeit von historischen Renditen lässt erkennen, dass das Verfahren im Sinne einer ‚Best-Practice-Lösung' diejenige Alternative darstellt, die sich im Diskurs von Praxis, Wissenschaft und Rechtsprechung gebildet hat und vor allem mit einer praktischen Umsetzbarkeit begründet ist.

Zur statistischen Überprüfung der Validität eines konstanten Erwartungswertes in Zeitreihen dient ein Test auf Stationarität. Diese beschreibt die Konstanz von Erwartungswert, Varianz und Kovarianz einer stochastischen Zeitreihe.

Stationarität ist gegeben, wenn die Verteilungseigenschaften der Folge von Zufallsvariablen konstant sind. Einfach ausgedrückt, wäre das Zufallsspiel der Renditen bei Stationarität für jede Periode identisch.

Eine hypothetisch angenommene Stationarität ist wie folgt konzipiert: Die Renditereihe ist mittelwertstationär wenn der Erwartungswert über die betrachtete Zeitspanne *T* konstant ist, also

$$E\left[r_{MRP,t}\right] = \mu_{MRP}, \forall\, t \in T.$$

[237] Vgl. Ballwieser, W. (2011), S. 100.

[238] Vgl. Creutzmann, A., Heuer, A.. (2010): *Der Risikozuschlag beim vereinfachten Ertragswertverfahren*; Der Betrieb, Nr. 24, S. 1301.

Ein Prozess ist zusätzlich kovarianzstationär, wenn die Kovarianz $\gamma(\tau)$ unabhängig von t ist und nur von dem Lag τ abhängt,[239]

$$E[(r_{MRP,t} - \mu_{MRP})(r_{MRP,t-\tau} - \mu_{MRP})] = \gamma(\tau), \forall\, t, \tau \in T.$$

Unter dem Begriff der sog. schwachen Stationarität ist die Konstanz von Erwartungswert und Kovarianz gemeinsam zu verstehen.[240] Die Kovarianzstationarität impliziert auch eine konstante Varianz der Zeitreihe. Die Konstanz der Kovarianz ist vor allem für die Untersuchung der stochastischen Unabhängigkeit relevant. Nur wenn diese Unabhängigkeit gegeben ist, sind die aufeinanderfolgenden Renditen Realisationen einer gleichbleibenden Verteilung, andernfalls wäre die Verteilung einer zukünftigen Rendite von den jüngsten Renditen abhängig.

Geeignete statistische Tests auf Stationarität sind der Dickey-Fuller-Test und der KPSS-Test, von denen der erst genannte in Abschnitt 5.4 Anwendung findet. Für den stochastischen Prozess der Folge von Marktüberschussrenditen kann bei signifikanter Stationarität die postulierte Zeitkonstanz der Erwartungswerte zumindest nicht widerlegt werden.

Eine andere statistische Überprüfung der Annahme zeitlich konstanter Marktrisikoprämien kann zugleich auch Informationen für die Bestimmung der Schätzperiodenlänge liefern. In 5.3.2.3 wird hierfür der Chow-Test auf Strukturbrüche in Zeitreihen vorgestellt und im Anschluss angewendet.

5.3.2 Daten und Stichprobe

Aus stichprobentheoretischer Sicht bringt Blume (1974) die Problematik auf den Punkt: „In practice, one does not know the population statistic and therefore must make an estimate.“[241] Aus theoretischer Sicht setzt sich die Population aus möglichen zukünftigen Markt- und Anleiherenditen zusammen und die Marktrisikoprämie ist somit durch den

---

[239] Vgl. Schlittgen, R., Streitberg, B. H. J. (2001): *Zeitreihenanalyse*; 9. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, S. 100.

[240] Vgl. ebd., S. 101. Darüber hinaus wird unter sog. strenger Stationarität zusätzlich eine konstante Wölbung und Schiefe der Verteilung verstanden. Diese zusätzlichen Bedingungen werden für diese Untersuchung außer Acht gelassen, da dem Verfasser in der Literatur hierzu keine themenrelevanten Diskussionen bekannt sind.

[241] Vgl. Blume, M. E. (1974): *Unbiased Estimators of Long Run Expected Rates of Return*; Journal of the American Statistical Association, Band 69, Ausgabe 347, S. 634.

Erwartungswert dieser Renditedifferenz bestimmt. Diese theoretische Population ist nach strenger Modellauslegung in der Praxis nicht zu beobachten. Die methodische Umsetzung der Verwendung historisch realisierter Renditen setzt streng genommen voraus, dass die zukünftigen Renditen identische Verteilungseigenschaften besitzen wie ihre Historie. Die Auswahl der zur Schätzung verwendeten Daten soll dieser Annahme möglichst gerecht werden. Vor diesem Hintergrund sind folgende Parametrisierungen und Bestimmungen vorzunehmen:

- Auswahl marktabbildender Indizes.
- Bestimmung der Schätzperiodenlänge.
- Bestimmung der Renditeintervalle.

5.3.2.1 DAX oder CDAX als Marktportfolio

Der CDAX der Deutschen Börse AG bildet als Index die Performance aller deutschen Aktien aus dem sog. Prime und General Standard ab.[242] In Stehles Untersuchung wird der CDAX ab 1988 verwendet, für die vorherigen Jahre dient ein Index aus allen an der Frankfurter Wertpapierbörse notierten Aktien als Äquivalent.[243]

Die Bewertung der Eignung z.B. des Indexes CDAX als Approximation des Marktportfolios gestaltet sich schwierig. Nach Roll (1977) ist es unmöglich, ein Marktportfolio nach den theoretischen Vorgaben des CAPM exakt zu identifizieren. Ein Solches müsste alle risikobehafteten Wertpapiere umfassen und stets exakt nach ihren jeweiligen Marktwerten gewichtet sein.[244] Da ein perfektes Marktportfolio als Vergleichsmaßstab nicht beobachtet werden kann, erscheint die Bemessung einer Verzerrung aufgrund der Approximation durch den CDAX ebenfalls unmöglich.

Für die Verwendung dieses Indexes als operationalisierte Variante des theoretischen Marktportfolios entfallen an dieser Stelle aus dem genannten Grund statistische

[242] Die Zusammensetzung von DAX und CDAX sind zu finden unter: Deutsche Börse AG (2013): *Leitfaden zu den Aktienindizes der Deutschen Börse*; S. 11. [http://www.dax-indices.com/DE/MediaLibrary/Document/Leitfaden_Aktienindizes.pdf (12.09. 2013)].

[243] Vgl. Stehle, R. (2004), S. 924.

[244] Vgl. Roll, R. (1977), S. 130.

Inferenzbetrachtungen. Es bleibt festzuhalten, dass die Indizes in Theorie und Praxis als bestmögliche Approximationen für das theoretische Marktportfolio angesehen werden.

5.3.2.2 REXP und risikofreier Zins

Der in der Stehle-Untersuchung verwendete Rentenindex REXP der Deutschen Börse AG „misst den gesamten Anlageerfolg in deutschen Staatsanleihen.“[245] Die Konstruktion des Indexes basiert auf dem Kursindex REX, der ein Portfolio mit zehn Anleihen für Laufzeiten von ein bis zehn Jahren und jeweils drei Kuponraten von 6 %, 7,5 % und 9 % darstellt. Bei den Portfoliobestandteilen des REX handelt es sich um 30 synthetische Anleihen, da die Anleiheparameter ‚Laufzeit' und ‚Kuponrate' für alle Zeitpunkte der Indexbildung konstant gehalten werden und diese Anleihen für gewöhnlich nicht am Markt gehandelt werden. Die notwendigen Preisbestimmungen der synthetischen Anleihen werden aus anderen verfügbaren Informationen wie der Zinsstrukturkurve abgeleitet und nach Marktanteilen der 30 verschiedenen Parameterkonstellationen im Index gewichtet.[246]

Der REXP wird um den REX zu einem sog. ‚total return index' erweitert, bei dem über Preisänderungen hinaus sämtliche Erträge wie z.B. Kuponzahlungen in der Index-Entwicklung ebenfalls erfasst werden.[247]

Die Berechnungen des REXP beginnen 1988 und für die Jahre 1967-1987 wird nach Stehle (2004) auf Änderungsraten der Bayrischen Hypotheken- und Wechselbank zurückgegriffen. Weitere Rückberechnungen erfolgen anhand von „Umlaufrenditen von Pfandbriefen (1949-1954) und von Staatsanleihen (1955-1966).“[248]

Als Grundgesamtheit gelten „alle Anleihen, Obligationen und Schatzanweisungen der Bundesrepublik Deutschland, des Fonds Deutsche Einheit sowie der früheren Treuhandanstalt mit fester Verzinsung und einer Restlaufzeit zwischen einem halben und 10,5 Jahren.“[249]

---

[245] Vgl. Deutsche Börse Group (2014): *Leitfaden zu den REX-Indizes*; Deutsche Börse AG, Version 3.11, Dezember 2014, S. 4. [www.dax-indices.com/DE/MediaLibrary/Document/REX_Leitfaden.pdf (11.11. 2015)].

[246] Vgl. ebd., S. 5 f.

[247] Vgl. ebd.*, S.* 4-6.

[248] Vgl. Stehle, R. (2004), S. 920 f.

[249] Vgl. Deutsche Börse Group (2014), S. 4.

Nach Angaben der Deutschen Börse AG entfallen auf die REX-Indizes ein „Hauptteil der Börsenumsätze“[250] und sind daher als Abbild der Grundgesamtheit deutscher risikoloser Anleihen geeignet.

5.3.2.3 Aussagefähigkeit historischer Renditen - Schätzperiodenlänge

Ein wesentliches Kriterium der Prognosefähigkeit ist die Länge der Schätzperiode, innerhalb derer die beobachteten Renditen die Datenbasis zur Schätzung bilden. Eine Verlängerung des Zeitraumes erhöht zwar die Anzahl der Beobachtungen und damit einhergehend einen oftmals vorteilhaften erhöhten Stichprobenumfang, kann allerdings auch zu Lasten der Repräsentativität gehen. So kann z.B. die Eigenschaft der Erwartungstreue des Schätzers verletzt sein, wenn sich maßgebliche Kapitalmarktverhältnisse innerhalb des Zeitraums geändert haben und jüngere Renditerealisationen eine größere Prognosekraft besitzen.

Wohl auch aufgrund einer schwer zu widerlegenden Willkür bei dieser notwendigen Parametrisierung im Anwendungsfall sind die Ergebnisse von Stehle (2004) nicht kritikfrei. Der Ausschluss der Jahre vor 1955 wird mit den außergewöhnlichen Kursbewegungen im Zusammenhang „mit dem Zweiten Weltkrieg und seinen Folgelasten“[251] begründet, aber auch von Stehle selbst als diskussionswürdig bezeichnet.

Aus stichprobentheoretischer Sicht ist die Frage zu beantworten, ob die Historie als Stichprobe eine Teilmenge der zu betrachtenden Population darstellt, die die gesuchte zukunftsorientierte Marktrisikoprämie umfasst. Liegt z.B. ein Strukturbruch innerhalb der Zeitreihe vor, entstammt der Datensatz verschiedenen Populationen und es besteht die Gefahr einer statistischen Fehlaussage über eine vermeintlich einheitliche Population.[252]

Über eine Argumentation der historischen Rahmenbedingungen hinaus, kann ein statistisches Kriterium für die Auswahl der Schätzperiodenlänge aus der Zeitreihe selbst gewonnen werden. Für die Identifikation von Strukturbrüchen in den historischen Marktrenditen eignet sich der Chow-Test. Dieser wird u.a. von Wenger (2005) als ökonometrische Variante vorgeschlagen und ermöglicht, die Festlegung der Schätzperiodenlänge durch ein objektives Kriterium zu plausibilisieren. Wenger kommt

[250] Vgl. ebd.
[251] Vgl. Stehle, R. (2004), S. 920.
[252] Vgl. hierzu z. B. Ruiz de Vargas, S. (2012), S. 4 f.

mittels Chow-Test zu dem Ergebnis, dass Stehles verwendeter Index im Jahr 1960 einen signifikanten Strukturbruch aufweist und daher die vorherigen Jahre auszuschließen sind.[253]

5.3.2.4 Chow-Test zur Ermittlung von Strukturbrüchen

Der Chow-Test beruht auf sukzessiven linearen Regressionen der Zeitreihe für verschiedene Periodenlängen. Die Werte der Zeitreihe werden dabei gegen ihre dazugehörigen Zeitpunkte regressiert. Um einen signifikanten Strukturbruch zu ermitteln, wird die lineare Regression der Zeitreihe schrittweise um eine weitere Periode in die Vergangenheit verlängert. Als Testkriterium wird dann geprüft, ob die Aufnahme einer zusätzlichen Periode signifikante Änderungen in der linearen Regression aufweist. Das Prüfkriterium ist also die Anpassungsfähigkeit einer zusätzlichen Zeitperiode an die gesamte Regression, wofür Chow (1960) die folgende Teststatistik vorgeschlagen hat:[254]

$$Chow\ Teststatistik: = \frac{SS_T - SS_{T-1}}{SS_{T-1}/(T-k-1)} \sim F_{k;T-k-1},$$

mit

T Anzahl der Beobachtungen,

SS_T Quadratsumme der Residuen einer Regression mit Periodenlänge *T,*

SS_{T-1} Quadratsumme der Residuen einer Regression mit Periodenlänge *T-1* und

k Anzahl der Steigungskoeffizienten der linearen Regression (hier 1).

---

[253] Vgl. Wenger, E. (2005), S. 19.

Die Datenreihen zu Stehles Untersuchung sind zu finden unter: [https://www.wiwi.hu-berlin.de/de/professuren/bwl/bb/data (30.07. 2015)].

Ein Ausschluss der Jahre 1955-1960 verringert die geschätzte Marktrisikoprämie und führt somit c.p. zu höheren Unternehmenswerten.

[254] Vgl. Chow, G. (1960): *Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions*; Econometrica, Band 28, Ausgabe 3, S. 591-605.

Vgl. Kriedel, N. (2006): *Die Datierung von Strukturbrüchen in ökonomischen Zeitreihen – Das Beispiel der Geldnachfragefunktion in Großbritannien*; WiSt – Wirtschaftswissenschaftliches Studium, Zeitschrift für Ausbildung und Hochschulkontakt, Heft 6, Verlag Vahlen, Juni 2006, S. 347 f.

Für den hier vorliegenden Fall kleiner Teilstichproben – die zusätzliche Stichprobengröße beträgt eins – wird der adjustierte Chow-Forecast-Test verwendet. Detaillierte Testangaben hierzu sind Wengers (2005) Ausführungen nicht zu entnehmen.

Die untersuchte Teststatistik entspricht dem prozentualen Anteil der zusätzlichen quadratischen Fehlersumme gegenüber der einer Regression ohne die zusätzliche Periode multipliziert mit einem Adjustierungsfaktor für Parameter- und Stichprobenanzahl. Diese Teststatistik ist nach Chow F-verteilt mit den Freiheitsgraden *k* und *T-k-1*.

Nach der zu testenden Nullhypothese $H_0: \beta_T = \beta_{T-1}$ sind die Koeffizienten der linearen Regression bei einer Verlängerung um eine Periode konstant. Signifikante Strukturbrüche sind ein Indiz dafür, dass zeitlich frühere Werte nicht in der Datenmenge enthalten sein sollten und eine unzureichende Prognosefähigkeit besitzen.[255]

Der Chow-Test wird für die Stehle Daten in Abschnitt 5.4.1 angewandt.

5.3.2.5 Alternative Argumentation zur Abgrenzung des Renditezeitraumes

Neben dem Chow-Test als rein statistische Variante sind in der Literatur sachlogische Überlegungen zur Bestimmung der Schätzperiodenlänge vorzufinden, die z.T. Stehles Ausführungen entgegenstehen. Wenger hat in seiner 2005 veröffentlichten Kritik an den Empfehlungen des IDW zur Marktrisikoprämie folgende Möglichkeiten zur Überprüfung eines geeigneten Untersuchungszeitraumes vorgeschlagen. Zum einen kann ein Vergleich mit anderen Ländern vorgenommen werden, um die Folgen des Zweiten Weltkrieges auf die Kursentwicklung am Aktienmarkt zu untersuchen. Zum anderen können „ökonomisch bedeutsame“ Ereignisse identifiziert werden, „die zu einer Veränderung der Ertragssituation von Aktienanlagen in Deutschland geführt haben.“[256]

In einem angestellten Ländervergleich wird eine „sich weit von allen anderen Jahrzehnten abhebende Überperformance des deutschen Aktienmarkts“[257] in den fünfziger Jahren hervorgehoben. Eine ähnliche Performance für diesen Zeitraum ist nach Wenger nur in Japan vorzufinden und es wird auf die dort ebenfalls vorliegende Aufholung der Wirtschaft durch „komparative Verluste des vorausgegangenen Jahrzehnts“[258] verwiesen.

Zusätzlich wird ein Vergleich mit den Kursentwicklungen in der Schweiz hergestellt, für die ein durch Kriegsschäden bedingter Einfluss auf die Kursentwicklung nicht vorliege. Der

[255] Vgl. Wenger, E. (2005), S. 19.
[256] Vgl. ebd., S. 18 f.
[257] Vgl. ebd., S. 20.
[258] Vgl. ebd.

deutsche Aktienmarkt weise gegenüber dem Schweizer Aktienmarkt eine „extreme Überperformance“ in den fünfziger Jahren auf. Wenger schlussfolgert, dass die Kursentwicklung in den fünfziger Jahren durch den vorrausgegangenen Krieg bedingt sei und diese Kurse keine für die Zukunft ausreichende Prognosequalität besitzen.[259]

Als ökonomisch bedeutsames Ereignis wird die Errichtung der innerdeutschen Grenze 1961 genannt. Der bis dahin anhaltende Flüchtlingsstrom aus dem osteuropäischen Raum war durch höher qualifizierte und leichter integrierbare Arbeitskräfte im Vergleich zu Drittländern geprägt und hat auch den Faktor Kapital gefördert.[260]

Aufgrund dieser Vergleiche sind nach Wenger die Jahre in der zweiten Hälfte der fünfziger Jahre aus dem von Stehle verwendeten Renditezeitraum auszuschließen, da diese in einer Stichprobe für heutige Prognosezwecke keine ausreichende Repräsentativität besitzen.[261]

In der Anwendung des Chow Tests in Abschnitt 5.4.1 wird anhand Stehles logarithmierter Index-Reihe untersucht, ob für die genannten sachlogischen Argumentationen statistische Nachweise vorliegen.

5.3.2.6 Renditeintervalle

Wie bei den Betafaktoren kann auch bei der Ermittlung der Marktrisikoprämie ein Intervalling-Effekt vorliegen, nach dem eine Abhängigkeit der Schätzergebnisse von der Auswahl der Renditeperioden vorliegt. Der Effekt bei Betafaktoren ist vor allem aufgrund einer zu geringen Liquidität für kurze Renditezeiträume und einer damit verbundenen geringen Repräsentativität der Renditen problematisch.[262] Auf der anderen Seite besteht bei zu großen Renditeperioden die Möglichkeit, dass relevante Kursbewegungen nur unzureichend erfasst werden.[263]

---

[259] Vgl. ebd., S. 23.

[260] Vgl. ebd., S. 24-26.

[261] Vgl. ebd., S. 26 f.

[262] Vgl. Stellbrink, J, Brueckner, C. (2011), S. 5.

[263] Vgl. Dimson, E. (1979): *Risk Measurement When Shares are Subject to Infrequent Trading*; Journal of Financial Economics; Band 7, Ausgabe 2, S. 198.
Vgl. Albert, C. (1992): *The intervalling effect bias in beta: A note*; Journal of Banking and Finance, Band 16, Ausgabe 1, S. 61.

Da die Marktindizes eine hohe Marktbreite und eine damit einhergehende Liquidität besitzen, kann zumindest ein durch Illiquidität bedingter Intervalling-Effekt ausgeschlossen werden. Es stehen im Vergleich zu den unternehmensspezifischen Betafaktoren keine kurzfristigen Kursbewegungen, sondern langfristige Durchschnitte im Vordergrund.

Stehle (2004) gibt neben Jahresrenditen auch Ergebnisse für längere Renditeperioden an. So beträgt mittlere CDAX-Rendite bei zweijährigen Perioden 11 % und bei 5-jährigen 8,99 % gegenüber einer mittleren Jahresrendite von 12,4 %.[264] Da bei Unternehmensbewertungen die zukünftigen Referenzperioden für Zahlungsströme i.d.R. ein Jahr betragen, erscheinen Jahresrenditen an dieser Stelle angebracht.

5.3.3 Schätzfunktion: Arithmetisches Mittel vs. geometrisches Mittel

Als Schätzfunktion kann als IDW-Standard zumindest durch die Verwendung der Stehle-Ergebnisse eine arithmetische Mittelwertfunktion angesehen werden, als dessen Gegenkandidat wird in der Literatur das geometrische Mittel genannt. Auch wenn Alternativmethoden nicht den Untersuchungsgegenstand in der vorliegenden Arbeit darstellen, kann eine Gegenüberstellung dieser beiden Schätzfunktionen zur Bestimmung möglicher Verzerrungen und zur statistischen Beurteilung der Prognosefähigkeit beitragen.

Begründet wird das arithmetische Mittel mit den Untersuchungen von Blume (1974) und Cooper (1996), nach denen es für Diskontierungszwecke bessere Ergebnisse liefert als das geometrische Mittel.[265]

Ein bemerkenswertes Ergebnis der Arbeiten von Blume und Cooper ist die Unterscheidung geschätzter Zinssätze hinsichtlich ihrer Verwendung für Aufzinsungs- oder Diskontierungszwecke. Werden aus historischen Renditen Durchschnitte mit dem arithmetischen oder geometrischen Mittel berechnet, sind diese Zinssätze für zukunftsorientierte Renditen verzerrt. Blume (1974) hat eine Verzerrung von Aufzinsungsfaktoren untersucht und hierfür eine (fast) unverzerrte Adjustierung

[264] Vgl. Stehle, R. (2004), S. 924.
[265] Vgl. ebd, S. 910 f.

vorgeschlagen.[266] Cooper (1996) konnte wiederum eine Verzerrung von Diskontierungsfaktoren aufdecken und hat ebenfalls eine Adjustierung vorgeschlagen.[267]

Die Ergebnisse sind in Tabelle 10 zusammenfassend dargestellt. Eine Verzerrung ist aus der Anzahl der historischen Beobachtungsperioden *T* und der Anzahl der Verzinsungsperioden *N* bestimmt, (Beispiel: Schätzzeitraum von 40 Jahren (*T=40*) und Verwendung des Durchschnitts als Abzinsungsfaktor für drei Jahre (*N=3*)).

Mittelwert	**Verzerrung**	**Beschreibung**	**Quelle**
Aufzinsung			
Arithm.	$E(\bar{R}_A) = \mu$	Unverzerrt; $N = 1$	Blume, S. 3 f.
Arithm.	$E\left(\bar{R}_A{}^N\right) \geq \mu^N$	Nach oben; $N > 1$	Blume, S. 3 f.
Geom.	$E\left(\bar{R}_G{}^N\right) = \mu^N$	Unverzerrt; $N = T$	Blume, S. 5.
Geom.	$E\left(\bar{R}_G{}^N\right) > \mu^N$	Nach oben; $N > T$	Blume, S. 6.
Geom.	$E\left(\bar{R}_G{}^N\right) < \mu^N$	Nach unten; $N < T$	Blume, S. 5.
Abzinsung			
Arithm.	$E\left(\bar{R}_A{}^{-N}\right) > \mu^{-N}$	Nach oben; $N > 1$	Cooper, S. 160.
Geom.	$E\left(\bar{R}_G{}^{-N}\right) > \mu^{-N}$	Nach oben; $T > N$	Cooper, S. 160.

Tabelle 10: Verzerrungen des arithmetischen und geometrischen Mittels historischer Renditen für den Aufzinsungs- und Abzinsungsfall. Quelle: Blume (1974) und Cooper (1996), eigene Darstellung.

T: Anzahl Beobachtungsperioden

[266] Vgl. Blume, M. E. (1974), S. 634-638.

[267] Vgl. Cooper, I. (1996): *Arithmetic versus geometric mean estimators: Setting discount rates for capital budgeting*; European Financial Management, Band 2, Ausgabe 2, S. 157-167.

N: Anzahl Verzinsungsperioden

$\bar{R}_A$: 1 + Arithmetisches Mittel historischer Renditen

$\bar{R}_G$: 1 + Geometrisches Mittel historischer Renditen

μ: 1 + Erwartungswert der Rendite

Wird aus den historischen Renditen ein geometrisches oder arithmetisches Mittel für Zwecke der Aufzinsung gebildet, liefert nur das arithmetische Mittel für die unmittelbar nächste zukünftige Periode (*N=1*) einen unverzerrten Schätzer für μ. Für alle weiteren Perioden liegt eine Verzerrung nach oben vor. Das geometrische Mittel ist nur dann unverzerrt, wenn die Anzahl der Perioden zur Aufzinsung der Anzahl beobachteter Renditeperioden entsprechen (*N=T*). Ist die Anzahl der Aufzinsungsperioden geringer (*N<T*), verursacht das geometrische Mittel nach unten verzerrte Aufzinsungsfaktoren.[268]

Diese Ergebnisse für Aufzinsungsfaktoren lassen sich nicht ohne Weiteres auf zu verwendende Diskontierungsfaktoren übertragen. Unabhängig davon, welche Periode betrachtet wird, sind bei Verwendung sowohl des arithmetischen als auch des geometrischen Mittels die resultierenden Diskontierungsfaktoren nach oben verzerrt, wobei die Verzerrung des geometrischen Mittels stets größer ist.

Da in der Unternehmensbewertung Abzinsungsfaktoren benötigt werden, ist die geringere Verzerrung des arithmetischen Mittels ein Argument für die Verwendung dieser Schätzfunktion.

5.3.4 Schätzfunktion: Stichprobenverteilung der Marktrisikoprämie

Für genügend große Stichproben folgt nach dem zentralen Grenzwertsatz für das arithmetische Mittel asymptotisch eine Normalverteilung. Mit einem Stichprobenumfang von 51 sei diese Bedingung für diesen Fall als erfüllt angenommen.

[268] Da für die Ermittlung der Marktrisikoprämie die Renditezeiträume sehr lang sind, so. z.B. bei Stehle (2004) von 1955 bis 2003, soll der Fall *N>T* nicht weiter betrachtet werden.

Der Standardfehler und die Normalverteilung des arithmetischen Mittels ergeben sich dann aus dem zentralen Grenzwertsatz:[269]

$$\bar{r}_{MRP} \sim N\left(\mu_{MRP}, \frac{\sigma_{MRP}^2}{n}\right).$$

Diese theoretischen Verteilungsparameter sind unbekannt und werden wie folgt geschätzt. Der Schätzer für den Erwartungswert μ_{MRP} ist das arithmetische Mittel

$$\hat{\mu}_{MRP} = \bar{r}_{MRP},$$

und der erwartungstreue Schätzer der Standardabweichung σ_{MRP} der Marktrisikoprämie ist mit *n* Beobachtungen[270]

$$\hat{\sigma}_{r_{MRP}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{MRP,i} - \bar{r}_{MRP}\right)^2}.$$

Hieraus folgt der geschätzte Standardfehler des arithmetischen Mittels

$$\hat{\sigma}_{\bar{r}_{MRP}} = \frac{\hat{\sigma}_{r_{MRP}}}{\sqrt{n}}.$$

Da die Standardabweichung der theoretischen Grundgesamtheit unbekannt ist und für das Betreiben statistischer Inferenz geschätzt wird, wird für die Teststatistik des standardisierten arithmetischen Mittels der Marktrisikoprämie die t-Verteilung verwendet:[271]

$$T = \frac{\bar{r}_{MRP} - \mu_{MRP}}{\hat{\sigma}_{\bar{r}_{MRP}}}\sqrt{n} \sim t(n-1),$$

mit n als Anzahl der Freiheitsgraden, die aus der Stichprobengröße resultiert.

Aus der t-Verteilung der Teststatistik folgt ein symmetrisches Konfidenzintervall für die geschätzte Marktrisikoprämie mit der Vertrauenswahrscheinlichkeit *1-α*:[272]

---

[269] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 27 f.
[270] Vgl. Hartung, J, Elpelt, B., Klösener, K.-H. (2005), S. 63.
[271] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 66.
[272] Vgl. Fahrmeir et al (1999), S. 467.

$$\bar{r}_{MRP} \pm \hat{\sigma}_{\bar{r}_{MRP}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-2}$$

mit $t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-2}$ als Quantil der t-Verteilung.

Mit großen Stichprobenumfängen und der damit hohen Anzahl an Freiheitsgraden *n* strebt die t-Verteilung gegen die Normalverteilung, wobei hierfür bereits Stichprobenumfänge von *n>20* als ausreichend erachtet werden.[273]

5.4 Anwendung: Schätzung der Deutschen Marktrisikoprämie

Im Folgenden werden die vorgestellten Inferenzmethoden zur Beurteilung der Modellvalidität, der Parametrisierung des Stichprobenzeitraums und der Schätzung angewendet. Der zugrunde liegende Datensatz für die Jahre 1949-2011 besteht aus Jahresrenditen der Indexe CDAX und REXP sowie deren Rückberechnungen basierend auf Stehles Veröffentlichungen (im Weiteren: ‚Stehle Daten'). Der REXP für die Jahre 2010 und 2011 wurde Veröffentlichungen der Börse Frankfurt entnommen. Für die Jahre 1949-1955 wurden außerdem Werte aus einer Veröffentlichung Wengers (2005) hinzugenommen.[274] Diese Daten sind in Anhang 4 angegeben.

Zunächst sind in Tabelle 11 das arithmetische Mittel der historischen Marktrisikoprämien und dessen Standardfehler für verschiedene Zeiträume enthalten, die anhand der in 5.3.2.5 dargestellten Diskussionsbeiträge ausgewählt wurden.

---

[273] Vgl. Polasek, W. (1997): *Schließende Statistik – Einführung in die Schätz- und Testtheorie für Wirtschaftswissenschaftler*; Springer-Verlag, Berlin u.a., S. 49.

[274] Vgl. für die Stehle-Daten CDAX und REXP bis 2011 Stehle, R. (2011). [https://www.wiwi.hu-berlin.de/de/professuren/bwl/bb/data (18.11. 2015)]. REXP für die Jahre 2010 und 2011 der Börse Frankfurt:
[http://www.boerse-frankfurt.de/de/aktien/indizes/rex+performance+DE0008469115/kurs_und_umsatzhistorie/historische+kursdaten (26.11. 2015)].
Vgl. zur Rückberechnung die Erstveröffentlichung: Stehle, R., Hartmond, A. (1991): *Durchschnittsrenditen deutscher Aktien 1954-1988*; Kredit und Kapital, Nr. 24, S. 371-411.
Weiterführende Berechnungen und Korrekturen sind zu finden in: Stehle, R., Huber, R., Maier, J. (1996): *Rückberechnung des DAX für die Jahre 1955 bis 1987*; Kredit und Kapital Nr. 29, S. 277-304 und Stehle, R., Wulff,C., Richter, Y. (1999): *Die Rendite deutscher Blue-Chip-Aktien in der Nachkriegszeit – Rückberechnung des DAX für die Jahre 1948 bis 1954*; working paper, Humboldt-Universität zu Berlin.
Für die Jahre 1949-1955: vgl. Wenger, E. (2005), S. 9-22.

Die Ergebnisse der Schätzung der mittleren Marktrenditen sind wie folgt:

Zeitraum	Marktrisikoprämie	Standardfehler MRP	Arithmetisches Mittel CDAX	Arithmetisches Mittel REXP
1955-2003	5,46 %	3,62 %	12,40 %	6,94 %
1961-2003	2,54 %	3,62 %	9,6 %	7,06 %
1955-2011	5,16 %	3,37 %	11,84 %	6,68 %
1961-2011	2,66 %	3,37 %	9,42 %	6,75 %

Tabelle 11: Arithmetisches Mittel und Standardfehler der Jahresrenditen der Marktrisikoprämie sowie des CDAX und REXP. Quelle Stehle Daten, eigene Berechnungen in R.

5.4.1 Ökonomisches und Ökonometrisches Modell

5.4.1.1 Konstante Marktrisikoprämie - Stationarität

Wie in 5.2.1 ausgeführt, kann für das ökonomische Modell eine zeitkonstante Marktrisikoprämie angenommen werden, die den Erwartungswert der Marktrenditen beinhaltet:

$$E[r_{M,t}] - r_{f,t} = \mu_{MRP}.$$

Nach Stehle (2004) kann weiterhin davon ausgegangen werden, dass sich Investoren an historischen Durchschnitten für gegenwärtige Erwartungen orientieren.[275] Mit dieser Begründung werden im ökonometrischen Modell Erwartungswerte durch historische Renditerealisationen ersetzt:

$$r_{M,t} - r_{f,t} = \mu_{MRP} + \varepsilon_t.$$

Diese Annahme soll nun mittels folgender Hypothese zur Marktrisikoprämie untersucht werden:

[275] Vgl. Kruschwitz, L., Löffler, A. (2008), S. 807.

- Historische Renditerealisationen der Marktrisikoprämie als Differenz von CDAX und REXP unterliegen einem konstanten Erwartungswert, einer konstanten Varianz und sind voneinander unabhängig.

In der Stehle Untersuchung wird 1955 als Beginn der Zeitreihe gewählt, andere Autoren befürworten hingegen, die Jahre vor 1961 auszuschließen. Die sachlogischen Argumentationen dieses Ausschlusses lassen sich wie in 5.3.2.5 dargestellt mit einer nachkriegsbedingten Ökonomie in Deutschland begründen, die für die Gegenwart keine Gültigkeit mehr besitzt. Der in Abschnitt 5.3.1 vorgestellte Test auf Stationarität wird für den Beginn von 1955 und 1961 durchgeführt. Die zu testenden Hypothesen beruhen auf der Darstellung der Renditezeitreihe MRP_t als autoregressiven Prozess:

$$\varepsilon_t = MRP_t - \alpha_1 MRP_{t-1} - \alpha_2 MRP_{t-2} - \cdots \alpha_p MRP_{t-p}.$$

Formal lauten die zu testenden Hypothesen:

$$H_0: a_1 = 1,$$

$$H_1: |a_1| < 1.$$

Stationarität kann bei Ablehnung der Nullhypothese zu Gunsten von $|a_1| < 1$ als signifikant aufgezeigt werden und zum Testen kommt der augmentierte Dickey-Fuller-Test (ADF-Test) zum Einsatz.[276] In Tabelle 12 sind die Testergebnisse für den Beginn der Jahre 1955 und 1961 bis zum Zeitraum der Stehle-Untersuchung 2003 und für die Aktualisierung bis 2011 dargestellt.

[276] Vgl. Schlittgen, R., Streitberg, B. H. J. (2001), S. 301.

Zu bemängeln wäre z.B. nach Schlittgen und Streitberg (2001) eine zu geringe Trennschärfe dieses Tests, also die Fähigkeit eine abzulehnende Nullhypothese als solche zu erkennen. Da Signifikanz nachgewiesen werden kann und die Nullhypothesen abgelehnt werden, sei dieses Problem für diesen Anwendungsfall ausgeschlossen. Eine Alternative stellt der KPSS-Test dar, bei dem die Testhypothesen vertauscht sind. Dieser ist allerdings nur für bestimmte Modellspezifikationen gültig.

Zeitraum	1955 - 2003	1961 - 2003	1955 - 2003	1961 - 2011
DF-Teststatistik	-3,6476	-3,0841	-4,1173	-3,8314
Lag	3	3	3	3
p-Wert	**0,039**	0,146	**0,011**	**0,024**

Tabelle 12: Augmented Dickey-Fuller Test für Zeiträume von 1955-2011. Quelle: Stehle Daten und eigene Berechnungen in R.

Für die These zur Konstanz von Erwartungswert und Varianz sowie Unabhängigkeit der historischen Marktrisikoprämie kann für drei der vier betrachteten Zeitspannen ein statistisch signifikanter Nachweis erbracht werden. Für den Beginn der DAX-Reihe ab 1955 bis 2003 und 2011 werden die Nullhypothesen abgelehnt und Stationarität liegt für diese historischen Renditereihen signifikant vor. Wird die Zeitreihe ab 1961 betrachtet, liegt für den Zeitraum bis 2011 eine signifikante Stationarität vor. Von 1961 bis 2003 kann diese dagegen nicht bestätigt werden.

5.4.1.2 Schätzperiodenlänge - Adjustierter Chow-Forecast-Test

Zur statistischen Untersuchung einer geeigneten Schätzperiodenlänge dient der adjustierte Chow-Forecast-Test (Chow-Test) für Zeitreihen. Als Zeitraum werden von Stehle die Jahre 1955 bis 2003 verwendet. Grund hierfür sind die besonderen Entwicklungen nach dem Zweiten Weltkrieg und außergewöhnliche Kursbewegungen nach der Währungsreform 1948.[277] Sachlogisch wird für den zusätzlichen Ausschluss der Jahre bis 1960 in der Literatur wie folgt argumentiert:

- Eine anhand eines Ländervergleichs mit Japan und der Schweiz aufgezeigte deutliche Überperformance des deutschen Aktienmarktes, die durch eine kriegsbedingte Aufholung der Wirtschaft in den fünfziger Jahren verursacht wurde.
- Als ökonomisch bedeutsames Ereignis gilt die Errichtung der innerdeutschen Grenze. Ein bis dahin anhaltender Flüchtlingsstrom qualifizierbarer, integrierbarer

[277] Vgl. Stehle, R. (2004), S. 920.

Arbeitskräfte führte auch zu einer positiveren Ertragssituation von Aktien in den Jahren vor 1961.[278]

Die zu untersuchenden Hypothesen lauten daher:

- Der deutsche Aktienmarkt unterliegt im Jahr 1954 einem Strukturbruch.
- Der deutsche Aktienmarkt unterliegt im Jahr 1960 einem Strukturbruch.

Die zu testende Zeitreihe ist der logarithmierte Stehle-DAX von 1949 bis 2003. Zwecks Aktualisierung wird der Chow-Test für die gleiche Zeitreihe um die Jahre 2004 bis 2011 erweitert. Als Signifikanzniveau wird $\alpha = 0{,}05$ gewählt.

Die mittels Chow-Test formulierten Null- und Alternativhypothesen lauten formal:

$$H_0: \beta_{T-1} = \beta_T,$$

$$H_1: \beta_{T-1} \neq \beta_T,$$

mit β_T als dem Steigungskoeffizienten einer linearen Regression für die Periodendauer *T*. Unter H_0 ändert sich der Regressionskoeffizient der Stehle-DAX-Reihe bei Aufnahme einer zusätzlichen Periode nicht. Wird H_0 abgelehnt, kann ein Strukturbruch in *T* als signifikant bestätigt werden. In Tabelle 13 sind der logarithmierte Stehle-CDAX und die Signifikanzergebnisse des Chow-Tests (1 – p-Wert) dargestellt.[279]

[278] Vgl. Wenger, E. (2005), S. 17-27.

[279] Die Ergebnisse des Chow-Tests für den gesamten Zeitraum sind in Anhang 5 angegeben.

			1949-2003		1949-2011	
Jahr	Stehle DAX	Stehle DAX logarithmiert	F-Statistik	p-Wert	F-Statistik	p-Wert
1953	231,8	5,446	**5,292**	**0,026**	**6,367**	**0,014**
1954	429,0	6,061	0,555	0,460	0,900	0,347
1955	491,4	6,197	0,430	0,515	0,730	0,397
1958	826,1	6,717	0,011	0,918	0,073	0,788
1959	1470,8	7,294	2,337	0,134	1,891	0,175
1960	1997,9	7,600	**6,519**	**0,014**	**5,421**	**0,024**
1961	1841,7	7,518	**5,244**	**0,027**	3,900	0,054
1969	2703,7	7,902	**4,380**	**0,044**	1,806	0,186
1981	3832,6	8,251	2,502	0,129	**4,339**	**0,046**
1982	4586,1	8,431	2,674	0,118	**4,545**	**0,042**

Tabelle 13: Chow Test, F-Statistiken und p-Werte für den logarithmierten Stehle-Dax. Ausschnitt von untersuchten Strukturbrüchen von 1949 – 1982. Die getesteten Perioden des Stehle DAX sind 1949-2003 und 1949-2011. Quelle: Stehle Daten und eigene Berechnungen in R.

Es sind zwar mehrere signifikante Strukturbrüche vorzufinden, wodurch die Auswahl der geeigneten Schätzperiodenlänge erschwert wird. Nach Kriedel (2006) ist bei Vorliegen mehrerer signifikanter Jahre ein Strukturbruch in dem Zeitpunkt zu verorten, in dem der höchste Wert der F-Statistik vorzufinden ist.[280] Dies ist bei Betrachtung bis 2003 für das Jahr 1960 der Fall.

[280] Vgl. Kriedel, N. (2006), S. 348.

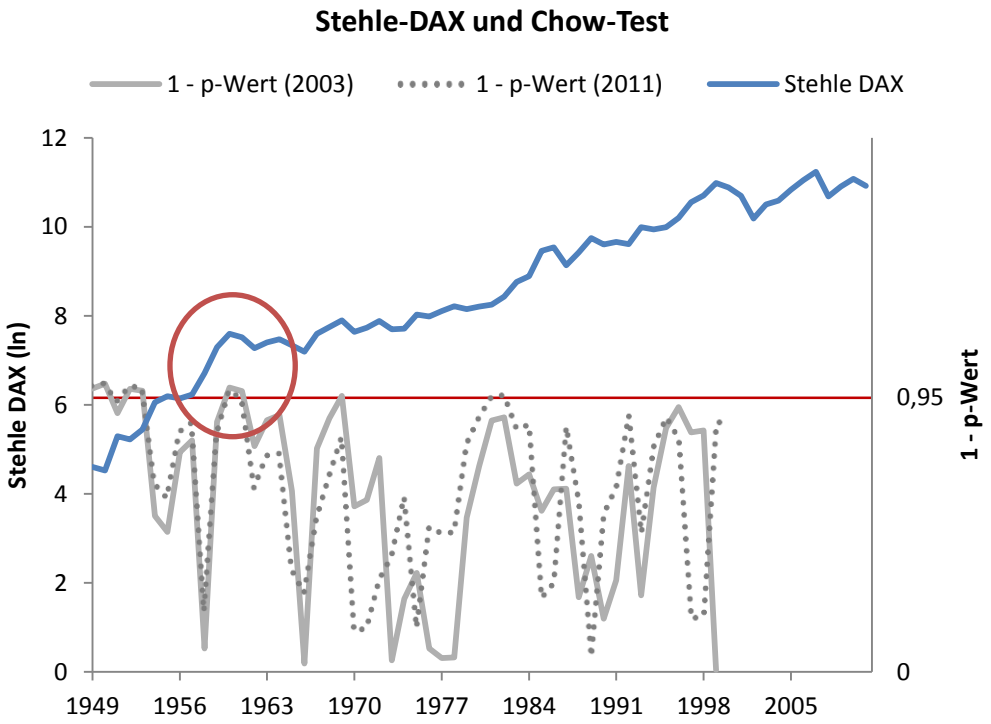

Abbildung 14: Stehle-DAX (blau) und Signifikanzen für Strukturbrüche gemäß Chow-Test für die Perioden 1949-2003 (grau) und 1949-2011 (grau gepunktet). Quelle: Stehle-Daten und eigene Berechnungen in R, Darstellung in Excel.

In Abbildung 14 sind diese Ergebnisse der Signifikanztests unter Hinzunahme der Jahre 2004-2011 zusammen mit dem Stehle-DAX grafisch dargestellt. Der höchst-signifikante Strukturbruch im Jahr 1960 ist für den Stehle-DAX erkennbar.

Für Stehles Argumentation eines kriegsbedingten Aufholens der deutschen Wirtschaft in den Folgejahren des Zweiten Weltkrieges können signifikante Strukturbrüche für die Jahre 1952 und 1953 nachgewiesen werden. Die Hinzunahme des Jahres 1954 führt dagegen nicht zu einem signifikanten Strukturbruch in der Zeitreihe. Insofern bietet zumindest die Zeitreihe des Stehle-DAX selbst keinen Anhaltspunkt für den Ausschluss des Jahres 1954.[281]

Für das in der Literatur vorgebrachte Argument, dass die Jahre vor 1961 aufgrund der Errichtung der innerdeutschen Grenze aus den Betrachtungen auszuschließen seien, liegt ein statistisch signifikanter Nachweis vor (p-Wert = 0,014). Auch bei einer Hinzunahme der Jahre

[281] Der Ausschluss des Jahres 1954 wird von Stehle mit einem andernfalls zu hohen Schätzwert der Marktrisikoprämie begründet, jedoch nicht weiter ausgeführt. Vgl. Stehle, R. (2004), S. 920.

nach 2003 kann ein Strukturbruch in 1961 als signifikant nachgewiesen werden (p-Wert = 0,024), auch wenn die höchste Signifikanz hier im Jahr 1953 zu verorten ist.

Mit diesen Ergebnissen konnte zur Schätzung einer prognosefähigen Marktrisikoprämie über sachlogische Argumentationen hinaus ein statistischer Nachweis für einen Ausschluss der Jahre vor 1961 erbracht werden. Die Zeitspanne 1955-1960 besitzt eine hohe Überperformance. Bei Schätzung der Jahre bis 2011 ist die Marktrisikoprämie um 2,5 % niedriger, wenn die Jahre vor 1961 ausgeschlossen werden, bei einer Betrachtung bis 2003 beträgt die Differenz 2,9 %. Insofern kann die Auswahl der Schätzperiodenlänge die Marktrisikoprämie und die daraus resultierenden Kapitalkosten erheblich beeinflussen. Da das von Stehle ausgeschlossene Jahr 1954 eine hohe Rendite aufweist (ca. 85 %), bedingt der Ausschluss eine Verringerung der geschätzten Marktrisikoprämie, was zu höheren Unternehmenswerten führt.

5.4.2 Schätzfunktion: Stichprobenverteilung der Marktrisikoprämie

Die Stichprobenverteilung des arithmetischen Mittels folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz:[282]

$$\bar{r}_{MRP} \sim N\left(\mu_{MRP}, \frac{\sigma_{MRP}^2}{n}\right).$$

Der Schätzer für den Erwartungswert μ_{MRP} ist das arithmetische Mittel

$$\hat{\mu}_{MRP} = \bar{r}_{MRP},$$

und die Standardabweichung σ_{MRP} ist mit 51 Beobachtungen[283]

$$\hat{\sigma}_{r_{MRP}} = \sqrt{\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{MRP,i} - \bar{r}_{MRP}\right)^2}.$$

Hieraus folgt der geschätzte Standardfehler des arithmetischen Mittels

[282] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 27 f.

[283] Vgl. Hartung, J, Elpelt, B., Klösener, K.-H. (2005), S. 63.

$$\hat{\sigma}_{\bar{r}_{MRP}} = \frac{\hat{\sigma}_{r_{MRP}}}{\sqrt{51}}.$$

Folgende Parameter werden für den Zeitraum 1961-2011 ermittelt:

- $\bar{r}_{MRP}$: 2,66 %
- $\hat{\sigma}_{\bar{r}_{MRP}}$= 3,37 %
- $n = 51$ (1961-2011)

5.4.3 Marktrisikoprämie als Differenz von gepaarten Mittelwerten

Eine alternative Methode wäre die Betrachtung von DAX-Renditen und REXP als gepaarte Stichproben, die die Marktrisikoprämie ergeben. Für die Periode 1961-2011 ergibt sich ein Korrelationskoeffizient (Pearson) von 0,07 zwischen Stehle-DAX und REXP. Da die beiden Renditereihen nicht ohne Weiteres als unabhängig angenommen werden können und die Varianzen ungleich sind, ist die Standardabweichung der Marktrisikoprämie als folgende Summe der Varianzen von Stehle-DAX und REXP zu betrachten:

$$\sigma^2_{r_{MRP}} = \sigma^2_{r_M} + \sigma^2_{r_f} - 2\sigma_{r_M,r_f}.$$

Für den präferierten Zeitraum von 1961-2011 sind diese empirischen Varianzen und Kovarianzen wie folgt:

$\sigma^2_{r_{MRP}}$	580,2
$\sigma^2_{r_M}$	575,2
$\sigma^2_{r_f}$	21,5
σ_{r_M,r_f}	8,2

Tabelle 14: Varianzen und Kovarianzen der Marktrisikoprämie als Differenz von Mittelwerten. Quelle: Stehle-Daten und eigene Berechnungen in R.

Ein Chi-Quadrat Unabhängigkeitstest ergibt keine ausreichende Signifikanz der Abhängigkeit (H_0: Unabhängigkeit, p-Wert = 0,24). Es ist ersichtlich, dass der Kovarianzanteil σ_{r_M,r_f} an der gesamten Varianz verhältnismäßig gering ist. Da sich in diesem Fall die Teststatistik bei der

Betrachtung von gepaarten Stichproben nicht ändert,[284] wurde auf eine Betrachtung von gepaarten Differenzen für diese Zwecke verzichtet.

5.4.4 Empirische Stichprobenverteilung der Marktrisikoprämie

In Abbildung 15 ist die empirische Verteilung der Marktrisikoprämie für den gewählten Zeitraum 1961-2011 dargestellt. Zur Überführung von Histogrammen in Dichtefunktionen wird eine Glättung mittels Kerndichteschätzung vorgenommen.[285] In dem rechten Diagramm ist die Stichprobenverteilung der geschätzten Marktrisikoprämie mit einem 95 %-Konfidenzintervall abgebildet.

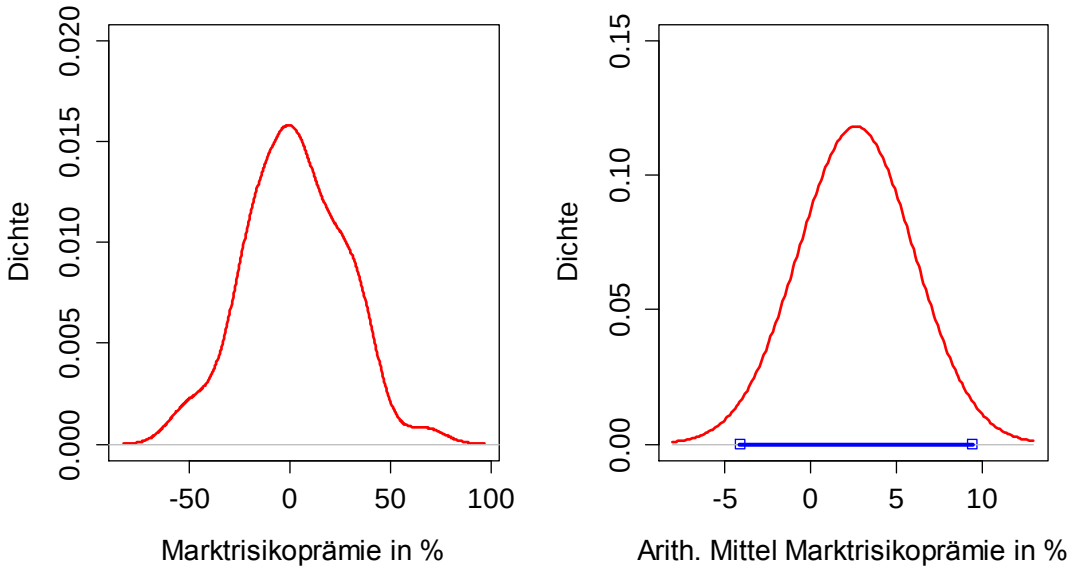

Abbildung 15:. Empirische Kerndichte (links) und Stichprobenverteilung der geschätzten Marktrisikoprämie (rechts) mit 95 %-Konfidenzintervall (blau). Quelle: Eigene Darstellung und Berechnung in R.

Die Stichprobenverteilung dient nun zur Quantifizierung der Unsicherheit in der Schätzung der Marktrisikoprämie. Aufgrund des Stichprobenumfangs von 51 kann für das arithmetische

[284] Vgl. Hartung, J, Elpelt, B., Klösener, K.-H. (2005), S. 535.
Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 107.
[285] Vgl. ebd., S. 6 f.

Mittel der Marktrisikoprämie näherungsweise auch eine Normalverteilung angenommen werden.

5.5 R-Code Marktrisikoprämie

```
#Kapitel 4: Marktrisikoprämie

#Packages installieren und laden
#install.packages("tseries")
library(tseries)



#Daten einlesen und extrahieren
daxdata<- read.table(file =
"d:/sicherung10/Diss/Daten/stehle_dax.txt", sep = "\t",dec=",",
header=TRUE)

  #Renditereihen
mrp1<-daxdata[7:55,5] #1955-2003
mrp2<-daxdata[13:55,5] #1961-2003
mrp3<-daxdata[7:63,5] #1955-2011
mrp4<-daxdata[13:63,5] #1961-2011

m1<-daxdata[7:55,2] #1955-2003
m2<-daxdata[13:55,2] #1961-2003
m3<-daxdata[7:63,2] #1955-2011
m4<-daxdata[13:63,2] #1961-2011

r1<-daxdata[7:55,3] #1955-2003
r2<-daxdata[13:55,3] #1961-2003
r3<-daxdata[7:63,3] #1955-2011
r4<-daxdata[13:63,3] #1961-2011

#Deskriptive Statistiken
mean(mrp1)
mean(mrp2)
mean(mrp3)
mean(mrp4)

sd(mrp1)/length(mrp1)^0.5
```

```
sd(mrp2)/length(mrp2)^0.5
sd(mrp3)/length(mrp3)^0.5
sd(mrp4)/length(mrp4)^0.5

mean(m1)
mean(m2)
mean(m3)
mean(m4)

mean(r1)
mean(r2)
mean(r3)
mean(r4)

#Augmented Dickey Fulller Test
adf.test(mrp1)
adf.test(mrp2)
adf.test(mrp3)
adf.test(mrp4)



#Chow Test
dax<-daxdata[,4]
jahr<-daxdata[,1]
lndax<-log(dax)



# Chow Test (1949-2003, alpha=0,05)
chowtest<-matrix(ncol=4,nrow=51,byrow=TRUE)
colnames(chowtest) <- c("Jahr", "F-Statistik","F-Kritisch","p-
Wert")

for (i in 3:53) {

  ss1<-0
  ss2<-0
```

```
  periodedax<-lndax[(55-i-1):55]
  periodejahr<-jahr[(55-i-1):55]
  regress1<-lm(periodedax~periodejahr)

  for(j in 1:(i+2)) {
    ss1<-ss1+(resid(regress1)[j])^2
  }

  periodedax<-lndax[(55-i):55]
  periodejahr<-jahr[(55-i):55]
  regress2<-lm(periodedax~periodejahr)

  for(k in 1:(i+1)) {
    ss2<-ss2+(resid(regress2)[k])^2
  }

  chstatistik<-(ss1-ss2)/(ss2/(i+2-2))
  fkritisch<-qf(0.95,1,i+2-2)
  pwert<-1-pf(chstatistik,1,i+2-2)

  chowtest[i-2,]<- c(jahr[55-i-1],chstatistik,fkritisch,pwert)
}
chowtest



# Chow Test (1949-2011, alpha=0,05)
chowtest<-matrix(ncol=4,nrow=59,byrow=TRUE)
colnames(chowtest) <- c("Jahr", "F-Statistik","F-Kritisch","p-
Wert")

for (i in 3:61) {

  ss1<-0
  ss2<-0

  periodedax<-lndax[(63-i-1):63]
  periodejahr<-jahr[(63-i-1):63]
```

```
  regress1<-lm(periodedax~periodejahr)

  for(j in 1:(i+2)) {
    ss1<-ss1+(resid(regress1)[j])^2
  }

  periodedax<-lndax[(63-i):63]
  periodejahr<-jahr[(63-i):63]
  regress2<-lm(periodedax~periodejahr)

  for(k in 1:(i+1)) {
    ss2<-ss2+(resid(regress2)[k])^2
  }

  chstatistik<-(ss1-ss2)/(ss2/(i+2-2))
  fkritisch<-qf(0.95,1,i+2-2)
  pwert<-1-pf(chstatistik,1,i+2-2)

  chowtest[i-2,]<- c(jahr[63-i-1],chstatistik,fkritisch,pwert)
}
chowtest

#Uebernahme der Parameterwerte
mum<-mean(mrp4)
sm<-sd(mrp4)/length(mrp4)^0.5


#Chi-Quadrat Test auf Unabhängigkeit
sd(mrp4)^2
sd(m4)^2
sd(r4)^2
cov(m4,r4)
cor(m4,r4)
chisq.test(r4,m4)


#Plot empirisch
```

```
par(mfrow=c(1,2))
mrp<-density(mrp4,kernel="gaussian")
plot(mrp,ylim=c(0,0.02),col="red",main="",
lwd=2,ylab="Dichte",xlab="Marktrisikoprämie in %")
low<-mum+qt(0.025,length(mrp4))*sm
high<-mum+qt(0.975,length(mrp4))*sm


#Plot Stichprobenverteilung
x <- seq(-8,13, by=0.1)
plot(x,dnorm(x, mean=mum, sd=sm),ylim=c(0,0.15),type =
"l",col="red",main="", lwd=2, ylab="Dichte",xlab="Arith. Mittel
Marktrisikoprämie in %")
points(low,0, pch=0,col="blue")
points(high,0, pch=0,col="blue")
lines(c(-8,13),c(0,0),col="grey")
lines(c(low,high),c(0,0),lwd=3,col="blue")
```

6 Verteilung von Kapitalkosten

6.1 Einleitung

Nachdem die Inferenzmethoden für die Schätzung der einzelnen Komponenten abgehandelt wurden, werden im Folgenden mit Hinblick auf die Schätzunsicherheit von Kapitalkosten die Fragen beantwortet, welche Stichprobenverteilung geschätzte Kapitalkosten besitzen, wie hiermit statistische Inferenz betrieben werden kann, wovon die Stichprobenverteilung von Kapitalkosten abhängig ist und was dies für resultierende Kapitalkosten zur Unternehmensbewertung bedeutet.

In Abbildung 16 des strukturellen Aufbaus dieser Arbeit ist das nun folgende Kapitel im unteren Bereich angesiedelt. Die einzelnen Schätzverfahren und ihre Inferenzmethoden wurden im bisherigen Gang der Untersuchung ausgearbeitet und werden nun zusammengeführt.

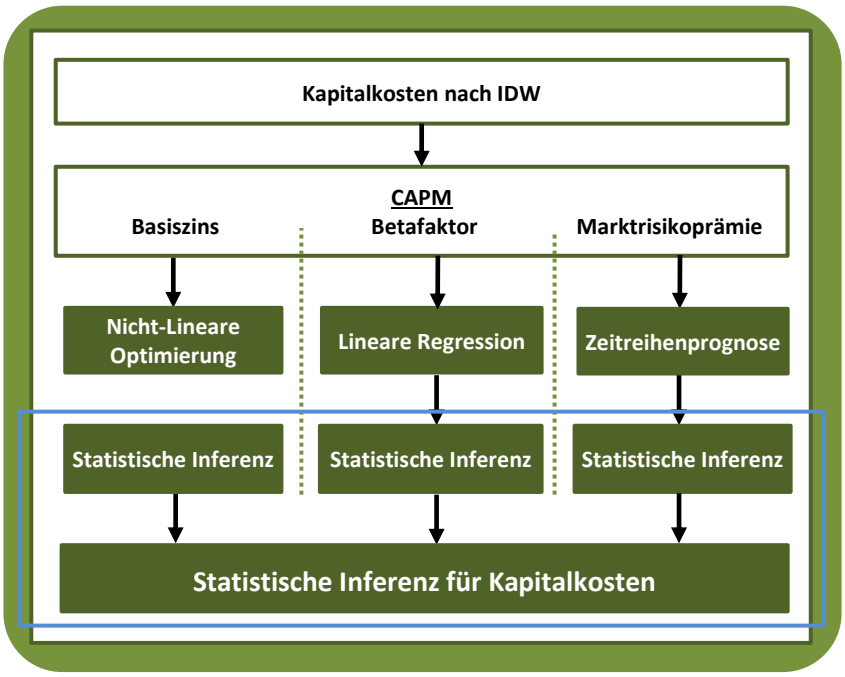

Abbildung 16: Statistische Inferenz für Kapitalkosten. Quelle: Eigene Darstellung.

Die Komponenten Basiszins, Betafaktor und Marktrisikoprämie entstammen unterschiedlichen Schätzfunktionen. Sie beruhen auf einer Berechnungsvorschrift, wie z.B.

der Nicht-linearen Optimierung für den Basiszins oder der linearen Regression der Betafaktoren.

In der Theorie der statistischen Inferenz stellen die Schätzer Zufallsvariablen dar und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieser Zufallsvariablen sind durch ihre Stichprobenverteilungen gegeben.[286] Konkret anhand empirischer Beobachtungen ermittelte Kapitalkosten stellen Realisationen dieser Zufallsvariablen dar.[287]

Um zu untersuchen, was die gemeinsame Verwendung verschiedener Schätzungen für resultierende Kapitalkosten bedeutet, sollen diesem Kapitel die Eigenschaften der Zufallsvariable ‚Kapitalkosten-Schätzer' aufgezeigt und untersucht werden.

Die funktionale Verknüpfung der Schätzer zur Ermittlung der Kapitalkosten ist wie folgt:

$$\hat{k} = \hat{r} + \hat{\beta} \cdot \widehat{M}.$$

$\hat{r}$ ist der Newton-Raphson Schätzer für den Basiszins, $\hat{\beta}$ der ermittelte Regressionsparameter der Beta-Schätzung und $\widehat{M}$ das arithmetische Mittel der Stehle-Dax-Reihe.

Die bisher gewonnenen Verteilungseigenschaften werden in einem ersten Schritt zusammenfassend aufgegriffen, um darauf aufbauend die Stichprobenverteilung von geschätzten Kapitalkosten zu bestimmen. Aus den Stichprobenverteilungen, die in den vorangegangenen Kapiteln ermittelten wurden, wird mit Hilfe des Faltungssatzes die Dichtefunktion der Kapitalkostenschätzer analytisch bestimmt, zwecks Verifizierung getestet und schließlich explorativ untersucht.

6.2 Verteilungen: Basiszins, Beta und Marktrisikoprämie

Die bisher ermittelten Verteilungseigenschaften der einzelnen Schätzungen werden zunächst zusammenfassend dargestellt und dienen dann als Grundlage dafür, eine Verteilung der geschätzten Kapitalkosten zu ermitteln.

---

[286] Vgl. Schlittgen, R. (2010), S. 120 ff.

[287] Vgl. Holling, H., Gediga, G. (2013): *Statistik – Wahrscheinlichkeitstheorie und Schätzverfahren*; Hogrefe Verlag, Göttingen, S. 213.

6.2.1 Basiszins

Der risikofreie Zinssatz wird aus der veröffentlichten Zinsstruktur der Deutschen Bundesbank abgeleitet. Die Werte der Zinsstruktur werden durch nicht-lineare Optimierung ermittelt und sind aufgrund einer Stichprobengröße von 69 anhand des zentralen Grenzwertsatzes normalverteilt:

$$\hat{\imath}\left(m, \widehat{\boldsymbol{b}}\right) \sim \mathrm{N}\left(i\left(m, \widehat{\boldsymbol{b}}\right), \boldsymbol{D_i}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{D_i}'\right).$$

Die Daten der Modellschätzung sind die Tageswerte der Anleihepreise und -renditen der Bundesrepublik Deutschland mit Laufzeiten bis zu 30 Jahren.[288]

Für die weiteren Berechnungen in diesem Kapitel werden die Schätzergebnisse aus Kapitel 3 verwendet.

6.2.2 Betafaktor

Die Betafaktoren entstammen den Regressionskoeffizienten historischer Aktien- und Indexrenditen von Tages- oder Wochenwerten von ein bis fünf Jahren und sind mittels zentralem Grenzwertsatz normalverteilt:

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \sigma_{\hat{\beta}}^2\right),$$

wobei von einer erwartungstreuen Beta-Schätzung ausgegangen wird, also $\beta = \mu_{\hat{\beta}}$.

6.2.3 Marktrisikoprämie

Die Marktrisikoprämie wird aus langjährigen Zeitreihen von jährlichen Index- und Anleiherenditen bestimmt. Die Identifikation ökonomisch bedeutsamer Ereignisse und deren statistische Überprüfung mittels Chow-Test in Kapitel 5 befürworten 1961 als Zeitraumbeginn. Die arithmetische Mittelwertberechnung liefert mittels zentralem Grenzwertsatz normalverteilte Schätzungen der Marktrisikoprämie:

[288] Hierzu zählen „alle Anleihen, Obligationen und Schatzanweisungen der Bundesrepublik Deutschland, des Fonds Deutsche Einheit und der Treuhandanstalt mit fester Verzinsung und einer Restlaufzeit zwischen 0,5 und 10,5 Jahren." Vgl. Deutsche Börse Group (2014), S. 4. Vgl. hierzu auch Kapitel 3.

$$\bar{r}_{MRP} \sim N\left(\mu_{MRP}, \sigma_{\bar{r}_{MRP}}\right).$$

Die in Kapitel 5 bestimmten Parameter der Stichprobenverteilung

- $E(\hat{r}_M)$: 2,66 %
- $\sigma_{\hat{r}_M}$= 3,37 %

werden für die nun folgenden Berechnungen verwendet.

6.3 Multivariate Verteilung

Zuerst werden die Momente berechnet, die Lage, Streuung und Symmetrie der Verteilung von geschätzten Kapitalkosten beschreiben. Im Anschluss erfolgt die analytische Bestimmung der Dichte- und Verteilungsfunktion.

Aus Gründen einer übersichtlicheren Darstellung seien die Standardfehler für die Schätzer Basiszins, Betafaktor und Marktrisikoprämie in der folgenden Ermittlung der Momente mit σ_r, σ_β und σ_M (ohne ‚^') und die Erwartungswerte gleichermaßen mit μ_r, μ_β und μ_M angegeben.

6.3.1 Momente

6.3.1.1 Erwartungswert

Aus der Anwendung des Erwartungswertoperators ergibt sich für den Erwartungswert der geschätzten Kapitalkosten[289]

$$\begin{aligned} E\left(\hat{k}\right) &= E\left(\hat{r} + \hat{\beta} \cdot \widehat{M}\right) \\ &= E(\hat{r}) + E\left(\hat{\beta} \cdot \widehat{M}\right) \\ &= E(\hat{r}) + E\left(\hat{\beta}\right)E\left(\widehat{M}\right) + Cov\left(\hat{\beta}, \widehat{M}\right). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Frage, ob die Schätzungen von Betafaktor und Marktrisikoprämie kovariieren. Eine von null verschiedene Kovarianz der Schätzer würde bedeuten, dass die Schätzungen von Beta und Marktrisikoprämie eine gemeinsame Tendenz besitzen. Die Schätzung der Betafaktoren beruht auf Tages-, Wochen- oder Monatsrenditen von

[289] Vgl. Eckey, H.-F., Kosfeld, R., Dreger, C. (1992): *Statistik: Grundlagen – Methoden – Beispiele*; Springer Fachmedien, Wiesbaden, S. 442.

Unternehmensaktien und Marktindizes, üblicherweise über eine Zeitspanne von ein oder zwei Jahren. Die Marktrisikoprämie dagegen wird durch historische Jahresrenditen über mehrere Jahrzehnte geschätzt. Außerdem betragen die Betafaktoren per Definition im Index-gewichteten Mittel stets eins. Daher kann eine stochastische Abhängigkeit zwischen den Schätzern von Betafaktoren und Marktrisikoprämie ausgeschlossen werden. Die Kovarianz beträgt dann null und es verbleibt

$$E(\hat{k}) = \mu_r + \mu_\beta \mu_M.$$

In diesem Fall ist bei der Verwendung erwartungstreuer Schätzer und dem Ausschluss von Kovarianzen die Eigenschaft der Erwartungstreue von $\hat{k}$ durch die funktionale Verknüpfung nicht verletzt.

6.3.1.2 Varianz

Die Varianz der geschätzten Kapitalkosten ist als Summe von Risikoprämie und Basiszins[290]

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\hat{k}) &= \mathrm{Var}(\hat{r} + \hat{\beta} \cdot \widehat{M}) \\ &= \mathrm{Var}(\hat{r}) + \mathrm{Var}(\hat{\beta}\widehat{M}) + 2\mathrm{Cov}(\hat{r}, \hat{\beta}\widehat{M}). \end{aligned}$$

Und mit

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i \widehat{M}) = {\mu_\beta}^2 \mathrm{Var}(\widehat{M}) + {\mu_M}^2 \mathrm{Var}(\hat{\beta}) + \mathrm{Var}(\widehat{M})\mathrm{Var}(\hat{\beta}) + \mu_\beta \mu_M \mathrm{Cov}(\hat{\beta}, \widehat{M})$$

folgt

$$\mathrm{Var}(\hat{k}) = \sigma_r^2 + {\mu_\beta}^2 \sigma_M^2 + {\mu_M}^2 \sigma_\beta^2 + \sigma_M^2 \sigma_\beta^2 + \mu_\beta \mu_M \mathrm{Cov}(\hat{\beta}, \widehat{M}) + 2\mathrm{Cov}(\hat{r}, \hat{\beta}\widehat{M}).$$

Der Standardfehler von Kapitalkosten ist demnach durch die Kovarianzen der jeweiligen Schätzer beeinflusst. Wie bei der Erwartungswertbildung bereits begründet wurde, darf eine Kovarianz zwischen den Schätzern von Beta und Marktrisikoprämie ausgeschlossen werden.

Es bleibt noch die zweite Kovarianz zwischen den Schätzungen ‚risikofreier Zins' und ‚Risikozuschlag', $\mathrm{Cov}(\hat{r}, \hat{\beta}\widehat{M})$. Der Basiszins wird anhand von stichtagsbezogenen Anleihepreisen und -renditen zukunftsorientiert geschätzt. Die Schätzung des Risikozuschlags

[290] Vgl. Leiner, B. (2004): *Einführung in die Statistik;* 9. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, S. 122.

beruht auf historischen Beobachtungen, die für die Betafaktoren ein bis fünf Jahre und für die Marktrisikoprämie mehrere Jahrzehnte umfassen. Aufgrund der zur Schätzung zugrundeliegenden verschiedenen Grundgesamtheiten wird zwischen den Schätzern Basiszins und Risikozuschlag Unabhängigkeit angenommen.

Aus $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}, \widehat{M}) = 0$ und $\mathrm{Cov}(\hat{r}, \hat{\beta}\widehat{M}) = 0$ folgt dann die Varianz der geschätzten Kapitalkosten

$$\sigma_k^2 = \mathrm{Var}(\hat{k}) = \sigma_r^2 + {\mu_\beta}^2\sigma_M^2 + {\mu_M}^2\sigma_\beta^2 + \sigma_M^2\sigma_\beta^2. \qquad \textbf{6.1}$$

Der resultierende Standardfehler σ_k ist für die Verteilung der geschätzten Kapitalkosten und der hiermit gemessenen der Schätzgenauigkeit maßgeblich.

6.3.1.3 Standardfehler und Kapitalkostenschätzung

Für den Standardfehler geschätzter Kapitalkosten bedeutet dies folgendes:

Der Standardfehler der Kapitalkosten ist von der Beta-Schätzung abhängig. Da für die Marktrisikoprämie ein Erwartungswert größer eins angenommen werden darf, folgt aus $\mu_M > 1$ und $\mu_\beta > 1$:

$$\sigma_k^2 = \sigma_r^2 + {\mu_\beta}^2\sigma_M^2 + {\mu_M}^2\sigma_\beta^2 + \sigma_M^2\sigma_\beta^2 > \sigma_r^2 + \sigma_M^2 + \sigma_\beta^2.$$

Ist der erwartete Betafaktor größer eins, ist die Varianz der Kapitalkostenschätzer stets größer als die Summe der Varianzen der einzelnen Schätzer Basiszins, Betafaktor und Marktrisikoprämie.

Eine Veränderung der Varianz der geschätzten Basiszinsen σ_r verändert die Varianz von σ_k in gleicher Höhe. Wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, steigt der Standardfehler der Zinsstruktur mit zunehmender Laufzeit an und ist durch eine geringere Anzahl beobachteter Anleihen mit höheren Laufzeiten bedingt. Damit besitzen geschätzte Kapitalkosten c. p. eine größere Schätzunsicherheit, wenn sie für die Diskontierung von Zahlungsströmen höherer Laufzeiten gebraucht werden.

6.3.1.4 Schiefe

Bei der Schiefe einer Verteilung handelt es sich um das dritte zentrale Moment, welches das Symmetrieverhalten einer Verteilung beschreibt. Symmetrische Verteilungen wie z.B. die Normalverteilung besitzen eine Schiefe von null, rechtsschiefe Verteilungen eine Schiefe größer null. Formal ist die Schiefe der Verteilung von Kapitalkostenschätzern wie folgt:[291]

$$\gamma(\hat{k}) = \gamma(\hat{r} + \hat{\beta} \cdot \widehat{M})$$

$$= \frac{E\left(\left(\hat{k} - \mu_k\right)^3\right)}{{\sigma_k}^3}. \qquad \textbf{6.2}$$

Die Schiefe der Verteilung von Kapitalkostenschätzern ist von den Parametern μ_k und σ_k abhängig, die wiederum von den drei Erwartungswerten und drei Standardfehlern der einzelnen Schätzer bestimmt werden.

Es verbleibt noch als viertes zentrales Moment die Wölbung. Da diese für schiefe Verteilungen eher von geringer Bedeutung ist,[292] soll an dieser Stelle keine weitere Betrachtung erfolgen.

6.3.2 Stichprobenverteilung von Kapitalkosten

Über diese Lage- und Gestaltparameter hinaus ist nun zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten die Stichprobenverteilung von $\hat{k}$ von Interesse. Damit lassen sich Inferenzaussagen treffen, z.B. mittels Hypothesentests oder Konfidenzintervallen. Weiterhin bildet die Verteilung der Kapitalkostenschätzer eine Grundlage, um zu untersuchen, was die Verknüpfung der einzelnen Schätzungen für die Schätzung der Kapitalkosten bedeutet.

6.3.2.1 Faltung

Um die Dichtefunktion von Produkten und Summen mehrerer Zufallsvariablen zu bestimmen, kommt die sog. Faltung zum Einsatz.[293] Besitzen zwei Zufallsvariablen *X* und *Y*

[291] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 23.

[292] Vgl. ebd., S. 24.

[293] Wissenschaftliche Veröffentlichungen über das Produkt normalverteilter Zufallsvariablen und der Faltung sind bereits in der ersten Hälfte des 20 Jahrhunderts vorzufinden, so z.B. von Craig (1936). Vgl.

die Dichtefunktionen f_x und f_y, folgt die Dichtefunktion für die Summe $Z = X + Y$ aus der Faltung:[294]

$$f_{x+y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx.$$

6.3

Und für das Produkt $Z = XY$ ergibt sich die Faltung:

$$f_{x \cdot y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_x(x) f_y\left(\frac{z}{x}\right) dx.$$

6.4

6.3.2.2 Dichtefunktion von Kapitalkostenschätzern

Die Schätzer für Basiszins, Betafaktor und Marktrisikoprämie sind mit $\hat{r}$, $\hat{\beta}$ und $\widehat{M}$ angegeben. Unter den genannten Voraussetzungen kann als Stichprobenverteilung jeweils die Normalverteilung angenommen werden:

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{x} - \mu_x)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Es wird zunächst der Risikozuschlag als Produkt von Betafaktor und Marktrisikoprämie betrachtete. Die Verteilung $f_{\hat{\beta} \cdot \widehat{M}}$ des Produkts $\hat{\beta} \cdot \widehat{M}$ ergibt sich dann nach Anwendung des Faltungssatzes für $z = \hat{\beta}\ \widehat{M}$:

$$f_{\hat{\beta} \cdot \widehat{M}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left|\widehat{M}\right|} f_{\widehat{M}}\left(\widehat{M}\right) f_{\hat{\beta}}\left(\frac{z}{\widehat{M}}\right) d\widehat{M}.$$

6.5

Craig, C. C. (1936): *On the frequency function of xy;* Annals of Mathematical Statistics; Band 7, Ausgabe 1, S. 1-15.

[294] Vgl. Zemanian, A. H. (1965): *Distribution Theory and Transform Analysis*; Dover Publications, New York, S. 122. Vgl. Hartung, J, Elpelt, B., Klösener, K.-H. (2005), S. 110.

Nach Einsetzen der Normalverteilungen für $\hat{\beta}$ und $\widehat{M}$ folgt

$$f_{\widehat{\beta}\cdot\widehat{M}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\widehat{M}|} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\widehat{M}}{}^2}} \exp\left(-\frac{\left(\widehat{M}-\mu_{\widehat{M}}\right)^2}{2\sigma_{\widehat{M}}{}^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\widehat{\beta}}{}^2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{z}{\widehat{M}}-\mu_{\widehat{\beta}}\right)^2}{2\sigma_{\widehat{\beta}}{}^2}\right) d\widehat{M}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\widehat{M}|2\pi\sigma_{\widehat{M}}\sigma_{\widehat{\beta}}} \exp\left(-\frac{\left(\widehat{M}-\mu_{M}\right)^2}{2\sigma_{\widehat{M}}{}^2} - \frac{\left(\frac{z}{\widehat{M}}-\mu_{\widehat{\beta}}\right)^2}{2\sigma_{\widehat{\beta}}{}^2}\right) d\widehat{M}.$$

6.6

Dies ist die Dichtefunktion des geschätzten Risikozuschlags als Produkt der Schätzer von Marktrisikoprämie und Betafaktor, der für die Höhe der Kapitalkosten maßgeblich ist.

Für die Schätzverteilung der resultierenden Kapitalkosten wird nun die Dichtefunktion der Kapitalkosten $\hat{k} = \hat{r} + \hat{\beta} \cdot \widehat{M}$ bestimmt, die mit $f_{\hat{r}+\widehat{\beta}\cdot\widehat{M}}$ angegeben ist. Diese ergibt sich aus der additiven Faltung der Dichtefunktionen des geschätzten Risikozuschlags $f_{\widehat{\beta}\cdot\widehat{M}}(z)$ und geschätztem Basiszins $f_{\hat{r}}(\hat{r})$:

$$f_{\hat{r}+\widehat{\beta}\cdot\widehat{M}}(\hat{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\hat{r}}(\hat{r}) f_{\widehat{\beta}\cdot\widehat{M}}(\hat{k}-\hat{r}) d\hat{r}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\hat{r}}{}^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{r}-\mu_{\hat{r}})^2}{2\sigma_{\hat{r}}{}^2}\right) f_{\widehat{\beta}\cdot\widehat{M}}(\hat{k}-\hat{r}) d\hat{r}.$$

Durch Einsetzen von 6.6 folgt dann die gesuchte Dichtefunktion, die von drei Standardfehlern und drei Erwartungswerten abhängig ist:

$$f_{\hat{r}+\widehat{\beta}\cdot\widehat{M}}(\hat{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\hat{r}}{}^2}} \exp\left(-\frac{(\hat{r}-\mu_{\hat{r}})^2}{2\sigma_{\hat{r}}{}^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\widehat{M}|} \frac{1}{2\pi\sigma_{\widehat{M}}\sigma_{\widehat{\beta}}} \exp\left(-\frac{\left(\widehat{M}-\mu_{\widehat{M}}\right)^2}{2\sigma_{\widehat{M}}{}^2}\right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{\hat{k}-\hat{r}}{\widehat{M}}-\mu_{\widehat{\beta}}\right)^2}{2\sigma_{\widehat{\beta}}{}^2}\right) d\widehat{M} d\hat{r}.$$

6.7

Durch diese Dichtefunktion ist die Stichprobenverteilung der Kapitalkosten bestimmt. Für das Integral existiert keine analytische Lösung und die Berechnung der Dichtefunktion erfolgt durch eine nummerische Integration.[295]

In Abbildung 17 ist die berechnete Dichtefunktion der Kapitalkostenschätzer für ausgewählte Beispielparameter grafisch dargestellt. Der erwartete Betafaktor beträgt eins und ist zur Nullhypothese $\beta = 0$ signifikant bei einem Standardfehler von 0,25. Der risikofreie Zins wird aus der Zinsstruktur abgeleitet und gibt den geschätzten Spotzinssatz für einjährige Laufzeiten von Bundesanleihen nach der Svensson-Methode an. Die Berechnungen der Erwartungswerte und Standardfehler der Zinsstruktur sind in Kapitel 3 angegeben. Aus dieser Parameterkonstellation resultiert ein Kapitalkostenschätzer von 2.77 % mit einem Standardfehler von 3,54 %. Zum Vergleich ist die Normalverteilung mit gleichem Erwartungswert und Standardabweichung abgebildet.

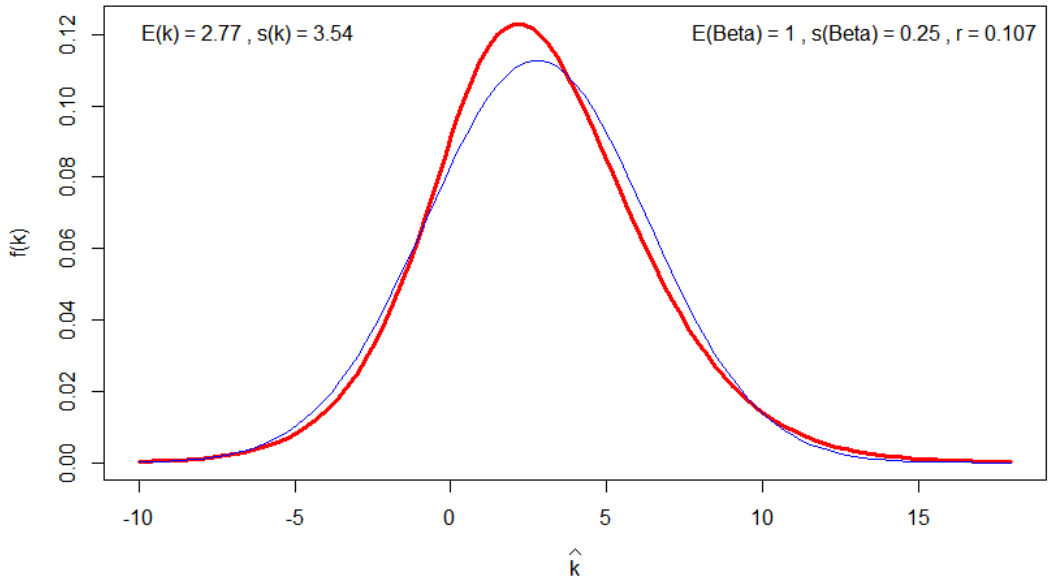

Abbildung 17: Dichtefunktion von Kapitalkostenschätzern (rot). Zum Vergleich die Normalverteilung mit gleichem Mittelwert und Standardabweichung (blau). Parameter: $E(\hat{r}) =$

[295] Vgl. Seijas-Macias, A. (2012): *An Apporoach to Distribution of the Product of Two Normal Variables*; Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics 32, S. 87-99, S. 92. Zur nummerischen Berechnung der Integrale ist es notwendig, den Funktionswert an der Stelle $\hat{M} = 0$ als null zu definieren, da dies für Flächeninhalte über Punkten definitionsgemäß gilt.

$\mathbf{0,1074;\ \sigma_{\hat{r}} = 0,021;\ E(\hat{\beta}) = 1;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0,25;\ E(\hat{M}) = 2,66;\ \sigma_{\hat{M}} = 3,37.}$ **Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.**

Im Gegensatz zur Summenbildung ist das Produkt zweier normalverteilter Zufallsvariablen nicht mehr normalverteilt. Geschätzte Kapitalkosten entstammen daher keiner Normalverteilung. In Abbildung 18 ist ein QQ-Plot gegen die Normalverteilung dargestellt, in dem die Abweichungen und die Schiefe der Verteilung von geschätzten Kapitalkosten erkenntlich sind.

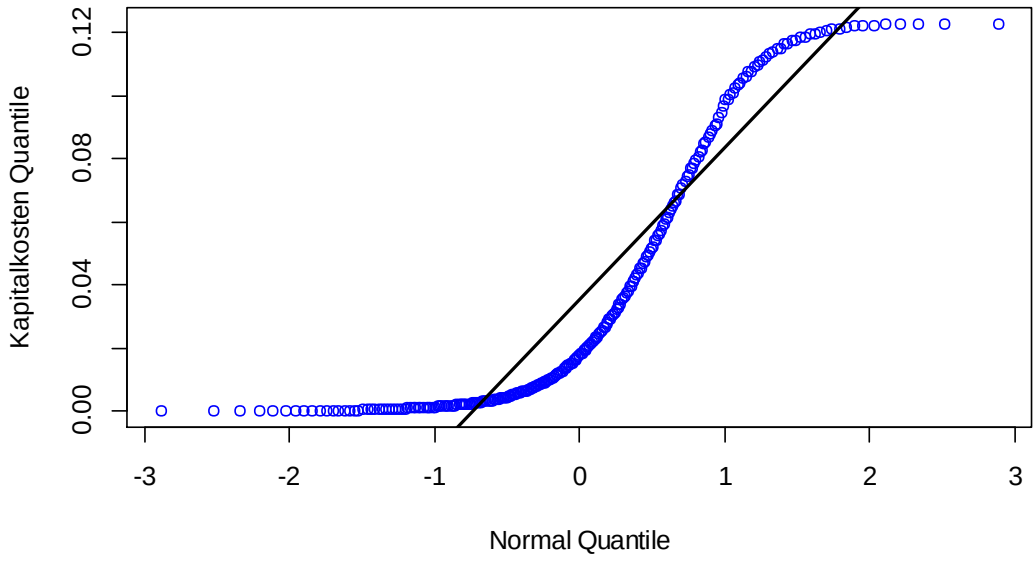

Abbildung 18: QQ-Plot für die Verteilung von Kapitalkosten gegen die Normalverteilung. Parameter: $\mathbf{E(\hat{r}) = 0,1074;\ \sigma_{\hat{r}} = 0,021;\ E(\hat{\beta}) = 1;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0,25;\ E(\hat{M}) = 2,66;\ \sigma_{\hat{M}} = 3,37.}$ **Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.**

Hervorzuheben ist die Asymmetrie der Dichtefunktion. Die Schiefe beträgt für diese Parameterkonstellation 0,996, es liegt also Rechtsschiefe vor. Positive Schätzabweichungen besitzen ein anderes Wahrscheinlichkeitsverhalten als negative Abweichungen von den gesuchten Kapitalkosten. Es wird im weiteren Verlauf auch untersucht, wodurch die Schiefe der Verteilung von Kapitalkosten bestimmt wird und was dies für die Kapitalkostenschätzung bedeutet.

6.3.2.3 Monte-Carlo-Simulation zur Verifizierung

Zur Verifikation der Ergebnisse werden nun Simulationen von Kapitalkostenschätzungen durchgeführt und mit den analytisch gewonnenen Ergebnissen verglichen. Die bislang verwendeten beispielhaften Parameter der Komponenten Basiszins, Betafaktor sowie die ermittelten Parameter der Marktrisikoprämie aus Abschnitt 5.4.2 bilden die Vorgabe der Simulation. Jeweils ein Basiszins, ein Betafaktor und eine Marktrisikoprämie werden aus ihren Stichprobenverteilungen per Zufallsgenerator gezogen und hieraus Kapitalkosten berechnet. In einer Monte-Carlo-Simulation werden so 200,000 Wiederholungen der Ermittlung von Kapitalkosten durchgeführt.

Die Monte-Carlo-Verteilung ergibt sich aus der Häufigkeitsverteilung der simulierten Kapitalkosten. Zur Überführung von Histogrammen in Dichtefunktionen wird eine Glättung mittels Kerndichteschätzung vorgenommen. Die in der Klassenbreite vorhandenen simulierten Kapitalkosten werden gleitend mit der dazugehörigen Wahrscheinlichkeit der Normalverteilung gewichtet. Die Kerndichteschätzer können also als Histogramme mit gleitenden normalverteilt-gewichteten Klassenbreiten interpretiert werden.[296]

Abbildung 19 gibt das Simulationsergebnis von 200.000 Wiederholungen und die dazugehörige analytisch bestimmte Dichtefunktion wieder. Die analytisch gewonnenen Ergebnisse über die Stichprobenverteilung von Kapitalkosten können hiermit verifiziert werden, da zwischen der simulierten und analytisch bestimmten Verteilung Übereinstimmung vorliegt.

[296] Vgl. Schlittgen, R. (2004), S. 6 f.

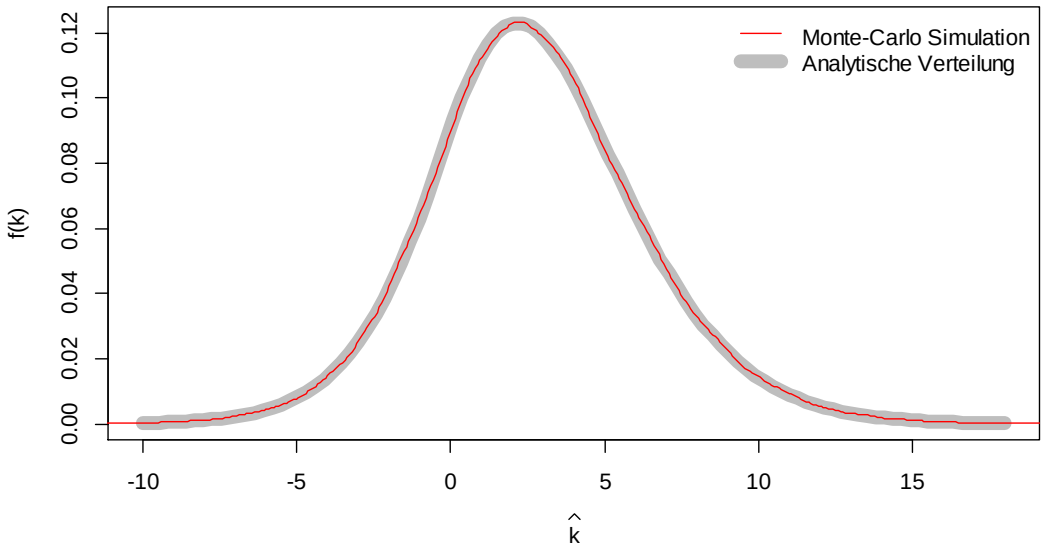

Abbildung 19: Kerndichte der Monte-Carlo-Simulation von Kapitalkostenschätzungen. 200.000 Wiederholungen. Quelle: Eigene Berechnungen und Darstellung in R.

6.3.2.4 Verteilungsfunktion von Kapitalkosten

Zur Bestimmung der Verteilungsfunktion wird die Dichtefunktion integriert:[297]

$$F_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\widehat{M}}(k) = \int_{-\infty}^{k} f_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\widehat{M}}(\hat{k})\, dk.$$

6.8

Damit lassen sich nun Wahrscheinlichkeiten für Intervalle von Kapitalkostenschätzern bestimmen, die z.B. für Inferenzaussagen mit Hypothesentests oder Konfidenzintervallen Anwendung finden. In Abbildung 20 ist die Berechnung dieser Verteilungsfunktion für einen signifikanten Betafaktor von eins (Standardfehler = 0,25) dargestellt.

[297] Die Berechnung dieser Verteilungsfunktion erfolgt wieder durch eine nummerische Integration, da für den Integrand keine analytische Lösung existiert.

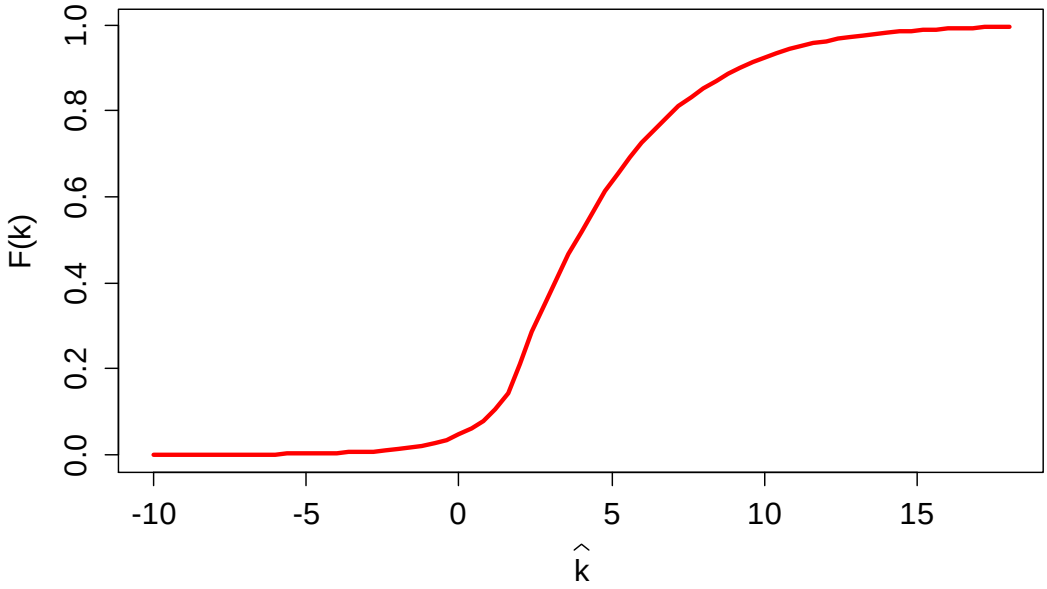

Abbildung 20: Verteilungsfunktion von Kapitalkostenschätzern. Parameter: r̂=0,1074; $\sigma_{\hat{r}} = 0,021$; $E(\hat{\beta}) = 1$; $\sigma_{\hat{\beta}} = 0,25$; $E(\hat{M}) = 2,66$; $\sigma_{\hat{M}} = 3,37$. Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.

6.3.3 Abhängigkeit der Stichprobenverteilung von der Beta-Schätzung

Es sollen nun die Abhängigkeiten der Stichprobenverteilung von Kapitalkosten von den Parametern der Beta-Schätzung untersucht werden. Hierzu werden zwei Szenarioanalysen durchgeführt. In einem ersten Szenario wird untersucht wie die Höhe des Betafaktors die Stichprobenverteilung von Kapitalkosten beeinflusst. In einem zweiten Szenario wird die Genauigkeit der Beta-Schätzung gemessen als relativer Standardfehler des Beta-Schätzers untersucht.

6.3.3.1 Szenario Betafaktor

Es werden nun für drei verschieden hohe Betafaktoren die Stichprobenverteilungen von Kapitalkosten berechnet. Das Signifikanzniveau der Beta-Schätzung wird dabei für die verschiedenen Betafaktoren konstant gehalten. Für einen niedrigen (0,5), mittleren (1) und hohen (1,5) Betafaktor wird jeweils die Dichtefunktion berechnet, der relative Standardfehler bleibt konstant und beträgt jeweils ein Viertel des Erwartungswertes. Für den Basiszins

werden die Parameter der Laufzeit von 10 Jahren gewählt, für die Marktrisikoprämie gelten die bereits genannten Parameter.

Die grafischen Abbildungen der berechneten Dichtefunktionen sind in Abbildung 21 dargestellt. Zum Vergleich ist die Normalverteilung mit den Parametern Erwartungswert und Standardabweichung der Kapitalkosten-Verteilung mit abgebildet.

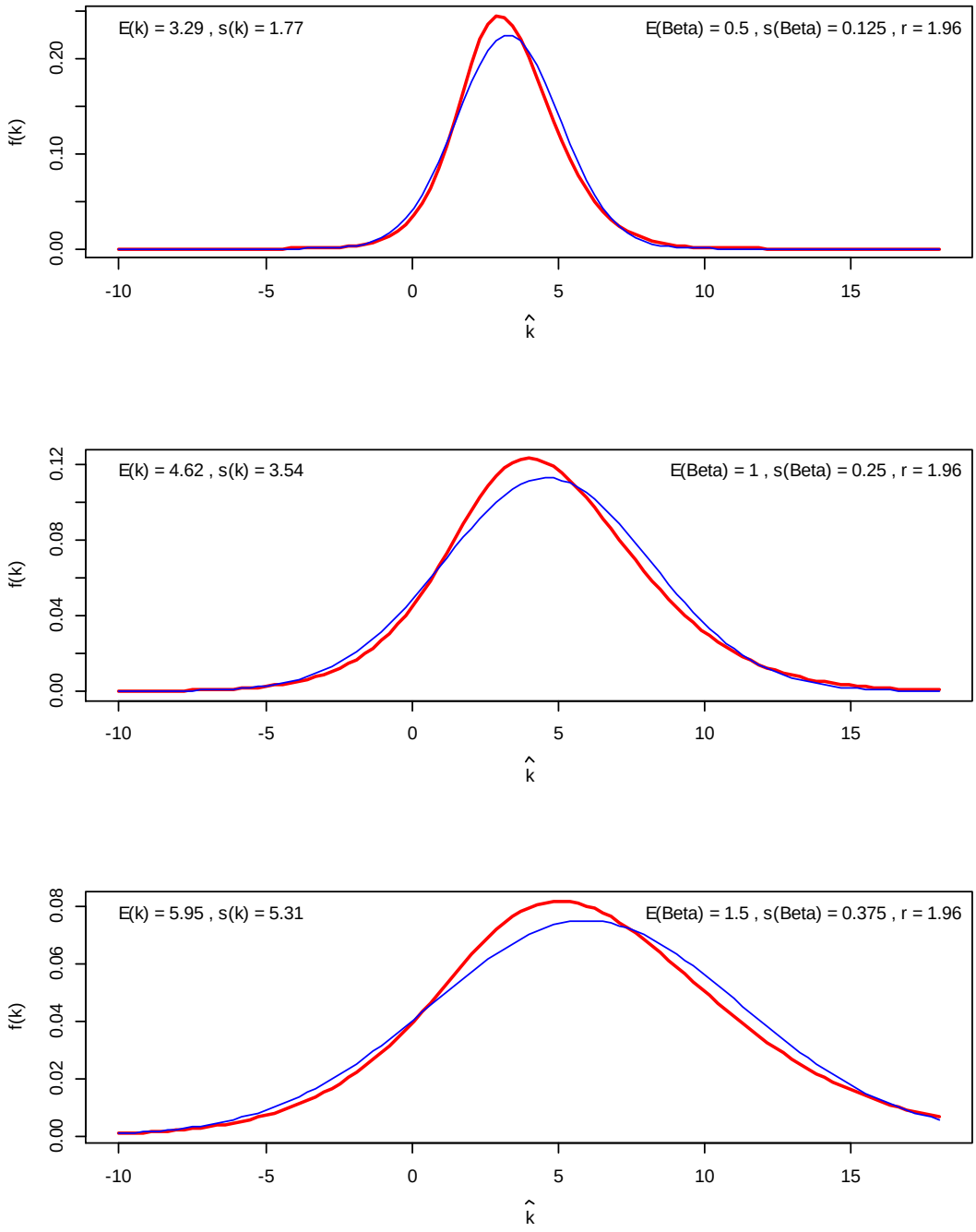

Abbildung 21: Dichtefunktionen von Kapitalkostenschätzern für signifikante Betafaktoren (H_0: $Beta = 0$) mit Erwartungswerten für Beta von 0,5, 1 und 1,5. Parameter: $E(\hat{r}) = 1,96$; $\sigma_{\hat{r}} = 0,025$; $E(\hat{M}) = 2,66$; $\sigma_{\hat{M}} = 3,37$ (rot). Zum Vergleich die Normalverteilung mit gleichem Erwartungswert und Standardabweichung der Kapitalkosten (blau). Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.

Tabelle 15 enthält die berechneten Erwartungswerte, absolute und relative Standardabweichungen sowie die Schiefe der drei Kapitalkosten-Verteilungen:

	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 0{,}5\ ;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}125$	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1\ ;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}25$	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1{,}5\ ;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}375$
$\mathrm{E}(\hat{\mathrm{k}})$	3,29	4,62	5,95
$\sigma_{\hat{k}}$	1,77	3,54	5,31
$\sigma_{\hat{k}} / \mathrm{E}(\hat{\mathrm{k}})$	0,54	0,77	0,89
$\gamma(\hat{k})$	2,021	0,996	0,433

Tabelle 15: Erwartungswerte, absolute und relative Standardabweichungen und Schiefe von Kapitalkosten-Schätzern für signifikante Betafaktoren ($H_0: Beta = 0$) mit Erwartungswerten für Beta von 0,5, 1 und 1,5. Parameter: $E(\hat{r}) = 1,96$; $\sigma_{\hat{r}} = 0,025$; $E(\hat{M}) = 2,66$; $\sigma_{\hat{M}} = 3,37$. Quelle: Eigene Berechnung in R.

Der absolute Standardfehler von Kapitalkosten erhöht sich für größere Betafaktoren. Die absoluten Standardfehler von Betafaktor und Kapitalkosten verändern sich dabei proportional zueinander, so wie sich beide in dem o. a. Beispiel verdoppeln und verdreifachen.

Der relative Standardfehler der Kapitalkosten steigt mit größeren Betafaktoren an, auch wenn der relative Standardfehler für größere Betafaktoren konstant bleibt. Das Verhältnis zwischen $\sigma_{\hat{\mathrm{k}}}$ und $\mathrm{E}(\hat{\mathrm{k}})$ steigt also im Verhältnis zu $\sigma_{\hat{\beta}}$ und $\mathrm{E}(\hat{\beta})$ überproportional an.

Dies bedeutet, dass für Unternehmen mit höheren Betafaktoren c. p. eine höhere Unsicherheit in der Schätzung von Kapitalkosten vorzufinden ist. Nicht nur das am Kapitalmarkt bewertete finanzielle Risiko ist für Unternehmen mit höheren Betafaktoren größer, sondern auch das Risiko der Bewertung selbst, welches aus einer statistischen Schätzunsicherheit der Kapitalkosten resultiert.

Durch die Rechtsschiefe der Verteilungen sind positive statistische Abweichungen tendenziell größer als negative, obwohl die statistischen Abweichungen der einzelnen Schätzer aufgrund einer anzunehmenden Normalverteilung symmetrisch sind. Dieser Effekt

ist umso höher, je geringer der Betafaktor ist und die Rechtsschiefe nimmt zu, wenn sich die Betafaktoren verringern.

Ursache für die Schiefe ist die Multiplikation des Beta-Schätzers mit der Marktrisikoprämie. Treten für beide Schätzungen positive Schätzabweichungen auf, so ist das Ausmaß für die Kapitalkosten höher als wenn zwei gleichwertige negative Schätzabweichungen in die Multiplikation eingehen. Positive Schätzabweichungen von Kapitalkosten sind daher tendenziell betragsmäßig höher als negative Schätzabweichungen.

6.3.3.2 Szenario Beta-Standardfehler

In einem zweiten Szenario wird nun der Erwartungswert des Betafaktors konstant gehalten und die Genauigkeit der Beta-Schätzung variiert. Der Erwartungswert beträgt jeweils eins und die Standardfehler betragen $\sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}25$, $\sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}4$ und $\sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}8$. Diese entsprechen damit auch den relativen Standardfehlern. Mit diesen Beispielen ist die Dichtefunktion jeweils für einen signifikanten, einen schwach signifikanten und einen nicht signifikanten Betafaktor berechnet (Vgl. hierzu Abschnitt 4.7).[298] Für den Basiszins dienen erneut die Parameter der Laufzeit von zehn Jahren. In Abbildung 22 sind die drei berechneten Dichtefunktionen grafisch dargestellt.

[298] Aufgrund der angenommenen Normalverteilung beträgt das 95 %-Konfidenzintervall der Betaschätzung [1,96 · $\sigma_{\hat{\beta}}$]. Der Betafaktor ist zur Hypothese $H_0: Beta = 0$ nur bei $\sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}8$ insignifikant, da der Wert Null nur in diesem Intervall enthalten ist.

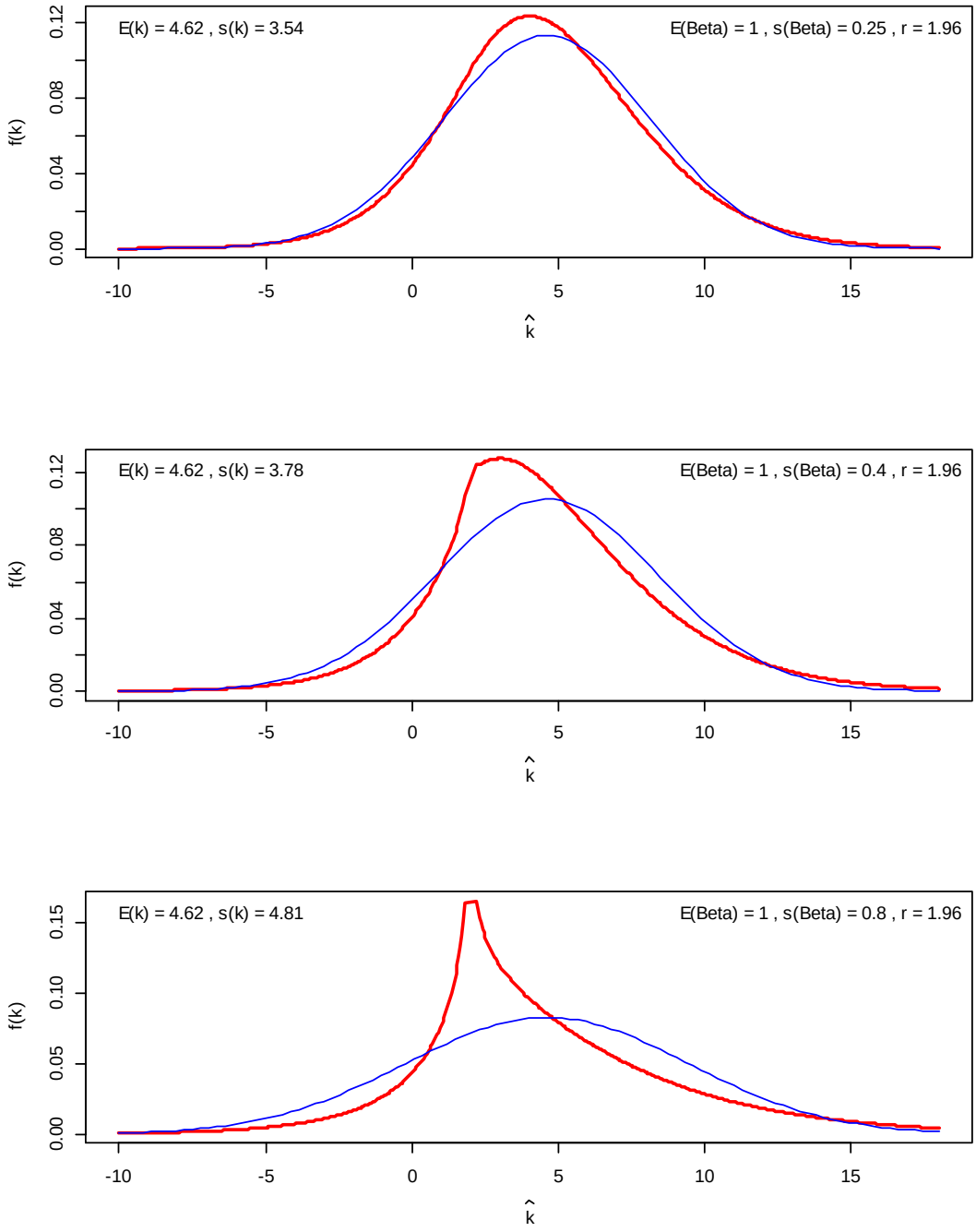

Abbildung 22: Dichtefunktionen von Kapitalkostenschätzern. In der oberen Abbildung ist der Betafaktor signifikant (H_0: $Beta = 0$), in der mittleren schwach signifikant und in der unteren nicht signifikant. Parameter: $E(\hat{r}) = 1,96$; $\sigma_{\hat{r}} = 0,025$; $E(\hat{M}) = 2,66$; $\sigma_{\hat{M}} = 3,37$. Zum Vergleich die Normalverteilung mit gleichem Erwartungswert und Standardabweichung der Kapitalkosten (blau). Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.

In Tabelle 16 sind die berechneten Standardabweichungen und die Schiefe für die drei Verteilungen enthalten.

	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1\,;\, \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}25$	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1\,;\, \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}4$	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1\,;\, \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}8$
$\sigma_{\hat{k}}$	3,54	3,78	4,81
$\gamma(\hat{k})$	0,968	1,128	1,451

Tabelle 16: Standardfehler und Schiefe für Kapitalkosten mit erwarteten Betas von eins. Parameter: $\boldsymbol{E(\hat{r}) = 1,96;\ \sigma_{\hat{r}} = 0,025;\ E(\hat{M}) = 2,66;\ \sigma_{\hat{M}} = 3,37}$. Quelle: Eigene Berechnung in R.

Der Standardfehler der Kapitalkosten steigt erwartungsgemäß mit höheren Standardfehlern der Betafaktoren an. Die betragsmäßigen Veränderungen der Beta-Standardfehler unterscheiden sich allerdings von denen der Kapitalkosten. Eine Erhöhung des Beta-Standardfehlers um 0,15 erhöht den Kapitalkosten-Standardfehler um 0,24. Erhöht sich der Beta-Standardfehler um 0,4 steigt der Kapitalkosten-Standardfehler um 1,03. Die absolute Veränderung der Kapitalkosten-Standardfehler ist im Vergleich zur Beta-Schätzung überproportional.

Auch hier liegt die Ursache wieder in der Multiplikation von Betafaktor und Marktrisikoprämie. Zur Berechnung des Standardfehlers von geschätzten Kapitalkosten nach 6.1 wird der quadrierte Beta-Standardfehler ($\mu_{\hat{\beta}}{}^2$) einmal mit dem quadrierten Erwartungswert ($\mu_{\hat{M}}{}^2$) und einmal mit dem quadrierten Standardfehler der Marktrisikoprämie ($\sigma_{\hat{M}}^2$) multipliziert:

$$\sigma_{\hat{k}} = \sqrt{\sigma_{\hat{r}}^2 + \mu_{\hat{\beta}}{}^2\sigma_{\hat{M}}^2 + \mu_{\hat{M}}{}^2\sigma_{\hat{\beta}}^2 + \sigma_{\hat{M}}^2\sigma_{\hat{\beta}}^2}.$$

Hieraus resultiert die überproportionale Veränderung von $\sigma_{\hat{k}}$ bei Veränderung von $\sigma_{\hat{\beta}}^2$.

Der relative Standardfehler von Kapitalkosten ist hingegen unterproportional zu den relativen Beta-Standardfehlern. Insofern ist der Einfluss der Schätzgenauigkeit von Beta auf resultierende Kapitalkosten durch die Verknüpfung mit anderen Schätzern abgeschwächt.

Weiterhin ist ersichtlich, dass die Rechtsschiefe der Stichprobenverteilung von Kapitalkosten mit steigendem Beta-Standardfehler zunimmt. Die Tendenz, dass positive statistische Abweichungen von gesuchten Kapitalkosten betragsmäßig größer sind als negative, erhöht sich dann wiederum mit einer ungenaueren Beta-Schätzung in Form des relativen Standardfehlers.

6.3.4 Abhängigkeit der Stichprobenverteilung von Basiszins und Marktrisikoprämie

Da der Standardfehler der Zinsstruktur mit zunehmender Laufzeit ansteigt (vgl. Kapitel 3), besitzen geschätzte Kapitalkosten eine größere Unsicherheit, wenn sie für höhere Laufzeiten ermittelt werden. Die Schiefe der ermittelten Verteilung ist nicht durch den Basiszins bedingt.

Da die geschätzte Marktrisikoprämie mit dem Beta-Schätzer multipliziert wird, gelten hierfür die für die Betafaktoren gewonnenen Erkenntnisse ebenso. Eine höhere Marktrisikoprämie erhöht die Unsicherheit resultierender Kapitalkosten überproportional. Eine geringere Marktrisikoprämie vergrößert die Schiefe der Verteilung von Kapitalkosten. Der Effekt, dass positive Schätzabweichungen in der Tendenz betragsmäßig größer als negative sind, ist bei niedrigen Marktrisikoprämien stärker.

6.4 Statistische Inferenz für Kapitalkosten

6.4.1 Hypothesentests für Kapitalkostenschätzer

Schließlich können mit der Stichprobenverteilung Hypothesentests und kritische Grenzen angegeben werden, um geschätzte Kapitalkosten zu testen oder statistisch vertretbare Unter- und Obergrenzen für Kapitalisierungszinssätze zu bestimmen.

Um Hypothesentests durchzuführen, können nun kritische Werte für beliebige Signifikanzniveaus α anhand der Stichprobenverteilung bestimmt werden. Hierfür werden Quantile benötigt, die durch Integration der Dichtefunktion aus 6.7 bzw. der Verteilungsfunktion berechnet werden können.

Für linksseitige Tests entspricht z.B. die kritische Testgrenze $k_{0,05}$ dem 0.05-Quantil:

$$F_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\widehat{M}}(k) = \int_{-\infty}^{k_{0,05}} f_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\widehat{M}}(k)\,dk = 0{,}05.$$

Für linksseitige Tests mit dem kritischen Wert k_α gilt dann allgemein

$$\int_{-\infty}^{k_\alpha} f_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\hat{M}}(k)\,dk = \alpha.$$

Für das betrachtete Beispiel mit einem signifikanten Betafaktor von Eins ($\sigma_\beta = 0{,}25$) ergibt sich die kritische Grenze mit $\alpha = 0{,}05$ bei -2,74 %. Dann wären Kapitalkosten zur Hypothese $k = 0$ nicht signifikant, obwohl signifikante Betafaktoren vorliegen.

Für rechtseitige Hypothesentests liegt der Grenzwert bei $k_{1-\alpha}$,

$$\int_{-\infty}^{k_{1-\alpha}} f_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\hat{M}}(k)\,dk = 1-\alpha.$$

Dieser beträgt für das vorangegangene Beispiel 8,83 % und kann für die Kapitalkosten eines Unternehmens mit Beta=1 als statistische Obergrenze gelten.

Für zweiseitige Tests folgen schließlich die kritischen Grenzen bei $k_{\alpha/2}$ und $k_{1-\alpha/2}$ mit den Wahrscheinlichkeiten:

$$\int_{-\infty}^{k_{\alpha/2}} f_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\hat{M}}(k)\,dk = \frac{\alpha}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{k_{1-\alpha/2}} f_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\hat{M}}(k)\,dk = 1-\frac{\alpha}{2}.$$

Diese kritischen Grenzen entsprechen bei $\alpha = 0{,}10$ den genannten Grenzwerten [-2,73 %; 8,84 %].

Die p-Werte zur Entscheidung über Hypothesentests lassen sich nun für linksseitige Tests wie folgt bestimmen:

$$p = F_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\hat{M}}(\hat{k}).$$

Dieser p-Wert beschreibt die Wahrscheinlichkeit, den Schätzer $\hat{k}$ oder vom Erwartungswert noch extremer liegende Schätzungen zu erhalten.

Und für das rechtsseitige Pendant gilt:

$$p = 1 - F_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\hat{M}}(\hat{k}).$$

6.4.2 Konfidenzintervalle für Kapitalkostenschätzer

Mit Konfidenzintervallen können nun Unter- und Obergrenzen bestimmt werden, innerhalb derer die Kapitalkosten mit einer Vertrauenswahrscheinlichkeit α zu erwarten sind. Diese statistisch vertretbaren Intervalle können auch zur Bestimmung einer Wertspanne dienen, die nach IDW-Verlautbarung für ermittelte Unternehmenswerte anzugeben ist.[299] Analog zu den zweiseitigen Tests ist das Konfidenzintervall $\left[k_{U,\alpha}\ ;\ k_{O,\alpha}\right]$:

$$\int_{-\infty}^{k_{U,\alpha}} f_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\hat{M}}(k)\,dk = \frac{\alpha}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{k_{O,\alpha}} f_{\hat{r}+\hat{\beta}\cdot\hat{M}}(k)\,dk = 1-\frac{\alpha}{2}.$$

Eine Besonderheit der Verteilung von geschätzten Kapitalkosten ist die Asymmetrie. Aufgrund der Schiefe der Stichprobenverteilung $f_{\hat{k}}$ liegen diese Intervallgrenzen nicht symmetrisch um den Erwartungswert $\mu_{\hat{k}}$.

6.4.3 Abhängigkeit der Hypothesentests und Konfidenzintervalle von der Beta-Schätzung

Es wird nun gezeigt, wie die kritischen Grenzen für Hypothesentests und Konfidenzintervalle für Kapitalkosten von Parameterkonstellationen der jeweiligen Schätzungen abhängen. In den folgenden Szenarioanalysen wird einmal der Erwartungswert und einmal der Standardfehler des Betafaktors variiert.

6.4.3.1 Szenario Betafaktor

Ein Szenario wird nun erneut mit einem konstanten Signifikanzniveau der Beta-Schätzung betrachtet. Für einen niedrigen (0,5), mittleren (1) und hohen (1,5) Betafaktor ist der relative Standardfehler konstant ein Viertel des Erwartungswertes.

Für die resultierenden drei Stichprobenverteilungen werden Konfidenzintervalle mit 90 % Vertrauenswahrscheinlichkeit berechnet. Jenseits der links- und rechtsseitigen kritischen Grenzen liegen jeweils 5 % Wahrscheinlichkeitsmasse. Die Grenzen bilden auch die kritischen

[299] Vgl. IDW S 1 i.d.F. 2008, S. 34 f. Tz. 175.

Bereiche für links- und rechtsseitige Hypothesentests mit jeweils 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit. Die berechneten Dichtefunktionen sind in Abbildung 23 grafisch dargestellt.

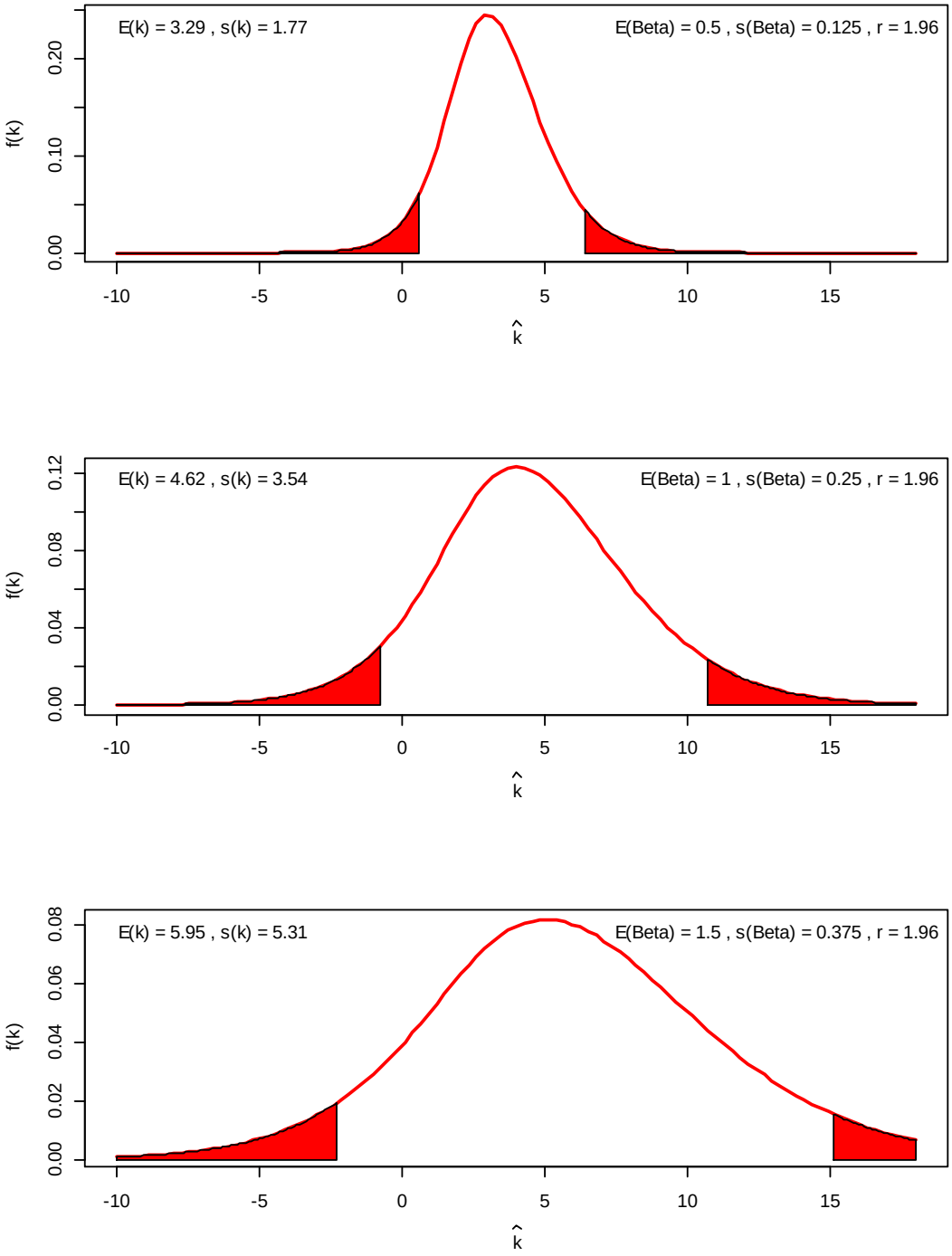

Abbildung 23: Kritische Bereiche der Kapitalkostenschätzer für signifikante Betafaktoren (H_0: $Beta = 0$) mit Betafaktoren von 0,5, 1 und 1,5. Die roten Flächen enthalten jeweils 5 % Wahrscheinlichkeitsmasse. Für den Basiszins werden die Parameter der Laufzeit von zehn Jahren gewählt. Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.

In Tabelle 17 sind die berechneten kritischen Intervallgrenzen der drei Stichprobenverteilungen angegeben.

	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 0{,}5\ ;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}125$	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1\ ;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}25$	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1{,}5\ ;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}375$
90%-Intervall	[0,6 ; 6,4]	[-0,8 ; 10,7]	[-2,3 ; 15,1]

Tabelle 17: Konfidenzintervalle für signifikante Betafaktoren (H_0: $Beta = 0$) mit Erwartungswerten für Beta von 0,5, 1 und 1,5. Parameter: $E(\hat{r}) = 1,96$; $\sigma_{\hat{r}} = 0,025$; $E(\widehat{M}) = 2,66$; $\sigma_{\widehat{M}} = 3,37$. Quelle: Eigene Berechnung in R.

Die resultierenden Konfidenzintervalle für Kapitalkosten sind aufgrund der schiefen Verteilung nicht symmetrisch um den Erwartungswert. Deutlich wird, dass mit Zunahme des Betafaktors und seines Standardfehlers die Grenzen der Konfidenzintervalle von Kapitalkosten insbesondere im positiven Bereich zunehmen. Die Ursache hierfür liegt in dem Zusammenhang der Rechtsschiefe mit dem Standardfehler der Kapitalkosten-Verteilung. In 6.3.3 wurde gezeigt, dass sich der Standardfehler geschätzter Kapitalkosten mit steigenden Betafaktoren erhöht. Dann ist mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in den Flanken vorzufinden und durch die Rechtsschiefe verschiebt sich bei Erhöhung der Betafaktoren mit gleichbleibendem relativem Standardfehler rechtsseitig die Intervallgrenze stärker als linksseitig für negative Schätzabweichungen.

Für geschätzte Kapitalkosten bedeutet dies, dass die höhere Schätzunsicherheit insbesondere bei größeren Betafaktoren im positiven Bereich der Kapitalkosten stärker ausgeprägt ist. Statistische Obergrenzen besitzen daher eine größere Sensitivität als statistische Untergrenzen bzgl. der Höhe des Betafaktors.

6.4.3.2 Szenario Beta-Standardfehler

Schließlich wird der Einfluss des Beta-Standardfehlers auf die Konfidenzintervalle von Kapitalkosten untersucht. Der Erwartungswert des Betafaktors bleibt konstant eins und die Signifikanzen zur Hypothese H_0: $Beta = 0$ variieren. Die (relativen) Standardfehler betragen $\sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}25$, $\sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}4$ und $\sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}8$. Die Dichtefunktion ist hiermit erneut jeweils für einen signifikanten, einen schwach signifikanten und einen nicht signifikanten Betafaktor berechnet. Die berechneten Dichtefunktionen sind in Abbildung 24 grafisch dargestellt.

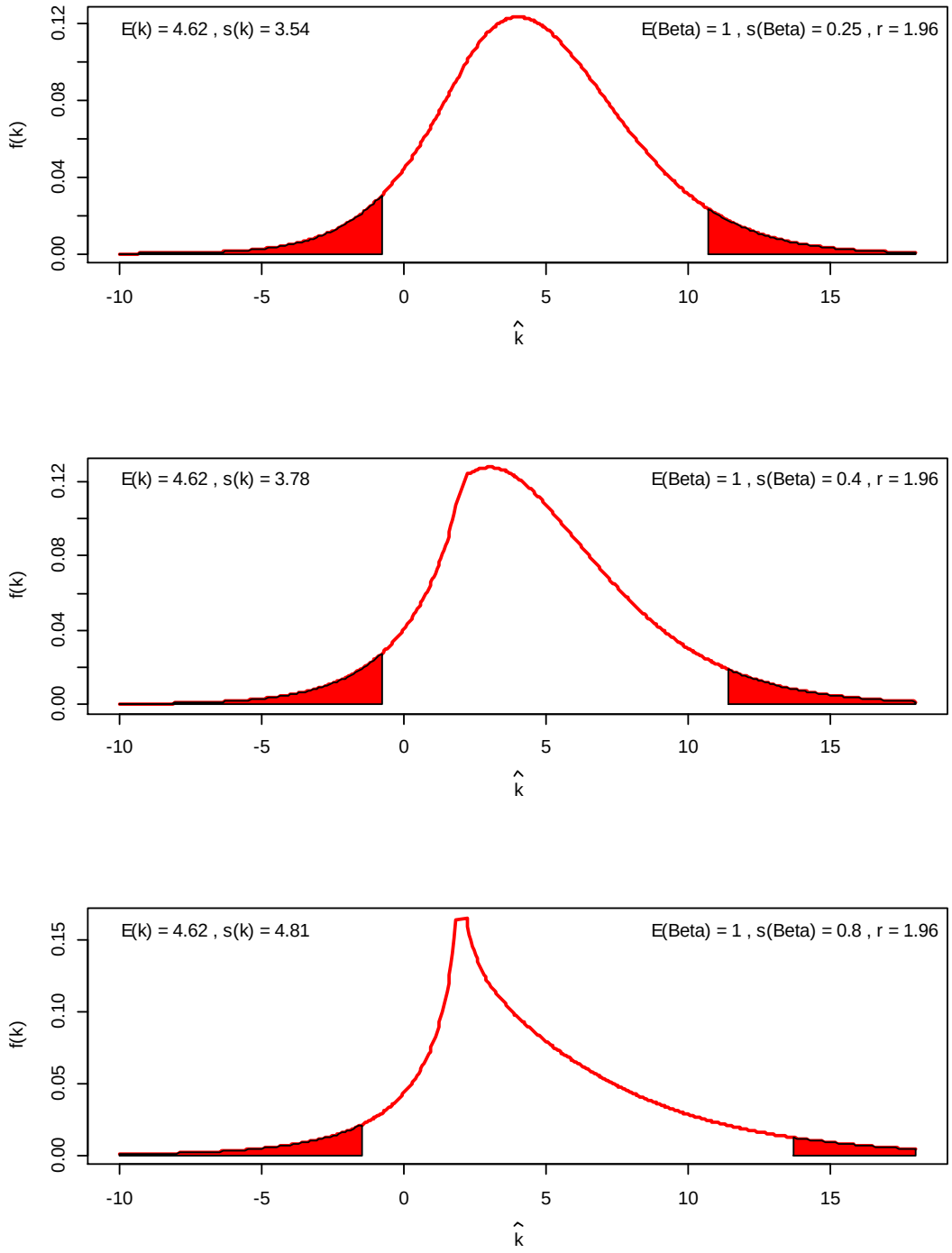

Abbildung 24: Kritische Bereiche von Kapitalkostenschätzern für Betafaktoren von eins. In der oberen Abbildung ist der Betafaktor signifikant ($H_0: Beta = 0$), in der mittleren schwach signifikant und in der unteren nicht signifikant. Die roten Flächen enthalten jeweils 5 % Wahrscheinlichkeitsmasse. Quelle: Eigene Berechnung und Darstellung in R.

In Tabelle 18 sind die berechneten Konfidenzintervalle der drei Verteilungen angegeben.

	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1\ ;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}25$	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1\ ;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}4$	$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = 1\ ;\ \sigma_{\hat{\beta}} = 0{,}8$
90 %-Intervall	[-0,8 ; 10,7]	[-0,8 ; 11,4]	[-1,5, ; 13,7]

Tabelle 18: Konfidenzintervalle für Kapitalkosten mit erwarteten Betas von eins. Parameter: $\boldsymbol{E(\hat{r}) = 1,96;\ \sigma_{\hat{r}} = 0,025;\ E(\widehat{M}) = 2,66;\ \sigma_{\widehat{M}} = 3,37}$. Quelle: Eigene Berechnung in R.

Mit steigendem Beta-Standardfehler verschieben sich die Vertrauensintervallgrenzen von Kapitalkosten rechtsseitig stärker als auf der linken Seite. Positive Schätzabweichungen sind für Kapitalkosten tendenziell mit höheren Beträgen verbunden. Dieser Effekt ist umso größer je geringer die Genauigkeit der Beta-Schätzung in Form des höheren relativen Standardfehlers ist.

Die Sensitivität statistischer Obergrenzen bzgl. des Beta-Standardfehlers ist grösser als die der statistischen Untergrenzen.

6.5 Schätzunsicherheit von Kapitalkosten und Unternehmensbewertung

Für Unternehmen mit höheren Betafaktoren liegt eine höhere statistische Schätzunsicherheit für Kapitalkosten vor. Der relative Standardfehler der Kapitalkosten nimmt mit größeren Betafaktoren überproportional zu, auch wenn der relative Standardfehler der Beta-Schätzung konstant bleibt.

Die mittels Discounted-Cashflow-Methoden zu diskontierenden zukünftigen Zahlungsströme sind bei höheren Betafaktoren mit einer höheren Unsicherheit behaftet. Da hohe Betafaktoren die Unsicherheit geschätzter Kapitalkosten ebenfalls erhöhen, sind die Kapitalisierungszinssätze und die damit erzielte Bewertung der Zahlungsströme bei höheren Betafaktoren zusätzlich mit höherer Unsicherheit behaftet.

Durch die Rechtsschiefe der Verteilung von Kapitalkosten sind positive statistische Abweichungen betragsmäßig größer zu erwarten als negative, obwohl die erwarteten

Abweichungen der einzelnen Schätzungen aufgrund der anzunehmenden Normalverteilungen symmetrisch sind.

Die Sensitivität von statistischen Ober- und Untergrenzen für Kapitalkosten ist damit auch bzgl. der Beta-Schätzung verschieden. Sowohl die Höhe des Beta-Schätzers als auch die Genauigkeit der Beta-Schätzung beeinflusst statistische Obergrenzen stärker als Untergrenzen.

Die Rechtsschiefe von geschätzten Kapitalkosten nimmt für kleinere Betafaktoren zu. Damit besteht für Unternehmen mit niedrigen Betafaktoren und damit verbundenen relativ geringen Finanzierungsrisiken ein höheres Risiko, aufgrund von Schätzfehlern besonders hohe Kapitalkosten zu ermitteln und damit wiederum den ermittelten Unternehmenswert zu verringern. Dieser Effekt ist durch die Genauigkeit der Beta-Schätzung ebenfalls beeinflusst, da bei Erhöhung des Beta-Standardfehlers die Rechtsschiefe der Kapitalkosten zunimmt.

6.6 R-Code Verteilung von Kapitalkosten

```
#Kapitel 5: Verteilung von Kapitalkosten


#Festlegung Parameter
mub<-1
mur<-mur1
sb<-0.25
sr<-sr1

#Mittelwert
muk<-mur+mub*mum

#Standardabweichung
sk<-(sr^2+mub^2*sm^2+mum^2*sb^2+sm^2*sb^2)^0.5

#Schiefe
skew<-function(x) {
  1/(length(x)*(sqrt(var(x))^3))*sum((x-mean(x))^3)
}

#Kurtosis
kurt<-function(x) {
  1/(length(x)*(sqrt(var(x))^4))*sum((x-mean(x))^4)
}

#Dichte von k=r+bm
dk<-function(k){
  if (k < mur+0.0001 & k>mur-0.0001) 0
  else {
```

```
    integrate(function(r) {
      sapply(r, function(r) {
        1/(2*pi*sr^2)^0.5*exp(-(r-
mur)^2/(2*sr^2))*integrate(function(m)  {1/(abs(m)*2*pi*sm*sb)*exp(-
(m-mum)^2/(2*sm^2)-((k-r)/m-mub)^2/(2*sb^2))},            lower=Inf,
upper=Inf,subdivisions = 1000)$value
      })
    }, lower=mur-10*sr, upper=mur+10*sr, subdivisions = 1000)$value
  }
}


#Plot von fk(k)
par(mfrow=c(1,1))
muk<-mur+mub*mum
sk<-(sr^2+mub^2*sm^2+mum^2*sb^2+sm^2*sb^2)^0.5
curve(sapply(x,dk),                  from=-10,                  to=18,
lwd=3,col="red",xlab=quote(widehat("k")),ylab="f(k)")
legend("topright",legend=c(paste(expression(E(Beta)),"=",mub,",",ex
pression(s(Beta)),"=",sb,",",expression(r),"=",round(mur,3))),bty  =
"n")
legend("topleft",legend=c(paste(expression(E(k)),"=",round(muk,2),"
,",expression(s(k)),"=",round(sk,2))),bty = "n")
curve(dnorm(x, mean=muk, sd=sk), col="blue", lwd=1, add=TRUE)


#Berechnung Schiefe, Woelbung
x          <-          c(seq(-10,round(mur,1)-0.1,          by=0.05),
seq(round(mur,1)+0.1,18,by=0.05))
y<-sapply(x,dk)
print(c("Schiefe, Woelbung:",skew(y),kurt(y)))



#QQ-Plot
x <- seq(-8,18, by=0.1)
```

```
qqv<-sapply(x,dk)

qqnorm(qqv,main=NULL,xlab = "Normal Quantile", ylab = "Kapitalkosten
Quantile",col="blue");qqline(qqv,lwd=2)


# Monte Carlo Simulation

mcsim<-function(l) {


  simk<-c()

  for (i in 1:l) {


    simr<-rnorm(1,mean=mur,sd=sr)

    simb<-rnorm(1,mean=mub,sd=sb)

    simm<-rnorm(1,mean=mum,sd=sm)


    simk[i]<-simr+simb*simm

  }


  #mean(simk)

  #sd(simk)

  #skewness(simk)

  #kurtosis(simk)


  d<-density(simk,kernel="gaussian")

  lines(d, col="red",lwd=1,lty=1, ylab="Dichte")

}


curve(sapply(x,dk),                  from=-10,                  to=18,
lwd=10,col="grey",xlab=quote(widehat("k")),ylab="f(k)")

mcsim(200000)
```

```
legend("topright",c("Monte-Carlo            Simulation","Analytische
Verteilung"),lty=c(1,1), lwd=c(1,10),col=c("red","grey"),bty = "n")


#Verteilung von k=r+z A1

vk2<-function(u,o){

  integrate(function(k) {


    sapply(k, function(k) {

     dk(k)

    }

    )

  }, lower=u, upper=o,subdivisions = 1000)

}


vk<-function(v){

vk2(Inf,v)$value

}


#Plot von Fk(k)

vx<-sapply(seq(-10,18,0.4),vk)

x<-seq(-10,18,0.4)

plot(x,vx,type                          =                          "l",
lwd=3,col="red",ylab="F(k)",xlab=quote(widehat("k")))


#Plot von Szenarios von fk(k)

dk<-function(k){

  if (k < mur+0.1 & k>mur+0.1) NA

  else {

    integrate(function(r) {

      sapply(r, function(r) {
```

```
        1/(2*pi*sr^2)^0.5*exp(-(r-
mur)^2/(2*sr^2))*integrate(function(m)  {1/(abs(m)*2*pi*sm*sb)*exp(-
(m-mum)^2/(2*sm^2)-((k-r)/m-mub)^2/(2*sb^2))},            lower=Inf,
upper=Inf,subdivisions = 1000)$value

      })

    }, lower=mur-10*sr, upper=mur+10*sr, subdivisions = 1000)$value

  }

}


#Parameter fuer Szenario Analyse

murr<-c(0.1074165,1.959794,2.763993)

srr<-c(0.02095125,0.02471899,0.05596581)

mubb<-c(0.5,1,1.5)

sbb<-c(0.25,0.4,1)


#Plot von 3x1 Szenarios von fk(k) - t=10, Beta=0.5, signifikant
(std.fehler=0,25 x Beta)

par(mfrow=c(3,1))

plotexkl<-c(0.1,0.2,0.2)

for (i in 1:3) {

  mur<-murr[2]

  sr<-srr[2]

  mub<-mubb[i]

  sb<-0.25*mub

  muk<-mur+mub*mum

  sk<-(sr^2+mub^2*sm^2+mum^2*sb^2+sm^2*sb^2)^0.5

  curve(sapply(x,dk),                from=-10,                to=18,
lwd=2,col="red",xlab=quote(widehat("k")),ylab="f(k)")


legend("topright",legend=c(paste(expression(E(Beta)),"=",mub,",",ex
pression(s(Beta)),"=",sb,",",expression(E(r)),"=",round(mur,3))),bt
y = "n")
```

```
legend("topleft",legend=c(paste(expression(E(k)),"=",round(muk,2),"
,",expression(s(k)),"=",round(sk,2))),bty = "n")

  curve(dnorm(x, mean=muk, sd=sk), col="blue", lwd=1, add=TRUE)

  #Berechnung Schiefe, Kurtosis

  x      <-      c(seq(-10,round(mur,1)-plotexkl[i],      by=0.05),
seq(round(mur,1)+plotexkl[i],18,by=0.05))

  y<-sapply(x,dk)

  print(c(i,"Schiefe, Woelbung:",skew(y),kurt(y)))

  }


#Plot von 3x1 Szenarios von fk(k) - Beta=0.5, signifikant
(stf.fehler=0,25 x Beta), schwach signifikant (stf.fehler=0,4 x
Beta), nicht signifikant (stf.fehler=1 x Beta)

sbb<-c(0.25,0.4,0.8)

par(mfrow=c(3,1))

for (i in 1:3) {

  mur<-murr[2]

  sr<-srr[2]

  mub<-mubb[2]

  sb<-sbb[i]*mub

  muk<-mur+mub*mum

  sk<-(sr^2+mub^2*sm^2+mum^2*sb^2+sm^2*sb^2)^0.5

  x      <-      c(seq(-10,round(mur,1)-plotexkl[i],      by=0.05),
seq(round(mur,1)+plotexkl[i],18,by=0.05))

  y <- sapply(x,dk)

  plot(y~x,                    type="l",                    lwd="2",
col="red",xlab=quote(widehat("k")),ylab="f(k)")


legend("topright",legend=c(paste(expression(E(Beta)),"=",mub,",",ex
pression(s(Beta)),"=",sb,",",expression(E(r)),"=",round(mur,3))),bt
y = "n")
```

```
legend("topleft",legend=c(paste(expression(E(k)),"=",round(muk,2),"
,",expression(s(k)),"=",round(sk,2))),bty = "n")

  curve(dnorm(x, mean=muk, sd=sk), col="blue", lwd=1, add=TRUE)


  #Berechnung Schiefe, Kurtosis

  x      <-      c(seq(-10,round(mur,1)-plotexkl[i],      by=0.05),
seq(round(mur,1)+plotexkl[i],18,by=0.05))

  y<-sapply(x,dk)

  print(c(i,"Schiefe, Woelbung:",skew(y),kurt(y)))

  }


#Parameter zuruecksetzen

mum<-2.66

mub<-1

mur<-0.1074165

sm<-3.37

sb<-0.25

sr<-0.02095125

muk<-mur+mub*mum

sk<-(sr^2+mub^2*sm^2+mum^2*sb^2+sm^2*sb^2)^0.5


#Quantilsfunktion von k=r+bm

qk<-function(p,start.iterate) {

  qiter<-start.iterate

  repeat {

    q<-vk(qiter)

    if (q > p) break

    qiter<-qiter+0.1

  }
```

```
  return(qiter)
}

#Konfidenzintervall
konfk<-function(alpha,startu,starto){
  ku<-qk(alpha/2,startu)
  ko<-qk(1-alpha/2,starto)
  print(ku)
  print(ko)
}

konfk(0.1,-2.8,8.8)

#Grafik Kritische Bereiche
kritarea<-function(a,ustart,ostart) {
  u<-qk(a,ustart)
  o<-qk(1-a,ostart)

  cord.x <- c(-10,seq(-10,u,0.1),u)
  cord.y <- c(0,sapply(seq(-10,u,0.1),dk),0)
  polygon(cord.x,cord.y,col='red')

  cord.x <- c(o,seq(o,18,0.1),18)
  cord.y <- c(0,sapply(seq(o,18,0.1),dk),0)
  polygon(cord.x,cord.y,col='red')
}

#Plot von 3x1 Konfidenzbereichen von fk(k) - t=10, Beta=0.5,
signifikant (std.fehler=0,25 x Beta)
par(mfrow=c(3,1))
```

```
ustart<-c(0.4,-1,-2.5)

ostart<-c(6.2,10.5,14.8)

for (i in 1:3) {

  mur<-murr[2]

  sr<-srr[2]

  mub<-mubb[i]

  sb<-0.25*mub

  muk<-mur+mub*mum

  sk<-(sr^2+mub^2*sm^2+mum^2*sb^2+sm^2*sb^2)^0.5

  curve(sapply(x,dk),                from=-10,                to=18,
lwd=2,col="red",xlab=quote(widehat("k")),ylab="f(k)")


legend("topright",legend=c(paste(expression(E(Beta)),"=",mub,",",ex
pression(s(Beta)),"=",sb,",",expression(E(r)),"=",round(mur,3))),bt
y = "n")


legend("topleft",legend=c(paste(expression(E(k)),"=",round(muk,2),"
,",expression(s(k)),"=",round(sk,2))),bty = "n")

  kritarea(0.05,ustart[i],ostart[i])



  #Berechnung Woelbung

  x      <-      c(seq(-10,round(mur,1)-plotexkl[i],      by=0.05),
seq(round(mur,1)+plotexkl[i],18,by=0.05))

  y<-sapply(x,dk)

  print(c("Woelbung:",kurt(y)))

  print("Konfidenzintervall")

  konfk(0.1,ustart[i],ostart[i])

}



#Plot von 3x1 Konfidenzbereichen von fk(k) - Beta=0.5, signifikant
(std.fehler=0,25 x Beta), schwach signifikant (stf.fehler=0,4 x
Beta), nicht signifikant (stf.fehler=1 x Beta)

plotexkl<-c(0.1,0.2,0.2)
```

```
sbb<-c(0.25,0.4,0.8)

par(mfrow=c(3,1))

ustart<-c(-1,-1,-1.8)

ostart<-c(10.5,10.5,13)

for (i in 1:3) {

  mur<-murr[2]

  sr<-srr[2]

  mub<-mubb[2]

  sb<-sbb[i]*mub

  muk<-mur+mub*mum

  sk<-(sr^2+mub^2*sm^2+mum^2*sb^2+sm^2*sb^2)^0.5

  x      <-      c(seq(-10,round(mur,1)-plotexkl[i],      by=0.05),
seq(round(mur,1)+plotexkl[i],18,by=0.05))

  y <- sapply(x,dk)

  plot(y~x,                    type="l",                    lwd="2",
col="red",xlab=quote(widehat("k")),ylab="f(k)")


legend("topright",legend=c(paste(expression(E(Beta)),"=",mub,",",ex
pression(s(Beta)),"=",sb,",",expression(E(r)),"=",round(mur,3))),bt
y = "n")


legend("topleft",legend=c(paste(expression(E(k)),"=",round(muk,2),"
,",expression(s(k)),"=",round(sk,2))),bty = "n")

  kritarea(0.05,ustart[i],ostart[i])



  #Berechnung Woelbung

  x      <-      c(seq(-10,round(mur,1)-plotexkl[i],      by=0.05),
seq(round(mur,1)+plotexkl[i],18,by=0.05))

  y<-sapply(x,dk)

  print(c("Woelbung:",kurt(y)))

  print("Konfidenzintervall")

  konfk(0.1,ustart[i],ostart[i])

  }
```

7 Schluss

Es wurde gezeigt, wie die Größen ‚Basiszins', ‚Betafaktor' und ‚Marktrisikoprämie' für die Kapitalkostenermittlung zur Unternehmensbewertung mittels statistischer Inferenz bemessen und beurteilt werden können.

Darauf aufbauend wurde eine Stichprobenverteilung von geschätzten Kapitalkosten vorgeschlagen, die durch die Parameter der jeweiligen Stichprobenverteilungen von ‚Basiszins', ‚Betafaktor' und ‚Marktrisikoprämie' bestimmt ist. Damit konnte z.B. gezeigt werden, dass resultierende Kapitalkosten nicht mehr signifikant verschieden von null getestet werden können, auch wenn eine signifikante Betaschätzung vorliegt. Ursache hierfür ist die zusätzliche Schätzunsicherheit der Marktrisikoprämie und des Basiszinses, die in die Kapitalkostenschätzung einwirkt.

Mit der Herleitung und Anwendung einer Methodik zur Bemessung von Schätzunsicherheit konnte ein Beitrag zur Beurteilung und Entscheidung über geschätzte Kapitalkosten in der Unternehmensbewertung geliefert werden. Dem Forschungsbedarf einer objektiven Bemessungsgrundlage von Kapitalkosten in der Unternehmensbewertung ist hiermit gerecht geworden.

Es wurde gezeigt, welchen Einfluss unterschiedliche Schätzsituationen auf die bemessene Unsicherheit von Kapitalkosten haben, und hierbei insbesondere die Betaschätzung als alleinige unternehmensspezifische Schätzgröße.

Auf diesem Forschungsgebiet bietet sich nun z.B. die Möglichkeit, einen objektiven Vergleich der Unsicherheit geschätzter Kapitalkosten für verschiedene Unternehmen anzustellen. Da die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit eine Operationalisierung der Schätzunsicherheit von Kapitalkosten ermöglichen, kann z.B. der Einfluss der Schätzunsicherheit auf die Unternehmensfinanzierung untersucht werden.

Literatur

Albert, C. (1992): *The intervalling effect bias in beta: A note*; Journal of Banking and Finance, Band 16, Ausgabe 1, S. 61-73.

Ballwieser, W. (2002): *Der Kalkulationszinsfuß in der Unternehmensbewertung – Komponenten und Ermittlungsprobleme*; WPg 2002, S. 736-743.

Ballwieser, W. (2011): *Unternehmensbewertung – Prozeß, Methoden und Probleme*; 3. Auflage, Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart.

Banz, R. W. (1981): *The Relationship Between Return and Market Value Of Common Stocks*; Journal of Financial Economics, Band 9, Ausgabe 1, S. 3-18.

Barrot, C. (2006): *Methodik der empirischen Forschung*; 1. Auflage, Albers, Klapper, Konradt, Wolf (Hrsg.), Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden.

Bhandari, L. C. (1988): *Debt/Equity Ratio and Expected Common Stock Returns: Empirical Evidence*; Journal of Finance, Band 43, Ausgabe 2, S. 507-528.

Black, F. (1993): *Estimating Expected Returns*; Financial Analysts Journal, Band 49, Ausgabe 5, S. 36-38.

Blume, M. E. (1974): *Unbiased Estimators of Long Run Expected Rates of Return*; Journal of the American Statistical Association, Band 69, Ausgabe 347, S. 634-638.

Böcking, H.-J. (2003): *Zur Bedeutung des Börsenkurses für die angemessene Barabfindung;* Richter, F., Schüler, A., Schwetzler, B. (Hrsg.): Kapitalgeberansprüche, Marktwertorientierung und Unternehmenswert, Festschrift für Prof. Dr. Dr. h.c. Jochen Drukarczyk zum 65. Geburtstag, München, Verlag Vahlen, S. 59–91.

Brav, A., Lehavy, R., Michaely, R. (2005): *Using Expectations to Test Asset Pricing Models*; Financial Management, Band 34, Ausgabe 3, S. 31-64.

Chow, G. (1960): *Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions*; Econometrica; Band 28, Ausgabe 3, S. 591-605.

Cohen, K. J., Hawawini, G. A., Maier, S. F., Schwartz, R. A., Whitcomb, D. K. (1980): *Implications of Microstructure Theory for Empirical Research on Stock Price Behavior*; Journal of Finance, Band 35, Ausgabe 2, S. 249-257.

Cooper, I. (1996): *Arithmetic versus geometric mean estimators: Setting discount rates for capital budgeting*; European Financial Management, Band 2, Ausgabe 2, S. 157-167.

Craig, C. C. (1936): *On the frequency function of xy*; Annals of Mathematical Statistics; Band 7, Ausgabe 1, S. 1-15.

Creutzmann, A., Heuer, A.. (2010): *Der Risikozuschlag beim vereinfachten Ertragswertverfahren*; Der Betrieb, Nr. 24, S 1301-1307.

Daske, H., Gebhardt, G. (2004): *Zukunftsorientierte Bestimmung von Kapitalkosten für die Unternehmensbewertung*; Working paper series / Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt am Main, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften : Finance & Accounting 134: [http://www.econstor.eu/dspace/handle/10419/23399 (05.09.2012)].

Deutsche Börse AG (2013): *Leitfaden zu den Aktienindizes der Deutschen Börse*: [http://www.dax-indices.com/DE/MediaLibrary/Document/Leitfaden_Aktienindizes.pdf (12.09. 2013)].

Deutsche Börse Group (2014): *Leitfaden zu den REX-Indizes*; Deutsche Börse AG, Version 3.11, Dezember 2014, S. 5 f.: [www.dax-indices.com/DE/MediaLibrary/Document/**REX_Leitfaden**.pdf (11.11. 2015)].

Deutsche Bundesbank (1997): *Schätzung von Zinsstrukturkurven*; Monatsbericht Oktober 1997, Frankfurt am Main.

Deutsche Bundesbank (2015): Zinsstruktur am Rentenmarkt: [http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Geld_und_Kapitalmaerkte/Zinssaetze_und_Renditen/Zinsstruktur_am_Rentenmarkt/zinsstruktur_am_rentenmarkt.html (07.04.2015)].

Deutsche Bundebank (2015): *Zeitreihen Datenbanken*: [http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Makrooekonomische_Zeitreihen/its_list_node.html?listId=www_s140_it03a (07.04. 2015)].

Dimson, E. (1979): *Risk Measurement When Shares are Subject to Infrequent Trading*; Journal of Financial Economics; Band 7, Ausgabe 2, S. 197-226.

Dimson, E., Marsh, P.R. (1983): *The Stability of UK Risk Measures and The Problem of Thin Trading*; The Journal of Finance, Ausgabe 38, Nr. 3, S. 753-783.

Dörschel, A., Franken, L., Schulte, J. & Brütting, C. (2008): *Ableitung CAPM-basierter Risikozuschläge bei der Unternehmensbewertung – eine kritische Analyse ausgewählter Problemkreise im Rahmen von IDW S 1 i.d.F. 2008*; Die Wirtschaftsprüfung, Heft 24 / 2008, S. 1152-1162.

Dörschell, A., Franken, L., Schulte, J. (2010): *Kapitalkosten 2010 für die Unternehmensbewertung*, IDW-Verlag, Düsseldorf.

Drukarczyk, J., Schüler, A. (2009): *Unternehmensbewertung*; 6. Auflage, Verlag Vahlen, München, Wien.

Eckey, H.-F., Kosfeld, R., Dreger, C. (1992): *Statistik: Grundlagen – Methoden – Beispiele*; Springer Fachmedien, Wiesbaden.

Fahrmeir, L., Künstler, R., Pigeot, I. & Tutz, G. (1999): *Statistik - Der Weg zur Datenanalyse*; 2. Auflage, Springer-Verlag, Heidelberg.

Fama, E. F., French, K. R. (1992): *The Cross-Section of Expected Stock Returns*; The Journal of Finance, Band 47, Ausgabe 2, S. 427-465.

Fowler, D. J., Rorke, C. H. (1983): *Risk Measurement When Shares are Subject to Infrequent Trading - Comment;* Journal of Financial Economics, Ausgabe 12, Nr. 2, S. 279-283.

Frantzmann, H. J. (1990): *Zur Messung des Marktrisikos deutscher Aktien*; Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Ausgabe 1, S. 67-83.

Franken, L.; Schulte, J. (2010): *Beurteilung der Eignung von Betafaktoren mittels R^2 und t-Test: Ein Irrweg? – Auch eine Replik zu Knoll*; Die Wirtschaftsprüfung, Heft 22 / 2010, S. 1110-1116.

Gebhardt, G., Daske, H. (2004): *Zukunftsorientierte Bestimmung von Kapitalkosten für die Unternehmensbewertung*; Working paper series / Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt am Main, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften : Finance & Accounting 134: [http://www.econstor.eu/dspace/handle/10419/23399 (05.09.2012)].

Gleißner, W. (2005): *Kapitalkosten: Der Schwachpunkt bei der Unternehmensbewertung und im wertorientierten Management*; Finanz Betrieb, Heft 4 / 2005 , S. 217-229.

Gleißner, W. (2009): *Kapitalmarktorientierung statt Wertorientierung: Volkswirtschaftliche Konsequenzen von Fehlern bei Unternehmens- und Risikobewertungen*; WSI Mitteilungen 6/2009, S. 310-318.

Griffin, J. M. (2002): *Are the Fama and French Factors Global or Country Specific?*; The Review of Financial Studies, Band 15, Ausgabe 3, S. 783-803.

Hartmann-Wendels ,T., Pfingsten, A., Weber, M. (2007): *Bankbetriebslehre*; 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Hartmann-Wendels ,T., Pfingsten, A., Weber, M. (2010): *Bankbetriebslehre*; 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Hartung, J., Elpelt, B., Klösener, K-H. (2005): *Statistik – Lehr und Handbuch der angewandten Statistik*; 14. Auflage, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, Wien.

Hewicker, H., Cremers, H. (2011): *Modellierung von Zinsstrukturkurven*; Working Paper Series No. 165, Frankfurt School of Finance & Management.

Holling, H., Gediga, G. (2013): *Statistik - Wahrscheinlichkeitstheorie und Schätzverfahren*; Hogrefe Verlag, Göttingen.

Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e. V. (2008): *IDW Standard: Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen (IDW S1 i.d.F. 2008)*; IDW Verlag, Düsseldorf.

Institut der Wirtschaftsprüfer in Deutschland e. V. (2012): *Hinweise des FAUB zur Berücksichtigung der Finanzmarktkrise bei der Ermittlung des Kapitalisierungszinssatzes in der Unternehmensbewertung*; WP Handbuch 2014.

Jensen, M. C., Black, F., Scholes, M. S. (1972): *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests;* Studies in the Theory of Capital Markets, M.C. Jensen (Hrsg.), New York, S. 79-121.

Knight, F. H. (2012): *Risk, Uncertainty and Profit*; Dover Publications, New York.

Knoll, L., Erhardt, J., Bohnet, F. (2007): *Kleines Beta – kleines Bestimmtheitsmaß – großes Problem;* CFO aktuell, 2007, S. 210-213.

Knoll, L. (2010): *Äquivalenz zwischen signifikanten Werten des Beta-Faktors und des Bestimmtheitsmaßes – Anmerkungen zu Dörschell/Franken/Schulte/Brütting*; WPg 2010, S. 1152-1162.

KPMG AG Wirtschaftsprüfungsgesellschaft (2012): *Corporate Finance - Kapitalkostenstudie 2012/2013*.

Kriedel, N. (2006): *Die Datierung von Strukturbrüchen in ökonomischen Zeitreihen – Das Beispiel der Geldnachfragefunktion in Großbritannien*; WiSt – Wirtschaftswissenschaftliches Studium, Zeitschrift für Ausbildung und Hochschulkontakt, Heft 6, Verlag Vahlen, Juni 2006, S. 345-349.

Kruschwitz, L., Löffler, A. (2008): *Kapitalkosten aus theoretischer und praktischer Perspektive*; Die Wirtschaftsprüfung, Heft 17 2008.

Leiner, B. (2004): *Einführung in die Statistik;* 9. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien.

Markowitz, H. (1952): *Portfolio Selection*; The Journal of Finance, Band 7, Ausgabe 1, S. 77-91.

Matschke, M. J., Brösel, G. (2013): *Unternehmensbewertung*; 4. Auflage, Gabler-Verlag, Wiesbaden.

Merton, R. C. (1980): *On Estimating the Expected Return of the Market: An Explanatory Investigation*; Journal of Finance, Band 8, Ausgabe 4, S. 323-361.

Modigliani, F., Miller, M. H. (1958): *The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment;* The American Economic Review*,* Ausgabe 48, Nr. 3, S. 261-297.

Moxter, A. (1983): *Grundsätze ordnungsgemäßer Unternehmensbewertung*; 2. Auflage, Gabler-Verlag, Wiesbaden.

Nelson, C. R., Siegel, A. F. (1987): *Parsimonious Modeling of Yield Curves*; The Journal of Business, Band 60, Ausgabe 4, S. 473-489.

Nowak, K. (2000): *Marktorientierte Unternehmensbewertung*; Springer Fachmedien, Wiesbaden.

Obermaier, R. (2006): *Marktzinsorientierte Bestimmung des Basiszinssatzes in der Unternehmensbewertung*; Finanz Betrieb vom 07.07.2006, Heft 7-8 , S. 472-479.

Obermeier, T., Gasper, R. (2008): I*nvestitionsrechnung und Unternehmensbewertung*; Oldenbourg Verlag, München, Wien.

Oehlert, G. W. (1992): *A Note to the Delta Method*; The American Statistician, Band 46, Ausgabe 1, S. 27-29.

Oenschläger, E., Götz, A. (2001): *Ermittlung von Diskontierungsfaktoren in der Unternehmensbewertung über das CAPM*; Discussion Papers, Nr. 12/11, Duale Hochschule Baden-Württemberg Villingen-Schwenningen.

Oertmann, P., Zimmermann, H. (1998): *„Risk and Return": Vom CAPM zur modernen Asset Pricing Theory*; Economics Today. Konsens und Kontroverse in der modernen Ökonomie, NZZ-Verlag, Zürich, S. 211-235.

Opfer, H. (2004): *Zeitvariable Asset-Pricing-Modelle für den deutschen Aktienmarkt*; Bessler, W. (Hrsg.), Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden.

Peemöller, V. H. (2012): *Praxishandbuch der Unternehmensbewertung*; 5. Auflage, NWB Verlag, Herne.

Polasek, W. (1997): *Schließende Statistik – Einführung in die Schätz- und Testtheorie für Wirtschaftswissenschaftler*; Springer Verlag, Berlin u.a.

Reese, R., Wiese, J. (2006): *Die kapitalmarktorientierte Ermittlung des Basiszinses für die Unternehmensbewertung - Operationalisierung, Schätzverfahren und Anwendungsprobleme;* LMU München: [http://www.rwp.bwl.uni-muenchen.de/pubdb/art_in_books/2007-0035.html (05.09.2012)].

Roll, R. (1977): *A critique of the asset pricing theory's tests Part I: On past and potential testability of the theory*; Journal of Financial Economics, Band 4, Ausgabe 2, S. 129-176.

Ross, S. (1976): *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*; Journal of Economic Theory, Band 13, Ausgabe 3, S. 341-360.

Ruiz de Vargas, S. (2012): *Bestimmung der historischen Marktrisikoprämie im Rahmen von Unternehmensbewertungen*; Der Betrieb, Heft 15, S. 813-819.

Schich, S. T. (1996): A*lternative Spezifikationen der deutschen Zinsstrukturkurve und ihr Informationsgehalt hinsichtlich der Inflation*; Diskussionspapier 8/96, Volkswirtschaftliche Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank, Oktober 1996, Frankfurt am Main.

Schich, S. T. (1997): *Schätzung der deutschen Zinsstrukturkurve*; Diskussionspapier 7/97, Volkswirtschaftliche Forschungsgruppe der Deutschen Bundesbank, Frankfurt am Main.

Schierenbeck, H., Wöhle, C. B. (2012): *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*; 18. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien.

Schlittgen, R., Streitberg, H. J. (2001): *Zeitreihenanalyse*; 9. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien.

Schlittgen, R. (2004): *Statistische Auswertungen mit R*; Oldenbourg Verlag, München, Wien.

Schlittgen, R. (2010): *Statistische Inferenz*; 2. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien.

Scholes, M., Williams, J. (1977): *Estimating Betas from Nonsynchronous Data*; Journal of Financial Economics, Ausgabe 5, Nr. 3, S. 309-327.

Schuster, T., Uskova, M. (2015): *Finanzierung: Anleihen, Aktien, Optionen*; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Seijas-Macias, A. (2012): An Apporoach to Distribution of the Product of Two Normal Variables; Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics 32, S. 87-99.

Servu, P., Vandebroek, M., Vinaimont, T. (2007): *Thin-Trading Effects in Beta: Bias v. Estimation Error*; Katholieke Universiteit Leuven: [https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/230067/1/AFI_0617.pdf (20.06.2016)].

Sharpe, W. (1963): *A Simplified Model of Portfolio Analysis*; Management Science, Band 9, Ausgabe 2, S. 277-293.

Sharpe, W. F. (1964): *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*; The Journal of Finance, Band 19, Ausgabe 3, S. 425-442.

Spreemann, K., Ernst, D. (2011): *Unternehmensbewertung*; 2. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien.

Stehle, R., Hartmond, A. (1991): *Durchschnittsrenditen deutscher Aktien 1954 – 1988*; Kredit und Kapital, Nr. 24, S. 371-411.

Stehle, R. (1994): *Die betriebs- und die volkswirtschaftliche Verwendung des Begriffs Kapitalkosten*; Betriebswirtschaftslehre und Unternehmensforschung, Helmut Wagner (Hrsg.), S. 150-168.

Stehle, R., Huber, R., Maier, J. (1996): *Rückberechnung des DAX für die Jahre 1955 bis 1987*; Kredit und Kapital Nr. 29, S. 277-304.

Stehle, R., Wulff, C., Richter, Y. (1999): *Die Rendite deutscher Blue-Chip-Aktien in der Nachkriegszeit – Rückberechnung des DAX für die Jahre 1948 bis 1954*; working paper, Humboldt-Universität zu Berlin.

Stehle, R., (2004); *Die Festlegung der Risikoprämie von Aktien im Rahmen der Schätzung des Wertes von börsennotierten Kapitalgesellschaften*; Die Wirtschaftsprüfung, Heft 17 / 2004, S. 906-927.

Stellbrinck, J., Brueckner, C. (2011): *Beta-Schätzung: Schätzzeitraum und Renditeintervall unter statistischen Gesichtspunkten*; BewertungsPraktiker, 6. Jg., Heft 3, S. 2-9.

Stüttgen & Haeb AG, Wirtschaftsprüfungsgesellschaft (2012): *Bericht über die Prüfung der Angemessenheit der Barabfindung gemäß § 327c Abs. 2 Satz 2 AktG im Verfahren der Übertragung der Aktien der Minderheitsaktionäre der Utimaco Safeware AG Oberursel auf die Sophos Holdings GmbH Wiesbaden*; [http://www.utimaco.com/fileadmin/assets/Hauptversammlung/Utimaco_Pruefungsbericht_Ausfertigung_gesiegelt.pdf (26.08.2013)].

Svensson, L. E. O. (1995): *Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method*; Quarterly review, Central Bank of Sweden, Stockholm, S. 13-26.

Ver Hoef, J. M. (2012): *Who invented the Delta Method?*; The American Statistician, Band 66, Ausgabe 2.

von Auer, L. (2011): *Ökonometrie, eine Einführung*; 5. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Watrin, C., Stahlberg, G. (2011): *Der Einfluss des Wochentags auf den Betafaktor – Eine empirische Analyse anhand ausgewählter Kapitalmärkte*; Corporat Finance, Nr. 3/2011, S. 176-195.

Wenger, E. (2005): *Verzinsungsparameter in der Unternehmensbewertung – Betrachtungen aus theoretischer und empirischer Sicht*; Die Aktiengesellschaft, Jg. 50, Sonderheft 2005, S. 9 -22.

Wöhe, G. (2000): *Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre*; 20. Auflage, Verlag Vahlen, München.

Zemanian, A. H. (1965): *Distribution Theory and Transform Analysis*; Dover Publications, New York.

Anhang

Anhang 1: Kurse und Renditen von Kupon- und Nullkuponanleihen der Bundesrepublik Deutschland von Bundesschatzanweisungen, Bundesobligationen und Bundesanleihen. Für die deutsche Zinsstruktur (09.01.2014).

Kupon	Bezeichnung	Fälligkeit	Restlaufzeit Tage	Restlaufzeit Jahre	Rendite	Kurs	Zinsstruktur	Renditefehler
0,25	BSA 12	14.03.2014	64	0,2	0,04	100,244	0,10755049	0,005
2,25	BO S 154	11.04.2014	92	0,3	0,05	102,239	0,10423605	0,0033
0	BSA 12	13.06.2014	155	0,4	0,06	99,975	0,10096053	0,0016
4,25	Bund 04	04.07.2014	176	0,4	0,08	104,208	0,10096053	0,0003
0	BSA 12 II	12.09.2014	246	0,7	0,11	99,925	0,10386911	0,0001
2,5	BO S 155	10.10.2014	274	0,8	0,13	102,402	0,10678146	0,0005
0	BSA 12 III	12.12.2014	337	0,9	0,14	99,875	0,11531698	0,0005
3,75	Bund 04	04.01.2015	360	0,9	0,12	103,632	0,11531698	0
2,5	BO S 156	27.02.2015	414	1,1	0,16	104,821	0,12725269	0,0008
0,25	BSA 13	13.03.2015	428	1,2	0,16	100,332	0,13441842	0,0006
2,25	BO S 157	10.04.2015	456	1,3	0,16	104,295	0,14234321	0,0004
0	BSA 13	12.06.2015	519	1,4	0,18	99,745	0,16035606	0,0004
3,25	Bund 05	04.07.2015	541	1,4	0,17	106,246	0,16035606	0
0,25	BSA 13 II	11.09.2015	610	1,7	0,2	100,178	0,19237614	0,0001
1,75	BO S 158	09.10.2015	638	1,8	0,19	103,164	0,20427948	0,0002
0	BSA 13	11.12.2015	701	1,9	0,23	99,57	0,22978407	0
3,5	Bund 05	04.01.2016	725	1,9	0,21	106,56	0,22978407	0,0003

2	BO S 159	26.02.2016	778	2,1	0,23	105,499	0,25739793	0,0008
2,75	BO S 160	08.04.2016	820	2,2	0,25	107,67	0,27194023	0,0005
6	Bund 86 II	20.06.2016	893	2,4	0,29	117,223	0,31825617	0,0008
4	Bund 06	04.07.2016	907	2,4	0,3	111,21	0,31825617	0,0003
5,625	Bund 86	20.09.2016	985	2,7	0,37	115,772	0,36819092	0
1,25	BO S 161	14.10.2016	1009	2,8	0,35	102,782	0,38555294	0,0016
3,75	Bund 06	04.01.2017	1091	2,9	0,39	110,012	0,42124767	0,001
0,75	BO S 162	24.02.2017	1142	3,1	0,44	101,619	0,4581266	0,0003
0,5	BO S 163	07.04.2017	1184	3,2	0,47	100,465	0,47697061	0
4,25	Bund 07 II	04.07.2017	1272	3,4	0,51	115,062	0,53494198	0,0004
0,5	BO S 164	13.10.2017	1373	3,8	0,61	99,731	0,61507846	0,0001
4	Bund 07	04.01.2018	1456	3,9	0,65	113,209	0,65613305	0,0001
0,5	BO S 165	23.02.2018	1506	4,1	0,73	99,578	0,6977191	0,001
0,25	BO S 166	13.04.2018	1555	4,3	0,78	97,968	0,73974907	0,0019
4,25	Bund 08	04.07.2018	1637	4,4	0,78	117,432	0,7821407	0
1	BO S 167	12.10.2018	1737	4,8	0,92	100,728	0,86770479	0,0026
3,75	Bund 08	04.01.2019	1821	4,9	0,92	113,767	0,91073688	0,0002
3,5	Bund 09	04.07.2019	2002	5,4	1,04	114,876	1,04008172	0
3,25	Bund 09	04.01.2020	2186	5,9	1,16	112,075	1,168668	0,0001
3	Bund 10	04.07.2020	2368	6,4	1,26	112,331	1,295273	0,0013
2,25	Bund 10	04.09.2020	2430	6,6	1,3	106,833	1,33685872	0,0016
2,5	Bund 10	04.01.2021	2552	6,9	1,38	107,462	1,41891672	0,0015
3,25	Bund 11	04.07.2021	2733	7,4	1,47	114,238	1,53882584	0,0051
2,25	Bund 11	04.09.2021	2795	7,6	1,52	106,008	1,57785776	0,003

2	Bund 11	04.01.2022	2917	7,9	1,6	103,049	1,65440235	0,0034
1,75	Bund 12	04.07.2022	3098	8,4	1,7	101,275	1,76519662	0,0036
1,5	Bund 12	04.09.2022	3160	8,6	1,74	98,598	1,80100601	0,0033
1,5	Bund 13	15.02.2023	3324	9,1	1,84	98,679	1,90493768	0,0046
1,5	Bund 13 II	15.05.2023	3413	9,3	1,88	97,749	1,95489461	0,0052
2	Bund 13	15.08.2023	3505	9,6	1,92	101,547	2,00348987	0,0076
6,25	Bund 94	04.01.2024	3647	9,9	1,91	139,214	2,0661473	0,0238
6,5	Bund 97	04.07.2027	4924	13,4	2,31	151,477	2,57894692	0,0732
5,625	Bund 98	04.01.2028	5108	13,9	2,39	138,139	2,63188837	0,0568
4,75	Bund 98 II	04.07.2028	5290	14,4	2,44	130,322	2,68025303	0,0558
6,25	Bund 00	04.01.2030	5839	15,9	2,53	148,474	2,79986681	0,0706
5,5	Bund 00	04.01.2031	6204	16,9	2,61	139,436	2,86038531	0,0649
4,75	Bund 03	04.07.2034	7481	20,4	2,71	134,292	2,9752961	0,0722
4	Bund 05	04.01.2037	8396	22,9	2,76	120,999	2,98866227	0,0525
4,25	Bund 07	04.07.2039	9307	25,4	2,76	129,197	2,96411585	0,0409
4,75	Bund 08	04.07.2040	9673	26,4	2,76	139,442	2,94664163	0,0335
3,25	Bund 10	04.07.2042	10403	28,4	2,76	111,248	2,90222709	0,0198
2,5	Bund 12	04.07.2044	11134	30,4	2,76	95,972	2,84867949	0,0076

Quelle: Deutsche Bundesbank: Kurse und Renditen börsennotierter Bundeswertpapiere:

[https://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Service/Bundeswertpapiere/Kurse_und_Renditen/kurse_und_renditen.html (13.02.2016)].

Anhang 2: Geschätzte Zinsstruktur, Standardfehler und Konfidenzintervall

m	Zinsstruktur	Standardfehler	95 %-Untergrenze	95 %-Obergrenze
1	0,1074	0,0210	0,0664	0,1485
2	0,2385	0,0206	0,1982	0,2788
3	0,4422	0,0204	0,4022	0,4822
4	0,6809	0,0195	0,6427	0,7191
5	0,9298	0,0203	0,8899	0,9696
6	1,1731	0,0222	1,1297	1,2166
7	1,4016	0,0235	1,3554	1,4477
8	1,6100	0,0241	1,5628	1,6573
9	1,7962	0,0243	1,7486	1,8438
10	1,9598	0,0247	1,9113	2,0082
11	2,1016	0,0259	2,0508	2,1525
12	2,2232	0,0280	2,1684	2,2780
13	2,3264	0,0304	2,2667	2,3861
14	2,4132	0,0330	2,3486	2,4778
15	2,4856	0,0351	2,4168	2,5545
16	2,5456	0,0367	2,4737	2,6175
17	2,5948	0,0376	2,5212	2,6684
18	2,6348	0,0377	2,5609	2,7088
19	2,6671	0,0373	2,5941	2,7401
20	2,6929	0,0363	2,6217	2,7640
21	2,7132	0,0351	2,6443	2,7820
22	2,7289	0,0340	2,6622	2,7956
23	2,7409	0,0334	2,6755	2,8063
24	2,7498	0,0335	2,6842	2,8154
25	2,7562	0,0347	2,6882	2,8241
26	2,7605	0,0370	2,6879	2,8331
27	2,7631	0,0405	2,6837	2,8426
28	2,7644	0,0450	2,6762	2,8526
29	2,7646	0,0502	2,6662	2,8630
30	2,7640	0,0560	2,6543	2,8737

Anhang 3: Kovarianzmatrix der Schätzparameter

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}(\hat{\mathbf{b}}) = \frac{I^{-1}(\hat{\mathbf{b}})}{n}$$

	$\hat{b}_0$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$	$\hat{\tau}_1$	$\hat{\tau}_2$
$\hat{b}_0$	**0,168**	-0,160	-0,852	0,305	-0,098	-0,388
$\hat{b}_1$	-0,160	**0,154**	0,849	-0,343	0,084	0,366
$\hat{b}_2$	-0,852	0,849	**92,016**	-92,815	-4,640	9,588
$\hat{b}_3$	0,305	-0,343	-92,815	**95,620**	5,221	-8,585
$\hat{\tau}_1$	-0,098	0,084	-4,640	5,221	**0,395**	-0,181
$\hat{\tau}_2$	-0,388	0,366	9,588	-8,585	-0,181	**1,605**

Anhang 4: Stehle Daten, REXP und Marktrisikoprämie

Jahr	StehleHartmond	REXP	Stehle DAX	MRP
1949			100	
1950	-7,33		92,67	
1951	116,21		200,36	
1952	-7,5		185,33	
1953	25,1		231,84	
1954	85,03		428,98	
1955	14,55	5,91	491,39659	8,64
1956	-5,27	0,9	465,49999	-6,17
1957	9,4	5,01	509,256989	4,39
1958	62,21	10,26	826,065761	51,95
1959	78,05	11,01	1470,81009	67,04
1960	35,84	3,29	1997,94842	32,55
1961	-7,82	9,39	1841,70886	-17,21
1962	-21,73	5,5	1441,50552	-27,23
1963	14,31	5,37	1647,78496	8,94
1964	6,89	5,25	1761,31735	1,64
1965	-12,33	2,9	1544,14692	-15,23
1966	-13,54	1,97	1335,06943	-15,51
1967	49,65	10,31	1997,9314	39,34
1968	15,79	8,92	2313,40476	6,87
1969	16,87	0,94	2703,67615	15,93
1970	-22,9	5,47	2084,53431	-28,37
1971	9,7	8,54	2286,73414	1,16
1972	16,43	4,07	2662,44455	12,36
1973	-17,1	3,29	2207,16654	-20,39
1974	1,62	8,23	2242,92263	-6,61
1975	36,49	13,49	3061,3651	23
1976	-4,24	11,15	2931,56322	-15,39
1977	13,25	13,56	3319,99535	-0,31
1978	11,77	3,74	3710,7588	8,03
1979	-6,3	0,51	3476,981	-6,81

1980	5,4	3,1	3664,73797	2,3
1981	4,58	5,07	3832,58297	-0,49
1982	19,66	18,57	4586,06878	1,09
1983	39,77	4,91	6409,94834	34,86
1984	13,25	13,19	7259,26649	0,06
1985	77,47	10,26	12883,0202	67,21
1986	7,98	8,62	13911,0853	-0,64
1987	-33,27	6,81	9282,86719	-40,08
1988	33,44	4,66	12387,058	28,78
1989	38,43	1,89	17147,4044	36,54
1990	-13,53	1,41	14827,3606	-14,94
1991	6,21	11,17	15748,1396	-4,96
1992	-4,94	13,41	14970,1815	-18,35
1993	46,21	14,66	21887,9024	31,55
1994	-5,12	-2,51	20767,2418	-2,61
1995	5,68	16,69	21946,8212	-11,01
1996	23,14	7,55	27025,3156	15,59
1997	41,78	6,56	38316,4924	35,22
1998	16,2	11,24	44523,7642	4,96
1999	32,5	-1,95	58993,9876	34,45
2000	-9,41	6,86	53442,6534	-16,27
2001	-17,24	5,62	44229,1399	-22,86
2002	-39,94	9,02	26564,0214	-48,96
2003	37,58	4,06	36546,7807	33,52
2004	8,47	6,7	39642,293	1,77
2005	28,2	4,08	50821,4196	24,12
2006	24,09	0,27	63064,2996	23,82
2007	20,42	2,51	75942,0296	17,91
2008	-42,58	10,15	43605,9134	-52,73
2009	25,4	4,92	54681,8154	20,48
2010	18,46	4,01	64776,0785	14,45
2011	-14,82	8,29	55176,2637	-23,11

Quellen:

CDAX, REXP Stehle, R. (2012): [https://www.wiwi.hu-berlin.de/de/professuren/bwl/bb/data (18.11.2015)]

CDAX: 1950 - 1954 Wenger, E. (2005): Verzinsungsparameter in der Unternehmensbewertung – Betrachtungen aus theoretischer und empirischer Sicht; Die Aktiengesellschaft, Jg. 50, Sonderheft 2005, S. 9-22.

REXP: 2010 - 2011 Börse Frankfurt (2015): [http://www.boerse-frankfurt.de/de/aktien/indizes/rex+performance+DE0008469115/kurs_und_umsatzhistorie/historische+kursdaten (26.11.2015)]

Anhang 5: Chow-Test für den Stehle-DAX

			1949 - 2003		1949 - 2011	
Jahr	Stehle DAX	Stehle DAX logarithmiert	F-Statistik	p-Wert	F-Statistik	p-Wert
1953	231,8	5,446	**5,292**	**0,026**	**6,367**	**0,014**
1954	429,0	6,061	0,555	0,460	0,900	0,347
1955	491,4	6,197	0,430	0,515	0,730	0,397
1956	465,5	6,143	1,426	0,239	1,955	0,168
1957	509,3	6,233	1,712	0,197	2,276	0,137
1958	826,1	6,717	0,011	0,918	0,073	0,788
1959	1470,8	7,294	2,337	0,134	1,891	0,175
1960	1997,9	7,600	**6,519**	**0,014**	**5,421**	**0,024**
1961	1841,7	7,518	**5,244**	**0,027**	3,900	0,054
1962	1441,5	7,273	1,571	0,217	0,847	0,362
1963	1647,8	7,407	2,417	0,128	1,356	0,250
1964	1761,3	7,474	2,677	0,110	1,402	0,242
1965	1544,1	7,342	0,815	0,373	0,217	0,644
1966	1335,1	7,197	0,001	0,971	0,126	0,725
1967	1997,9	7,600	1,519	0,226	0,544	0,465
1968	2313,4	7,746	2,529	0,121	1,011	0,320
1969	2703,7	7,902	**4,380**	**0,044**	1,806	0,186
1970	2084,5	7,642	0,649	0,427	0,034	0,855
1971	2286,7	7,735	0,716	0,404	0,038	0,847
1972	2662,4	7,887	1,323	0,259	0,173	0,680
1973	2207,2	7,699	0,003	0,960	0,284	0,597
1974	2242,9	7,716	0,107	0,746	0,747	0,393
1975	3061,4	8,027	0,201	0,657	0,039	0,845
1976	2931,6	7,983	0,011	0,918	0,472	0,497
1977	3320,0	8,108	0,004	0,952	0,426	0,518
1978	3710,8	8,219	0,004	0,950	0,434	0,515
1979	3477,0	8,154	0,551	0,465	1,644	0,209
1980	3664,7	8,207	1,194	0,286	2,602	0,117
1981	3832,6	8,251	2,502	0,129	**4,339**	**0,046**

1982	4586,1	8,431	2,674	0,118	**4,545**	**0,042**

Chow-Test, F-Statistiken und p-Werte für den logarithmierten Stehle. Ausschnitt von untersuchten Strukturbrüchen von 1949-1982. Die getesteten Perioden des Stehle-DAX sind 1953-2003 und 1953-2011. Quelle: Stehle-Daten und eigene Berechnungen in R.

Erklärung an Eides Statt

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass Ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen (einschließlich elektronischer Quellen, dem Internet und mündlicher Kommunikation) direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos unter genauer Quellenangabe als solche kenntlich gemacht. Insbesondere habe ich nicht die Hilfe sogenannter Promotionsberaterinnen / Promotionsberater in Anspruch genommen. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar Geld oder geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Flensburg, 28.07.2016.

Sebastian Vollmer