

Strukturgenetische didaktische Analysen zum Satz
von Georg Pick und zu Gleichungen vom Grad
größer als zwei

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
vorgelegt an der Universität Flensburg von

Michael Schmitz

März 2014

Verwendete Symbole

Zahlbereiche

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen mit Null $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen

Intervalle

$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$]a, b[$	offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$]a, b]$	links halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$[a, b[$	rechts halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Mengenoperationen

\subseteq	Mengeninklusion (Gleichheit zugelassen)
\subset	echte Mengeninklusion; $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

Elementare Geometrie

\overline{AB}	Gerade durch die Punkte A, B
AB	Strecke mit den Endpunkten A, B
$\overset{\circ}{AB}$	relatives Inneres der Strecke AB ($:= AB \setminus \{A, B\}$)
$ AB $	Länge der Strecke AB
M_{AB}	Mittelpunkt von A, B
m_{AB}	Mittellot von A, B

Metrik

$d_2(A, B)$	Abstand der Punkte A, B in der euklidischen Metrik
$d(M, N)$	Abstand der Mengen M, N : $\inf\{d_2(A, B) \mid A \in M, B \in N\}$

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zusammenfassung	9
I	Zum Satz von Georg Pick	15
2	Fachwissenschaftliche Darstellung	21
2.1	Grundlegende Definitionen	21
2.1.1	Ebene, Punkte, Strecken und Geraden	21
2.1.2	Metrik und Topologie	22
2.1.3	Streckenzüge und einfache Polygone	24
2.2	Der Satz von Pick und ein klassischer Beweis	26
2.3	Diskussion des Beweises und Beweisalternativen	31
2.3.1	Ein möglicher Fehlschluss	31
2.3.2	Eine alternative Interpretation der Pick-Zahl	32
2.3.3	Zugang über primitive Dreiecke	35
2.4	Eine allgemeinere Version des Satzes von Pick	43
3	Fachdidaktische Betrachtungen	51
3.1	Fachdidaktischer Bedeutungsgehalt und Überblick	51
3.1.1	Bedeutungsgehalt	51
3.1.2	Überblick	52
3.2	Heuristische Phase	53
3.3	Behandlung eines klassischen Beweises	55
3.4	Zugang über primitive Dreiecke	56

3.5	Ein geometrischer Zugang zum Satz von Pick	64
3.5.1	Diskussion des geometrischen Zugangs	73
3.6	Eine physikalische Interpretation	74
3.7	Verallgemeinerungen des Satzes von Pick	75
3.8	Der Satz von Pick und die Zahlentheorie	78
3.8.1	Grundlegende Erkenntnisse	78
3.8.2	Darstellung des ggT als Linearkombination	81
3.8.3	Brüche im Koordinatensystem und Farey-Folgen	90
3.8.4	Farey-Folgen und Ford-Kreise	103
3.8.5	Farey-Folgen und Fibonacci-Zahlen	105
3.8.6	Eine geometrische Scherzaufgabe und ihre Bezüge zur Fibonacci-Folge und zum Satz von Pick	112
3.9	Probleme	115

II Gleichungen vom Grad größer als zwei 121

4 Exkurs: Geschichte einer berühmten Formel 125

5 Fachwissenschaftliche Darstellung 133

5.1	Generelle Voraussetzungen	133
5.2	Ein Lösungsverfahren für kubische Gleichungen	134
5.2.1	Erste Reduktion	134
5.2.2	Ermittlung eines Lösungskandidaten	135
5.2.3	Beweis der Formel von Cardano	137
5.3	Die Anzahl der Lösungen einer kubischen Gleichung	138
5.4	Zwischenfazit	146
5.5	Anwendung der Formel von Cardano	147
5.6	Kubische Gleichungen mit negativer Diskriminante	149
5.6.1	Negative Diskriminante und komplexe Zahlen	149
5.6.2	Negative Diskriminante ohne komplexe Zahlen	152
5.6.3	Verallgemeinerung auf beliebige Gleichungen	156

6	Fachdidaktische Betrachtungen I	161
6.1	Fachdidaktischer Bedeutungsgehalt und Überblick	161
6.1.1	Bedeutungsgehalt	161
6.1.2	Überblick	162
6.2	Ein möglicher Unterrichtsgang	165
7	Fachdidaktische Betrachtungen II	181
7.1	Zwei GeoGebra-Applets	181
7.1.1	Ein Applet zum graphischen Lösen quadratischer Gleichungen	181
7.1.2	Ein Applet zum graphischen Lösen kubischer Gleichungen . .	183
7.2	Carlyle-Kreise	186
7.3	Die Methode von Lill	189
7.3.1	Ein spezieller Fall	190
7.3.2	Eine allgemeine Version	194
7.3.3	Kubische Gleichungen durch Origami lösen	199
A	Mathematische Ergänzungen	205
A.1	Algebraische Ergänzungen	205
A.2	Die Formel von Euler	207
B	Literaturübersicht zum Satz von Pick	209
	Literatur	219

Kapitel 1

Einleitung und Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit hat als Zielsetzung eine umfassende Didaktisierung der beiden im Titel genannten Themengebiete und ist somit stoffdidaktischer Natur. „*Der an sich undefinierte Begriff Stoffdidaktik wird in vielerlei Absicht und Hinsicht verwendet.*“ (Reichel (1995), S. 178) Dasselbe trifft auf den Terminus „Didaktisierung“ zu, weshalb die dieser Arbeit zugrunde liegende Auffassung beider Begriffe hier zunächst erläutert werden soll.

Wir beziehen uns dazu erneut auf Reichel (1995), welcher auf S. 179 schreibt: „*Kern und Ausgangspunkt der Stoffdidaktik ist stets ein mathematisches Thema, an das die mannigfachsten didaktischen Forschungen anschließen.*“ In Übereinstimmung hiermit wird unter Didaktisierung ein kontinuierlicher, mit einer fachwissenschaftlichen Analyse beginnender Prozess verstanden, in dessen Verlauf der mathematische Inhalt nach verschiedenen, auf das Lehren und Lernen abzielenden Gesichtspunkten aufbereitet wird. Hierzu seien exemplarisch einige Möglichkeiten der Aufbereitung genannt: Verminderung des Abstraktionsgrades unter Verzicht auf vollständige begriffliche Schärfe, verstärkte Akzeptanz der Anschauung, sprachliche Transformation, Konkretisierung, Verzicht auf größtmögliche Allgemeinheit u. v. a. m.

Die Arbeit geht dabei über die rein stoffliche Analyse hinaus, bezieht Lehr- und Lernprozesse mit ein und orientiert sich an Lernvoraussetzungen, an den Zielsetzungen modernen Mathematikunterrichts sowie an aktuellen Curricula. Sie stellt damit eine strukturgenetische didaktische Analyse im Sinne von Wittmann (2013) dar.¹

Aus der Zielsetzung und der oben erläuterten Verortung innerhalb der Mathematikdidaktik resultiert der strukturelle Aufbau der vorliegenden Arbeit: Zunächst findet

¹„*Da sie [die im Artikel beschriebene Forschungsmethode] sich anders als die traditionelle Stoffdidaktik nicht auf die logische Analyse des Stoffes beschränkt, sondern ausdrücklich auch Prozesse einbezieht, möchte ich sie als »strukturgenetische didaktische Analyse« bezeichnen.*“ (Wittmann (2013), S. 1096) Für weitere Ausführungen zum Verständnis des Begriffes sowie zur Bedeutung der Methode siehe ebd., S. 1096/1097.

jeweils² eine fachwissenschaftliche Fundierung statt, auf deren Grundlage sich die fachdidaktischen Betrachtungen anschließen. Die fachwissenschaftliche Darstellung wird hierbei ausdrücklich als ein Teil der Didaktisierung angesehen.

Vor dem Hintergrund dieser Überlegungen lässt sich eine der Hauptintentionen der vorliegenden Arbeit weiter präzisieren. Dazu werden die beiden im Titel genannten Themengebiete im Folgenden separat betrachtet.

Zum **Satz von Georg Pick** liegt bereits eine sehr große Anzahl an fachdidaktischen Veröffentlichungen vor.³ Dabei handelt es sich in der Regel um Artikel, die einen bestimmten Aspekt aufzeigen wollen und daher nur einen kleinen Ausschnitt aus dem Prozess der Didaktisierung, wie sie hier aufgefasst wird, abbilden können. Mit dem Vorteil der Kürze der Darstellung gehen verschiedene Nachteile einher, wie etwa Rückgriffe auf rein anschauliche Definitionen, die falsche Interpretationen zulassen, um nur ein Beispiel zu nennen. Zur Verdeutlichung betrachte man etwa Abbildung 2.23 am Ende von Abschnitt 2.4⁴ und stelle sich vor, dass man die Anzahl der Löcher der abgebildeten polygonalen Bereiche angeben soll, ohne auf eine exakte Definition zurückgreifen zu können.⁵ Mit dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, eine eigenständige, begrifflich fundierte und in sich konsistente Didaktisierung zum Satz von Georg Pick vorzulegen. Darüber hinaus werden in diesem Rahmen neue mathematische und didaktische Erkenntnisse zum Satz von Pick entwickelt, auf welche in der Zusammenfassung noch genauer eingegangen wird.

Selbstverständlich liegen auch zum Thema „**Gleichungen vom Grad größer als zwei**“ Ansätze aus der fachdidaktischen Literatur vor. So verweisen etwa Vollrath/Weigand (2007) auf Kidalla/Paasche (1966), die eine gemeinsame Methode zur Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades anregen, schreiben jedoch im weiteren Verlauf:

*„In der Lehrbuchliteratur haben sich alle diese Vorschläge nicht durchsetzen können. Man beschränkt sich auf die allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung und behandelt Gleichungen höheren Grades nur in Sonderfällen oder mit Näherungsmethoden.“*⁶

Zum genannten Ansatz von Kidalla und Paasche ist zu sagen, dass dieser Kenntnisse⁷ auf Schülerseite voraussetzt, die nach den heutigen Curricula nicht mehr gegeben sind.⁸ Auch Dittmann (1967) schlägt eine Behandlung von Gleichungen höheren Grades in der Schule vor. Er geht aber nicht näher auf die Möglichkeit der Auflösung

²Hiermit ist gemeint, dass dies sowohl auf Teil I (Der Satz von Pick) als auch auf Teil II (Gleichungen vom Grad größer als zwei) zutrifft.

³Man konsultiere hierzu auch die tabellarische Literaturübersicht in Anhang B.

⁴siehe Seite 49

⁵Die korrekte Antwort lautet in beiden Fällen 0.

⁶siehe ebd., S. 259

⁷wie z. B. Wissen über die primitiven n -ten Einheitswurzeln

⁸vgl. Ministerium für Bildung und Wissenschaft des Landes Schleswig-Holstein (2012) sowie Kultusministerkonferenz (2002)

durch Radikale bei kubischen Gleichungen ein,⁹ sondern beschränkt sich auf das Finden von Nullstellen durch sinnvolles Probieren, die Reduktion des Grades sowie Näherungsverfahren.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine ausführliche Didaktisierung des Themas „Auflösen von Gleichungen dritten Grades durch Radikale“ angestrebt. Gleichungen vom Grad größer als drei werden im Zusammenhang mit der graphischen Methode von Lill (Abschnitt 7.3) thematisiert.

Mit einer didaktischen Analyse geht häufig die Festlegung auf eine bestimmte **Zielgruppe**, für welche die Aufbereitung erfolgt, einher. Die in der vorliegenden Arbeit aufbereiteten Inhalte sind grundsätzlich für die Behandlung mit Schülern¹⁰ vorgesehen. Das Themengebiet „Der Satz von Pick“ weist eine enorme Spannweite auf: Einige Aspekte, wie z. B. die grundsätzliche Aussage des Satzes, lassen sich bereits ab der Orientierungsstufe thematisieren, während weiterführende Fragestellungen, wie etwa Beweise oder Verallgemeinerungen, auch für Oberstufenschüler echte Herausforderungen darstellen können. Das Themengebiet „Gleichungen vom Grad größer als zwei“ wird hier in einer Form aufbereitet, die es für Oberstufenschüler zugänglich machen soll. Die Thematisierung einzelner Aspekte ist im Klassenverband denkbar. Für eine umfassende Behandlung etwa der Auflösung von Gleichungen dritten Grades durch Radikale ist der Rahmen im regulären Unterricht vermutlich nicht gegeben. Eine solche könnte in Form eines freiwilligen Zusatzangebotes stattfinden.

Die Beschäftigung mit beiden Themen wird ausdrücklich auch für Studenten, insbesondere für Lehramtskandidaten, als wertvoll erachtet. Sie können mit den Inhalten dieser Arbeit zwei exemplarische Beispiele für strukturgebende didaktische Analysen kennenlernen und auf diese Weise ihre eigenen Kompetenzen in diesem für das Lehramtsstudium zentralen Bereich erweitern.

Unter dem Begriff Unterricht subsumieren wir im Folgenden eine Vielzahl verschiedener Lehrsituationen, wie etwa den herkömmlichen Schulunterricht im Klassenverband, freiwillige Zusatzangebote an Schulen, Universitätsseminare, andere Angebote für Studenten u. v. a. m.

Verschiedene Teile beider Themengebiete wurden im Rahmen **praktischer Erprobungen** bereits mit Schülergruppen durchgeführt. Zum einen fand dies im Rahmen zweier aufeinanderfolgender *Enrichment-Kurse*¹¹ an der Klaus-Groth-Schule Neumünster in den Jahren 2011 und 2012 statt. Dabei handelte es sich um gemischte Kurse zur Begabtenförderung von 12 bzw. 14 Schülern verschiedener Schulen¹² aus

⁹Er nennt die Formel von Cardano ohne Herleitung, Beweis oder Anwendungsbeispiele (siehe ebd., S. 112).

¹⁰Aus Gründen der leichteren Lesbarkeit schreiben wir Schüler anstelle von Schülerinnen und Schüler, wobei stets beide Geschlechter gemeint seien. In gleicher Weise verwenden wir die Worte Lehrer und Studenten.

¹¹Für weitere Informationen zum Enrichment-Programm des Landes Schleswig-Holstein siehe Huszak (2014).

¹²Es nahmen sowohl Gymnasiasten als auch Schüler von Gemeinschaftsschulen teil.

den Klassenstufen 8 bis 11. Eine weitere praktische Erprobung fand im Rahmen der *Schülerakademie Mathematik*¹³ an der Universität Flensburg in den Jahren 2012 und 2013 statt. An dem Kurs nahmen 15 Schüler aus den Jahrgangsstufen 11 bis 13 von verschiedenen Gymnasien und Gemeinschaftsschulen teil.

Obwohl die praktischen Erprobungen einen wichtigen Hintergrund für die vorliegende Arbeit darstellen, werden keine Argumente für oder gegen ein bestimmtes fachdidaktisches Konzept daraus abgeleitet, weil keine empirischen Auswertungen vorgenommen wurden. Dennoch haben die Erfahrungen mit den Schülern den Entstehungsprozess dieser Arbeit mit geprägt, so dass es an einigen wenigen Stellen im Text als sinnvoll erachtet wurde, dem Leser gewisse Beobachtungen mitzuteilen.

Im Folgenden wird hin und wieder auf die dynamische Geometrie-Software *GeoGebra – Dynamic Mathematics for Everyone* (kurz: *GeoGebra*) verwiesen. Die Software ist für nicht kommerzielle Zwecke frei verfügbar unter www.geogebra.org. Für die vorliegende Arbeit wurde die dort heruntergeladene Version 4.2.60.0 vom 04. Oktober 2013 verwendet. Sämtliche im Folgenden auftretenden Abbildungen wurden mit dieser Software selbst erstellt.¹⁴

Zusammenfassung

Es wird hier ein zusammenfassender Überblick über die Inhalte der einzelnen Kapitel gegeben. Die Teile I und II werden dabei separat betrachtet.

I Zum Satz von Georg Pick

In *Kapitel 2* wird die **mathematische Fundierung** des Themas entwickelt. Nach Festlegung der benötigten **Definitionen** (Abschnitt 2.1) wird die **Grundversion des Satzes von Pick** formuliert und ein klassischer Beweis durchgeführt (Abschnitt 2.2). In Abschnitt 2.3 findet eine **Diskussion des Beweises** statt und verschiedene **Beweisalternativen** werden aufgezeigt. Abschließend wird der Satz von Pick **auf Polygonbereiche verallgemeinert** (Abschnitt 2.4).

In *Kapitel 3* werden auf dieser Grundlage die **fachdidaktischen Betrachtungen** ausgeführt. Zunächst wird der **didaktische Bedeutungsgehalt** des Themas erläutert (Abschnitt 3.1). In Abschnitt 3.2 wird eine **heuristische Unterrichtsphase** zur Findung der Formel von Pick dargestellt. Nachdem in Abschnitt 3.3 eine mögliche **Behandlung des klassischen Beweises** aus Abschnitt 2.2 diskutiert wird, werden verschiedene schülergerechte **Zugänge mithilfe primitiver Dreiecke** ent-

¹³Für weitere Informationen über das Projekt *Schülerakademie* am Institut für mathematische, naturwissenschaftliche und technische Bildung der Universität Flensburg siehe Lorenzen/Schmitz (2014).

¹⁴mit Ausnahme der Fotos in Abbildung 6.5

wickelt (Abschnitt 3.4). Dies beinhaltet z. B. eine anschauliche Bestimmung der Anzahl der primitiven Dreiecke, in die ein einfaches Gitterpolygon zerlegbar ist, mithilfe einer Winkelsummen-Bilanz sowie zwei händische Beweise für die Tatsache, dass jedes primitive Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzt. Beide Beweise verwenden eine schrittweise, flächengleiche Verwandlung eines beliebigen primitiven Dreiecks in eine halbierte Gittermasche, die sich mit dem Geobrett oder z. B. mit GeoGebra realisieren lässt.

In Abschnitt 3.5 wird ein meines Erachtens neuer, **elementargeometrischer Zugang** entwickelt, der besonders anschaulich ist, da er den beiden Gitterpunktarten (innere und Randgitterpunkte) mittels verschiedener Punktspiegelungen konkret identifizierbare Flächenstücke zuordnet.

Nachdem die Formel von Pick in Abschnitt 3.6 durch ein **physikalisches Gedankenexperiment** interpretiert wird, geht Abschnitt 3.7 auf Möglichkeiten der **Behandlung von Verallgemeinerungen** des Satzes von Pick mit Schülern ein.

Im ausführlichen Abschnitt 3.8 werden die Zusammenhänge des Satzes von Pick mit der elementaren **Zahlentheorie** diskutiert. So findet etwa eine anschauliche, konstruktive Herleitung der Darstellung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen als Linearkombination derselben statt. Im Bereich der **Farey-Folgen** werden meines Erachtens z. T. neue, anschauliche Herleitungen für deren Eigenschaften auf Grundlage des Satzes von Pick entwickelt.¹⁵ Des Weiteren werden die Bezüge der Farey-Folgen zu **Ford-Kreisen** und zur **Fibonacci-Folge** aufgezeigt. Abschließend werden exemplarisch einige wenige **Probleme** (Aufgaben) mit Lösungsvorschlägen vorgestellt, die den Unterricht in diesem Themenfeld bereichern könnten (Abschnitt 3.9).

In Anhang B findet sich eine tabellarische und chronologisch geordnete **Literaturübersicht zum Satz von Pick**, auf die hin und wieder verwiesen wird.

II Gleichungen vom Grad größer als zwei

Das *Kapitel 4* stellt einen Exkurs dar, der weder der fachwissenschaftlichen noch der fachdidaktischen Darstellung zugeordnet werden soll. Hier werden die **historischen Hintergründe** zur Formel von Cardano und zur Entstehungsgeschichte der ARS MAGNA dargelegt.

In *Kapitel 5* findet die fachwissenschaftliche Fundierung statt. Nach der Festlegung notwendiger **Definitionen** (Abschnitt 5.1) wird in Abschnitt 5.2 die **Formel von Cardano hergeleitet und bewiesen**. Hierbei wird zunächst eine nicht-negative Diskriminante vorausgesetzt. In Abschnitt 5.3 wird der Zusammenhang zwischen der Diskriminante und der **Anzahl der reellen Lösungen** einer kubischen Gleichung

¹⁵Gemeint sind etwa die möglichen Argumentationen anhand von Abbildung 3.35 (siehe Seite 100).

analysiert. In diesem Rahmen werden die beiden reellen Lösungen für den Fall, dass die Diskriminante gleich 0 ist, explizit angegeben (Korollar 5.1).

Abschnitt 5.4 zeigt eine schematische Übersicht zur Verdeutlichung des Vorgehens beim Lösen kubischer Gleichungen. In Abschnitt 5.5 werden **Anwendungen der Formel von Cardano** für den Fall einer nicht-negativen Diskriminante beispielhaft vorgeführt.

Abschnitt 5.6 widmet sich der **Behandlung kubischer Gleichungen mit negativer Diskriminante**. Dabei wird sowohl auf Techniken eingegangen, die Kenntnisse im Bereich der komplexen Zahlen voraussetzen, als auch auf solche, die ohne diese Kenntnisse auskommen.

Die **fachdidaktischen Betrachtungen** zum Thema „Gleichungen vom Grad größer als zwei“ teilen sich in die *Kapitel 6 und 7* auf. Die Aufteilung ist folgendermaßen begründet: Während die Ausführungen in *Kapitel 6* allgemeiner Natur sind, werden in *Kapitel 7* ausschließlich **Methoden zur geometrischen Veranschaulichung** der Lösungen kubischer und höherer Gleichungen thematisiert.

In Abschnitt 6.1 wird zunächst der didaktische **Bedeutungsgehalt** des Themas begründet. Anschließend wird ein **möglicher Unterrichtsgang** zur Behandlung der Auflösung kubischer Gleichungen durch Radikale entwickelt (Abschnitt 6.2).

In *Kapitel 7* werden in Abschnitt 7.1 zwei **GeoGebra-Applets** zum näherungsweise graphischen Lösen quadratischer bzw. kubischer Gleichungen entwickelt. In Abschnitt 7.2 wird eine Möglichkeit zur Veranschaulichung von Lösungen quadratischer Gleichungen mithilfe von **Carlyle-Kreisen** vorgestellt. Diese Methode wird in Abschnitt 7.3 zur **Methode von Lill** verallgemeinert, mit welcher man Gleichungen beliebigen Grades näherungsweise graphisch lösen kann. Diese Lösung eignet sich in besonderem Maße zur Veranschaulichung mit GeoGebra, lässt sich aber nicht mit Zirkel und Lineal realisieren. Eine **Konstruktion mithilfe von Origami** im sogenannten Huzita-Axiomensystem ist möglich und wird abschließend erläutert.

In Anhang A werden gewisse **mathematische Ergänzungen** formuliert, auf die im Text an einigen wenigen Stellen verwiesen wird.

Teil I

Zum Satz von Georg Pick

Einleitung

Im Unterricht der Mittelstufe ist die Berechnung von Flächeninhalten ebener Vielecke ein weit verbreiteter Aufgabentyp. Die Eckpunkte liegen bei diesen Aufgaben häufig auf den Gitterpunkten eines kartesischen Koordinatengitters. Abbildung 1.1 zeigt zwei Darstellungen, die aus einem Schulbuch stammen könnten.

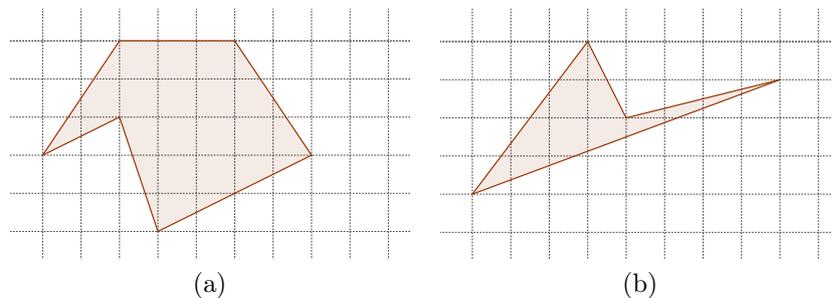


Abb. 1.1: Man bestimme den Flächeninhalt der Figuren in (a) und (b). Die Kästchen haben eine Seitenlänge von 1 cm.

Eine naheliegende und zum Erfolg führende Lösungsstrategie ist das Zerlegen der Figur in einfach zu berechnende Dreiecke und Rechtecke (im Fall (a)) bzw. das Ergänzen der Figur mit solchen Objekten (im Fall (b)). Abbildung 1.2 zeigt je einen möglichen Ansatz zur Lösung.

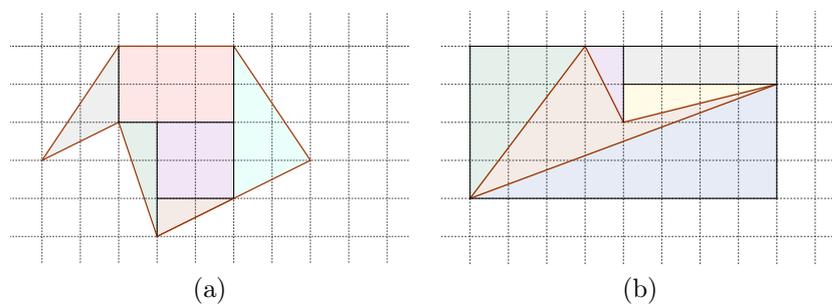


Abb. 1.2: Lösungsansatz

Als Lösungen erhalten wir

$$2 + 6 + 4 + \frac{3}{2} + 1 + 4 = 18,5 \text{ [cm}^2\text{]}$$

für (a) sowie

$$32 - (12 + 6 + 1 + 2 + 4) = 7 \text{ [cm}^2\text{]}$$

für Aufgabe (b).

Ein von Georg Pick¹⁶ im Jahre 1899 bewiesenes Resultat liefert eine einfachere Methode, um die Flächeninhalte von Figuren wie in den Aufgaben (a) und (b) zu berechnen. Wir bestimmen dazu jeweils die Anzahl der Gitterpunkte, die im Inneren eines Vielecks liegen, und die Anzahl der Gitterpunkte, die auf seinem Rand liegen. Abbildung 1.3 verdeutlicht das Vorgehen.

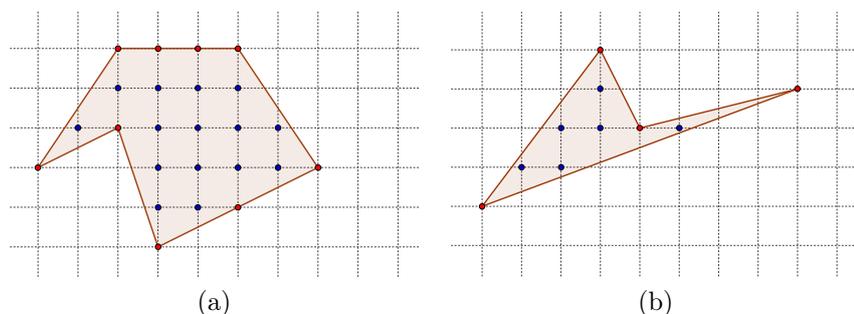


Abb. 1.3: Das Vieleck in (a) besitzt 15 innere Gitterpunkte (blau) und 9 Randgitterpunkte (rot; es zählen sowohl Eckpunkte als auch Punkte auf den Seitenlinien). Das Vieleck in (b) besitzt 6 innere Gitterpunkte und 4 Randgitterpunkte.

Der Satz von Pick besagt, dass sich der Flächeninhalt folgendermaßen berechnen lässt: Man nimmt die Anzahl der inneren Gitterpunkte, addiert die Hälfte der Anzahl der Randgitterpunkte und zieht vom Ergebnis 1 ab, also

$$15 + \frac{1}{2} \cdot 9 - 1 = 18,5 \text{ [cm}^2\text{]}$$

für Aufgabe (a) und

$$6 + \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 7 \text{ [cm}^2\text{]}$$

¹⁶ Georg Alexander Pick (geboren 1859 in Wien) war ein bedeutender Mathematiker und lehrte von 1888 bis 1929 an der Deutschen Universität Prag. Er veröffentlichte ungefähr 70 wissenschaftliche Arbeiten und berief im Jahre 1910 als Mitglied einer dreiköpfigen Berufungskommission Albert Einstein auf den Lehrstuhl für theoretische Physik an die Deutsche Universität Prag. Während Einsteins Zeit in Prag waren die beiden eng befreundet und spielten gemeinsam leidenschaftlich Violine. Georg Pick stammte aus einer jüdischen Familie und wurde im Juli 1942 von den Nationalsozialisten in das Konzentrationslager Theresienstadt verschleppt. Er verstarb dort nach 13 Tagen im Alter von 82 Jahren. Für weitere Informationen siehe Fritsch (2001) sowie Murty/Thain (2007).

für Aufgabe (b). Eine wirklich einfache Methode! Die folgenden Kapitel befassen sich mit diesem unter dem Namen *Satz von Pick*¹⁷ berühmt gewordenen Resultat. Auf Grundlage einer begrifflichen Fundierung werden fachliche und fachdidaktische Aspekte von verschiedenen Zugängen, Interpretationen, Beweisen, Verallgemeinerungen und z. T. unerwarteten Anwendungen diskutiert.

Hinweis

Um sich in der großen Vielfalt der Veröffentlichungen zum Satz von Georg Pick besser orientieren zu können, findet sich im Anhang B eine tabellarische Literaturübersicht.

¹⁷ Dieser Satz ist vermutlich das bekannteste Resultat von Georg Pick, dennoch ist es mathematisch weniger bedeutend als viele seiner anderen Arbeiten. Fritsch (2001) spricht in diesem Zusammenhang von einem „*relatively minor, if extremely beautiful*“-Ergebnis.

Kapitel 2

Fachwissenschaftliche Darstellung

2.1 Grundlegende Definitionen

2.1.1 Ebene, Punkte, Strecken und Geraden

Wir arbeiten hier in der Ebene \mathbb{R}^2 , d. h. in der Menge aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen x, y . Die Elemente von \mathbb{R}^2 bezeichnen wir als *Punkte* und notieren diese in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben. Jeder Punkt $A = (a_1, a_2)$ besitzt also eine erste Koordinate a_1 (auch *x-Koordinate* genannt) und eine zweite Koordinate a_2 (auch *y-Koordinate* genannt).

Für alle Punkte $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir wie üblich

$$A + B := (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

sowie für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A := (\lambda a_1, \lambda a_2).$$

Mit diesen Verknüpfungen ist die Menge \mathbb{R}^2 ein reeller Vektorraum. Für $A \neq B$ definieren wir die *Strecke* AB durch

$$AB := \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Die Strecke ohne ihre Endpunkte, d. h. die Menge

$$\overset{\circ}{AB} := \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid 0 < \lambda < 1\},$$

nennen wir *das relative Innere der Strecke* AB .¹

¹Der Zusatz *relativ* wird verwendet, da es sich nicht um das Innere der Menge bezüglich der verwendeten Topologie auf dem \mathbb{R}^2 (s. u.) handelt, sondern um das Innere bezüglich der sogenannten Relativtopologie auf der Geraden \overline{AB} als topologischer Teilraum des \mathbb{R}^2 .

Die durch A, B festgelegte *Gerade* sei

$$\overline{AB} := \{\lambda A + (1 - \lambda)B \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Der *Mittelpunkt* von A und B sei definiert als

$$M_{AB} := \frac{1}{2}(A + B).$$

Des Weiteren werden gewisse in der Elementargeometrie übliche Sprechweisen verwendet. So sagen wir z. B.: „Der Punkt A liegt auf der Geraden g “, und meinen damit, dass $A \in g$ gilt. Der Begriff *Winkel* wird naiv verwendet. Zwei Geraden g, g' heißen *zueinander parallel*, wenn die Implikation

$$g \cap g' \neq \emptyset \implies g = g'$$

gilt. Zwei Strecken heißen *zueinander parallel*, wenn die (eindeutig bestimmten) Geraden, die diese Strecken enthalten, *zueinander parallel* sind.

2.1.2 Metrik und Topologie

Für einen Punkt $A \in \mathbb{R}^2$ und eine positive, reelle Zahl r definieren wir die *offene Kreisscheibe* $K(A, r)$ um A mit Radius r wie folgt:

$$K(A, r) := \{B \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(A, B) < r\}.$$

Es bezeichne hierbei d_2 die gewöhnliche *euklidische Metrik*, d. h., für $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$d_2(X, Y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Der *Abstand zweier Mengen* $M, N \subseteq \mathbb{R}^2$ sei

$$d(M, N) := \inf \{d_2(X, Y) \mid X \in M, Y \in N\}.$$

Im Falle zweier Geraden oder einer einelementigen Menge (Punkt) und einer Geraden ergibt sich der orthogonale Abstand.

Die *Länge einer Strecke* AB ist definiert als der euklidische Abstand der Endpunkte A, B und wird folgendermaßen notiert:

$$|AB| := d_2(A, B).$$

Ein Punkt A einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *innerer Punkt* von M , wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$K(A, r) \subseteq M$$

gilt. Die Menge aller inneren Punkte von M heißt *das Innere von M* .

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *offene Menge*, wenn jeder Punkt der Menge ein innerer Punkt ist, d. h., wenn es zu jedem $A \in U$ ein $r > 0$ gibt, so dass

$$K(A, r) \subseteq U$$

gilt. Eine offene Menge stimmt also mit ihrem Inneren überein.

Ein Punkt $A \in \mathbb{R}^2$ heißt *Randpunkt* einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$, falls für jedes $r > 0$ die Kreisscheibe $K(A, r)$ sowohl (mindestens) einen Punkt aus M als auch (mindestens) einen Punkt aus $(\mathbb{R}^2 \setminus M)$ enthält. Die Menge aller Randpunkte von M nennen wir auch kurz den *Rand von M* . Abbildung 2.1 veranschaulicht die Definition.

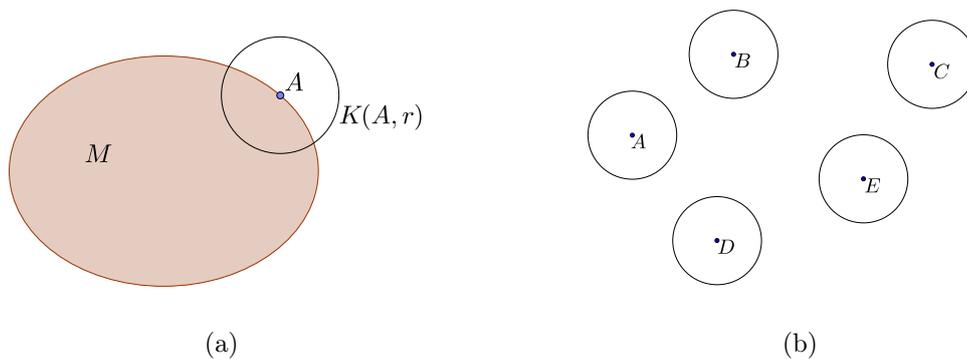


Abb. 2.1: Für eine Menge wie in (a) ist der Begriff Rand intuitiv: Jede (noch so kleine) Kreisscheibe $K(A, r)$ hat sowohl mit M als auch mit dem Komplement von M einen nicht-leeren Schnitt; unabhängig davon, ob die Randlinie zu M gehört oder nicht. In (b) sei $M = \{A, B, C, D, E\}$. Dann ist jedes Element von M Randpunkt von M . Die Menge besitzt keine inneren Punkte.

Achtung: Ein Randpunkt einer Menge muss nicht Element dieser Menge sein. So ist z. B. der Rand einer offenen Kreisscheibe $K(A, r)$ gleich der Kreislinie um A mit dem Radius r , d. h. die Menge aller Punkte B mit $d_2(A, B) = r$. Keiner dieser Punkte gehört zur Menge $K(A, r)$.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $A, B \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ gibt mit $\gamma(0) = A$ und $\gamma(1) = B$. Man nennt γ auch einen *stetigen Weg von A nach B* . Abbildung 2.2 zeigt ein Beispiel für eine nicht wegzusammenhängende Menge und eines für eine wegzusammenhängende Menge.

Wir ziehen hier „wegzusammenhängend“ dem allgemeineren topologischen Begriff

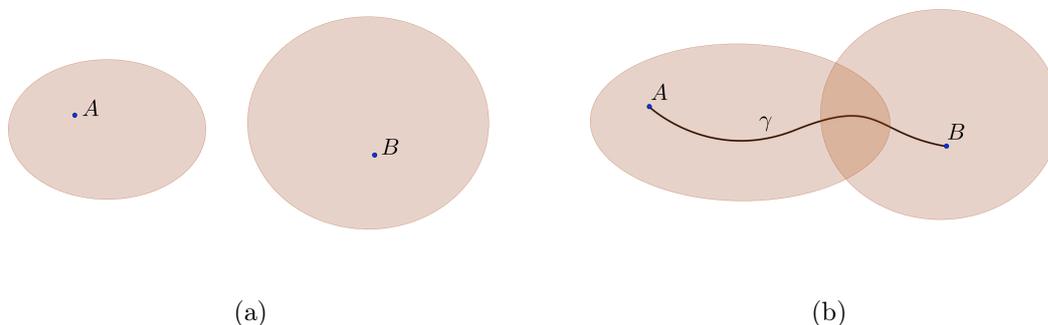


Abb. 2.2: (a) Die Menge ist nicht wegzusammenhängend, denn A und B lassen sich nicht durch einen stetigen Weg verbinden, der innerhalb der Menge verläuft. (b) Die Menge ist wegzusammenhängend. Dargestellt ist ein stetiger Weg γ von A nach B .

*zusammenhängend*² vor, weil es der anschaulichere ist. Normalerweise ist wegzusammenhängend ein schärferer Begriff als zusammenhängend; d. h. wegzusammenhängende Mengen sind stets zusammenhängend, aber es gibt (auch im \mathbb{R}^2) zusammenhängende Mengen, die nicht wegzusammenhängend sind. Für offene Teilmengen des \mathbb{R}^2 fallen die Begriffe jedoch zusammen. Da wir sie hier nur für offene Mengen benötigen, sprechen wir im Folgenden auch kurz von zusammenhängenden Mengen, wenn wir wegzusammenhängende Mengen meinen.³

Eine offene, zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *Gebiet*. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *beschränkt*, wenn sie in einer hinreichend großen Kreisscheibe enthalten ist, d. h., wenn es einen Punkt $A \in \mathbb{R}^2$ und einen Radius $r > 0$ gibt, mit

$$T \subseteq K(A, r).$$

2.1.3 Streckenzüge und einfache Polygone

Die folgenden Definitionen sind angelehnt an Hilbert (1977), unterscheiden sich von den dortigen aber in einigen Details. Sie sind auf die in den weiteren Abschnitten dargestellten Inhalte genau abgestimmt.

Es seien $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}^2$, so dass die Punkte A_1, A_2, \dots, A_{n-1} paarweise verschieden sind und $A_n \notin \{A_2, \dots, A_{n-1}\}$ ist. Zudem sollen keine drei aufeinanderfol-

²Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine zwei offenen, disjunkten Teilmengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cup V = X$ gibt. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt *zusammenhängend*, wenn sie als topologischer Teilraum mit der Relativtopologie zusammenhängend ist.

³Für eine ausführliche Darstellung des Zusammenspiels der beteiligten Begriffe siehe z. B. von Querenburg (1980), S. 69 ff.

genden Punkte auf einer Geraden liegen, d. h., es gelte für alle $j \in \{2, \dots, n-1\}$

$$A_j \notin \overline{A_{j-1}A_{j+1}}. \quad (2.1)$$

Dann nennen wir

$$A_1A_2 \dots A_n := A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup \dots \cup A_{n-1}A_n$$

einen *Streckenzug*, der A_1 mit A_n verbindet. Die Punkte A_2, \dots, A_{n-1} nennen wir die *Ecken* des Streckenzugs. A_1 und A_n bezeichnen wir als *Endpunkte* des Streckenzugs. Die Bedingung (2.1) könnte man weglassen, es ist jedoch praktisch, diese einzufordern, da dann jeder Eckpunkt auch anschaulich eine Ecke (d. h. einen „Knick“ im Streckenzug) darstellt.

Ein Streckenzug $A_1A_2 \dots A_n$ heißt *einfach*, wenn

$$A_i \overset{\circ}{A}_{i+1} \cap A_j A_{j+1} = \emptyset \quad \text{für } i \neq j$$

gilt. Bis auf die gemeinsamen Endpunkte benachbarter Strecken besitzen also keine zwei Strecken einen gemeinsamen Punkt.

Gilt $A_n = A_1$, so heißt der Streckenzug $A_1 \dots A_n$ *geschlossen*. Ein einfacher, geschlossener Streckenzug wird auch *einfach geschlossen* genannt.

Für einen einfachen, **nicht** geschlossenen Streckenzug $A_1A_2 \dots A_n$ nennen wir den Streckenzug ohne seine Endpunkte, d. h. die Menge

$$A_1A_2 \dots A_n \setminus \{A_1, A_n\},$$

das relative Innere des Streckenzugs.

Ist $A_1 \dots A_n$ ein einfach geschlossener Streckenzug und liegt auch im Punkt A_1 eine „echte Ecke“ vor, d. h., es gilt

$$A_1 \notin \overline{A_{n-1}A_2},$$

dann nennen wir den Streckenzug einen *einfachen Polygonrand* mit den *Ecken* $A_1 (= A_n), A_2, \dots, A_{n-1}$ und den *Seiten* (oder *Seitenstrecken*) $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_1$. Ein einfacher Polygonrand zerlegt die Ebene in genau zwei Gebiete. Eines davon ist beschränkt (vom Polygonrand umschlossen), eines unbeschränkt (siehe Abbildung 2.3).⁴

Definition 2.1. (*Einfaches Polygon*)

Die Vereinigungsmenge eines einfachen Polygonrandes mit dem von ihm umschlossenen Gebiet bezeichnen wir als *einfaches Polygon*. Das umschlossene Gebiet nennen wir *das Innere des Polygons*. Die Ecken und die Seiten des Polygonrandes bezeichnen wir auch als die *Ecken und die Seiten des Polygons*.

⁴Diese höchst plausible Tatsache ist ein Spezialfall des sogenannten *Jordanschen Kurvensatzes*, der wider Erwarten nicht ganz einfach zu beweisen ist. Für eine exakte Formulierung und den Verweis auf eine weitere Quelle, in der der Satz bewiesen wird, siehe z. B. Leßner (2001).

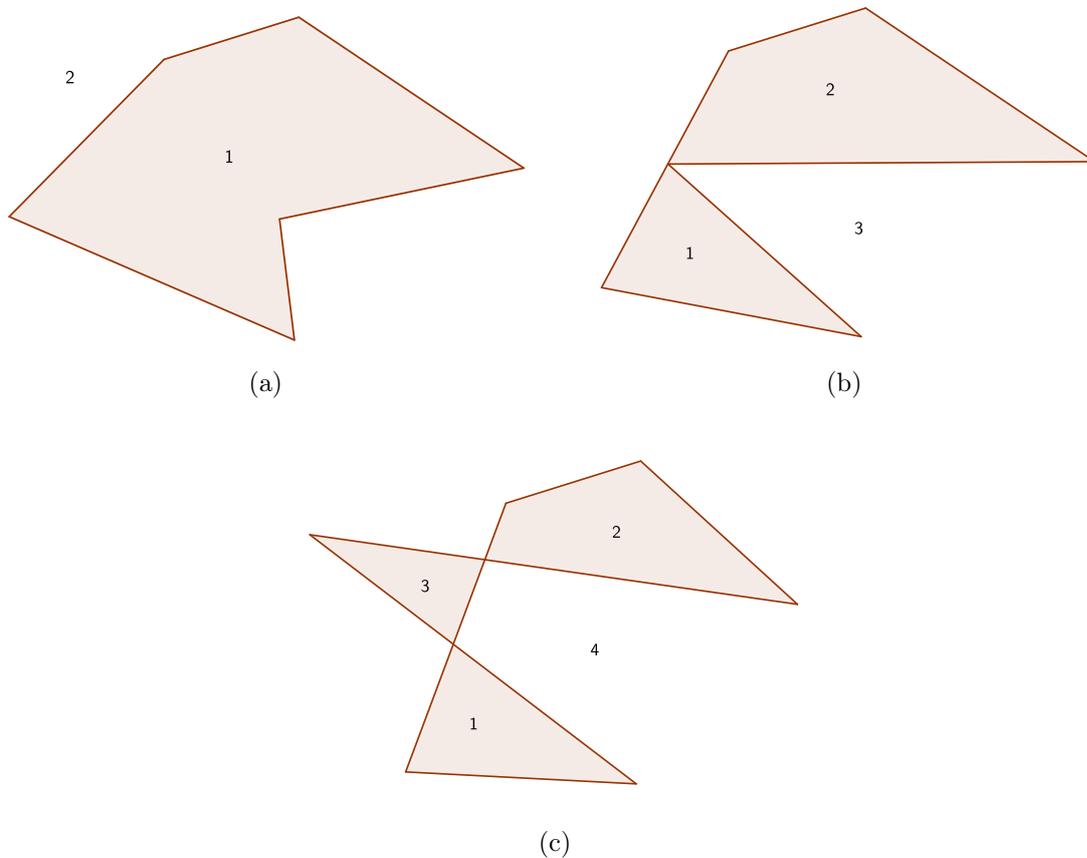


Abb. 2.3: Abbildung (a) zeigt einen einfachen Polygonrand. Die Ebene wird in genau zwei Gebiete zerlegt. Die Abbildungen (b) und (c) zeigen nicht-einfache Polygonränder. Die Ebene wird in drei bzw. vier Gebiete zerlegt.

Bemerkung 2.1. *Das hier definierte Innere eines Polygons P stimmt mit dem oben definierten Inneren der Menge P überein. Ebenso ist der Polygonrand auch gleich der Menge aller Randpunkte der Menge P , so dass wir mit Recht auch vom **Rand des Polygons** sprechen können.*

2.2 Der Satz von Pick und ein klassischer Beweis

Im Folgenden soll der Satz von Pick formuliert und bewiesen werden. Dabei verfolgen wir im Wesentlichen den von Pick (1899) im Originalartikel aufgezeigten Weg mit einer leichten Variation wie sie von Ball (2003) bzw. Varberg (1985) vorgeschlagen wird.

Viele Quellen beweisen den Satz von Pick in einem kartesischen Koordinatensystem, einige erwähnen anschließend, dass eine Verallgemeinerung auf nicht-kartesische Sys-

teme leicht möglich ist.⁵ Wir folgen auch hier Pick (1899), der sein Resultat von vornherein in einem beliebigen Parallelogramm-Gitter formuliert und beweist. Das kartesische Koordinatensystem ist dann lediglich ein Spezialfall.

Wir betrachten ein *Parallelogramm-Gitter* in der Ebene, d. h. ein Gitter aus zwei Systemen äquidistanter paralleler Geraden. Jede Gerade des einen Systems schließt dabei mit jeder Geraden des anderen Systems einen Winkel φ mit $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ ein. Die Systeme sind in sich äquidistant, der Geraden-Abstand des einen Systems kann aber vom Geraden-Abstand des anderen Systems verschieden sein (vgl. Abbildung 2.4). Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Geraden als *Gitterpunkte* und Strecken, deren Endpunkte Gitterpunkte sind, nennen wir *Gitterstrecken*. Gitterstrecken, die auf einer Geraden eines der Parallelsysteme verlaufen, heißen *Hauptgitterstrecken*.

Einen Streckenzug $A_1A_2 \dots A_n$ nennen wir *Gitterstreckenzug*, falls A_1, A_2, \dots, A_n ausschließlich Gitterpunkte sind. Ein einfaches Polygon, dessen Eckpunkte ausschließlich Gitterpunkte sind, nennen wir *einfaches Gitterpolygon*. Das kleinstmögliche Gitterviereck ist eine „Masche“ M des Gitters (vgl. Abbildung 2.4).

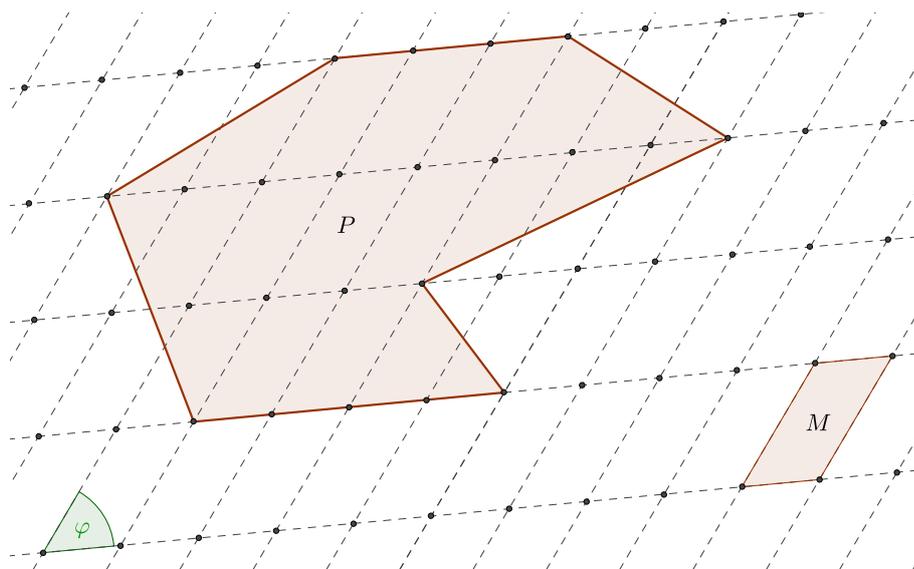


Abb. 2.4: Zwei Systeme äquidistanter Geraden bilden ein Parallelogramm-Gitter. Ein Gitterpolygon P besitzt ausschließlich Gitterpunkte als Eckpunkte. Die Fläche einer Masche M dient als Einheit für das Flächenmaß μ .

Wir verwenden die Fläche einer solchen Masche als Einheit für ein *Flächenmaß* μ . Damit meinen wir, dass

$$\mu(M) = 1$$

gilt und dass $\mu(T)$ für jede messbare Menge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ angibt, wie viele Maschen in

⁵Man konsultiere hierzu die in Anhang B gegebene Literaturübersicht.

der Menge T aufgehen.⁶

In der folgenden Definition werden Bezeichnungen für die Mengen der verschiedenen Gitterpunktarten eines einfachen Polygons und deren Mächtigkeiten festgelegt.

Definition 2.2. Für ein einfaches Gitterpolygon P sei

- I_P die Menge der Gitterpunkte, die im **Inneren** von P liegen,
- R_P die Menge der Gitterpunkte, die auf dem **Rand** von P liegen,
- E_P die Menge aller **Eckpunkte** von P ,
- $S_P = R_P \setminus E_P$ die Menge aller Gitterpunkte, die auf den **Seiten** von P liegen und keine Eckpunkte sind,
- $T_P = I_P \cup R_P$ die **Menge aller Gitterpunkte**, die in P enthalten sind.

Des Weiteren seien

$$i_P, r_P, e_P, s_P, t_P$$

die Mächtigkeiten dieser Mengen in der oben genannten Reihenfolge, d. h. **die Anzahlen der verschiedenen Punktsorten**.

Nun können wir den Satz von Pick formulieren.

Satz 2.1. (*Satz von Pick, 1899*)

Für jedes einfache Gitterpolygon P gilt

$$\mu(P) = i_P + \frac{r_P}{2} - 1.$$

Beweis. Für jedes einfache Gitterpolygon P definieren wir die **Pick-Zahl von P** durch

$$\pi(P) := i_P + \frac{r_P}{2} - 1.$$

Wir weisen zunächst nach, dass die Pick-Zahl additiv ist, d. h.: Wenn wir ein einfaches Gitterpolygon P durch einen einfachen Gitterstreckenzug, dessen relatives Inneres im Inneren von P enthalten ist, in zwei kleinere Polygone S und T zerlegen (vgl. Abbildung 2.5), so gilt

$$\pi(P) = \pi(S) + \pi(T).$$

⁶Bezeichnet λ das zweidimensionale Lebesgue-Maß, so ist $\mu := \frac{1}{\lambda(M)} \cdot \lambda$. Für eine ausführliche Darstellung zur Konstruktion des Lebesgue-Maßes und zu seinen Eigenschaften (z. B. Translations- und Bewegungsinvarianz) siehe etwa Elstrod (2005).

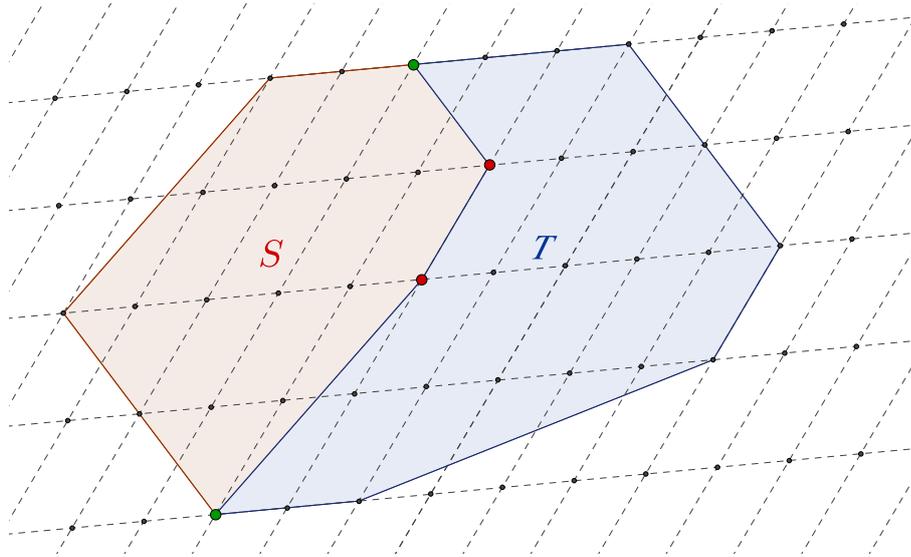


Abb. 2.5: Ein Gitterpolygon P wird durch einen Gitterstreifenzug in zwei Polygone S, T zerlegt. Eine gewisse Anzahl k an Gitterpunkten befindet sich auf dem trennenden Streckenzug im Inneren von P (rot hervorgehoben).

Es sei k die Anzahl der Gitterpunkte im relativen Inneren des trennenden Streckenzugs. Dann gilt

$$i_P = i_S + i_T + k \quad \text{und} \quad r_P = r_S + r_T - 2k - 2.$$

Die Formel für r_P kommt folgendermaßen zustande (vgl. Abbildung 2.5): Bei r_S werden die k Gitterpunkte auf dem Rand von S mitgezählt. Bei r_T werden diese k Punkte ein weiteres Mal mitgezählt. Für das Polygon P sind dies aber keine Randpunkte, so dass von $r_S + r_T$ wieder $2k$ subtrahiert werden muss. Zudem werden die beiden Endpunkte (grün hervorgehoben) des trennenden Streckenzugs zunächst doppelt gezählt (einmal bei r_S und ein zweites Mal bei r_T); es resultiert die -2 am Ende. Nun folgt

$$\begin{aligned} i_P + \frac{r_P}{2} - 1 &= i_S + i_T + k + \frac{r_S + r_T - 2k - 2}{2} - 1 \\ &= \left(i_S + \frac{r_S}{2} - 1 \right) + \left(i_T + \frac{r_T}{2} - 1 \right), \end{aligned}$$

also $\pi(P) = \pi(S) + \pi(T)$.

Nun verwenden wir die Additivität der Pick-Zahl, um den Beweis abzuschließen. Für eine einzelne Masche M gilt

$$\pi(M) = 0 + \frac{4}{2} - 1 = 1 = \mu(M).$$

Mit der Additivität von π folgt daraus, dass Pick-Zahl und Flächeninhalt für alle Polygone, die sich als Vereinigung von vollständigen Maschen darstellen lassen, übereinstimmen.

Insbesondere gilt dies für von Hauptgitterstrecken berandete Parallelogramme. Zerlegt man ein solches Parallelogramm P durch eine Diagonale in zwei Dreiecke D_1, D_2 (vgl. Abbildung 2.6 (a)), so stimmen diese in der Anzahl ihrer inneren und in der Anzahl ihrer Randgitterpunkte überein, was man sich z. B. folgendermaßen klarmacht: Wir können D_1 und D_2 durch eine 180° -Drehung um C und eine anschließende Verschiebung, die C auf A abbildet, ineinander überführen. Bei beiden Abbildungen geht das Parallelogramm-Gitter in sich über, die Anzahl der inneren bzw. Randgitterpunkte bleibt also jeweils unverändert.⁷ Daher gilt $\pi(D_1) = \pi(D_2)$.

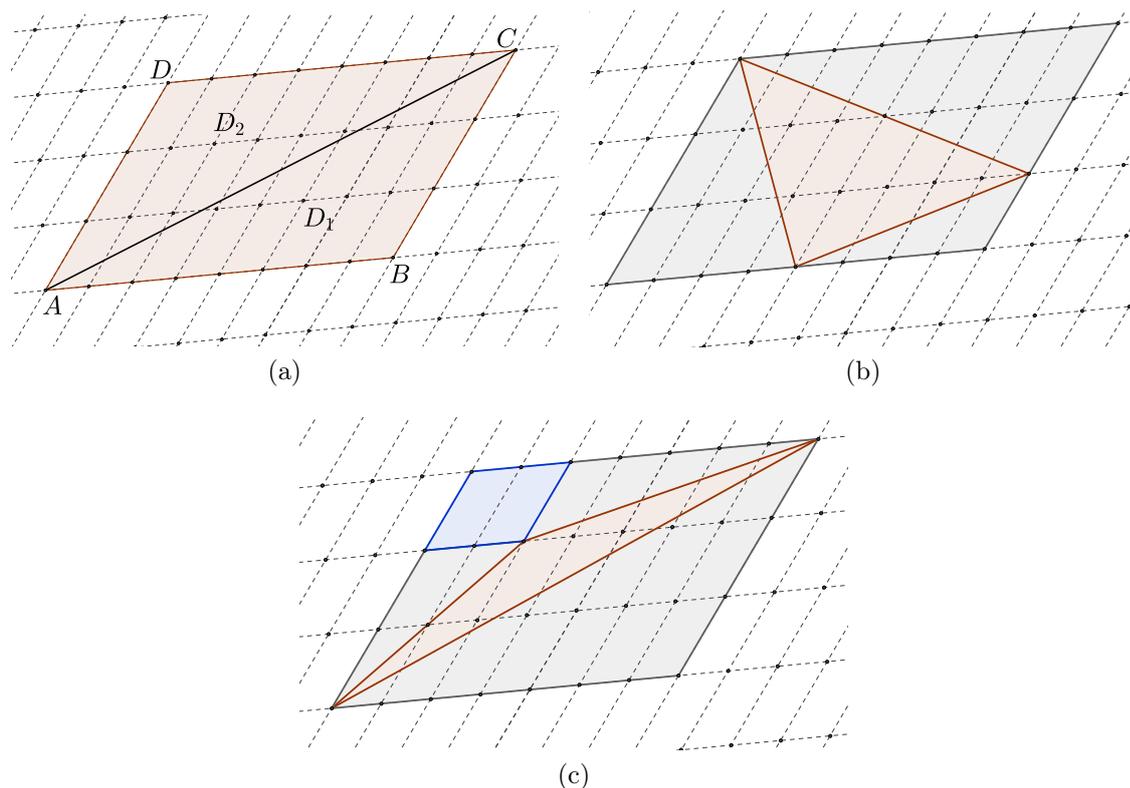


Abb. 2.6: (a) Zerlegung eines von Hauptgitterstrecken berandeten Parallelogramms in zwei Dreiecke; (b), (c) Ergänzung eines beliebigen Gitterdreiecks zu einem Parallelogramm

Mit der Additivität von π folgt nun die Übereinstimmung von Pick-Zahl und Flächeninhalt für D_1 bzw. D_2 folgendermaßen: Es gilt

$$2\pi(D_1) = \pi(D_1) + \pi(D_2) = \pi(P) = \mu(P),$$

also

$$\pi(D_1) = \frac{1}{2}\mu(P) = \mu(D_1).$$

⁷Es reicht nicht als Argument, dass die beiden Dreiecke zueinander kongruent sind. Man findet z. B. im kartesischen Gitter leicht Beispiele kongruenter Gitter-Dreiecke, die weder in der Anzahl ihrer inneren noch in der Anzahl ihrer Randgitterpunkte übereinstimmen. Siehe z. B. Fraedrich (1980), S. 24.

Ein beliebiges Gitterdreieck lässt sich durch Parallelogramme und Dreiecke, die zwei Hauptgitterstrecken als Seiten haben, zu einem Parallelogramm ergänzen, das von Hauptgitterstrecken berandet wird (vgl. Abbildung 2.6 (b) bzw. (c)). Da Pick-Zahl und Flächeninhalt sowohl für die ergänzenden Dreiecke als auch für das Parallelogramm übereinstimmen, folgt diese Übereinstimmung auch für das ergänzte Dreieck (wegen der Additivität von π).

Schlussendlich können wir ein beliebiges, einfaches Gitterpolygon in Dreiecke zerlegen und der Beweis ist mithilfe der Additivität von π abgeschlossen. \square

2.3 Diskussion des Beweises und Beweisalternativen

Wir wollen hier zunächst eine fachwissenschaftliche Diskussion des obigen Beweises und verschiedener Alternativen führen. Eine didaktische Diskussion findet in Kapitel 3 statt.

2.3.1 Ein möglicher Fehlschluss

Wir haben einen eleganten Beweis gesehen, der sich in verschiedenen Quellen⁸ in jeweils leichten Variationen finden lässt. Wie stets bei Beweisen, die mit der Anschauung argumentieren, ist Vorsicht geboten. So findet sich z. B. bei Fraedrich (1980), aber auch schon im Originalbeweis bei Pick (1899), folgende Verkürzung der letzten beiden Beweisschritte, die meines Erachtens nicht legitim ist: Nach der Bestätigung der Pick-Formel für achsenparallele Parallelogramme und Dreiecke, die zwei Hauptgitterstrecken als Seitenstrecken besitzen, wird direkt ein beliebiges (einfaches⁹) Polygon betrachtet und folgendermaßen argumentiert: Ein einfaches Polygon könne stets zu einem achsenparallelen Parallelogramm ergänzt werden, und diese Ergänzung könne ausschließlich mithilfe von Dreiecken, die zwei Hauptgitterstrecken als Seitenstrecken besitzen, und mithilfe von achsenparallelen Parallelogrammen erfolgen (vgl. Abbildung 2.7 (a)). Dass dies im Allgemeinen nicht möglich ist, macht man sich jedoch z. B. an Abbildung 2.7 (b) klar; der Umweg über beliebige Dreiecke ist notwendig.

Der oben durchgeführte Beweis des Satzes von Pick ist sehr elegant und verwendet als zentrales Argument die Additivität der Pick-Zahl. Ein weniger verbreiteter Beweisansatz erfolgt über eine Reinterpretation der Pick-Zahl und soll im folgenden Abschnitt vorgestellt werden.

⁸vgl. Literaturübersicht in Anhang B

⁹Pick (1899) spricht nicht von einfachen Polygonen. Es ist nicht klar, ob diese Eigenschaft in der (im Artikel nicht angegebenen) Definition eines Polygons gefordert wird.

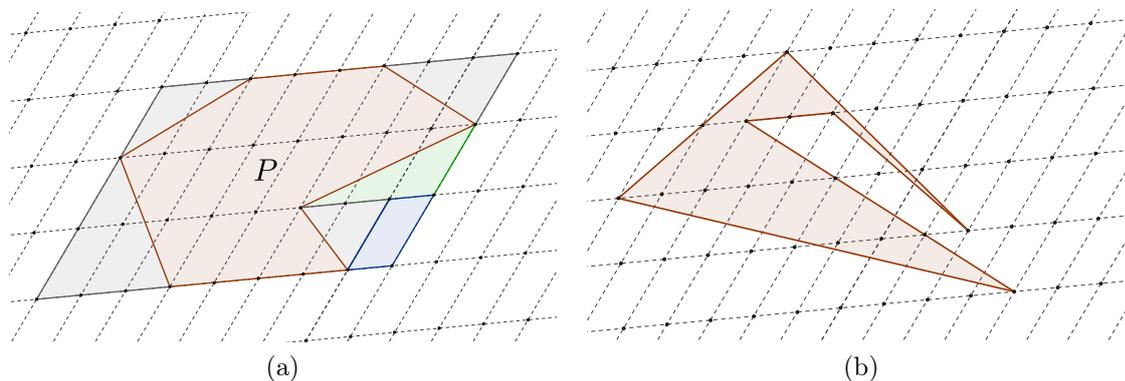


Abb. 2.7: Die Ergänzung eines beliebigen, einfachen Polygons zu einem achsenparallelen Parallelogramm nur unter Verwendung von achsenparallelen Parallelogrammen und von Dreiecken, die zwei Hauptgitterstrecken als Seitenstrecken besitzen, ist nicht in jedem Fall möglich.

2.3.2 Eine alternative Interpretation der Pick-Zahl

Ball (2003) weist auf eine anschauliche Interpretation der Pick-Zahl hin, die auf Varberg (1985) zurückgehe. In der Tat erläutert bereits Pick (1899) diese Interpretation und verwendet sie, um sein Resultat zu verallgemeinern.¹⁰ Wir betrachten zu jedem inneren oder Randgitterpunkt X eines einfachen Polygons P eine hinreichend kleine Kreisscheibe $K(X, r)$ ¹¹ um X und weisen diesem ein Gewicht $w(X)$ zu. Dabei gebe $w(X)$ den Anteil von $K(X, r)$ an, der innerhalb von P liegt, d. h. es sei

- $w(X) = 1$, falls $X \in I_P$;
- $w(X) = \frac{1}{2}$, falls $X \in S_P$ (d. h. X ist Randpunkt und kein Eckpunkt von P);
- $w(X) = \frac{\alpha}{360^\circ}$, falls $X \in E_P$ und α der Innenwinkel von P im Punkt X ist.

Ein Beispiel ist in Abbildung 2.8 dargestellt.

Man stellt nun leicht fest, dass die Summe der Gewichte aller inneren und Randgitterpunkte eines Polygons mit dessen Pick-Zahl übereinstimmt. Wir formulieren dies als Lemma.

¹⁰Es sei angemerkt, dass Pick (1899) die besagte Interpretation sehr knapp und wenig formal ausführt.

¹¹Der Radius r sei so klein gewählt, dass $K(X, r)$ nur von Randstrecken geschnitten wird, auf denen X liegt.

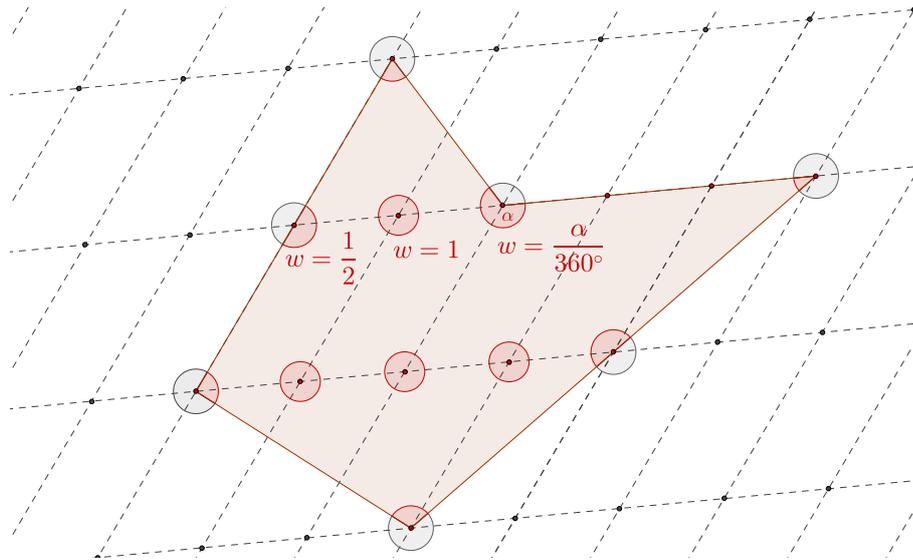


Abb. 2.8: Die „zu Kreisscheiben aufgestuften“ Gitterpunkte eines Polygons P mit ihren in P befindlichen Anteilen.

Lemma 2.1. *Es sei P ein einfaches Gitterpolygon. Dann gilt*

$$\sum_{X \in T_P} w(X) = i_P + \frac{r_P}{2} - 1. \quad (2.2)$$

Beweis. Für jeden inneren Gitterpunkt X von P gilt $w(X) = 1$, also

$$\sum_{X \in I_P} w(X) = i_P.$$

Für jeden Gitterpunkt, der auf einer Seitenstrecke von P liegt und kein Eckpunkt ist, gilt $w(X) = \frac{1}{2}$, also

$$\sum_{X \in S_P} w(X) = \frac{s_P}{2}.$$

Es seien nun X_1, X_2, \dots, X_{e_P} die Eckpunkte von P und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{e_P}$ die zugehörigen Innenwinkel. Da die Innenwinkelsumme eines n -Ecks $(n - 2) \cdot 180^\circ$ beträgt, gilt

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{e_P} = (e_P - 2) \cdot 180^\circ.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_{X \in E_P} w(X) &= w(X_1) + w(X_2) + \dots + w(X_{e_P}) \\
 &= \frac{\alpha_1}{360^\circ} + \frac{\alpha_2}{360^\circ} + \dots + \frac{\alpha_{e_P}}{360^\circ} \\
 &= \frac{(e_P - 2) \cdot 180^\circ}{360^\circ} \\
 &= \frac{e_P}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

Schlussendlich erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \sum_{X \in T_P} w(X) &= \sum_{X \in I_P} w(X) + \sum_{X \in S_P} w(X) + \sum_{X \in E_P} w(X) \\
 &= i_P + \frac{s_P}{2} + \frac{e_P}{2} - 1 \\
 &= i_P + \frac{r_P}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

□

Ein großer Vorteil dieser neuen Interpretation der Pick-Zahl ist die Tatsache, dass die Additivität nun sehr leicht einzusehen ist: Zerlegen wir ein Polygon P wie gehabt durch einen Gitterstreckenzug in zwei kleinere Teilpolygone, so setzt sich der innerhalb von P liegende Anteil der Kreisscheibe $K(X, r)$ eines Punktes X stets additiv aus den in den Teilpolygone befindlichen Anteilen zusammen, wie man in Abbildung 2.9 leicht erkennt.

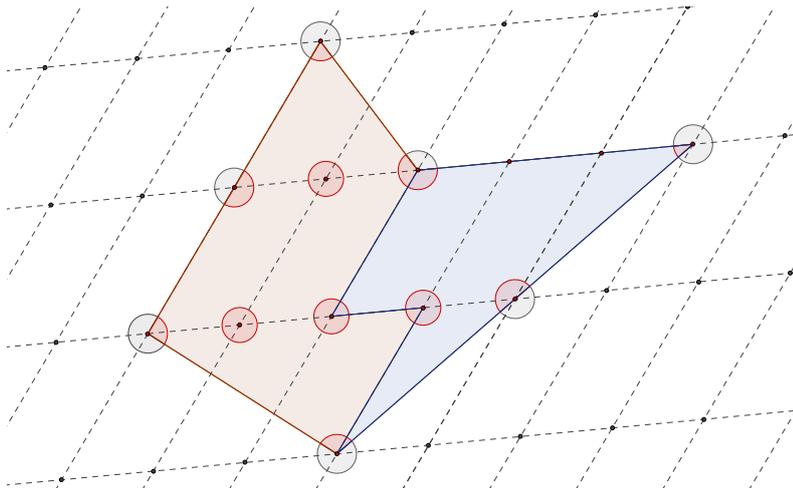


Abb. 2.9: Die Neu-Interpretation der Pick-Zahl bringt deren Additivität automatisch mit sich.

Um den Satz von Pick aus Lemma 2.1 zu erhalten, kann nun wie zuvor vorgegangen werden. Man prüft die Identität

$$\mu(M) = \sum_{X \in T_M} w(X)$$

für eine Masche M : Die Gewichte der vier Eckpunkte addieren sich zu 1, da die Innenwinkelsumme der Masche 360° ist. Da eine Masche keine weiteren Gitterpunkte enthält und $\mu(M) = 1$ gilt, ist die Formel bestätigt. Nun schließt man von Maschen auf achsenparallele Parallelogramme, von diesen auf Dreiecke, die zwei Hauptgitterstrecken als Seiten besitzen, und schließlich über beliebige Dreiecke auf einfache Polygone.

Im folgenden Abschnitt wird ein weiterer Zugang zum Satz von Pick vorgestellt, der Bezüge zur Graphentheorie aufzeigt.

2.3.3 Zugang über primitive Dreiecke

Wir nennen ein Gitterdreieck *primitiv*, wenn es genau drei Randgitterpunkte und keine inneren Gitterpunkte besitzt. Zur Vereinfachung sagen wir auch kurz „primitives Dreieck“ anstelle von „primitives Gitterdreieck“. Abbildung 2.10 zeigt Beispiele.

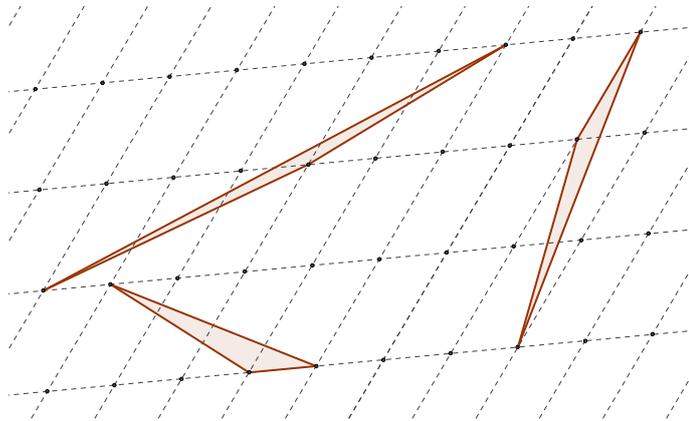


Abb. 2.10: Drei Beispiele für primitive Dreiecke. Alle Dreiecke dieser Art besitzen nach dem Satz von Pick den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$.

Hat man den Satz von Pick zur Verfügung, so ist klar, dass primitive Dreiecke stets den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzen. Anders herum kann diese Tatsache der entscheidende Schritt in einem von der Additivität der Pick-Zahl unabhängigen Beweisgang sein. Ausgangspunkt ist das folgende Lemma.

Lemma 2.2. *Jedes einfache Gitterpolygon P lässt sich in primitive Dreiecke zerlegen, d. h., es existieren primitive Dreiecke D_1, \dots, D_n mit paarweise disjunktem Inneren, so dass $P = D_1 \cup \dots \cup D_n$ gilt.¹²*

¹²Wir verwenden die Sprechweise „zerlegen in“ von nun an stets in diesem Sinne.

Beweis. Wir führen eine Induktion über die Gesamt-Anzahl der Gitterpunkte (innere und Randgitterpunkte) eines Polygons durch. Im Induktionsanfang betrachten wir ein einfaches Gitterpolygon mit drei Gitterpunkten. Hier ist nichts zu tun, denn es handelt sich bereits um ein primitives Dreieck.

Es sei nun P ein Gitterpolygon mit $t_P \geq 4$ Gitterpunkten. Wir setzen voraus, dass sich alle Gitterpolygone mit einer kleineren Anzahl an Gitterpunkten in primitive Dreiecke zerlegen lassen. Falls P ein Dreieck ABC ist, so besitzt dieses mindestens einen Gitterpunkt X , der kein Eckpunkt ist. Handelt es sich hierbei um einen inneren Punkt, so zerlegen wir P durch die Strecken AX, BX, CX in drei Dreiecke mit einer geringeren Gitterpunkt-Anzahl (vgl. Abbildung 2.11 (a)). Handelt es sich bei X um einen Randpunkt, so liegt dieser auf einer Seite, etwa auf AB . Wir verbinden X mit C und erhalten so eine Zerlegung in zwei Dreiecke mit einer geringeren Gitterpunkt-Anzahl (vgl. Abbildung 2.11 (b)).

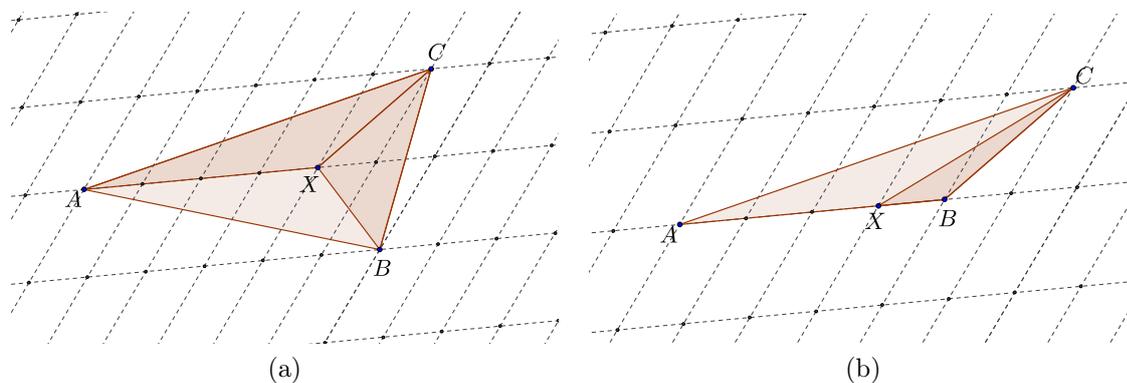


Abb. 2.11: Zerlegung von Dreiecken in Teildreiecke mit einer geringeren Anzahl an Gitterpunkten

In beiden Fällen lassen sich die Teildreiecke nach Induktionsvoraussetzung in primitive Dreiecke zerlegen, so dass auch das Ausgangsdreieck in primitive Dreiecke zerlegbar ist.

Betrachten wir abschließend den Fall, dass P mindestens 4 Eckpunkte besitzt. Als *innere Diagonale* von P bezeichnen wir eine Strecke zwischen zwei Eckpunkten von P , deren relatives Inneres im Inneren von P enthalten ist. Wir werden nachweisen, dass eine solche existiert¹³. Dies schließt den Beweis ab, denn eine innere Diagonale zerlegt P in zwei Teilpolygone mit geringerer Gitterpunkt-Anzahl, die sich nach Induktionsvoraussetzung in primitive Dreiecke zerlegen lassen.

Es gibt einen Eckpunkt A von P , in dem P einen Innenwinkel besitzt, der kleiner als 180° ist. Andernfalls wäre die Innenwinkelsumme von P größer oder gleich $e_P \cdot 180^\circ$,

¹³ Die Argumentation ist angelehnt an Aigner/Ziegler (2001) bzw. Honsberger (1970). Letzterer gibt an, dass das Argument ursprünglich aus Knopp (1945), S. 17/18 stammt.

was absurd ist. Es seien B, C die direkt zu A benachbarten Eckpunkte von P (vgl. Abbildung 2.12).

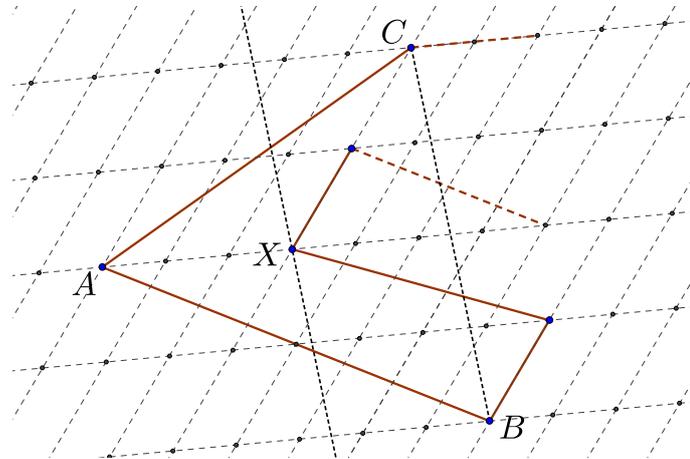


Abb. 2.12: Finden einer inneren Diagonalen

Falls kein Eckpunkt von P im Dreieck ABC liegt, ist BC eine innere Diagonale. Falls doch, so verschieben wir eine zu \overline{BC} parallele Gerade g in Richtung A bis „das letzte Mal“ ein Eckpunkt von P auf g liegt. Es können durchaus mehrere Eckpunkte auf g liegen. Wir wählen einen beliebigen, etwa X . Die gesuchte innere Diagonale ist AX , der Beweis ist abgeschlossen. \square

In der Regel gibt es viele verschiedene Möglichkeiten, ein Gitterpolygon in primitive Dreiecke zu zerlegen (vgl. Abbildung 2.13).

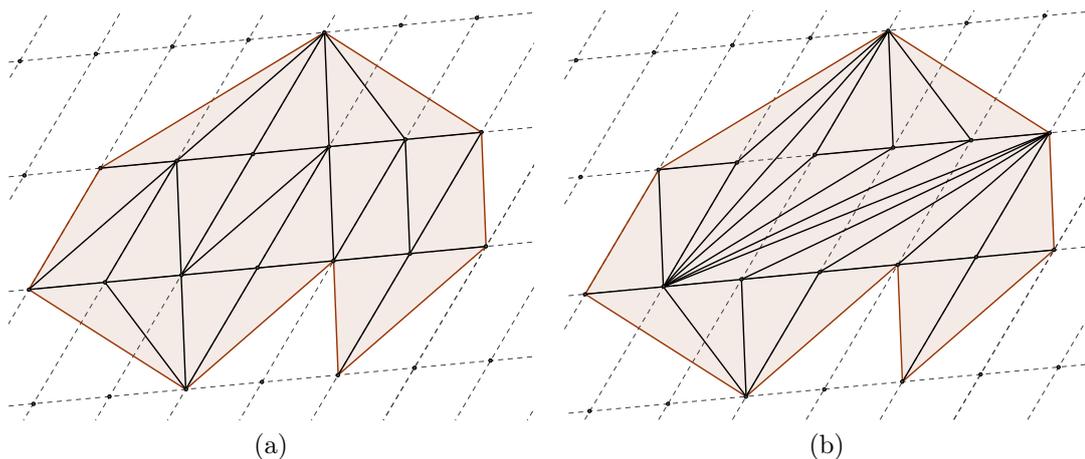


Abb. 2.13: Zwei unterschiedliche Zerlegungen eines Gitterpolygons in primitive Dreiecke. Beide Zerlegungen verwenden 22 Dreiecke. Eine Zerlegung mit einer anderen Anzahl ist nicht möglich.

Erstaunlicherweise¹⁴ ist die Anzahl der primitiven Dreiecke unabhängig von der Art der Zerlegung. Dies wird durch das folgende Lemma sichergestellt. Man beachte, dass das Lemma ohne die Verwendung eines Gitters auskommt und für beliebige einfache Polygone im \mathbb{R}^2 Gültigkeit besitzt. Der Beweis, bei welchem wir einer Idee von DeTemple/Robertson (1974)¹⁵ folgen, verwendet die *Formel von Euler für ebene, zusammenhängende Graphen* (siehe Abschnitt A.2).

Lemma 2.3. *Es sei P ein einfaches Polygon, \mathcal{R} eine endliche Menge von Randpunkten und \mathcal{I} eine endliche Menge von inneren Punkten von P . Weiter sei $\rho := |\mathcal{R}|$, $\iota := |\mathcal{I}|$. P sei so in n Dreiecke D_1, \dots, D_n zerlegt, dass gilt:*

1. *Für alle $X \in \mathcal{R} \cup \mathcal{I}$ existiert ein $i \leq n$, so dass gilt: X ist Eckpunkt von D_i .*
2. *Für alle $X \in \mathcal{R} \cup \mathcal{I}$ und $i \leq n$ gilt: Ist $X \in D_i$, so ist X Eckpunkt von D_i .*

Dann folgt

$$n = 2\iota + \rho - 2.$$

Bemerkung 2.2. *Voraussetzung 1 des Lemmas bedeutet, dass alle für die Mengen \mathcal{R}, \mathcal{I} gewählten Gitterpunkte bei der Zerlegung verwendet werden. Voraussetzung 2 bedeutet, dass alle gewählten Gitterpunkte ausschließlich als Dreiecks-Eckpunkte fungieren (vgl. Abbildung 2.14).*

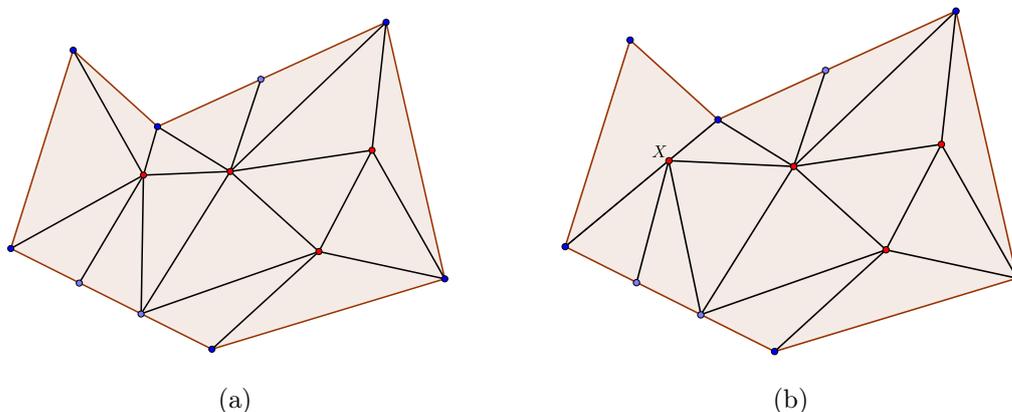


Abb. 2.14: (a) Die Zerlegung erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas. Folglich ist die Anzahl der Dreiecke $n = 2 \cdot 4 + 9 - 2 = 15$. (b) Der Punkt X wird zur Zerlegung verwendet, liegt aber auf der Seitenstrecke eines Dreiecks. Die Zerlegung verletzt also die zweite Voraussetzung des Lemmas.

¹⁴Oder auch nicht: Weiß man z. B. bereits, dass primitive Dreiecke stets den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzen, so ist dies klar.

¹⁵ DeTemple/Robertson (1974) verwenden allerdings das Gitter.

Beweis. (von Lemma 2.3)

Wir betrachten das nach den geforderten Regeln in n Dreiecke zerlegte, einfache Polygon P und fassen die gesamte Figur als zusammenhängenden, ebenen Graphen G auf. Es sei v die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen von G . Dann gilt $f = n + 1$ (das äußere Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus P$ zählt ebenfalls als Fläche von G) und

$$v = \iota + \rho.$$

Jede Kante im Inneren von P gehört genau zwei Dreiecken an, jede Kante auf dem Rand von P gehört genau einem Dreieck an. Die Anzahl der Kanten von G auf dem Rand von P stimmt mit der Anzahl ρ der zur Zerlegung verwendeten Randpunkte überein. Der Ausdruck $3n + \rho$ „zählt also jede Kante doppelt“, d. h.

$$3n + \rho = 2k.$$

Die Formel von Euler besagt

$$v - k + f = 2.$$

Wir setzen unsere Informationen über v , k und f ein und erhalten

$$\underbrace{(\iota + \rho)}_{=v} - \underbrace{\frac{3n + \rho}{2}}_{=k} + \underbrace{(n + 1)}_{=f} = 2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$n = 2\iota + \rho - 2.$$

□

Korollar 2.1. *Zerlegt man ein einfaches Gitterpolygon P auf beliebige Weise in n primitive Dreiecke, so gilt*

$$n = 2i_P + r_P - 2.$$

Beweis. Es sei P ein einfaches Gitterpolygon, welches in n primitive Dreiecke zerlegt ist. Dann wurden sämtliche Gitterpunkte auf dem Rand und im Inneren von P als Ecken „verwendet“ und die Zerlegung erfüllt offenbar die Voraussetzungen von Lemma 2.3. Es folgt die Behauptung. □

Können wir unabhängig nachweisen, dass jedes primitive Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzt, folgt der Satz von Pick nun unmittelbar, wie hier kurz skizziert sei: Wir zerlegen ein gegebenes, einfaches Gitterpolygon P in n primitive Dreiecke. Jedes dieser Dreiecke hat die Fläche $\frac{1}{2}$ und es gilt $n = 2i_P + r_P - 2$. Es folgt

$$\mu(P) = \frac{1}{2} \cdot n = i_P + \frac{r_P}{2} - 1.$$

Das folgende Lemma schließt die Lücke. Der Beweis ist elementar und beruht ebenfalls auf Korollar 2.1.

Lemma 2.4. Jedes primitive Dreieck besitzt den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$.

Beweis. Es sei ABC ein primitives Dreieck. Wir können dieses stets unter ausschließlicher Verwendung von achsenparallelen Parallelogrammen und Dreiecken, die zwei Hauptgitterstrecken als Seitenstrecken besitzen, zu einem achsenparallelen Parallelogramm P ergänzen (vgl. Abbildung 2.15).

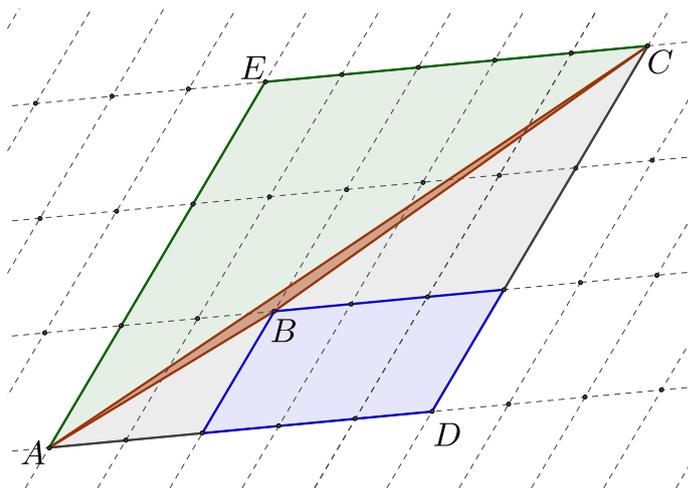


Abb. 2.15: Das primitive Dreieck ABC wird zu einem achsenparallelen Parallelogramm $ADCE$ ergänzt.

Da eine Masche des Gitters den Flächeninhalt 1 besitzt, haben alle zur Ergänzung verwendeten Figuren Flächenmaße aus $\frac{1}{2}\mathbb{N}$. Weil $\mu(P)$ ganzzahlig ist, besitzt ABC also mindestens den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$.

Es sei nun a die Anzahl der Gitterpunkte auf AD und b die Anzahl der Gitterpunkte auf DC . Es folgt $\mu(P) = (a-1)(b-1)$. Außerdem gilt

$$i_P = (a-2)(b-2) \quad \text{und} \quad r_P = 2(a-1) + 2(b-1).$$

Wir zerlegen P in primitive Dreiecke D_1, \dots, D_n (eines davon ist ABC). Nach Lemma 2.1 gilt $n = 2i_P + r_P - 2$. Es folgt

$$\begin{aligned} n &= 2(a-2)(b-2) + 2(a-1) + 2(b-1) - 2 \\ &= 2(a-1)(b-1) \\ &= 2\mu(P), \end{aligned}$$

also $\mu(P) = \frac{1}{2}n$. Wir wissen bereits, dass $\mu(D_i) \geq \frac{1}{2}$ für alle $i \leq n$ gilt. Dies impliziert

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^n \mu(D_i) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n. \quad (2.3)$$

Da wir nachgewiesen haben, dass in (2.3) Gleichheit vorliegt, folgt $\mu(D_i) = \frac{1}{2}$ für alle $i \leq n$, insbesondere $\mu(ABC) = \frac{1}{2}$. \square

Hinweis

Wir haben in diesem Abschnitt als entscheidendes Hilfsmittel zur Herleitung des Satzes von Pick die Formel von Euler verwendet. Es sei darauf hingewiesen, dass man auch anders herum die Formel von Euler aus dem Satz von Pick herleiten kann, d. h., dass die Sätze von Euler und Pick äquivalent zueinander sind. Die hier nicht durchgeführte Richtung ist nicht kompliziert und findet sich etwa in DeTemple/Robertson (1974).

Die Formel von Pick folgt aus Minkowskis Satz über konvexe Körper

Es gibt einen weiteren interessanten Weg einzusehen, dass primitive Dreiecke stets den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzen. Murty/Thain (2007) zeigen auf, wie der Satz von Pick aus dem Satz von Minkowski über konvexe Körper folgt.

Der betreffende Satz macht eine Aussage über konvexe Körper im \mathbb{R}^n für beliebige Dimension n , wir benötigen hier aber nur den Spezialfall $n = 2$. Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, falls gilt:

$$\forall X, Y \in C : XY \subseteq C.$$

Wir nennen C *ursprungs-symmetrisch*, wenn aus $X \in C$ folgt, dass auch $-X \in C$ gilt.

Satz 2.2. (*Minkowskis Satz über konvexe Körper, Spezialfall für Dimension 2*)

Es sei $C \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, ursprungs-symmetrisches und konvexes Gebiet mit $\mu(C) > 4$. Dann enthält C mindestens einen vom Koordinatenursprung verschiedenen Gitterpunkt.

Für eine allgemeine Version des Satzes von Minkowski sowie für einen Beweis siehe etwa Murty/Thain (2007) oder für eine umfassende Darstellung und Einführung in die Konvexitäts-Theorie Barvinok (2002). Letzterer hebt die Bedeutung des Satzes von Minkowski hervor: „It [Minkowski’s Convex Body Theorem] stands along with Helly’s Theorem as one of the most glorious results in finite-dimensional convexity.“ (Barvinok (2002), S. 293)

Beweis. (Alternativbeweis von Lemma 2.4)

Es sei ABC ein primitives Dreieck. Verschieben wir ABC so, dass B auf den Ursprung O abgebildet wird, verändern wir den Flächeninhalt nicht. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass B im Koordinatenursprung liegt. Wir spiegeln nun A an M_{BC} , B an M_{AC} sowie C an M_{AB} und erhalten die Bildpunkte A', B', C' in der entsprechenden Reihenfolge (siehe Abbildung 2.16).

Weil B' Bildpunkt von B unter der Spiegelung an M_{AC} ist, liegt M_{AC} auf BB' und halbiert diese Diagonale des Vierecks $ABCB'$. Die zweite Diagonale AC wird

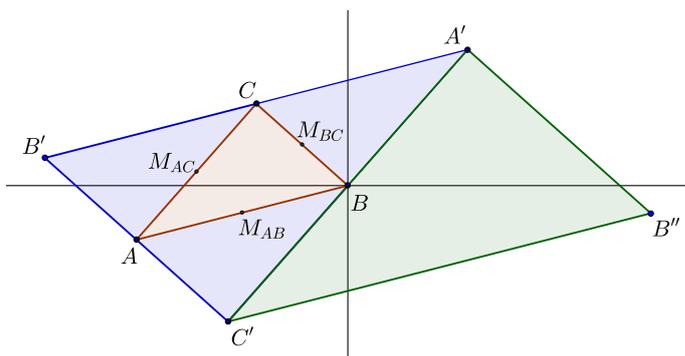


Abb. 2.16: Das Dreieck $A'B'C'$ besitzt keine Gitterpunkte in seinem Inneren. Das Parallelogramm $C'B''A'B'$ besitzt als einzigen inneren Gitterpunkt den Koordinatenursprung.

per Definition ebenfalls von M_{AC} halbiert. Folglich ist $ABCB'$ ein Parallelogramm. Ebenso sieht man ein, dass die Vierecke $C'BCA$ und $ABA'C$ Parallelogramme sind.

Nun folgt $\overline{B'C} \parallel \overline{AB}$ und $\overline{AB} \parallel \overline{CA'}$, also $\overline{B'C} \parallel \overline{CA'}$. Die Punkte B', C und A' liegen also auf einer Geraden. Ebenso sieht man ein, dass A auf $B'C'$ und B auf $A'C'$ liegt.

Das Dreieck ACB' ist das Bild von ABC unter der Punktspiegelung an M_{AC} . Die Punktspiegelung überführt das Gitter in sich, denn wir können sie als Hintereinanderausführung der Drehung um C um 180° und der Verschiebung, die C auf B' abbildet, auffassen. Weil ABC primitiv ist, ist also auch ACB' primitiv. Analog können wir einsehen, dass die Dreiecke $C'BA$ und $BA'C$ primitiv sind.

Folglich enthält das Dreieck $A'B'C'$ keine inneren Gitterpunkte und auf den Seitenstrecken nur die Gitterpunkte A, B, C . Weil $C'BCA$ und $ABA'C$ Parallelogramme sind, gilt außerdem

$$|BC'| = |AC| = |BA'|.$$

Also ist $B = M_{A'C'}$. Wir spiegeln B' an B und erhalten den Bildpunkt B'' . Das Viereck $C'B''A'B'$ ist durch Punktspiegelung am Koordinatenursprung entstanden und folglich ein ursprungs-symmetrisches Parallelogramm (was wir wie oben einsehen können). Daher ist es konvex und sein Inneres enthält außer dem Koordinatenursprung keinen Gitterpunkt. Nach dem Satz von Minkowski ist sein Flächeninhalt kleiner oder gleich 4. Nach Konstruktion besteht $C'B''A'B'$ aus 8 Kopien von ABC , so dass

$$\mu(ABC) \leq \frac{1}{2}$$

folgt. Die umgekehrte Ungleichung kann etwa wie im Beweis oben leicht eingesehen werden, so dass wir $\mu(ABC) = \frac{1}{2}$ erhalten. \square

2.4 Eine allgemeinere Version des Satzes von Pick

Wir wollen hier den Satz von Pick auf „nicht einfache Polygone“ verallgemeinern. Um dies präzise durchführen zu können, benötigen wir zunächst einige weitere Begriffe.

Definition 2.3. (*Polygonbereiche*)

Eine endliche Vereinigung $S = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_l$ von einfachen Polygonen P_1, \dots, P_l nennen wir **Polygonbereich**. Sind alle Polygone P_1, \dots, P_l einfache Gitterpolygone, so sprechen wir von einem **Gitter-Polygonbereich**.¹⁶

Abbildung 2.17 zeigt Beispiele für Gitterpolygonbereiche.

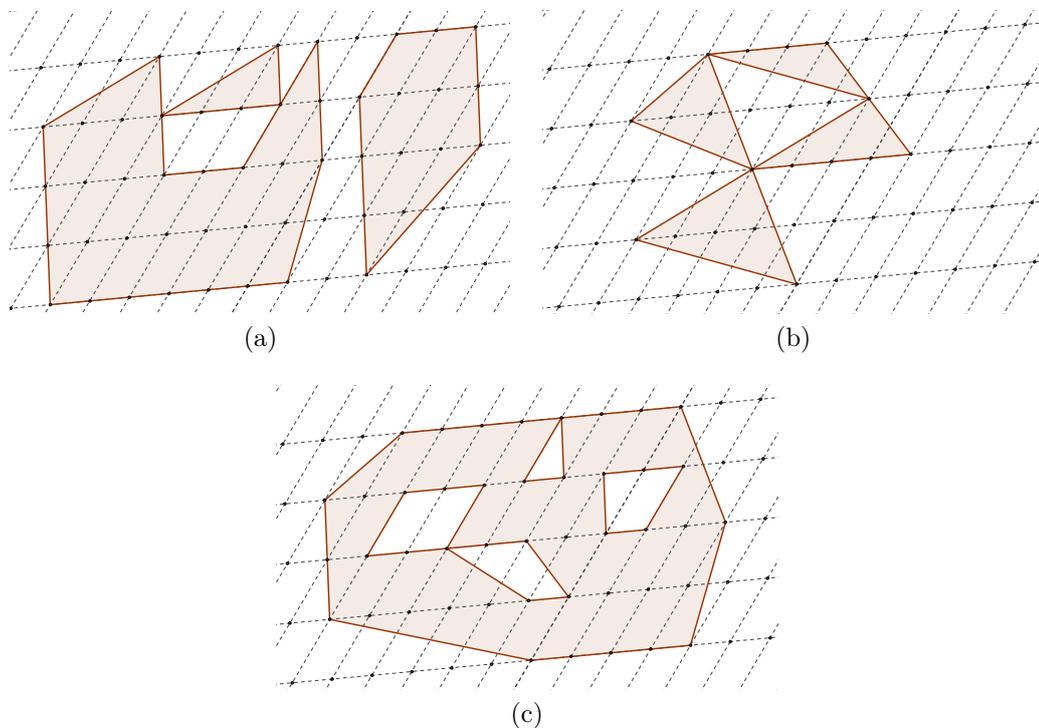


Abb. 2.17: Beispiele für Gitterpolygonbereiche

Bemerkung 2.3. Wie bereits bei einfachen Polygonen werden wir bei Polygonbereichen von *Randpunkten* und *inneren Punkten* sprechen. Diese Begriffe wurden oben topologisch definiert und werden hier genau so aufgefasst. Das führt dazu, dass Randpunkte einfacher Polygone nach deren Vereinigung zu einem Polygonbereich nicht zwingend Randpunkte des Polygonbereichs sein müssen (siehe Abbildung 2.18).

¹⁶Der Begriff „Polygonbereich“ ist von Jeger (1982) übernommen, wird dort allerdings nicht definiert.

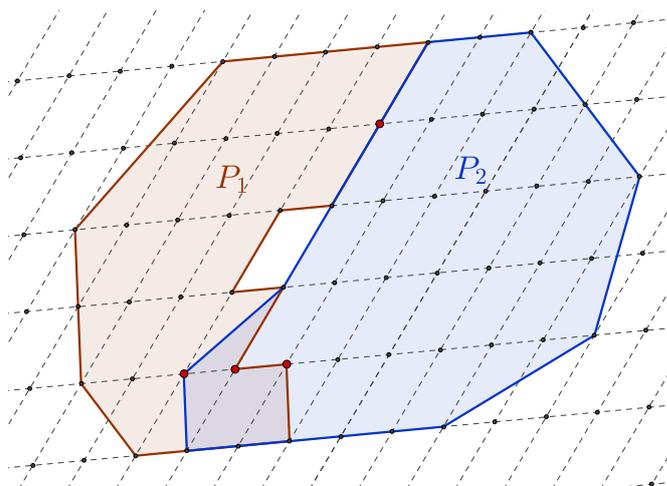


Abb. 2.18: Einige Randpunkte (rot hervorgehoben) der Polygone P_1 bzw. P_2 sind keine Randpunkte des Polygonbereichs $S = P_1 \cup P_2$.

Definition 2.4. (*einfach zusammenhängend*)

Wir nennen ein beschränktes Gebiet G **einfach zusammenhängend**, wenn es von jedem einfachen Streckenzug, der zwei Randpunkte von G miteinander verbindet und dessen relatives Inneres in G enthalten ist, in genau zwei Gebiete zerlegt wird.¹⁷

Anschaulich gesprochen, besitzen einfach zusammenhängende Gebiete keine Löcher. Abbildung 2.19 zeigt Beispiele für einfach zusammenhängende und nicht einfach zusammenhängende Gebiete.

Die in diesem Abschnitt dargelegte Verallgemeinerung wurde im Wesentlichen schon im Originalartikel Pick (1899) entwickelt.¹⁸ Wir folgen der dortigen Beweisidee. Es seien P_1, \dots, P_l einfache Gitterpolygone und

$$S = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_l$$

ein Gitter-Polygonbereich. Für einen Randgitterpunkt X von S betrachten wir eine Kreisscheibe $K(X, r)$. Hierbei sei r hinreichend klein gewählt, so dass $K(X, r)$ nur von Randstrecken geschnitten wird, auf denen X liegt. $K(X, r)$ wird von den Seiten von S in Segmente zerlegt, von denen einige innerhalb und einige außerhalb von S liegen. Es sei $v(X)$ die Anzahl der Segmente von $K(X, r)$, die innerhalb von S liegen. Wir nennen $v(X)$ die **Vielfachheit von X** (vgl. Abbildung 2.20).

¹⁷Grob angelehnt an Leßner (2001), S. 167. Man beachte, dass der Begriff einfach zusammenhängend bei uns nur für beschränkte Gebiete definiert wird. Eine allgemeinere Definition (die ohne diese Einschränkung auskommt) lautet, dass sich jede einfach geschlossene Kurve in G innerhalb von G stetig zu einem Punkt „zusammenziehen“ lässt. Will man dies präzisieren, benötigt man weitere Begriffe. Daher verzichten wir an dieser Stelle darauf und arbeiten mit einer für unsere Zwecke ausreichenden „Spezialdefinition“.

¹⁸Dort wurden jedoch einige Begriffe nicht definiert, so dass das damalige Resultat einen gewissen Interpretationsspielraum zulässt.

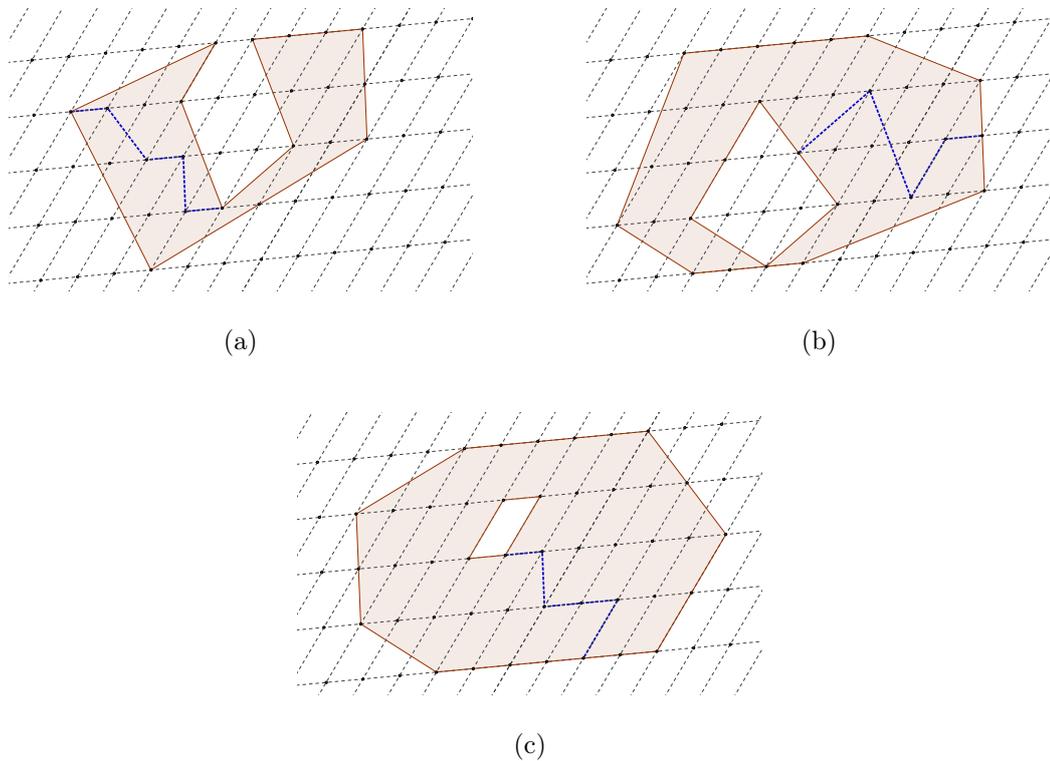


Abb. 2.19: (a) Das Innere des Polygonbereichs ist einfach zusammenhängend. Jeder einfache Streckenzug, der zwei Randpunkte miteinander verbindet, erwirkt eine Zerlegung in genau zwei Gebiete. (b) Auch hier ist das Innere des Polygonbereichs einfach zusammenhängend, da der Eckpunkt des Loches, der auf den Rand fällt, nicht zum Inneren des Polygons gehört. (c) Hier ist das Innere nicht einfach zusammenhängend. Ein Streckenzug, der den äußeren Rand mit dem Loch verbindet, zerlegt nicht in zwei Gebiete.

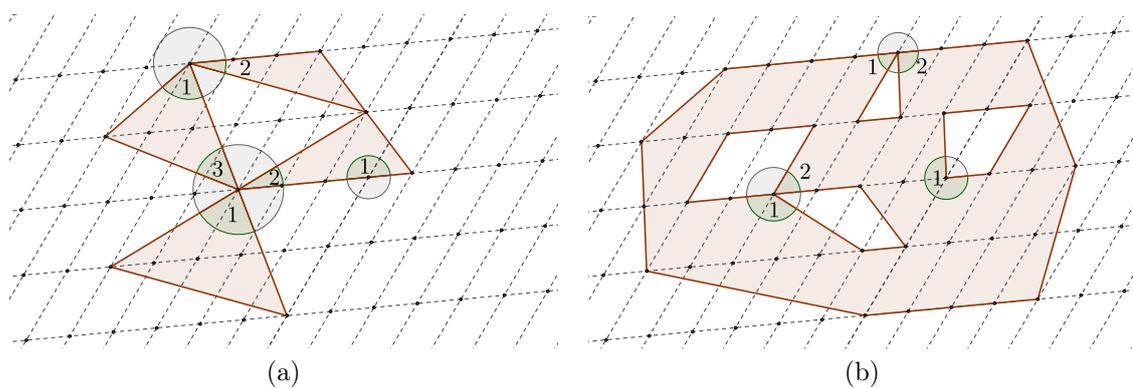


Abb. 2.20: Ermittlung der Vielfachheit verschiedener Randpunkte von Polygonbereichen

Wie bisher sei i_S die Anzahl der Gitterpunkte, die im Inneren von S liegen. Es sei r_S die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von S , wobei jeder Randgitterpunkt gemäß seiner Vielfachheit gezählt werde, d. h.

$$r_S := \sum_{X \in R_S} v(X).$$

Das Innere von S besteht aus einer gewissen Anzahl n_S von disjunkten Gebieten G_1, \dots, G_{n_S} . Wir nennen n_S die *Gebietszahl von S* . Diese Gebiete sind in der Regel nicht einfach zusammenhängend; sie können Löcher besitzen (vgl. erneut Abbildung 2.20 (b)). Jedes Gebiet G_i lässt sich durch einfache Gitterstreckenzüge, deren relatives Inneres in G_i enthalten ist, und die zwei Randpunkte von G_i miteinander verbinden, in ein einfach zusammenhängendes Gebiet „verwandeln“ (siehe Abbildung 2.21).

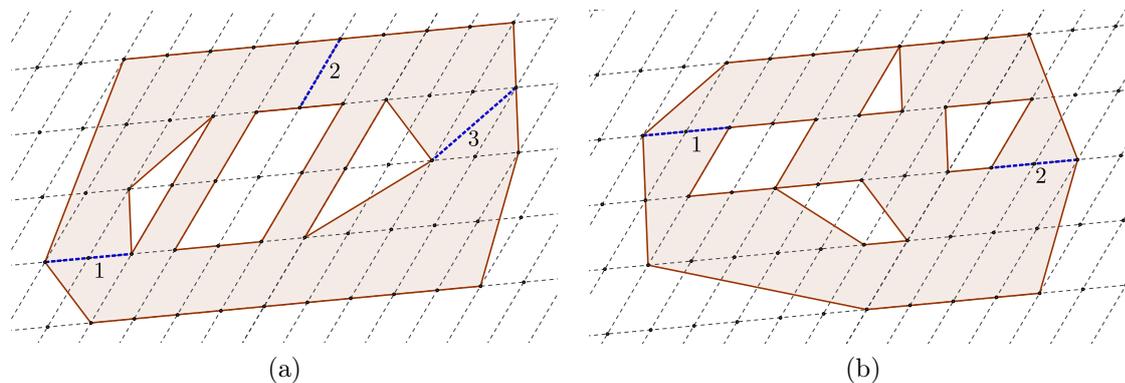


Abb. 2.21: Das Gebiet (a) lässt sich durch drei Streckenzüge einfach zusammenhängend machen. Für (b) benötigt man nur zwei Streckenzüge.

Es sei q_i die minimale Anzahl dazu benötigter Streckenzüge und

$$q_S := \sum_{i=1}^{n_S} q_i$$

die Gesamtzahl der minimal benötigten Streckenzüge, um alle Teilgebiete von S in einfach zusammenhängende Gebiete zu verwandeln. Man ist geneigt, die Zahl q_i als Anzahl der Löcher im Gebiet G_i aufzufassen. Dass diese saloppe Formulierung nicht ganz ungefährlich ist, kann man sich anhand von Abbildung 2.21 (b) klarmachen. Zwei Löcher, die an einer Ecke zusammenhängen, zählen als ein Loch; Löcher, die einen Eckpunkt auf dem Rand von S haben, zählen gar nicht. Aus Gründen der einfacheren Sprechweise nennen wir q_S dennoch die *Lochzahl von S* .

Die Behandlung von Gitterpunkten, die auf einem im Inneren von S verlaufenden Streckenzug liegen, soll noch präzisiert werden. Da wir das Innere und den Rand von

S topologisch auffassen, sind Punkte auf inneren Streckenzügen per Definition keine Randpunkte. Es wird sich als zweckdienlich herausstellen, wenn wir solche Punkte dennoch als Randpunkte von S auffassen. Sie besitzen dann die Vielfachheit 2, denn der Streckenzug zerlegt eine hinreichend kleine Kreisscheibe um einen seiner Punkte in zwei Segmente, die beide im Inneren von S liegen.¹⁹

Wir betrachten nun die Zahl

$$i_S + \frac{r_S}{2} + q_S - n_S$$

für einen beliebigen Polygonbereich S . Wenn wir in ein Gebiet G_i einen einfachen Gitter-Streckenzug einzeichnen, der zwei Randgitterpunkte miteinander verbindet, und dessen relatives Inneres eine Teilmenge von G_i ist, tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

1. G_i wird in zwei Teilgebiete zerlegt (siehe Abbildung 2.22 (a)).
2. G_i wird nicht in zwei Teilgebiete zerlegt (siehe Abbildung 2.22 (b)).

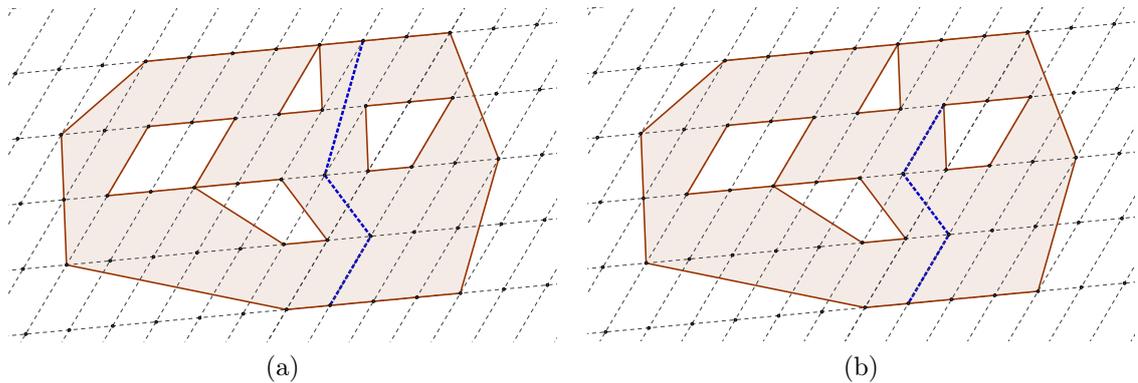


Abb. 2.22: Ein Gitterstreckenzug von Rand zu Rand zerlegt entweder in zwei Teilgebiete (a) oder nicht (b).

In **Fall 1** erhöht sich die Zahl n_S um 1 während q_S unverändert bleibt. Also vermindert sich

$$q_S - n_S$$

um 1. Befinden sich k Gitterpunkte auf dem relativen Inneren des zerlegenden Streckenzugs, so nimmt i_S um k ab. Da jeder dieser k Punkte nun als Randgitterpunkt mit der Vielfachheit 2 zählt, nimmt r_S um $2k$ zu. Da sich auch die Vielfachheit der

¹⁹Man könnte diese Punkte (hinsichtlich der Pick-Zahl) also ebenso gut als innere Punkte auffassen.

Endpunkte des Streckenzugs (dies sind Randpunkte von S) jeweils um 1 erhöht, nimmt r_S noch einmal um 2 zu. Insgesamt vergrößert sich r_S also um $2k+2$, so dass

$$i_S + \frac{r_S}{2}$$

um 1 zunimmt. Daher bleibt die Zahl

$$i_S + \frac{r_S}{2} + q_S - n_S$$

in diesem Fall unverändert.

In **Fall 2** bleibt n_S unverändert während sich q_S um 1 vermindert. Also nimmt

$$q_S - n_S$$

um 1 ab. Die Überlegungen bezüglich i_S und r_S weisen keine Veränderungen gegenüber Fall 1 auf, so dass auch hier

$$i_S + \frac{r_S}{2}$$

um 1 zunimmt, so dass die Zahl

$$i_S + \frac{r_S}{2} + q_S - n_S$$

erneut unverändert bleibt. Wir haben es also mit einer Invarianten unter Hinzufügen von inneren Gitterstreckenzügen zu tun. Damit fällt der Beweis des verallgemeinerten Satzes von Pick leicht.

Satz 2.3. (*Verallgemeinerte Version des Satzes von Pick*)

Es sei S ein Gitterpolygonbereich. i_S, r_S seien die Anzahlen der inneren bzw. Randgitterpunkte (letztere gemäß ihrer Vielfachheit gezählt). Es sei n_S die Gebietszahl und q_S die Lochzahl von S . Dann gilt

$$\mu(S) = i_S + \frac{r_S}{2} + q_S - n_S.$$

Beweis. Wir zerlegen S durch Hinzufügen von einfachen Gitterstreckenzügen sukzessive in Gitterdreiecke. Dadurch erhalten wir neue Anzahlen von inneren und Randgitterpunkten sowie eine neue Lochzahl und eine neue Gebietszahl. Diese Zahlen seien mit

$$i^*, r^*, q^*, n^*$$

bezeichnet. Nach der eben angestellten Vorüberlegung gilt

$$i_S + \frac{r_S}{2} + q_S - n_S = i^* + \frac{r^*}{2} + q^* - n^*. \quad (2.4)$$

Da S nur noch aus Gitterdreiecken besteht, und solche einfach zusammenhängend sind, gilt $q^* = 0$. Weiter ist die Anzahl der Gitterdreiecke, in die zerlegt wurde, gleich der neuen Gebietszahl n^* . Wir bezeichnen die Gitterdreiecke mit

$$D_1, D_2, \dots, D_{n^*}$$

und die Anzahlen der inneren bzw. Randgitterpunkte eines Dreiecks D_k mit i_k bzw. r_k . Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n^*} \left(i_k + \frac{r_k}{2} - 1 \right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n^*} i_k}_{=i^*} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n^*} r_k}_{=r^*} - n^* = i^* + \frac{r^*}{2} + q^* - n^*. \quad (2.5)$$

Man beachte bei der verwendeten Identität $\sum r_k = r^*$, dass die Randpunkte zur Ermittlung von r^* gemäß ihrer Vielfachheit bezüglich des in Dreiecke zerlegten Polygonbereichs gezählt werden. Wir machen also auch bei Randgitterpunkten, die mehr als einem Dreieck angehören, keinen Fehler. Weil nach dem gewöhnlichen Satz von Pick auf der linken Seite von (2.5) die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke – also der Flächeninhalt von S – steht, schließt dies den Beweis unter Verwendung von (2.4) ab. \square

Wir betrachten abschließend noch zwei Beispiele.

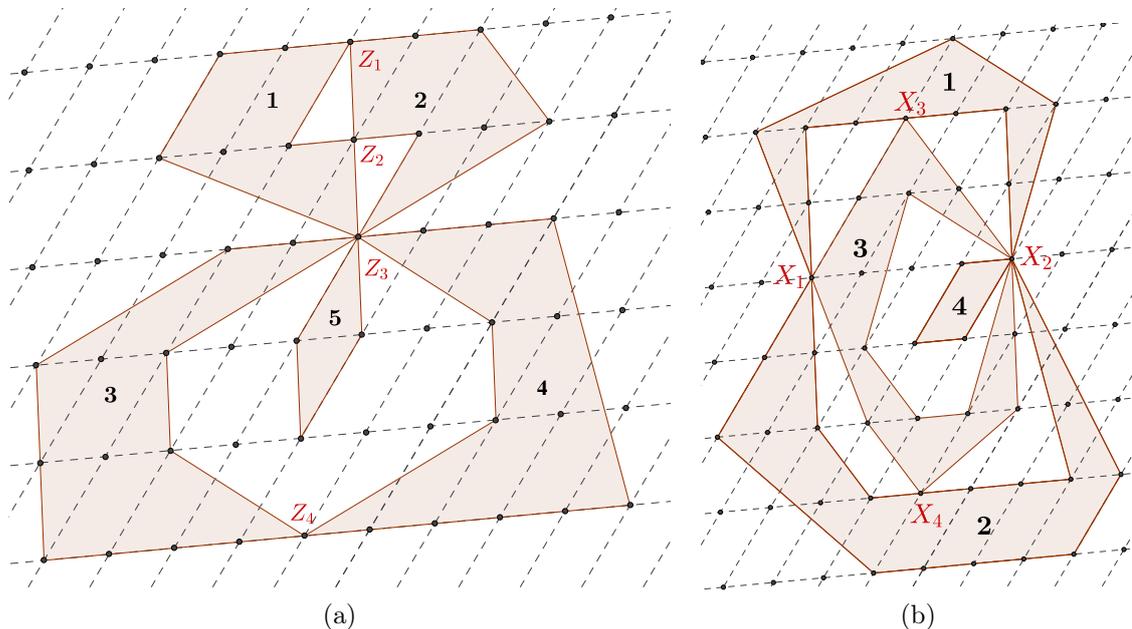


Abb. 2.23: Polygonbereiche „ohne Löcher“

Abbildung 2.23 soll die Wichtigkeit exakter Definitionen für Verallgemeinerungen des Satzes von Pick verdeutlichen. Ein intuitives Verständnis für den Begriff „Anzahl

der Löcher eines Polygonbereichs“ ist hier irreführend. Beide dargestellten Polygonbereiche besitzen die Lochzahl 0.

Das Innere des Polygonbereichs (a) besteht aus 5 disjunkten Gebieten, also gilt $n_S = 5$. Jedes der Gebiete ist einfach zusammenhängend, also ist $q_S = 0$. Die Randpunkte Z_1, \dots, Z_4 besitzen als einzige eine Vielfachheit größer als 1. Die Vielfachheiten lassen sich nach unserer Definition leicht erkennen, sie lauten: 2, 2, 5, 2 (in der Reihenfolge der Indizes der Punkte). Insgesamt erhalten wir $r_S = 42$, $i_S = 6$ und damit

$$\mu(S) = 6 + 21 + 0 - 5 = 22.$$

Das Innere des Polygonbereichs (b) besteht aus 4 disjunkten Gebieten, die alle einfach zusammenhängend sind, also gilt $n_S = 4$ und $q_S = 0$. Die einzigen Randpunkte, deren Vielfachheit größer als 1 ist, sind die Punkte X_1, \dots, X_4 . Diese besitzen (in der genannten Reihenfolge) die Vielfachheiten 3, 5, 2, 2. Wir erhalten

$$\mu(S) = 4 + 22,5 + 0 - 4 = 22,5.$$

Kapitel 3

Fachdidaktische Betrachtungen

3.1 Fachdidaktischer Bedeutungsgehalt und Überblick

3.1.1 Bedeutungsgehalt

„Pick’s theorem is one of the gems of elementary mathematics, this because the most innocent sounding hypotheses imply a very surprising conclusion. Yet the statement can be understood by a fifth grader.“¹

Der Satz von Georg Pick stammt aus dem Jahr 1899 und wird dennoch auch in aktuellen Veröffentlichungen immer wieder diskutiert; und zwar erstaunlicherweise sowohl in der „Welt der Universitätsmathematik“ als auch in der „Welt der Schulmathematik“. In einigen aktuellen Schulbüchern findet sich der Satz als freiwilliges Zusatzangebot. Abbildung 3.1 stammt aus einem Schulbuch für die 7. Klasse des niedersächsischen Gymnasiums.

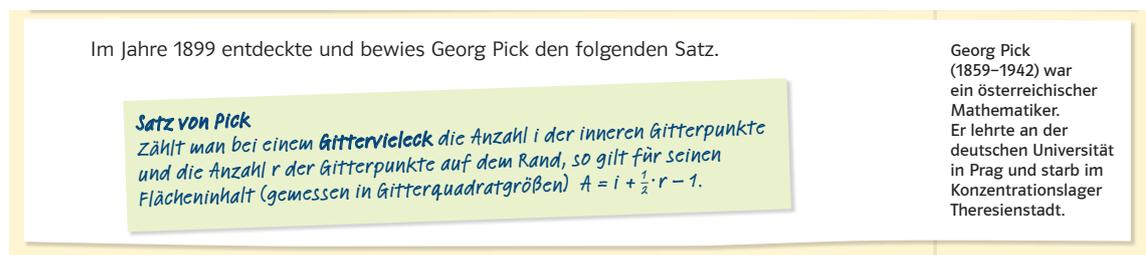


Abb. 3.1: Schulbuchdarstellung (aus Baum/Lorenzen/Thomsen (2014))

Das bedeutet nicht, dass der Satz zum Grundkanon der Schul- oder Universitätsmathematik gehört. Sowohl vielen Mathematiklehrern als auch Fachwissenschaftlern

¹Varberg (1985), S. 584

ist er wahrscheinlich unbekannt. Dieser Umstand ist nicht weiter verwunderlich, so schreibt z. B. Jeger (1982): „*Sie [die Formel von Pick] mag auf den ersten Blick eine recht hübsche, aber im Geometrie-Unterricht doch eher etwas abseits liegende Quelle für heuristische Betrachtungen sein.*“ Dennoch kann die Beschäftigung mit der Formel von Pick für Mathematik-Lernende verschiedenster Alters- und Niveaustufen sehr lohnend sein, wie Jeger weiter erläutert: „*Geht man ihr aber etwas auf den Grund, dann scheint sie im Mittelpunkt eines ganzen Imperiums elementarmathematischer Zusammenhänge zu stehen, das im Schulunterricht als Aufhänger für heuristische Aktivitäten dienen kann.*“

Wir haben es also mit einem Themenfeld von enormer *Spannweite* zu tun. Die Formel von Pick kann Fünftklässler aber auch Mathematiker mit jahrelanger Erfahrung in Forschung und Lehre beim ersten Kontakt gleichermaßen begeistern. Ball (2003) schreibt hierzu: „*At first sight Pick's Theorem looks utterly unbelievable. Is it really plausible that for any simple lattice polygon we can calculate the area just by counting lattice points? The concept of area seems to be heavily dependent upon geometry: upon the lengths of the sides of a figure, the angles at its corners and so on. Counting lattice points seems to ignore all these geometric subtleties.*“

Nicht nur für Schüler kommt ein weiterer motivierender Aspekt hinzu: Etwas Kompliziertes wird plötzlich furchtbar einfach. Die Formel von Pick ist also ernsthaft begehrenswert und bietet sich daher an, um eine authentische *heuristische Unterrichtsphase*² zu deren Findung zu initiieren. Gleichzeitig kann die Formel von Pick Ausgangspunkt für weitergehende mathematische Aktivitäten in verschiedensten Richtungen und von fast beliebiger Tiefe sein. Es können Beweise, Verallgemeinerungen sowie verschiedenste Anwendungen behandelt werden. Im Bereich der Anwendungen des Satzes von Pick zeigt sich eine weitere fruchtbare Besonderheit des Themenfelds, nämlich das Zusammenspiel zweier in der Regel getrennt wahrgenommener mathematischer Disziplinen: Zahlentheorie und Geometrie.³

3.1.2 Überblick

Wir arbeiten im gesamten folgenden Kapitel im *kartesischen Koordinatengitter*, da der Fokus auf der Aufbereitung von Inhalten für eine Behandlung mit Schülern liegt. Für die Schule empfiehlt sich der Zugang über das kartesische Koordinatengitter aus verschiedenen Gründen. Es ist durch das Vorhandensein von kariertem Papier stets verfügbar und ist den Schülern zudem sehr vertraut. Auch die meisten Geobretter, deren Einsatz sich an verschiedenen Stellen anbietet, sind kartesisch. In Abschnitt 3.8 werden zahlentheoretische Resultate mithilfe des Punktgitters und des Satzes von Pick hergeleitet. Hier bietet sich das kartesische Gitter an, weil die Gitterpunkte in diesem genau die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind. Man beachte

²Der Begriff „*heuristische Unterrichtsphase*“ stammt aus Fraedrich (1980) und wird auch bei Jeger (1982) verwendet.

³Dieses Zusammenspiel wird in Abschnitt 3.8 ausführlich behandelt.

dennoch, dass viele Überlegungen des folgenden Kapitels auf ein Parallelogramm-Gitter übertragbar sind.

Im Rahmen der fachdidaktischen Betrachtungen werden z. T. auch neue fachliche Zugänge entwickelt, die aber stets eine stärkere didaktische als fachwissenschaftliche Relevanz besitzen. Die Verortung in diesem Teil der Arbeit ist bewusst gewählt.

Zunächst widmet sich ein kurzer Abschnitt der **heuristischen Unterrichtsphase**. Die Darstellung erfolgt in knapper Form, da diese bereits in anderen Veröffentlichungen ausführlich thematisiert wurde.⁴ Anschließend werden didaktische Aspekte hinsichtlich der **Behandlung eines klassischen Beweises** sowie des **Zugangs über primitive Dreiecke** behandelt.

In Abschnitt 3.5 wird ein neuer, **geometrischer Zugang zum Satz von Pick** vorgestellt, welcher sich von anderen in der Literatur zu findenden Ansätzen grundsätzlich unterscheidet.

In Abschnitt 3.6 wird eine **physikalische Interpretation** zur Begründung der Formel von Pick vorgestellt. Anschließend wird auf die Möglichkeit der **Behandlung von Verallgemeinerungen** eingegangen.

In Abschnitt 3.8 werden **Bezüge des Satzes von Pick zur Zahlentheorie** vorgestellt. Hier werden einige neue Beweise entwickelt, die vor allem aus didaktischer Sicht von Interesse sind.

3.2 Heuristische Phase

Jeder Schüler wird im Mathematikunterricht der Mittelstufe mit Aufgaben zur Flächenberechnung ebener Vielecke konfrontiert. In der Regel sind diese Vielecke auf kariertem Papier gezeichnet, und alle Eckpunkte liegen auf dem Gitter. Der Schüler kann sich hierzu überlegen, wie das gegebene Vieleck in solche Figuren zerlegt (bzw. mit solchen Figuren ergänzt) werden kann, deren Flächeninhalte sich mithilfe ihm bekannter Formeln berechnen lassen. Das kann durchaus schwierig bzw. langwierig sein. Wie verblüffend und erfreulich ist es also, wenn sich herausstellt, dass eine einzige – noch dazu sehr schlichte – Formel existiert, mit deren Hilfe man die Fläche eines jeden⁵ Vielecks berechnen kann, indem man Gitterpunkte zählt.

Der Lehrer lässt eine Gelegenheit aus, wenn er seinen Schülern die Formel von Pick ohne Weiteres preisgibt. Er sollte ihnen nur deutlich zeigen, dass es eine solche Formel gibt und er im Besitz derselben ist. Dies lässt sich auf verschiedene Weisen realisieren. Es ist z. B. eine lebhaftere und schon für sich genommen lohnende Unterrichtsphase, wenn die Klasse „um die Wette“ Flächeninhalte ebener Polygone berechnet. Zu diesem Zweck kann mit einer dynamischen Geometrie-Software wie z. B.

⁴siehe etwa Fraedrich (1980) oder Jeger (1982)

⁵In der Schule tauchen hauptsächlich einfache Gitterpolygone auf.

GeoGebra ein Gitternetz projiziert werden, in das ein Freiwilliger ein Gitterpolygon seiner Wahl zeichnet. Die ganze Gruppe ist dann aufgefordert, den Flächeninhalt zu berechnen. Während die Schüler rechnen, zählt der Lehrer z. B. mithilfe eines Laserpointers die Gitterpunkte und stellt im Kopf oder auf einem kleinen Zettel seine Rechnung an. Er muss sein Vorgehen nicht kommentieren. Die Schüler sehen zum einen, dass er Gitterpunkte zählt und zum anderen, dass er stets mit weitem Vorsprung als Erster das richtige Ergebnis herausbekommt.⁶ Es liegt nun für die Schüler auf der Hand, dass der Lehrer im Besitz einer einfacheren Methode ist, und dass diese mit der Anzahl der Gitterpunkte im Inneren bzw. auf dem Rand des Polygons zu tun hat.

Die Motivation für die anschließende heuristische Unterrichtsphase, in der es um das Auffinden der Formel von Pick geht, ist nun gegeben. Die Schüler versuchen, etwas vollständig Innermathematisches herauszufinden, was sie wirklich herausfinden wollen. Eine Situation, die stets wünschenswert aber grundsätzlich nicht einfach herzustellen ist. Es bietet sich an, den Schülern nun Geobretter auszuhändigen, um die Formel von Pick herauszufinden. Vorher muss lediglich allen klar sein, dass der Flächeninhalt eines jeden Vielecks offenbar nur von der Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und von der Anzahl der Gitterpunkte auf seinem Rand abhängt. Ob die Eckpunkte eine besondere Rolle spielen oder nicht, muss nicht geklärt werden. Es ist naheliegend, dass die Schüler mit kleinen Figuren, wie etwa einer einzelnen Masche beginnen. Erfolg versprechend ist außerdem, Reihen von Figuren zu betrachten, bei denen die Anzahl einer „Gitterpunktsorte“ konstant ist, und die Anzahl der anderen Sorte jeweils um eins zu- oder abnimmt. Abbildung 3.2 zeigt ein Beispiel für eine solche Reihe.

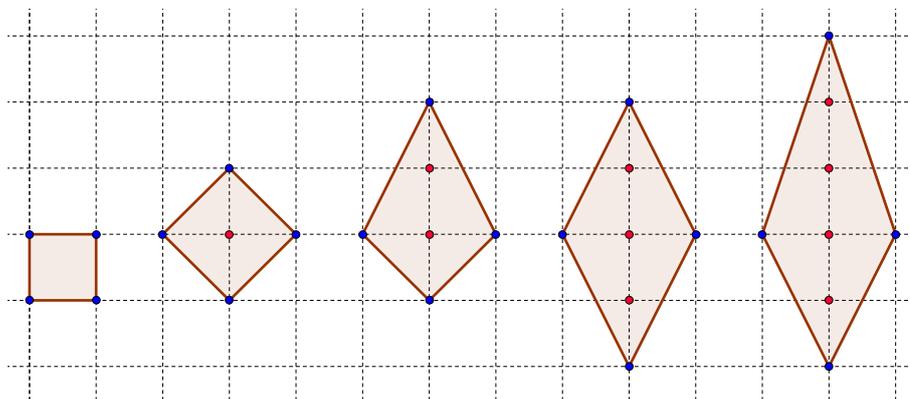


Abb. 3.2: Jede Figur in der Reihe besitzt 4 Randgitterpunkte. Die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren nimmt – genau wie der Flächeninhalt – von links nach rechts jeweils um 1 zu.

Auf diese Weise sind die Schüler in der Lage, den Satz von Pick selbst zu entdecken, da sie ihre Formel anhand der einfachen Figuren immer wieder selbst überprüfen

⁶Man kann das Ergebnis zur Kontrolle nach jeder Runde vom Computer anzeigen lassen.

und korrigieren können. Es lohnt sich, dieser Phase genügend Zeit einzuräumen und die Schüler nicht um das „*Erlebnis Mathematik*“ zu bringen (Fraedrich (1980), S. 5). Weitere detaillierte Ausführungen zur heuristischen Phase finden sich in Fraedrich (1980) und Jeger (1982).

3.3 Behandlung eines klassischen Beweises

Wie bereits erläutert, ist die Tatsache, dass der Flächeninhalt eines jeden einfachen, ebenen Polygons nur von der Anzahl seiner inneren und der Anzahl seiner Randgitterpunkte abhängt, auf den ersten Blick kaum fassbar. Ignoriert doch – wie Ball (2003) sich ausdrückt – diese Kenngröße scheinbar alle geometrischen Feinheiten, die den Flächeninhalt einer Figur eigentlich beeinflussen müssten. Die Formel von Pick ist in diesem Sinne ein Wunder, und dies kann eine Chance sein, das Bedürfnis nach einem Beweis bei Schülern zu wecken.

Der in Abschnitt 2.2 vorgeführte klassische Beweis ist aus verschiedenen Gründen didaktisch reizvoll. Zunächst ist zu betonen, dass er sich zum Nachvollziehen grundsätzlich gut eignet, weil keine größeren begrifflichen, technischen oder rechnerischen Hürden vorhanden sind. In der Tat muss die Formel von Pick nur für das einfachste ebene Gittervieck – ein Quadrat mit der Kantenlänge 1 – bestätigt werden, und die Additivität der Pick-Zahl $\pi(P) = i_P + \frac{r_P}{2} - 1$ muss nachgewiesen werden. Dies ist aus drei Gründen didaktisch interessant.

1. Der Nachweis der Additivität der Pick-Zahl ist eine kreative Übung, die von den Schülern gut selbst durchgeführt werden kann.
2. Es ist meines Erachtens die größte didaktische Hürde, den Schülern die Einsicht zu vermitteln, dass die Additivität der Pick-Zahl nachgewiesen werden muss. Mathematik-Lernende sind häufig gewillt, Eigenschaften bzw. Regeln, die ihnen aus anderen Zusammenhängen geläufig sind, in neuen Situationen als gegeben anzunehmen.⁷
3. Dieser Beweis des Satzes von Pick offenbart, dass die zentralste Eigenschaft unseres gewohnten Flächenmaßes seine Additivität ist.

Die Behandlung eines Beweises dieser Art wird jedoch nur unter starker Anleitung gelingen. Es ist nicht realistisch, dass die zentralen Ideen von den Schülern selbst entwickelt werden. Hinzu kommt, dass die Formel von Pick auch nach Behandlung

⁷Das betrifft durchaus auch Studenten, die z. B. bei vielen Regeln der Mengenlehre ohne Weiteres auf Beweise verzichten würden, da ihnen die Gesetze vom Rechnen mit Zahlen bekannt vorkommen. Auf diese Weise werden z. T. auch falsche Regeln übernommen, wie etwa die unzulässige „mengentheoretische Subtraktion“ auf beiden Seiten einer Gleichung ($A \cup X = B \cup X \stackrel{?}{\Leftrightarrow} A = B$). Es wird hierbei Bezug genommen auf eigene Erfahrungen aus der Lehrtätigkeit.

des Beweises ein Wunder bleibt (vielleicht ein noch größeres als zuvor), denn an keiner Stelle der Argumentation hat man das Gefühl, den geometrischen Grund für deren Gültigkeit vor Augen geführt zu bekommen. Alles „versteckt sich“ in der Additivität. In Abschnitt 3.5 wird ein neuer, geometrischer Zugang zum Satz von Pick vorgestellt, der unter anderem aus diesem Grund didaktisch besonders interessant ist.

3.4 Zugang über primitive Dreiecke

Ein alternativer – auch mit Schülern gangbarer – Weg zum Satz von Pick führt über die Zerlegung in primitive Dreiecke. Wie in Abschnitt 2.3.3 aus fachwissenschaftlicher Perspektive dargestellt, erfolgt der Zugang über drei Schlüsselstellen (siehe Abbildung 3.3).

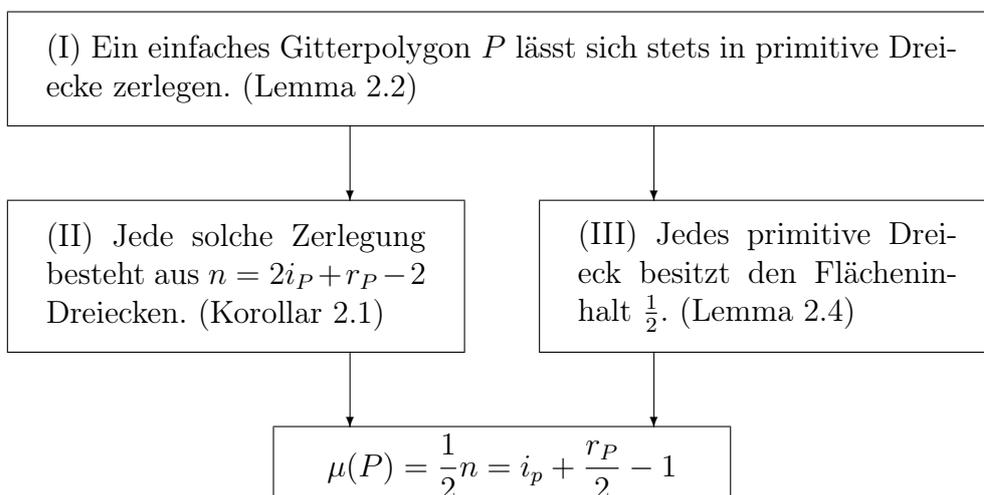


Abb. 3.3: Schlüsselstellen beim Zugang über primitive Dreiecke

Es soll im Folgenden dargestellt werden, wie ein solcher Weg schülergerecht vollzogen werden könnte.

Zu (I): Ein formaler Beweis ist nicht zwingend erforderlich. Indem unterschiedliche Zerlegungen anhand verschiedener Beispiel-Polygone konkret vorgenommen werden, können zwei Beobachtungen festgehalten werden.

1. Das Zerlegen in primitive Dreiecke gelingt stets, jedoch gibt es in der Regel weit mehr als eine Möglichkeit, ein Polygon zu zerlegen.
2. Bei allen durchgeführten Zerlegungen ein und desselben Polygons stimmt die Anzahl der verwendeten Dreiecke überein.

Zu (II): Wir vermuten, dass die Anzahl der verwendeten primitiven Dreiecke bei allen Zerlegungen eines Polygons P dieselbe ist. Es ist naheliegend, dass es einen formelmäßigen Zusammenhang zwischen den Kenngrößen i_P, r_P und dieser Anzahl gibt. Die Suche nach einer Formel kann in einer erneuten heuristischen Phase den Schülern selbst überlassen werden. Es führen hierbei dieselben Strategien zum Ziel, die schon bei der Findung der Formel von Pick entscheidend waren.

Ist die Gleichung $n = 2i_P + r_P - 2$ für die Anzahl der primitiven Dreiecke gefunden, so sollte diese bewiesen bzw. begründet werden. Steht die Formel von Euler für ebene, zusammenhängende Graphen zur Verfügung, so kann ein Beweis wie in Abschnitt 2.3.3 mithilfe dieser gelingen. Die Situation kann natürlich auch als Anlass für einen Exkurs mit der Formel von Euler als Ziel genommen werden. Eine Alternative auf Schulniveau, die mit einem *Winkelsummen-Bilanz-Argument* arbeitet, soll hier noch vorgestellt werden. Die Idee stammt von DeTemple/Robertson (1974).

Beweis. (Alternativbeweis zu Korollar 2.1)

Wir betrachten ein einfaches Gitterpolygon P , welches in n primitive Dreiecke zerlegt sei. Addieren wir sämtliche Innenwinkel aller Dreiecke, so erhalten wir $n \cdot 180^\circ$. Wir können diese Winkelsumme auch auf einem anderen Wege berechnen. Jeder innere Gitterpunkt von P ist vollständig von Innenwinkeln primitiver Dreiecke umgeben (vg. Abbildung 3.4), trägt also mit 360° zur Winkelsumme bei.

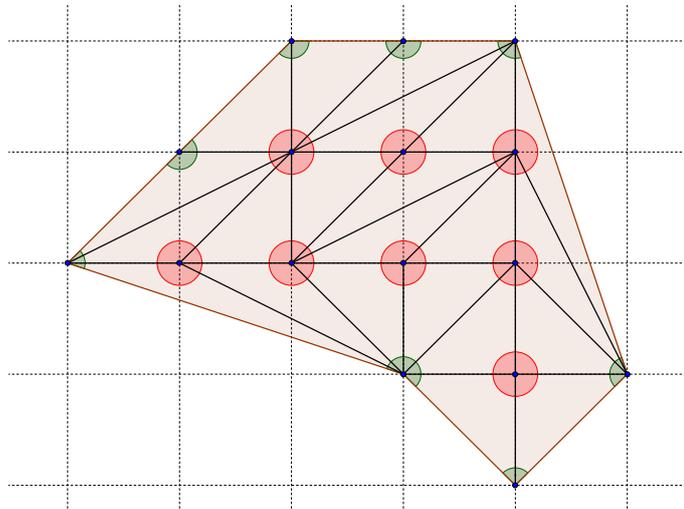


Abb. 3.4: Die Summe aller Innenwinkel sämtlicher primitiver Dreiecke lässt sich auch durch eine separate Betrachtung der inneren und der Randgitterpunkte von P berechnen.

In Summe ergeben sich $i_P \cdot 360^\circ$, und es fehlen noch die Beiträge der Randgitterpunkte. Jeder Randgitterpunkt, der kein Eckpunkt ist, trägt mit 180° zur Winkelsumme bei, und die Innenwinkel der e_P Eckpunkte von P summieren sich zu $(e_P - 2) \cdot 180^\circ$. Insgesamt erhalten wir

$$i_P \cdot 360^\circ + s_P \cdot 180^\circ + (e_P - 2) \cdot 180^\circ = i_P \cdot 360^\circ + (r_P - 2) \cdot 180^\circ,$$

wobei $s_P + e_P = r_P$ verwendet wurde. Es folgt die Winkelsummen-Bilanz

$$n \cdot 180^\circ = i_P \cdot 360^\circ + (r_P - 2) \cdot 180^\circ.$$

Diese ist äquivalent zu

$$n = 2i_P + r_P - 2.$$

□

Bemerkung 3.1.

- (i) Man kann genau wie in Abschnitt 2.3.3 auch unabhängig vom Gitter arbeiten und Lemma 2.3 auf diese Weise zeigen. Da es hier aber weniger um die größtmögliche Allgemeinheit, sondern stärker um eine auch für Schüler überschaubare Herleitung geht, haben wir an dieser Stelle direkt Korollar 2.1 bewiesen.
- (ii) Man kann die Formel von Euler für ebene, zusammenhängende Graphen ebenfalls mit einem solchen Winkelsummen-Bilanz-Argument beweisen. Dieser Ansatz geht laut DeTemple/Robertson (1974) auf Descartes zurück und wird dort durchgeführt.

Zu (III): Der Nachweis, dass primitive Dreiecke stets den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzen, schließt die Herleitung des Satzes von Pick ab. Wir wollen hier zwei „händische Beweise“ für diese Tatsache diskutieren. Beide lassen sich methodisch leicht unter Einsatz von Geobrettern oder mit GeoGebra umsetzen und stellen – nicht nur für die Behandlung mit Schülern – eine bemerkenswerte Alternative zu dem in Abschnitt 2.3.3 gezeigten Beweis von Lemma 2.4 dar.

Zwei händische Beweise dafür, dass jedes primitive Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzt

DeTemple/Robertson (1974) weisen auf die Möglichkeit einer mehrschrittigen, flächengleichen Verwandlung eines primitiven Dreiecks in eine halbierte Masche des Gitters hin. Diese Methode soll hier detailliert besprochen werden.

Wir benötigen vorab das folgende Lemma.

Lemma 3.1. (*Charakterisierung primitiver Dreiecke*)

1. Primitive Dreiecke sind stets stumpfwinklig oder rechtwinklig.
2. Es gibt (bis auf Drehung und Translation) genau ein rechtwinkliges, primitives Dreieck. Dabei handelt es sich um eine durch die Diagonale halbierte Masche des Gitters.

3. Die längste Seite eines primitiven Dreiecks besitzt mindestens die Länge $\sqrt{2}$. Eine durch die Diagonale halbierte Masche ist (bis auf Drehung und Translation) das einzige primitive Dreieck mit dieser längsten Seitenlänge.

In einem Unterrichtsgang müssen die drei plausiblen Aussagen des Lemmas sicher nicht vorgezogen werden, sondern könnten im Anschluss an den eigentlichen Beweis von Lemma 2.4 geklärt werden. Hierbei sind ganz unterschiedliche Argumentationen und Präzisions-Ansprüche denkbar.

Beweis. Zu 1. Wir nehmen an, es gäbe ein spitzwinkliges, primitives Dreieck ABC . Da es sich um ein Gitterdreieck handelt, haben alle Seiten mindestens die Länge 1. Keine der Seiten kann genau die Länge 1 besitzen, denn sonst könnte der dieser Seite gegenüberliegende Eckpunkt kein Gitterpunkt sein (vgl. Abbildung 3.5 (a)).

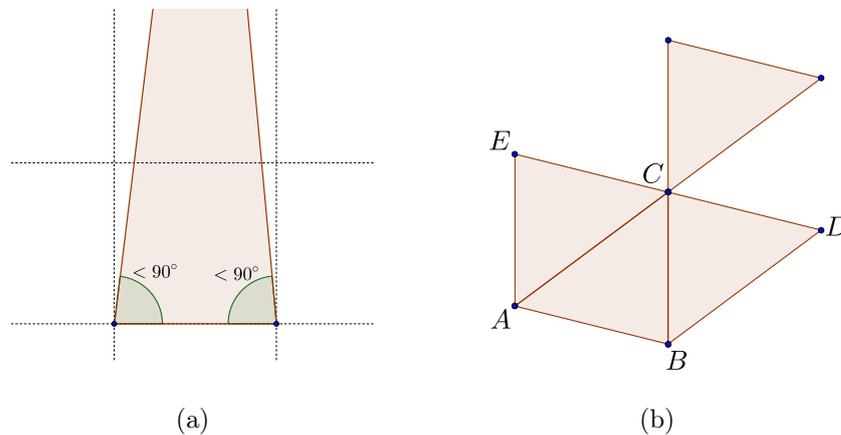


Abb. 3.5: (a) Bei einem spitzwinkligen primitiven Dreieck müssten alle Seitenlängen größer als 1 sein. (b) Das Trapez $ABDE$ besteht aus drei Kopien des Dreiecks ABC .

Erneut aufgrund der Tatsache, dass ABC ein Gitterdreieck ist, folgt, dass alle Seitenlängen größer oder gleich $\sqrt{2}$ (Diagonalenlänge einer Masche) sind. Weil es sich um ein spitzwinkliges Dreieck handelt, besitzt ABC daher zumindest eine Höhe, die mindestens so lang ist wie die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a = \sqrt{2}$. O.B.d.A. sei dies die Höhe durch den Punkt C . Wir bezeichnen ihre Länge mit h_c und erhalten

$$h_c \geq \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1.$$

Wir spiegeln ABC an C und verschieben das Bild zum einen durch die Translation, die C auf B abbildet, und zum anderen durch die Translation, die C auf A abbildet (vgl. Abbildung 3.5 (b)). Auf diese Weise erhalten wir ein aus drei Kopien von ABC bestehendes Trapez $ABDE$, dessen Höhe größer als 1 ist. Da alle verwendeten Abbildungen das Gitter in sich überführen, beinhaltet das Trapez keine Gitterpunkte außer A, B, D, C, E . Indem wir das Trapez an D spiegeln, das Bild durch die

Translation, die D auf B abbildet, verschieben und die analoge Operation beliebig häufig wiederholen, erhalten wir einen von den Parallelen \overline{AB} und \overline{DE} begrenzten Streifen beliebiger Länge (vgl. Abbildung 3.6). Dieser hat die Breite $h_c > 1$ und in seinem Inneren liegen keine Gitterpunkte. Einen solchen Streifen kann es offenbar nicht geben, wir haben den gewünschten Widerspruch erhalten.

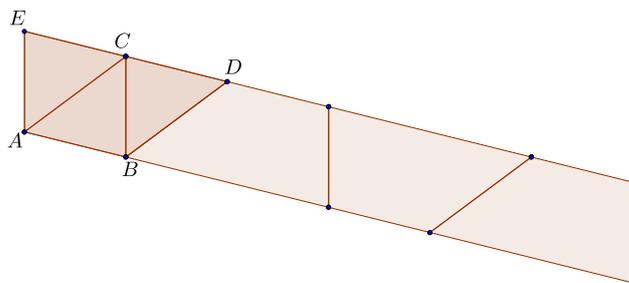


Abb. 3.6: ein Streifen der Breite $h_c > 1$ ohne Gitterpunkte im Inneren

Zu 2. Es sei ABC ein rechtwinkliges, primitives Dreieck. Falls eine der Seiten die Länge 1 besitzt, so muss es sich, da ABC Gitterdreieck ist, um eine Kathete handeln und folglich ist ABC eine durch die Diagonale halbierte Masche (vgl. Abbildung 3.7 (a)).

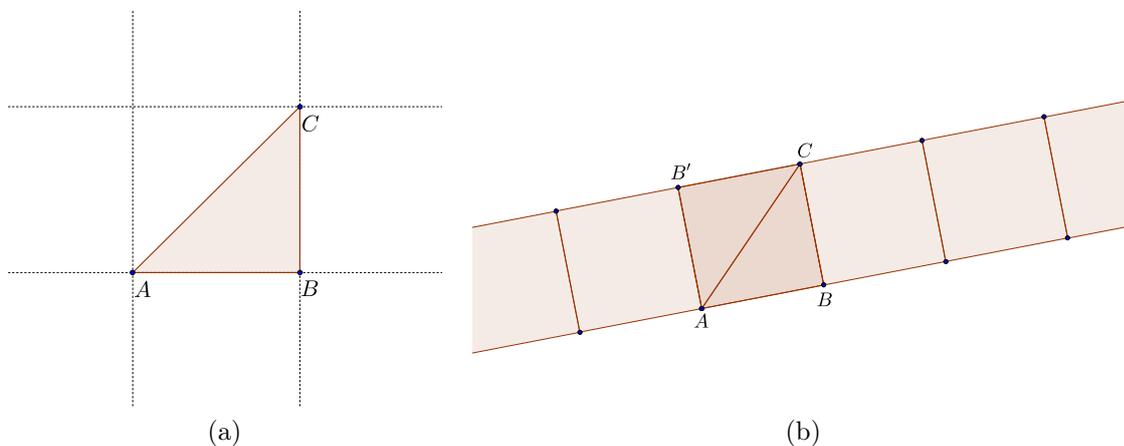


Abb. 3.7: (a) Das „einzige“ rechtwinklige, primitive Dreieck ist eine durch die Diagonale halbierte Masche. (b) ein Streifen der Breite $a \geq \sqrt{2}$ ohne Gitterpunkte in seinem Inneren

Wir nehmen nun an, dass alle Seitenlängen größer als 1 sind. Da ABC Gitterdreieck ist, sind dann alle Seitenlängen größer oder gleich $\sqrt{2}$. Durch Spiegelung an der Hypotenuse erhalten wir ein Quadrat mit der Seitenlänge $a \geq \sqrt{2}$, welches außer seinen Eckpunkten keine Gitterpunkte enthält. Durch wiederholtes Verschieben erhalten wir ähnlich wie in Teil 1 einen Streifen der Breite a , der keine Gitterpunkte

in seinem Inneren enthält (vgl. Abbildung 3.7 (b)). Das ist ein Widerspruch, das „einzige“ rechtwinklige, primitive Dreieck ist folglich eine halbierte Masche.

Zu 3. Es sei ABC ein primitives Dreieck. Dann sind alle Seitenlängen größer oder gleich 1 und nach Aussage 1 ist eine der Innenwinkelgrößen mindestens 90° . Falls ABC stumpfwinklig ist, so ist die längste Seite offenbar länger als $\sqrt{2}$. Ist ABC rechtwinklig, so handelt es sich nach Aussage 2 um eine halbierte Masche. Bei dieser besitzt die Hypotenuse die Länge $\sqrt{2}$. \square

Nun kommen wir zum eigentlichen händischen Beweis dafür, dass primitive Dreiecke stets den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzen.

Beweis. (Alternativbeweis zu Lemma 2.4)

Es sei ABC ein primitives Dreieck. Falls es sich bei ABC um eine durch die Diagonale halbierte Masche handelt, gilt offenbar $\mu(ABC) = \frac{1}{2}$, und wir sind fertig. Andernfalls besitzt das Dreieck nach Lemma 3.1 einen stumpfen Winkel. O.B.d.A. gelte $\gamma > 90^\circ$. Folglich ist AB die längste Seite von ABC . Es sei C' der Bildpunkt von C unter der Spiegelung an M_{AB} . (siehe Abbildung 3.8).

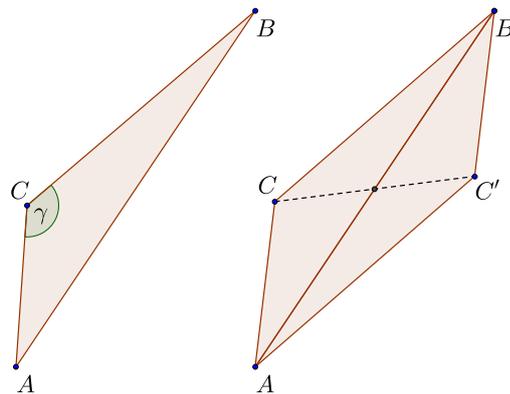


Abb. 3.8: Das Parallelogramm $AC'BC$ entsteht durch Punktspiegelung an M_{AB} .

Dann liegt M_{AB} auf CC' und halbiert diese Diagonale des Vierecks $AC'BC$. Da M_{AB} die andere Diagonale AB per Definition ebenfalls halbiert, handelt es sich bei $AC'BC$ um ein Parallelogramm. Dieses wird durch seine Diagonalen jeweils flächenmäßig halbiert, und es folgt

$$\mu(ABC) = \frac{1}{2}\mu(AC'BC) = \mu(AC'C).$$

Weil die verwendete Punktspiegelung das Gitter in sich überführt, ist $AC'C$ ein zu ABC flächengleiches primitives Dreieck. Die Seiten AC und AC' des Dreiecks $AC'C$ stimmen in der Länge mit den beiden kürzeren Seiten von ABC überein

($|AC'| = |BC|$). Die Seite CC' ist die kürzere Diagonale des Parallelogramms und damit kürzer als AB . Folglich ist die längste Seite von $AC'C$ kürzer als die längste Seite von ABC . Durch wiederholte Anwendung dieser Technik gewinnen wir eine Folge flächengleicher primitiver Dreiecke mit absteigender größter Seitenlänge. Das Verfahren führt in endlich vielen Schritten zu einem primitiven Dreieck, dessen längste Seite minimal ist. Nach Lemma 3.1 handelt es sich um eine halbierte Masche des Gitters. Folglich besitzt das Ausgangsdreieck ABC den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$. Abbildung 3.9 illustriert das Verfahren anhand eines Beispiels.

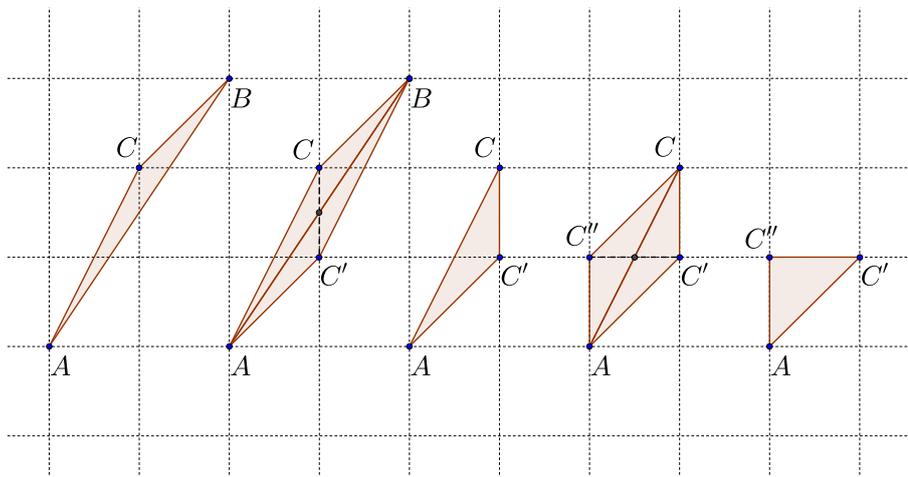


Abb. 3.9: schrittweise, flächengleiche Verwandlung eines primitiven Dreiecks in eine halbierte Masche

Es soll abschließend noch kurz darauf eingegangen werden, warum das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht. Die Länge der längsten Dreiecksseite wird in jedem Schritt echt kleiner. Gitterstrecken-Längen sind stets von der Form $\sqrt{n^2 + m^2}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Die Menge

$$\left\{ (n, m) \mid n, m \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2 + m^2} < K \right\}$$

ist für jedes $K > 0$ endlich. Daher gibt es nur endlich viele Gitterstrecken-Längen unterhalb der größten Seitenlänge des Ausgangsdreiecks, und das Verfahren muss nach endlich vielen Schritten abbrechen. \square

Nachdem wir den Alternativbeweis für die Tatsache, dass jedes primitive Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzt, sehr detailliert behandelt haben, soll hier noch illustriert werden, wie eine konkrete unterrichtliche Umsetzung aussehen könnte. Die Schüler erhalten z. B. für die Umsetzung mit GeoGebra oder dem Geobrett den folgenden Arbeitsauftrag:

1. Konstruiere ein stumpfwinkliges, primitives Gitterdreieck ABC , dessen längste Seite AB ist.

2. Spiegele C an M_{AB} und nenne den Bildpunkt C' .
3. Um welche geometrische Figur handelt es sich bei $AC'BC$? Begründe.
4. Begründe: Das Dreieck $AC'C$ ist flächengleich zu ABC und ebenfalls primitiv.
5. Führe die Schritte 1 bis 4 mit dem Ausgangsdreieck $AC'C$ anstelle von ABC erneut durch. Dabei spielt die längste Seite von $AC'C$ nun die Rolle, die vorher die Seite AB gespielt hat.
6. Gelangt man durch weitere Wiederholungen des Verfahrens zu immer neuen Dreiecken oder „endet“ das Verfahren irgendwann?
7. Formuliere und begründe eine allgemeine Aussage über den Flächeninhalt primitiver Dreiecke.

Ein Arbeitsauftrag dieser oder ähnlicher Art zeigt den didaktischen Wert des Alternativbeweises zu Lemma 2.4 auf. Die Schüler können mit einem hohen Maß an Eigenständigkeit zu der Einsicht gelangen, dass alle primitiven Dreiecke den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzen.

Die eben gesehene Methode zur flächengleichen Verwandlung eines primitiven Dreiecks in eine halbierte Masche ist nicht alternativlos. Wir wollen abschließend darauf eingehen, wie man durch mehrmaliges Scheren parallel zur kürzesten Seite eines primitiven Dreiecks ebenfalls eine halbierte Masche erhält.⁸

Wir betrachten dazu ein primitives Dreieck ABC , dessen kürzeste Seite AB sei. Weiter sei g eine zu \overline{AB} parallele Gerade durch den Punkt C . Wie oben sieht man leicht ein, dass im Streifen zwischen den Geraden g und \overline{AB} keine Gitterpunkte liegen, denn man kann diesen mit Kopien von ABC lückenlos parkettieren (vgl. Abbildung 3.10).

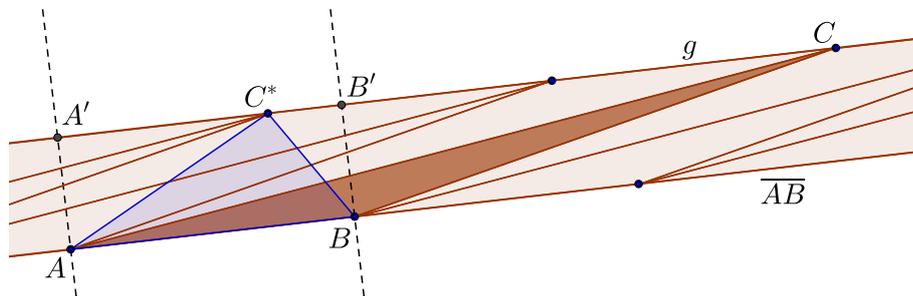


Abb. 3.10: Durch Scherung von ABC parallel zur kürzesten Seite AB gewinnt man ein flächengleiches primitives Dreieck ABC^* dessen längste Seite AB ist.

⁸Ich danke Prof. Dr. Jens Heber für diesen Hinweis.

Folglich ist für jeden Gitterpunkt $C' \in g$ das Dreieck ABC' primitiv und als eine Scherung von ABC flächengleich zu diesem. Ebenfalls wie oben sieht man ein, dass sowohl auf \overline{AB} als auch auf g je zwei benachbarte Gitterpunkte den Abstand $|AB|$ besitzen. Es seien A', B' die Schnittpunkte der Geraden g mit den in den Punkten A, B errichteten Lotgeraden auf \overline{AB} . Dann ist entweder einer der Punkte A', B' ein Gitterpunkt oder man findet einen Gitterpunkt C^* auf g , der zwischen A' und B' liegt (vgl. Abbildung 3.10). Das Dreieck ABC^* ist flächengleich zu ABC , primitiv und als solches nach Lemma 3.1 (1) entweder rechtwinklig oder stumpfwinklig. Falls C^* einer der Punkte A', B' ist, so ist ABC^* rechtwinklig und damit nach Lemma 3.1 (2) eine halbierte Masche. Andernfalls besitzt ABC^* einen stumpfen Innenwinkel. Dieser befindet sich im Punkt C^* , da C^* zwischen A' und B' liegt, und daher ist AB die längste Seite von ABC^* . Seine kürzeste Seite ist folglich echt kürzer als AB und wir können ABC^* nun erneut parallel zu seiner kürzesten Seite scheren. Das Verfahren endet nach endlich vielen Schritten (wie oben: Unterhalb einer festen Obergrenze gibt es nur endlich viele Gitterstreckenlängen.) bei einer halbierten Masche, welche folglich flächengleich zu ABC ist.

3.5 Ein geometrischer Zugang zum Satz von Pick

Im Folgenden soll eine Herleitung des Satzes von Pick vorgestellt werden, die sich von den in der Literatur zu findenden Beweisen grundsätzlich unterscheidet. Es handelt sich um einen elementargeometrischen Zugang, bei dem man tatsächlich sieht, wie die Flächenformel von Pick zustande kommt, d. h. wie die verschiedenen Punktarten ihren jeweiligen Flächenanteil „beisteuern“. Die Additivität der Pick-Zahl wird hierbei nicht verwendet.

Die Herleitung gliedert sich in zwei Abschnitte. Im ersten Schritt, in welchem die eigentliche Arbeit stattfindet, wird der Satz für Dreiecke erschlossen. Anschließend folgt die Formel von Pick für beliebige Gitterpolygone ohne größere Probleme.

Schritt 1: Herleitung der Formel von Pick für ein beliebiges Dreieck

Es sei ABC ein Gitterdreieck. Zu jedem Gitterpunkt X betrachten wir das achsenparallele Quadrat mit Mittelpunkt X und Flächeninhalt 1. Wir bezeichnen dieses in der Folge als *das X enthaltende* oder auch *zu X gehörige Quadrat*. Abbildung 3.11 zeigt ABC und einige seiner Gitterpunkte mit ihren zugehörigen Quadraten.

Im Folgenden seien

$$i := i_{ABC}, \quad r := r_{ABC}, \quad s := s_{ABC}$$

die Anzahlen der inneren Gitterpunkte, Randgitterpunkte bzw. Gitterpunkte auf den relativen Inneren der Seitenstrecken von ABC , d. h., $s = r - 3$ ist die Anzahl der Randgitterpunkte von ABC , die keine Eckpunkte sind. Wir wollen einsehen,

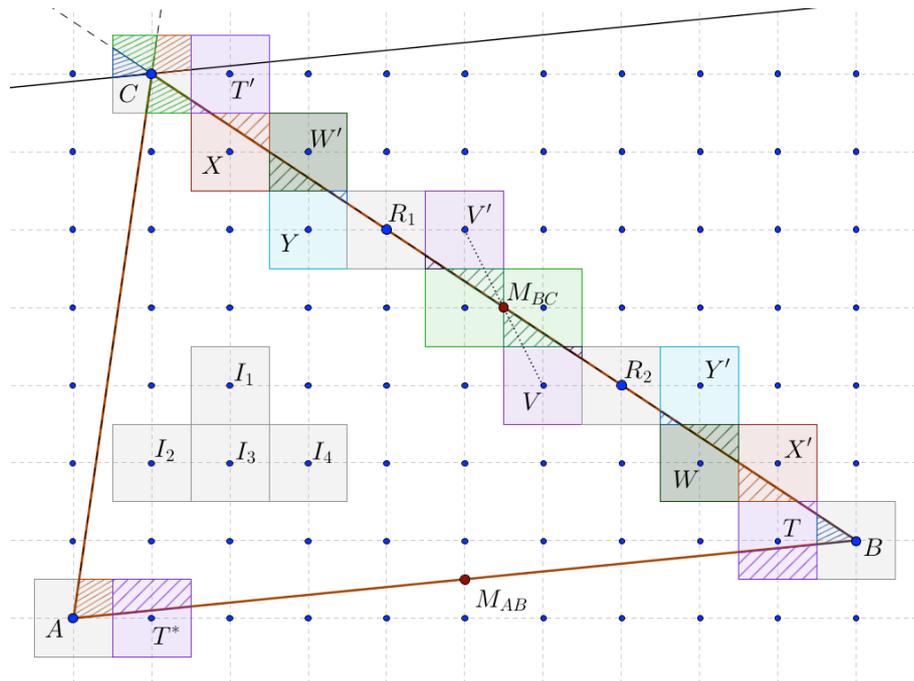


Abb. 3.11: Das Gitterdreieck ABC und einige Gitterpunkte mit ihren zugehörigen Quadraten sowie deren Bildern unter der Punktspiegelung an M_{BC} bzw. M_{AB} .

dass

$$\mu(ABC) = i + \frac{r}{2} - 1$$

gilt. Wir können dies auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\mu(ABC) = i + \frac{s}{2} + \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Die Seitenlinien des Dreiecks verlaufen durch die Randpunkte, d. h. durch die Mittelpunkte der zu diesen gehörigen Quadrate (vgl. etwa R_1, R_2 in Abbildung 3.11). Die Fläche eines Quadrats wird von einer Geraden, die durch seinen Mittelpunkt verläuft, stets halbiert, so dass jeder Randpunkt (der kein Eckpunkt ist) eine halbe Einheit zum Flächeninhalt von ABC beiträgt. Dies bestätigt den Mittelteil von Gleichung (3.1).

Für jeden der drei Eckpunkte A, B, C liegt ein gewisser Teil des zugehörigen Quadrats im Inneren des Dreiecks (schraffiert). Wie im klassischen Beweis für die Winkelsumme im Dreieck können wir diese Teile oberhalb einer zu AB parallelen Geraden durch den Punkt C wiederfinden. Die Teile ergänzen sich zu einem halben Quadrat, was den hinteren Teil von Formel (3.1) bestätigt.

Wenden wir uns nun den inneren Gitterpunkten zu. Einige zugehörige Quadrate liegen vollständig innerhalb von ABC (vgl. etwa I_1, \dots, I_4). Diese tragen jeweils eine Einheit zum Flächeninhalt bei (passend zum vorderen Teil von (3.1)). Es gibt jedoch

auch innere Gitterpunkte, deren zugehörige Quadrate nicht vollständig im Inneren des Dreiecks liegen (so z. B. die Punkte V, W, X, \dots). Zu jedem solchen Punkt betrachten wir das Bild unter der Punktspiegelung an M_{BC} und markieren dieses mit einem Strich (V' ist Bildpunkt von V etc.). Mit V ist auch V' ein Gitterpunkt, denn es gilt $M_{BC} = \frac{1}{2}(B + C)$, und daher ist $M_{BC} \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \times (\frac{1}{2}\mathbb{Z})$. Die Punktspiegelung an einem solchen Punkt ist gleichsam eine Drehung um 180° um denselben und überführt daher das Gitter in sich. Der außerhalb von ABC liegende Teil des zu V gehörigen Quadrats (schraffiert) ist kongruent zu dem innerhalb von ABC liegenden Teil des zu V' gehörigen Quadrats (ebenfalls schraffiert). Der innere Punkt V trägt also gemeinsam mit dem *kompensierenden Punkt* V' eine Einheit zum Flächeninhalt bei.

Wir können auf diese Weise jedem inneren Gitterpunkt, dessen zugehöriges Quadrat von einer Seitenlinie von ABC geschnitten wird, einen kompensierenden Punkt außerhalb des Dreiecks zuordnen. In Abbildung 3.11 ist dies für alle Quadrate, die von BC geschnitten werden, dargestellt. Da Punktspiegelungen injektiv sind, besitzen zwei verschiedene innere Punkte unterschiedliche kompensierende Punkte, so dass die kompensierte Fläche auch insgesamt mit der aus ABC herausragenden Fläche übereinstimmt.

Dem Punkt T (vgl. Abbildung 3.11) kommt besondere Beachtung zu, da das zugehörige Quadrat sowohl von BC als auch von AB geschnitten wird. Das über BC verlorene Flächenstück gewinnen wir durch T' wieder, und das unter AB verlorene Flächenstück liefert der Bildpunkt T^* von T unter der Punktspiegelung an M_{AB} . In diesem Sinne besitzt T also zwei kompensierende Punkte. Wir werden im Folgenden sehen, dass ein Punkt sogar mehr als zwei kompensierende Punkte besitzen (bzw. benötigen) kann.

Probleme und deren Behebung

Die bis hier vorgestellte Herleitung ist noch lückenhaft. Das in Abbildung 3.11 gezeigte Dreieck ist in gewisser Hinsicht gutartig. Abbildung 3.12 zeigt ein für unsere Zwecke weniger angenehmes Exemplar.

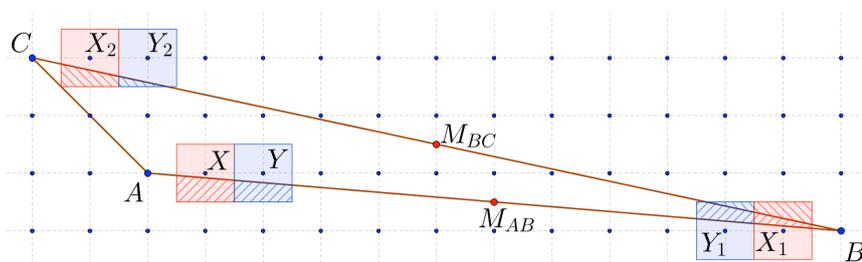


Abb. 3.12: Bei schmalen Dreiecken kann es passieren, dass kompensierende Quadrate von zwei Dreiecksseiten geschnitten werden.

Das zum inneren Punkt X gehörige Quadrat wird von der Dreiecksseite AB geschnitten. Durch Spiegelung an M_{AB} erhält man den kompensierenden Punkt X_1 . Das zugehörige Quadrat wird allerdings sowohl von AB als auch von BC geschnitten, so dass nur ein Teil der zu kompensierenden Fläche tatsächlich kompensiert wird. Der über BC hinausragende Teil muss an anderer Stelle innerhalb von ABC identifiziert werden. Hierzu spiegelt man X_1 an M_{BC} . Der Bildpunkt X_2 kompensiert das noch fehlende Flächenstück. Würde X_2 zudem noch von AC geschnitten werden, so müsste man ein weiteres Mal spiegeln (und zwar an M_{AC}) und erhielte einen weiteren kompensierenden Punkt.

Auf diese Weise kann man jedem inneren Gitterpunkt, dessen zugehöriges Quadrat von einer Dreiecksseite geschnitten wird, (mindestens⁹) eine *Folge von kompensierenden Punkten* zuweisen. Diese Folge ist stets endlich, da es nur endlich viele Gitterpunkte gibt, deren zugehörige Quadrate von einer Seitenstrecke von ABC geschnitten werden. Zudem kann aufgrund von Injektivität keiner der in ihr auftretenden Punkte mit einem Folgenglied einer anderen kompensierenden Folge übereinstimmen. Also trägt jeder innere Punkt vermöge seines zugehörigen Quadrats und der Quadrate der kompensierenden Folge(n) genau eine Einheit zum Flächeninhalt bei.

Zuletzt ist noch zu beachten, dass das Problem zu kompensierender Flächenteile nicht nur bei inneren Punkten, sondern ebenso bei Randpunkten und auch bei Eckpunkten auftreten kann. Abbildung 3.13 zeigt eine Situation, in der das zu einem Randpunkt gehörige Quadrat von einer weiteren Dreiecksseite geschnitten wird.

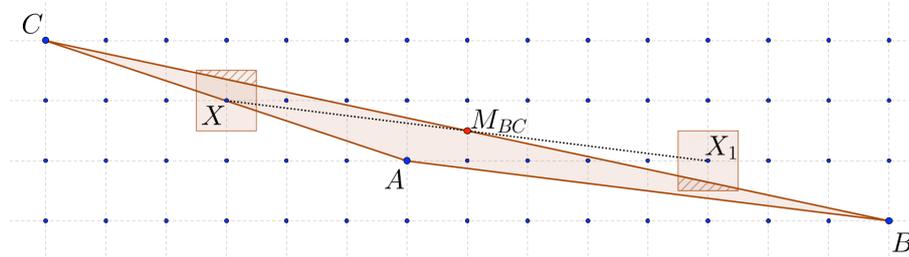


Abb. 3.13: Das Problem zu kompensierender Flächenteile kann auch bei Randpunkten auftreten. Die Lösung erfolgt wie bei inneren Punkten durch die Zuweisung einer Folge (hier der Länge 1) von kompensierenden Punkten.

Abbildung 3.14 zeigt eine Situation, in der das zu einem Eckpunkt gehörige Quadrat von einer weiteren Dreiecksseite geschnitten wird.

Die zu den kompensierenden Punkten A_1, A_2 und A_3 gehörigen Quadrate werden jeweils von zwei Dreiecksseiten geschnitten, so dass die kompensierende Folge erst bei A_4 abbricht. Es wird abwechselnd an M_{BC} und M_{AB} gespiegelt.

Insgesamt haben wir eingesehen, dass jeder Randgitterpunkt eine halbe Einheit und

⁹ Der bereits angesprochene, in Abbildung 3.11 betrachtete Punkt T besitzt zwei kompensierende Folgen der Länge 1.

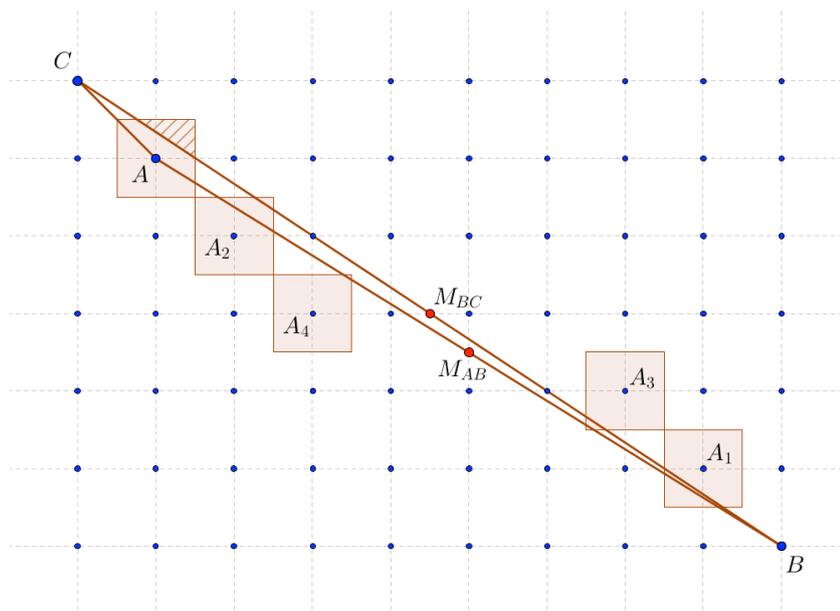


Abb. 3.14: Das zum Eckpunkt A gehörige Quadrat wird von der gegenüberliegenden Dreiecksseite geschnitten, so dass ein gewisser Anteil der Fläche zu kompensieren ist (schraffiert). Die Schnittflächen der zu den Punkten A_1 bis A_4 gehörigen Quadrate mit dem Dreieck ABC ergeben zusammen die schraffierte Fläche.

jeder innere Gitterpunkt eine Einheit zum Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks beiträgt. Die Eckpunkte tragen gemeinsam eine halbe Einheit dazu bei, die Formel von Pick ist somit für beliebige Dreiecke hergeleitet.

Zur Illustration der Tatsache, dass es bei der Bildung der kompensierenden Folgen nicht zu Doppelungen kommt, zeigt Abbildung 3.15 noch einmal das Beispiel-Dreieck aus Abbildung 3.14 mit allen kompensierenden Folgen.

Es gibt zunächst nur fünf relevante Gitterpunkte: Die Eckpunkte A, B und C sowie die Randpunkte R und S . Die Eckpunkte B und C werden von keiner weiteren Dreiecksseite geschnitten und benötigen daher keine kompensierende Folge. Der Eckpunkt A besitzt die bereits in Abbildung 3.14 dargestellte kompensierende Folge A_1, \dots, A_4 (rot). Der Randpunkt R besitzt die kompensierende Folge R_1, \dots, R_4 (grün) und der Randpunkt S besitzt die kompensierende Folge S_1, \dots, S_4 (blau).

Schritt 2: Herleitung des Satzes von Pick für ein Gitter- e -Eck

Wir betrachten nun ein einfaches Gitterpolygon P mit $e := e_P$ Eckpunkten. Wegen $\frac{r}{2} = \frac{s}{2} + \frac{e}{2}$ ist Folgendes zu zeigen:

$$\mu(P) = i + \frac{s}{2} + \frac{e}{2} - 1. \quad (3.2)$$

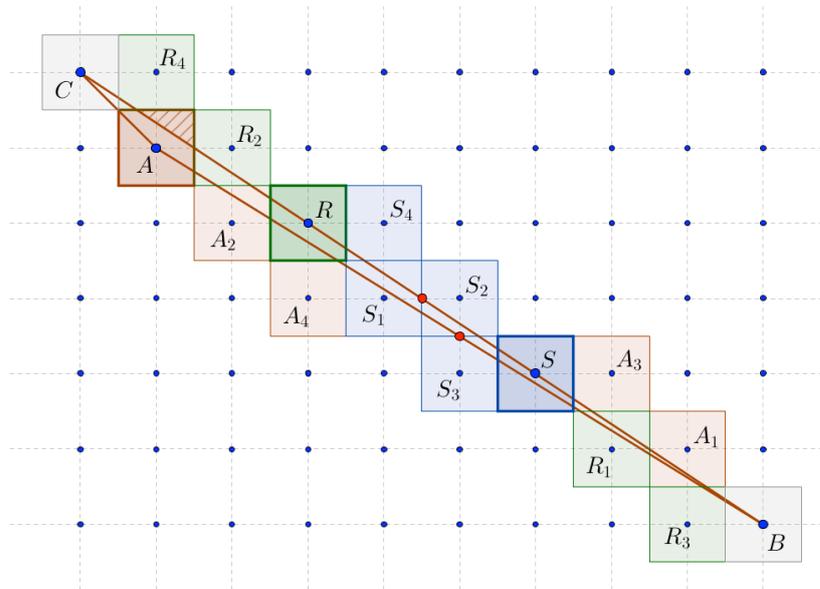


Abb. 3.15: ein Dreieck mit drei kompensierenden Folgen („Startpunkte“ hervorgehoben)

Wir triangulieren P , indem wir alle Eckpunkte von P und keine weiteren Punkte verwenden (siehe Abbildung 3.16).¹⁰

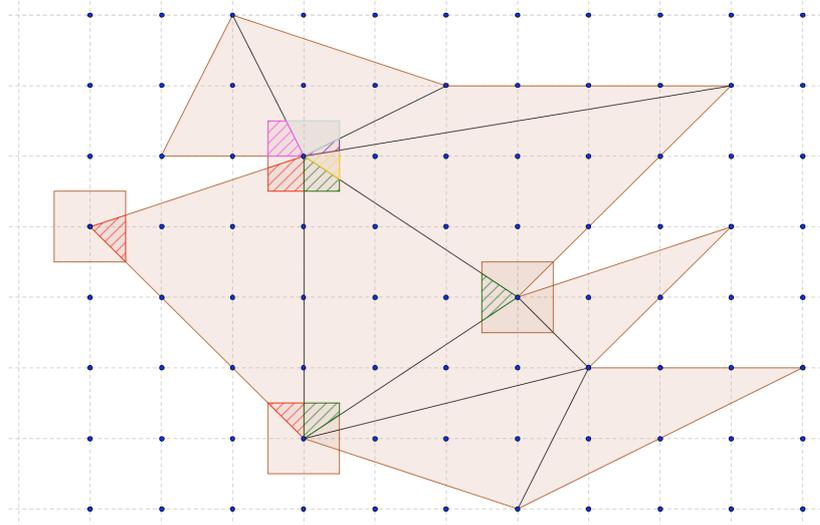


Abb. 3.16: Zerlegung eines 12-Ecks in 10 Dreiecke unter ausschließlicher Verwendung aller Eckpunkte

¹⁰Dass eine solche Zerlegung stets möglich ist, kann man wegen der in Abschnitt 2.3.3 nachgewiesenen Existenz einer inneren Diagonalen leicht induktiv zeigen. Wir führen dies im Anschluss an die eigentliche Herleitung im Detail durch. Dabei wird außerdem die Anzahl der Dreiecke, aus der eine solche Zerlegung besteht, unabhängig von Lemma 2.3 ermittelt.

Nach Lemma 2.3 (angewendet mit $\iota = 0$ und $\rho = e$) besteht jede solche Zerlegung aus $e - 2$ Dreiecken. Jeder innere Gitterpunkt von P ist entweder innerer Punkt eines Dreiecks oder gemeinsamer Randpunkt von genau zwei Dreiecken. Im ersten Fall trägt dieser Punkt nach Schritt 1 eine Einheit zum Flächeninhalt des betreffenden Dreiecks und damit zum Flächeninhalt von P bei. Im zweiten Fall trägt dieser Punkt – ebenfalls nach Schritt 1 – je eine halbe Einheit zum Flächeninhalt zweier Dreiecke und damit ebenfalls eine Einheit zum Flächeninhalt von P bei.

Jeder Randgitterpunkt von P , der kein Eckpunkt ist, ist auch Randpunkt (und nicht Eckpunkt) eines der zerlegenden Dreiecke und trägt daher nach Schritt 1 eine halbe Einheit zum Flächeninhalt des Dreiecks und damit eine halbe Einheit zum Flächeninhalt von P bei.

Zuletzt wollen wir den hinteren Teil von Formel (3.2) einsehen, betrachten also die Eckpunkte von P und noch einmal Abbildung 3.16. Es ist entscheidend, dass der Durchschnitt von P mit dem zu einem Eckpunkt gehörigen Quadrat disjunkt in Durchschnitte dieses Quadrats mit den verschiedenen Dreiecken zerlegt wird (in der Abbildung durch verschiedene Farben gekennzeichnet). Wie in Schritt 1 eingesehen, tragen die Eckpunkte eines jeden Dreiecks gemeinsam eine halbe Einheit zum Flächeninhalt bei (die rot schraffierten Flächen tragen eine halbe Einheit bei, die grün schraffierten eine weitere halbe Einheit usw.). Da $e - 2$ Dreiecke vorliegen, tragen alle Eckpunkte von P insgesamt

$$\frac{1}{2}(e - 2) = \frac{e}{2} - 1$$

Einheiten zum Flächeninhalt bei. Damit ist die Formel von Pick auch für beliebige, einfache Gitterpolygone bestätigt.

Kommentar und Ergänzung

Anstelle der durchgeführten Zerlegung hätten wir in Schritt 2 auch in primitive Dreiecke zerlegen können. Im ersten Schritt haben wir insbesondere bewiesen, dass diese den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ besitzen. Unter Verwendung von Korollar 2.1, welches besagt, dass die Anzahl der primitiven Dreiecke $2i + r - 2$ ist, wäre der Beweis sofort abgeschlossen. Es ist jedoch aus didaktischer Sicht vorteilhaft, an dieser Stelle auf die Zerlegung in primitive Dreiecke zu verzichten, denn die Bestimmung der Anzahl der Dreiecke der hier gewählten Zerlegung ist elementarer als der Beweis von Lemma 2.3, auf dem Korollar 2.1 beruht. Wir haben dieses Lemma allerdings in der obigen Herleitung verwendet und wollen abschließend noch eine davon unabhängige Bestimmung der Anzahl der zerlegenden Dreiecke betrachten.

Zerlegung eines Gitter- e -Ecks in $e - 2$ Gitter-Dreiecke

Wir wollen ein einfaches Gitter- e -Eck P so in $e - 2$ Gitter-Dreiecke zerlegen, dass als Eckpunkte der Dreiecke ausschließlich Eckpunkte von P gewählt werden. Dies ist je nach gewünschter Exaktheit der Argumentation auf nicht formale Weise oder durch vollständige Induktion denkbar.

Die Grundidee ist in jedem Fall induktiver Art und beginnt mit dem einfachen Gitterviereck. Ein solches lässt sich stets durch eine innere Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen (siehe Abbildung 3.17).

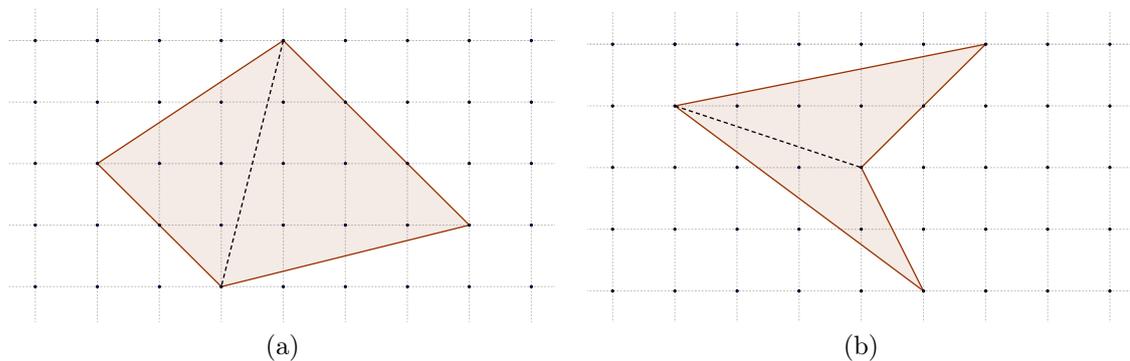


Abb. 3.17: Ein einfaches Gitterviereck lässt sich in zwei Gitterdreiecke zerlegen. Das ist sowohl für konvexe (a) als auch für nicht-konvexe Vierecke (b) der Fall.

Betrachten wir als nächstes ein einfaches Gitterfünfeck, so liegt es nahe, dieses durch eine innere Diagonale in ein Dreieck und ein Viereck zu zerlegen. Letzteres lässt sich wiederum in zwei Dreiecke zerlegen, so dass insgesamt in drei Dreiecke zerlegt wurde. Man kann sich nun mit einem abschließenden „und so weiter“-Satz zufriedengeben, der aber sicher ein Gefühl fehlender Exaktheit hinterließe, oder man führt die bereits angedeutete vollständige Induktion nach der Anzahl der Ecken durch. Dies soll im Folgenden vorgeführt werden.

Induktion nach der Anzahl der Ecken: Im Induktionsanfang betrachten wir ein einfaches Gitterviereck. Wie bereits gesehen ist es möglich, dieses nach den geforderten Regeln in zwei Gitterdreiecke zu zerlegen. Nun betrachten wir ein einfaches Gitterpolygon P mit $e \geq 4$ Ecken und setzen voraus, dass sich alle einfachen Gitterpolygone mit kleinerer Ecken-Anzahl nach den geforderten Regeln zerlegen lassen. Es sei P durch eine innere Diagonale in zwei Gitterpolygone P_1, P_2 zerlegt.

Die Existenz einer inneren Diagonalen haben wir in Abschnitt 2.3.3 bewiesen. Ist k die Anzahl der Ecken von P_1 , so besitzt P_2 genau $(e - k + 2)$ Ecken, da zwei Eckpunkte sowohl zu P_1 als auch zu P_2 gehören (siehe Abbildung 3.18 (a)).

Anhand von Abbildung 3.18 (b) lässt sich erkennen, dass die Anzahl der Ecken von P_1 bzw. P_2 geringer sein kann, falls die innere Diagonale die Verlängerung einer

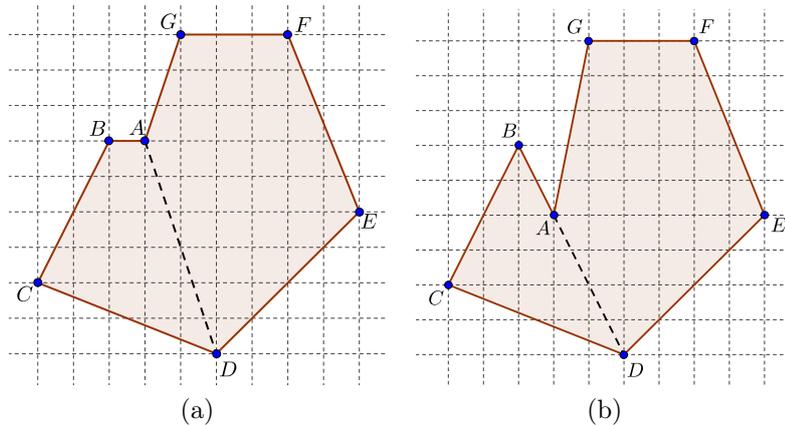


Abb. 3.18: (a) Ein Siebeneck wird durch die innere Diagonale AD in ein Viereck und ein Fünfeck zerlegt. (b) Ist die innere Diagonale die Verlängerung einer Seite (hier von AB), so reduziert sich die Anzahl der Eckpunkte der Teilvierecke.

Seite von P darstellt. In diesem Fall behandeln wir den Eckpunkt, der durch die Verlängerung einer Seite in einem der Teilpolygone nicht mehr als Eckpunkt auftritt, bei der Zerlegung in Dreiecke als „künstlichen“ Eckpunkt (siehe Abbildung 3.19), so dass die Anzahl der Dreiecke, in die zerlegt wird, unverändert bleibt.

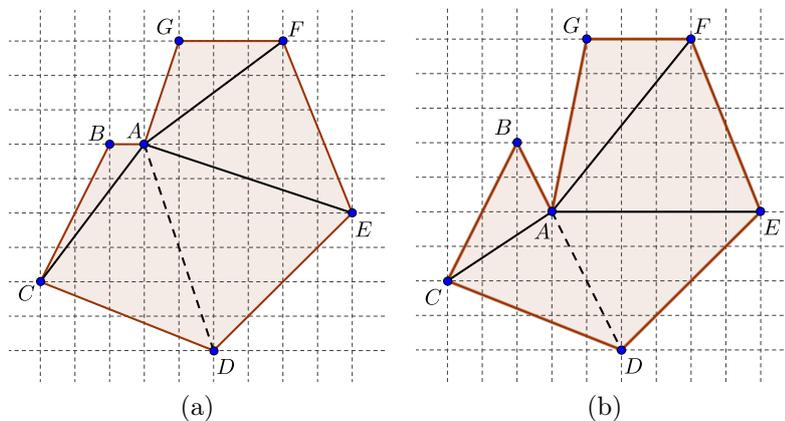


Abb. 3.19: (a) Das Viereck $ABCD$ wird in zwei, das Fünfeck $DEF GA$ wird in drei Dreiecke zerlegt. (b) Wir behandeln das Dreieck BCD wie ein Viereck (mit „künstlichem Eckpunkt“ A) und zerlegen es durch die Strecke AC in zwei Dreiecke, so dass wir auch in diesem Fall eine Zerlegung des Siebenecks in fünf Dreiecke erhalten.

Nach Induktionsvoraussetzung können wir P_1 in $(k - 2)$ und P_2 in $(e - k)$ Gitter-Dreiecke zerlegen. Insgesamt haben wir P also in

$$(k - 2) + (e - k) = e - 2$$

Dreiecke zerlegt und der Beweis ist abgeschlossen.

3.5.1 Diskussion des geometrischen Zugangs

Die eben gesehene Herleitung des Satzes von Pick ist aus fachlicher Sicht weniger relevant als aus didaktischen Gründen. Selbstverständlich ist sie nicht so elegant wie z. B. der in Abschnitt 2.2 vorgeführte Beweis, jedoch bietet sie im Hinblick auf die Behandlung mit Schülern wesentliche Vorzüge.

1. Sie trägt zum Verständnis der Formel von Pick bei, da man sieht, wie die verschiedenen Punktsorten mit ihren zugehörigen Quadraten und deren kompensierenden Folgen zum Flächeninhalt beitragen.
2. Sie ist in besonderem Maße zur didaktischen Reduktion geeignet.

Der zweite Punkt soll noch ausführlicher erläutert werden. Sieht man die Herleitung in der eben durchgeführten Form, so entsteht vielleicht der Eindruck, dass sie ein wenig umständlich und in Teilen technisch kompliziert ist. Zur Didaktisierung betrachten wir noch einmal die einzelnen Schritte.

1. Bestätigung der Formel von Pick für ein „beliebiges aber gutartiges“ Dreieck.
2. Betrachtung weniger gutartiger Dreiecke und Behebung von Problemen durch das Erkennen kompensierender Folgen.
3. Herleitung der Formel von Pick für ein e -Eck durch Zerlegung in $e - 2$ beliebige Dreiecke unter ausschließlicher Verwendung von Eckpunkten.
 - (a) Eine solche Zerlegung ist stets möglich (z. B. Beweis durch Induktion).
 - i. Hierzu notwendig: Beweis der Existenz einer inneren Diagonalen.

Da es um das Verständnis der Formel von Pick geht, sollte man bei einer Behandlung mit Schülern zunächst ganz ausführlich bei Schritt 1 verweilen. Nach der Anregung der Betrachtung der zu den Gitterpunkten gehörigen Quadrate können alle nötigen Argumente von den Schülern selbst entwickelt werden. Es sollte beispielgebunden anhand eines sinnvoll gewählten gutartigen Dreiecks gearbeitet werden. Die Idee der Kompensation durch Punktspiegelung am Mittelpunkt einer Seitenstrecke wird hier bereits entwickelt. Die Punktspiegelung wird in der Regel erst rückblickend identifiziert, nachdem anhand konkreter Quadrate einige kompensierenden Quadrate intuitiv erkannt worden sind.

Ist Punkt 1 ausführlich durchdrungen, so können konkrete Beispiele weniger gutartiger Dreiecke betrachtet werden. Probleme mit unvollständiger Kompensation können von den Schülern selbst erkannt werden. Die Lösung der Probleme erfolgt anhand der Rückschau auf Schritt 1. Auch einem kompensierenden Quadrat kann erneut ein kompensierendes Quadrat zugeordnet werden. Verschiedene Abbildungen

mit sämtlichen, farblich gekennzeichneten kompensierenden Folgen (vgl. Abbildung 3.15) sollten von den Schülern angefertigt werden.

Im dritten Schritt sind umfangreiche Reduktionen angebracht. Die Zerlegung eines e -Ecks in $e - 2$ Dreiecke kann an verschiedenen Beispielen von den Schülern selbst durchgeführt werden. Ein formaler Beweis (insbesondere der Unterpunkte (a) und i.) ist nicht zwingend notwendig, kann aber mit Abstrichen durchaus erarbeitet werden, wenn z. B. die Beweismethode der Induktion zur Verfügung steht.

Auf diese Weise kann man anstelle eines exakten Beweises¹¹ eine geometrische Begründung für die Formel von Pick erarbeiten, die bereits für sich ein lohnendes Betätigungsfeld darstellt.

3.6 Eine physikalische Interpretation

Im Folgenden soll ein physikalisches Gedankenexperiment erläutert werden, dessen Grundidee eine gewisse Verwandtschaft sowohl zu der im vorangegangenen Abschnitt behandelten geometrischen Herleitung des Satzes von Pick als auch zu der in Abschnitt 2.3.2 behandelten alternativen Interpretation der Pick-Zahl aufweist. Das Experiment wird in Blatter (2012) vorgestellt und ist grundsätzlich für die Behandlung mit Schülern geeignet, erfüllt jedoch meines Erachtens nicht die Ansprüche eines mathematischen Beweises, sondern kann als Ergänzung einem besseren Verständnis für die Formel von Pick dienen.

Wir betrachten hier erneut ein einfaches Gitterpolygon P mit den Kennzahlen i und $r = s + e$ für die jeweiligen Gitterpunktarten. Es existieren nur endlich viele Gitterpunkte, deren Abstand vom Rand von P positiv aber kleiner als 1 ist. Es gibt also einen (nicht eindeutig bestimmten) Gitterpunkt, dessen Abstand $d > 0$ vom Rand von P minimal ist.

Gedankenexperiment: Wir bestücken die gesamte Ebene \mathbb{R}^2 mit Kerzen, indem wir auf jeden Gitterpunkt eine Kerze mit dem Durchmesser d und dem Volumen 1 stellen. Durch die zu den Gitterpunkten gehörigen Quadrate (s.o.) wird die Ebene disjunkt in Bereiche mit dem Flächeninhalt 1 unterteilt, die jeweils genau eine Kerze enthalten. Wenn also alle Kerzen schmelzen, und sich das Wachs gleichmäßig über die ganze Ebene verteilt, besitzt der Flüssigkeitsspiegel die Höhe eins.

Schlussfolgerungen: Die Maßzahl des Wachsvolumens über P stimmt mit der des Flächeninhalts $\mu(P)$ überein. Wir betrachten nun zwei direkt benachbarte Eckpunkte A, B von P . Eine Punktspiegelung am Mittelpunkt M_{AB} überführt das Gitter in sich. Die Gesamtheiten aller Kerzen auf der einen bzw. anderen Seite der Geraden \overline{AB} werden durch eine solche also aufeinander abgebildet. Hieraus folgt: Wenn alle Kerzen geschmolzen sind, hat „in Summe“ kein Wachs die Trennlinie \overline{AB} überschritten. Diese Überlegung ist für jede Seitenlinie von P gültig.

¹¹bzw. zusätzlich zu einem solchen

Wenn wir längs des Randes von P eine Barriere errichten, welche die Kerzen auf dem Rand in einen inneren und einen äußeren Teil zertrennt, und die das Übertreten von Wachs verhindert, so erhalten wir durch das Schmelzen aller Kerzen – sowohl innerhalb als auch außerhalb von P – einen Flüssigkeitsspiegel der konstanten Höhe eins.

Wir überlegen uns nun, woher das Wachsvolumen V im Inneren von P stammt. Wegen $V = \mu(P)$ sollte diese Überlegung die Formel von Pick bestätigen. Jede Kerze, die auf einem inneren Gitterpunkt steht, trägt mit 1 zum Volumen bei. Alle diese Kerzen zusammen tragen also mit i zum Volumen bei. Jede Kerze, die auf einem Randgitterpunkt steht, wird durch die Barriere halbiert, trägt also mit $\frac{1}{2}$ zum Volumen bei. Insgesamt tragen diese also mit $\frac{s}{2}$ zum Volumen bei. Eine Kerze, die auf einem Eckpunkt X von P steht, trägt mit dem Volumen von $\frac{\alpha}{360^\circ}$ zu V bei, wenn α der Innenwinkel von P in X ist. Bezeichnen wir die Innenwinkel von P mit $\alpha_1, \dots, \alpha_e$, so tragen alle Kerzen auf Eckpunkten gemeinsam mit

$$\sum_{i=1}^e \frac{\alpha_i}{360^\circ} = \frac{(e-2) \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{e}{2} - 1$$

zum Volumen V bei. Wie gewünscht erhalten wir

$$\mu(P) = V = i + \frac{s}{2} + \frac{e}{2} - 1 = i + \frac{r}{2} - 1.$$

3.7 Verallgemeinerungen des Satzes von Pick

Der Satz von Pick ist in seiner Grundform nur für einfache, ebene Gitterpolygone gültig. Wie wir in Abschnitt 2.4 gesehen haben, ist eine Verallgemeinerung auf Polygonbereiche möglich. Für die Behandlung im Unterricht bietet es sich zunächst an, die Grenzen der Gültigkeit der Pickschen Formel von den Schülern selbst ausloten zu lassen. Sie können leicht herausfinden und formulieren, dass die Formel bei Vielecken, die überschlagen sind oder Löcher besitzen, versagt.

Man kann die Schüler in einer weiteren heuristischen Phase nach eigenen Verallgemeinerungen der Formel von Pick suchen lassen. Es ist z. B. gut möglich, dass die Schüler eine erweiterte Pick-Formel der Art

$$\mu = i + \frac{r}{2} + \ell - 1$$

entwickeln, in der ℓ die Anzahl der Löcher des Vielecks angibt. Was ein Loch ist, können die Schüler selbst möglichst genau beschreiben. Dabei stoßen sie vielleicht auf Probleme (Löcher, die an einer Ecke zusammenhängen oder Löcher, die einen gemeinsam Punkt mit dem Rand des Polygons besitzen) und können ihre Definitionen und Formeln verfeinern. Andernfalls weist man sie auf Problemfälle hin. Es

kann hier eine spannende Suche nach der allgemeinsten Formel angeregt werden, die sicher wieder ein hohes Motivationspotenzial beinhaltet.

Eine weitere naheliegende Frage ist die nach einer analogen Formel für dreidimensionale Gitterkörper. Es ist denkbar, dass man die Schüler Untersuchungen in dieser Richtung anstellen lässt, indem man sie z. B. zunächst zur Betrachtung achsenparalleler Quader auffordert. Die Schüler könnten eine Formel der Art

$$\mu(Q) = i_Q + \frac{f_Q}{2} + \frac{k_Q}{4} - 1$$

finden. Hierbei bezeichnet i_Q die Anzahl der inneren Gitterpunkte, f_Q die Anzahl der Gitterpunkte im relativen Inneren der Seitenflächen und k_Q die Anzahl der Gitterpunkte auf den Kanten eines Quaders Q .

Dass sich eine einfache allgemeine Formel für das Volumen eines dreidimensionalen Gitterpolyeders in Abhängigkeit der Gitterpunkt-Anzahlen in seinem Inneren bzw. auf seinen Kanten und Flächen nicht finden lässt, kann man sich an folgendem Beispiel¹² klarmachen: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten eine schiefe Pyramide, deren Grundseite das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 0, 0)$ ist, und deren Spitze der Punkt $S_n = (0, 0, n)$ ist (vgl. Abbildung 3.20).

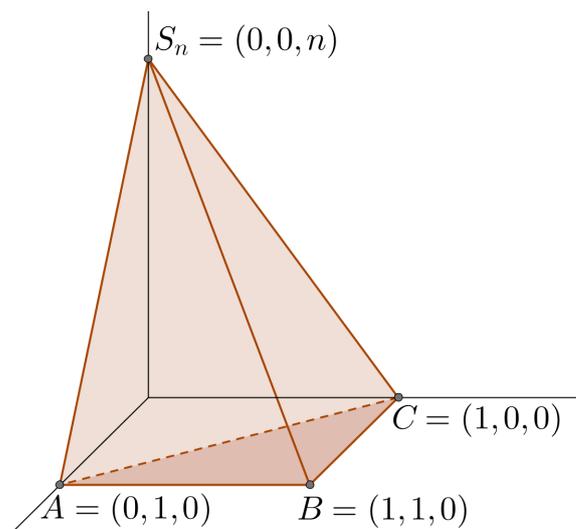


Abb. 3.20: Das „Reeve-tetrahedron“ zeigt: Ein einfaches Analogon der Formel von Pick für das Volumen dreidimensionaler Gitterkörper gibt es nicht.

Diese Pyramide besitzt einerseits das von n abhängige Volumen

$$V_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot n = \frac{n}{6},$$

¹² Das Beispiel findet sich in verschiedenen Veröffentlichungen, siehe etwa Ball (2003). Ursprünglich geht es auf Reeve (1957) zurück, weshalb die beschriebene Pyramide in der englischsprachigen Literatur bisweilen auch „Reeve-tetrahedron“ genannt wird.

wohingegen sie unabhängig von n stets genau 4 Gitterpunkte auf ihren Kanten und keine Gitterpunkte im Inneren oder auf den Flächen besitzt. Eine direkte Abhängigkeit des Volumens von diesen Anzahlen ist also nicht möglich.

Es sei darauf hingewiesen, dass es dennoch eine Verallgemeinerung des Satzes von Pick auf den dreidimensionalen Raum gibt. Diese geht, wie auch das beschriebene Gegenbeispiel, auf Reeve (1957) zurück und verwendet außer dem ganzzahligen Gitter $G_1 := \mathbb{Z}^3$ noch ein weiteres rationales Gitter. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$G_n := \left\{ \left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}, \frac{z}{n} \right) \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

das mit dem Faktor $\frac{1}{n}$ skalierte Gitter im \mathbb{R}^3 . Weiter sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes Gitterpolyeder¹³ und für $j \in \{1, n\}$ sei t_j die Anzahl aller Punkte des Gitters G_j , die in P liegen (innere und Randgitterpunkte) sowie r_j die Anzahl aller Punkte aus G_j , die auf dem Rand von P liegen (Gitterpunkte auf Kanten oder Flächen). Bezeichnet $V(P)$ das Volumen von P , so gilt

$$2(n-1)n(n+1)V(P) = 2(t_n - nt_1) - (r_n - nr_1).^{14} \quad (3.3)$$

Wir wollen die Funktionsweise der Formel anhand eines Beispiels illustrieren und betrachten den Simplex P mit den Eckpunkten $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 0, 0)$ und $S = (0, 0, 1)$, der in Abbildung 3.21 dargestellt ist.

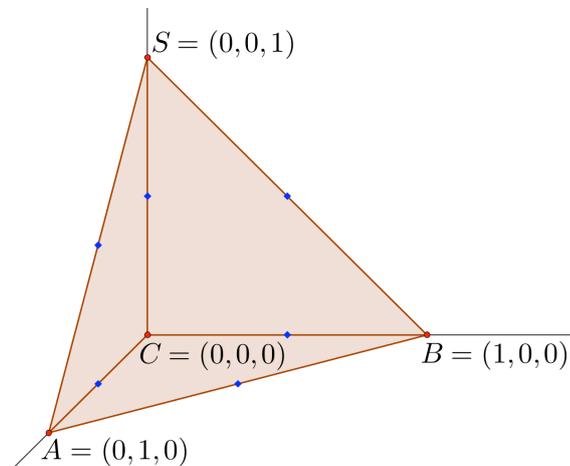


Abb. 3.21: Die blau markierten Punkte gehören zu $(G_2 \setminus G_1) \cap P$ und die rot markierten Punkte sind Elemente von $G_1 \cap P$.

Wir wählen $n = 2$, d. h., wir verwenden die Gitter $G_1 = \mathbb{Z}^3$ und $G_2 = \frac{1}{2}\mathbb{Z}^3$. Gleichung (3.3) wird für $n = 2$ zu

$$12V(P) = 2(t_2 - 2t_1) - (r_2 - 2r_1).$$

¹³ Dies meint, dass P ein konvexes Polyeder ist und alle Eckpunkte von P Elemente von \mathbb{Z}^3 sind.

¹⁴siehe Reeve (1957), S. 382

In Abbildung 3.21 sind die zu P gehörigen Punkte aus G_1 rot und die zu P gehörigen Punkte aus $G_2 \setminus G_1$ blau dargestellt. Wir beachten, dass keine inneren Gitterpunkte auftreten und erhalten $t_1 = r_1 = 4$ und $t_2 = r_2 = 10$, also

$$V(P) = \frac{1}{6}(10 - 2 \cdot 4) - \frac{1}{12}(10 - 2 \cdot 4) = \frac{1}{6}.$$

Reeve (1957) beweist noch einen allgemeineren Satz, in dem auf die Bedingung der Konvexität verzichtet werden kann und stellt zudem eine Vermutung für vierdimensionale Polyeder auf. Scott (1987) weist darauf hin, dass Macdonald (1963) zu allgemeinen Resultaten für beliebige Dimensionen gelangt.

3.8 Der Satz von Pick und die Zahlentheorie

Wie der Titel GEOMETRISCHES ZUR ZAHLENLEHRE bereits zum Ausdruck bringt, ordnet Pick (1899) seinen Artikel selbst in den Bereich der Zahlentheorie ein. So heißt es in der Einleitung:

„Es wird der Versuch gemacht, die Elemente der Zahlentheorie von vorn herein auf geometrische Basis zu stellen. Dazu dient eine trotz ihrer Einfachheit bisher, wie es scheint, unbemerkt gebliebene Flächenformel für Polygone, welche in ein Gitter eingezeichnet sind.“

Im Folgenden soll eine Reihe von Anwendungen des Satzes von Pick aus dem Bereich der Zahlentheorie diskutiert werden. Der Stil entspricht hier z. T. einer fachwissenschaftlichen Darstellung (nach dem Muster „*Definition – Satz – Beweis*“), trotzdem ist die Einordnung dieses Abschnitts in den fachdidaktischen Teil bewusst erfolgt, da der Aufbau kleinschrittig, didaktisch kommentiert und von zahlreichen Beispielen begleitet ist. Hinzu kommt, dass viele Beweise in diesem Abschnitt sehr anschaulich sind und z. T. neue, schülergerechte Zugänge ermöglichen.

3.8.1 Grundlegende Erkenntnisse

Wir arbeiten hier weiterhin im *kartesischen Koordinatensystem* in der Ebene \mathbb{R}^2 . Die Gitterpunkte sind genau die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.¹⁵

Wie bereits im fachwissenschaftlichen Teil bezeichnen wir Strecken, deren Endpunkte Gitterpunkte sind, als *Gitterstrecken*. Wir betrachten nun Geraden in der Ebene. Es gibt genau drei Sorten von Geraden:

¹⁵Wir folgen in diesem Abschnitt zunächst im Wesentlichen Pick (1899), der allerdings in einem Parallelogramm-Gitter arbeitet. Alle Resultate lassen sich ebenso gut in einem solchen herleiten.

1. Geraden, die keinen Gitterpunkt enthalten.
2. Geraden, die genau einen Gitterpunkt enthalten.
3. Geraden, die unendlich viele Gitterpunkte enthalten.

Als **Beispiel für die erste Sorte** betrachte man etwa die Gerade mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}.$$

Angenommen, ein Gitterpunkt (x, y) läge auf f . Dann folgt

$$y = \sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}.$$

Auf der linken Seite steht hier die ganze Zahl y , wohingegen auf der rechten Seite ein ganzzahliges Vielfaches von $\sqrt{2}$ vermehrt um $\frac{1}{2}$ steht, also eine irrationale Zahl, falls $x \neq 0$ ist, bzw. $\frac{1}{2}$ für $x = 0$. Diese Gleichung kann nicht erfüllt sein, die betrachtete Gerade kann also keine Gitterpunkte enthalten. Man kann unendlich viele solcher Beispiele erzeugen, indem man Funktionen der Form

$$f(x) = \eta x + q$$

betrachtet, wobei η eine beliebige irrationale Zahl und $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ sei.

Als **Beispiele für die zweite Sorte** können wir Geraden mit einer Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = \eta x + z \quad \text{mit } z \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

betrachten. Es gilt $f(0) = z$, also liegt der Gitterpunkt $(0, z)$ auf der Geraden. Für ganzzahliges $x \neq 0$ ist der Funktionsterm aber irrational, so dass keine weiteren Gitterpunkte auf der Geraden liegen können.

Geraden von der dritten Art erhält man stets, wenn man eine Gerade durch zwei Gitterpunkte zeichnet. Diese wollen wir hier in Anlehnung an Pick (1899) *Gittergeraden* nennen. Sie enthalten unendlich viele Gitterpunkte, die äquidistant auf ihnen verteilt sind. Man kann sich dies folgendermaßen klar machen: Eine Verschiebung, die einen beliebigen Gitterpunkt auf einen anderen abbildet, überführt das Gitter in sich. Liegen nun zwei Gitterpunkte A, B auf einer Geraden g und betrachten wir die Verschiebung, die A auf B abbildet, so liegt der Bildpunkt B' von B wieder auf g und der Abstand von B zu B' ist gleich dem Abstand von A zu B . Ebenso sieht man ein, dass zwei parallele Gittergeraden kongruente Gitterpunkt-Verteilungen besitzen (siehe Abbildung 3.22).

Da wir jede Gitterstrecke als Abschnitt einer Gittergeraden auffassen können, wird eine solche durch die auf ihr liegenden Gitterpunkte in eine gewisse Anzahl m von Abschnitten gleicher Länge unterteilt. Betrachten wir ganze Zahlen $a, b \neq 0$ und die Gitterstrecke, die den Gitterpunkt $P = (a, b)$ mit dem *Koordinatensprung*

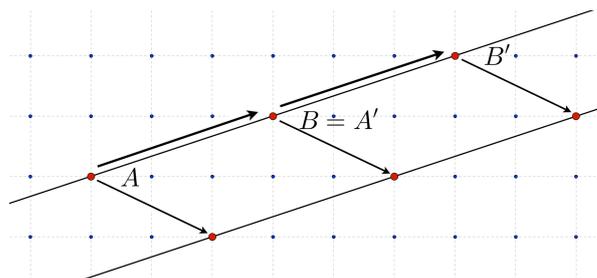


Abb. 3.22: Gittergeraden enthalten unendliche viele Gitterpunkte in äquidistanter Verteilung. Parallele Gittergeraden besitzen kongruente Gitterpunktverteilungen.

$O = (0, 0)$ verbindet, so lässt sich eine für unsere weiteren Untersuchungen wichtige Beobachtung anstellen: Die Anzahl m der Abschnitte stimmt stets mit dem *größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b* überein, welchen wir in der Folge mit $\text{ggT}(a, b)$ notieren wollen. Wir machen uns dies klar:¹⁶

Wir betrachten die Menge aller auf OP liegenden Gitterpunkte. Diese unterteilen die Strecke in m gleich große Abschnitte. Konstruieren wir durch jeden dieser Gitterpunkte das Lot auf die x -Achse, so erhalten wir dadurch eine äquidistante Unterteilung der Strecke zwischen dem Ursprung und dem Punkt $(a, 0)$ in m Abschnitte ganzzahliger Länge (vgl. Abbildung 3.23).

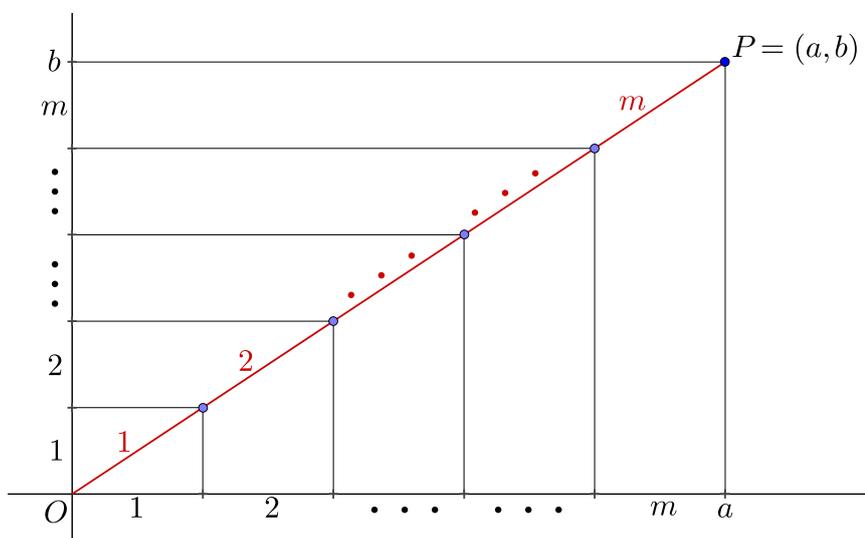


Abb. 3.23: Die Unterteilung der Strecke OP durch Gitterpunkte in m Abschnitte liefert Unterteilungen der Teilstücke mit den Längen a, b auf der x - bzw. y -Achse. Die Abschnitte auf den Achsen besitzen stets ganzzahlige Längen (die Längenmaßzahl ist der Komplementärteiler von m bezüglich a bzw. b).

¹⁶Die folgende Argumentation veranschaulichen wir für positive Zahlen a, b . Sie lässt sich völlig analog führen, falls a, b nicht beide positiv sind.

Daher ist m ein Teiler von a . Durch eine analoge Konstruktion unterteilen wir die Strecke auf der y -Achse zwischen O und $(0, b)$ in m gleiche Abschnitte ganzzahliger Länge. Damit gilt auch $m|b$, also ist m ein gemeinsamer Teiler von a und b .

Es sei nun k ein beliebiger gemeinsamer Teiler von a und b . Dann finden wir ganze Zahlen p, q , so dass

$$a = p \cdot k \quad \text{und} \quad b = q \cdot k$$

gilt. Dies liefert eine Unterteilung der Strecke zwischen O und $(a, 0)$ auf der x -Achse in k Abschnitte der Länge p . Ebenso erhalten wir auf der y -Achse eine Zerlegung der Strecke zwischen O und $(0, b)$ in k Abschnitte der Länge q . Die Unterteilungspunkte sind

$$(p, 0), (2p, 0), \dots, (kp, 0) \quad \text{auf der } x\text{-Achse,}$$

sowie

$$(0, q), (0, 2q), \dots, (0, kq) \quad \text{auf der } y\text{-Achse.}$$

Jeder der Punkte

$$(p, q), (2p, 2q), \dots, (kp, kq)$$

ist ein Gitterpunkt, und da für alle $j \in \{1, \dots, k\}$

$$\frac{jp}{jq} = \frac{p}{q} = \frac{p \cdot k}{q \cdot k} = \frac{a}{b}$$

gilt, liegen sie alle auf der Strecke OP . Damit unterteilen diese Gitterpunkte die Strecke OP in k Abschnitte. Da die vorherige Unterteilung durch sämtliche auf der Strecke OP befindlichen Gitterpunkte m Abschnitte lieferte, folgt $k \leq m$.

Bereits die bis hier angestellten Beobachtungen bieten ein lohnendes Betätigungsfeld für den Mathematikunterricht. Die Schüler können in einer heuristischen Phase Entdeckungen machen und diese auf unterschiedlichsten Niveaustufen begründen. Es lassen sich weitere bemerkenswerte Beobachtungen anstellen, die ein aufschlussreiches Zusammenspiel von Geometrie und Zahlentheorie offenbaren.

3.8.2 Darstellung des ggT als Linearkombination

Wir haben gesehen, wie wir den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen $a, b \neq 0$ auf geometrischem Wege ermitteln können. Der folgende Satz ist ein zentrales Resultat der elementaren Zahlentheorie.

Satz 3.1. (*Darstellung des ggT als Linearkombination*)

Für alle ganzen Zahlen $a, b \neq 0$ lässt sich $\text{ggT}(a, b)$ stets als **ganzzahlige Linearkombination** von a und b darstellen, d. h., es existieren $u, v \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\text{ggT}(a, b) = av - bu$$

gilt.

Eine konstruktive Möglichkeit, die Existenz solcher Zahlen u, v einzusehen, verwendet den *Euklidischen Algorithmus*.

Wir betrachten ein Beispiel: Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 495 und 210. Wir führen eine wiederholte Division mit Rest durch:

$$\begin{aligned} 495 &= 2 \cdot 210 + 75 \\ 210 &= 2 \cdot 75 + 60 \\ 75 &= 1 \cdot 60 + 15 \\ 60 &= 4 \cdot 15 + 0 \end{aligned}$$

Der letzte von 0 verschiedene Rest, der in diesem Algorithmus auftaucht, ist der größte gemeinsame Teiler der beiden Startzahlen. Hier haben wir also $\text{ggT}(495, 210) = 15$ herausgefunden.¹⁷ Die durchgeführte Rechnung liefert die Darstellung der Zahl 15 als Linearkombination der Zahlen 495 und 210 im Grunde genommen gleich mit. Die im Algorithmus aufgestellten Gleichungen werden ausgehend von der vorletzten Zeile, die wir nach 15 auflösen, von unten nach oben ineinander eingesetzt:

$$\begin{aligned} 15 &= 75 - 60 \\ &= 75 - (210 - 2 \cdot 75) \\ &= 3 \cdot 75 - 210 \\ &= 3 \cdot (495 - 2 \cdot 210) - 210 \\ &= 3 \cdot 495 - 7 \cdot 210. \end{aligned}$$

Dies ist sicher ein gutes und einfaches Verfahren, um den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen als Linearkombination derselben darzustellen. Man kommt anhand des Beispiels wohl zu der Überzeugung, dass sich das Verfahren auf beliebige ganze Zahlen $a, b \neq 0$ anwenden lässt. Es ist nicht schwierig, jedoch mühsam und wenig elegant, dieses auf einen Beweis mit Variablen zu übertragen.¹⁸ Zudem wird ein solcher Beweis – aus nachvollziehbaren Gründen der leichteren Lesbarkeit – in der Literatur nur selten vollständig exakt durchgeführt (man muss mit einer unbekanntem Anzahl an Resten $r_1, \dots, r_n > 0$, also mit $n + 1$ Gleichungen hantieren). Eine Suche nach alternativen Beweismöglichkeiten erscheint also lohnend. Wir führen nun zunächst einen eleganteren Beweis für Satz 3.1 durch¹⁹ und analysieren diesen anschließend.

Beweis. (von Satz 3.1) Wir betrachten die Menge

$$S = \{av - bu \mid u, v \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad av - bu > 0\}.$$

¹⁷Wir wollen hier nicht weiter darauf eingehen, warum der Algorithmus stets den ggT liefert. Für eine sehr ausführliche und verständliche Darstellung konsultiere man z. B. Padberg (1999).

¹⁸siehe z. B. Padberg (1999), S. 118/119

¹⁹Wir folgen dabei im Wesentlichen der Darstellung in Burton/Dalkowski (2005).

S ist eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, die offenbar nicht leer ist. Sie besitzt also nach dem Wohlordnungsprinzip ein kleinstes Element d . Wir werden zeigen, dass $d = \text{ggT}(a, b)$ ist. Da d ein Element von S ist, finden wir ganze Zahlen u_0, v_0 mit

$$d = av_0 - bu_0.$$

Wir wollen jetzt nachweisen, dass d ein Teiler von a ist. Nach dem Satz von der Division mit Rest²⁰ finden wir ganze Zahlen q, r mit

$$a = q \cdot d + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < d.$$

Wir weisen nach, dass $r = 0$ gilt. Dazu stellen wir nach r um und setzen die uns bekannte Darstellung von d als Linearkombination ein. Es gilt

$$r = a - qd = a - q(av_0 - bu_0) = (1 - qv_0)a - (-qu_0)b.$$

Wir haben also r als Linearkombination von a und b dargestellt. Wäre $r > 0$, so müsste $r \in S$ gelten, was aber wegen $r < d$ und der Minimalität von d nicht sein kann. Also gilt $r = 0$ und damit $d|a$. Auf dieselbe Weise können wir einsehen, dass d ein Teiler von b ist.

Sei nun c ein beliebiger gemeinsamer Teiler von a und b . Wir wollen zeigen, dass $c \leq d$ gilt. Aus $c|a$ und $c|b$ folgt

$$c|(av_0 - bu_0),$$

also $c|d$. Damit muss aber $c \leq d$ gelten, denn entweder ist c negativ und damit automatisch kleiner als d (aufgrund der Definition von S ist d positiv) oder c, d sind beide positiv. Dann folgt aus $c|d$ direkt $c \leq d$. Der Beweis ist abgeschlossen. \square

Dies ist ein tadelloser Beweis, denn er ist gut nachvollziehbar, exakt und zudem elegant. Trotzdem wirft er zwei Fragen auf:

1. Wie kommt man darauf, die Menge S und ihr kleinstes Element zu betrachten?
2. Kann man aus dieser nicht-konstruktiven Beweisidee eine konstruktive Methode ableiten?

Fragen wie die **erste** – also solche von der Art „... wie kommt man darauf, ...?“ – stellen sich Lernenden bei der Arbeit mit Fachbüchern häufig, denn die Darstellung in mathematischen Fachtexten ist typischerweise streng deduktiv.²¹ Das Finden von

²⁰Für eine verständliche und ausführliche Darstellung sowohl des Satzes von der Division mit Rest als auch für das Wohlordnungsprinzip siehe etwa Padberg (1999).

²¹„Die deduktive Darstellungsform wird von Mathematikern in Fachzeitschriften, Büchern und überwiegend auch in Vorlesungen [...] benützt. Sie hat sich im 20. Jhdt. geradezu zu einem Programm entwickelt, das der Mathematik eine eigentümliche Autonomie verleiht. Hinzu kommt der Gebrauch idiosynkratischer Wendungen wie »trivial«, »offensichtlich«, [...]“ (Wittmann (1981), S. 142)

Sätzen und deren Beweisen findet aber in der Regel auf einem anderen, nämlich einem induktiven, Wege statt.²² Ein möglicher solcher Weg zu Satz 3.1 und dessen Beweis soll hier exemplarisch aufgezeigt werden.

„*Einer der Ausgangspunkte induktiven Schließens ist die Beobachtung.*“ (Schwarz (2006), S. 145) Beobachtungen lassen sich an Beispielen anstellen, an die der Erkenntnissuchende ähnliche Anforderungen stellen sollte wie der Lehrende. Sie dürfen nicht zu kompliziert sein, um Überblick zu ermöglichen und das Erkennen von Mustern und Regelmäßigkeiten zu erleichtern. Sie sollten aber auch nicht zu schlicht sein, da sonst etwaige Muster eventuell gar nicht auftreten oder im speziellen Beispiel eigene Regelmäßigkeiten ins Spiel kommen, die keinen Schluss auf die allgemeine Situation zulassen. Beispiele, die in unserer Situation sicher nicht als erste betrachtet werden sollten, sind etwa teilerfremde Zahlen oder eine Zahl und ein Vielfaches von dieser. Wir wählen etwa $a = 21$, $b = 15$. Es gilt $\text{ggT}(21, 15) = 3$, so dass wir die Gleichung $21u - 15v = 3$ ohne ein Verfahren an der Hand zu analysieren haben. Also „probieren“ wir:

$$\begin{array}{rcl} 21 \cdot 1 - 15 \cdot 1 & = & 6 \\ 21 \cdot 2 - 15 \cdot 1 & = & 27 \\ 21 \cdot 2 - 15 \cdot 2 & = & 12 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 21 \cdot 1 - 15 \cdot 2 & = & -9 \\ 21 \cdot 3 - 15 \cdot 2 & = & 33 \\ 21 \cdot 2 - 15 \cdot 3 & = & -3 \end{array}$$

Die Gleichung ist gelöst. Aus $21 \cdot 2 - 15 \cdot 3 = -3$ gewinnen wir die Darstellung

$$15 \cdot 3 - 21 \cdot 2 = 3.$$

Wichtiger ist jedoch zu bemerken, dass alle beim Probieren erhaltenen Ergebnisse Vielfache von 3 sind. Können wir alle Vielfachen von 3 auf diese Weise erhalten? Ja, denn mit der Darstellung des ggT erhalten wir durch Multiplikation der Gleichung mit dem entsprechenden Faktor auch die Darstellung eines beliebigen Vielfachen. Eine sinnvolle Vermutung lautet nun etwa

$$V_{\text{ggT}(a,b)} = L(a, b),$$

wobei $V_{\text{ggT}(a,b)}$ die Menge aller ganzzahligen Vielfachen von $\text{ggT}(a, b)$ und $L(a, b)$ die Menge aller Linearkombinationen von a, b bezeichne. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, wie wichtig das *Aufstellen von Vermutungen* als Teilschritt eines mathematischen Problemlöseprozesses generell ist. Mason/Burton/Stacey (2006) äußern sich auf S. 67 folgendermaßen: „*Vermutungen [...] bilden das Rückgrat der mathematischen Arbeit. [...] Meist ist schon die halbe Arbeit getan, wenn man ein Gefühl dafür entwickelt, wie die Verhältnisse liegen, und man eine Vermutung aussprechen*

²² „*Ein Mathematiker ist gewöhnt zu objektivieren. Er publiziert nicht seine Gedankengänge, sondern eine objektivierende Bearbeitung: [...] Wenn er von den Überlegungen, die ihn zum Ziele führten, etwas veröffentlichte, käme er sich vor, als stände er in der Unterhose auf der Straße.*“ (Freudenthal (1963), S. 15)

kann.“ Vor allem Studienanfängern und Schülern sollte zudem bewusst gemacht werden, dass mit dem Aussprechen einer Vermutung deren konsequente Untersuchung einhergehen muss, die die Bestätigung oder Widerlegung derselben anstrebt. Ein häufig zu beobachtendes Phänomen in mathematischen Gruppen- oder Partner-Diskussionen – sowohl in Seminaren an der Universität als auch im Schulunterricht – besteht darin, dass eine Reihe von Vermutungen ausgesprochen wird, aber keine davon näher untersucht wird. Ein Fortschreiten im Problem findet nicht statt, obwohl eine Reihe sinnvoller Ansätze im Raum steht. Um dieser „Lähmung“ zu entkommen, empfiehlt es sich, Vermutungen konsequent zu verschriftlichen, und deren wasser-dichte Bestätigung bzw. Widerlegung als Arbeitsauftrag an sich selbst zu stellen.

Wenden wir uns wieder den Überlegungen zu Satz 3.1 zu. Die ausgesprochene Vermutung wird also untersucht und stellt sich als wahr heraus. Da $\text{ggT}(a, b)$ die kleinste positive Zahl in der Menge $V_{\text{ggT}(a,b)}$ ist, und diese mit $L(a, b)$ übereinstimmt, muss die kleinste positive Linearkombination die Lösung liefern. Auf Grundlage dieser Erkenntnis ist das Betrachten der Menge

$$S = \{av - bu \mid u, v \in \mathbb{Z} \text{ und } av - bu > 0\}.$$

jetzt naheliegend, die Beweisidee zu Satz 3.1 gefunden. Dem Minimum von S die Eigenschaften des ggT nachzuweisen, ist – wie oben gesehen – ohne größere Probleme möglich.

Wenden wir uns der **zweiten Frage** zu: Wie finden wir Zahlen u, v , die die Gleichung $\text{ggT}(a, b) = av - bu$ erfüllen? Pick (1899) zeigt eine geometrische Methode auf, die die Existenz der gesuchten Zahlen u, v beweist und zudem konstruktiv ist. Zentral ist eine anschauliche Interpretation des Ausdrucks $av - bu$. In der analytischen Geometrie wird häufig eine Flächenformel für ein von zwei Vektoren aufgespanntes Parallelogramm behandelt, die dem genannten Ausdruck bis auf Betragsstriche gleicht (vgl. Abbildung 3.24 (a)) und für unsere weiteren Überlegungen zentral ist.

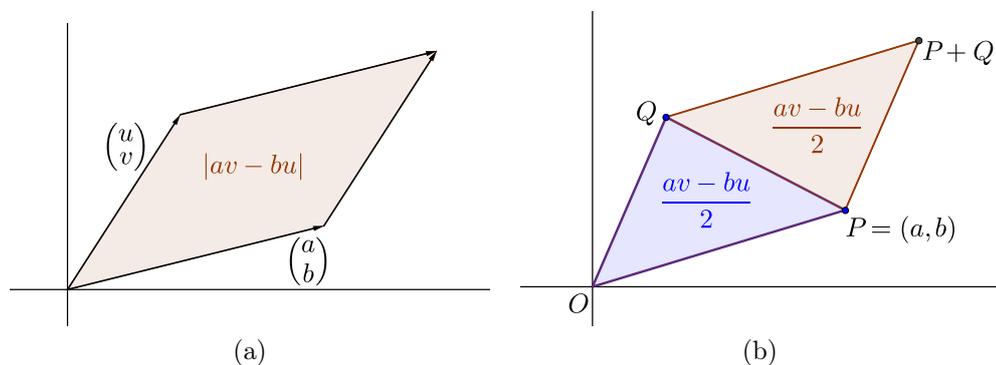


Abb. 3.24: (a) Flächenformel für ein Vektorparallelogramm (b) Das positiv orientierte Dreieck OPQ besitzt den Flächeninhalt $\frac{av-bu}{2}$.

Wir kommen hier ohne die Begriffe der analytischen Geometrie aus. Die Betragsstriche verschwinden, wenn das Dreieck mit den Eckpunkten $O = (0, 0)$, $P = (a, b)$ und $Q = (u, v)$ positiv orientiert ist. Die benötigte elementare Flächenformel wird im folgenden Lemma formuliert und anschließend bewiesen.

Lemma 3.2. *Es seien $P = (a, b)$, $Q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ derart, dass das Dreieck OPQ positiv orientiert ist.²³ Außerdem sei $R := P + Q$. Dann gilt*

$$\mu(OPRQ) = av - bu \quad \text{und} \quad \mu(OPQ) = \frac{av - bu}{2}.$$

Beweis. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass P im ersten Quadranten liegt. Sollte dies nicht der Fall sein, können wir die gewünschte Konstellation durch eine Drehung stets herstellen. Abbildung 3.25 zeigt drei, von der Lage des Punktes Q abhängige, Situationen.

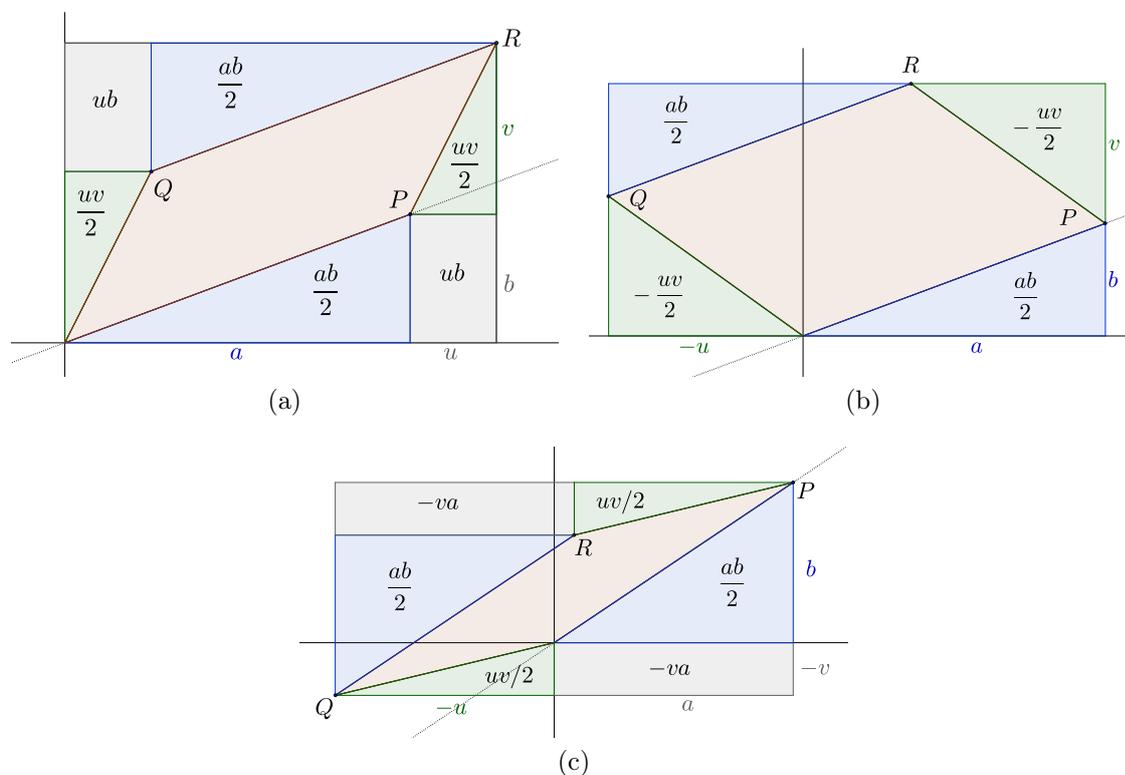


Abb. 3.25: Der Punkt Q liegt im ersten (a), im zweiten (b) oder im dritten Quadranten (c). Wegen der positiven Orientierung des Dreiecks OPQ liegt Q auf jeden Fall oberhalb der Geraden \overline{OP} .

Fall (a): Q liegt im ersten Quadranten. Dann gilt

$$\mu(OPRQ) = (a + u)(b + v) - ab - uv - 2ub = av - ub.$$

²³Unter positiver Orientierung verstehen wir wie üblich, dass der Umlaufsinn gegen den Uhrzeigersinn erfolgt.

Fall (b): Q liegt im zweiten Quadranten: Dann gilt

$$\mu(OPRQ) = (a + (-u))(b + v) - ab - uv = av - ub.$$

Fall (c): Q liegt im dritten Quadranten: Dann gilt

$$\mu(OPRQ) = (a + (-u))(b + (-v)) - ab - uv + 2av = av - ub.$$

Da das Dreieck OPQ durch Halbieren des Parallelogramms entsteht, erhalten wir in jedem der drei Fälle

$$\mu(OPQ) = \frac{1}{2}\mu(OPRQ) = \frac{av - ub}{2}.$$

□

Die geometrische Methode zum Auffinden der Zahlen u, v ist jetzt naheliegend. Wir suchen die kleinste positive Zahl der Form $av - bu$ mit $u, v \in \mathbb{Z}$. Aufgrund der betrachteten Flächenformel bedeutet dies, dass wir das kleinste, positiv orientierte Gitterdreieck OPQ finden müssen. Hierbei ist der Gitterpunkt $P = (a, b)$ vorgegeben und $Q = (u, v)$ ist zu ermitteln. Wir verschieben eine zu \overline{OP} parallele Gerade g von \overline{OP} ausgehend nach oben, bis mindestens ein Gitterpunkt $Q = (u, v)$ auf g liegt (vgl. Abbildung 3.26).

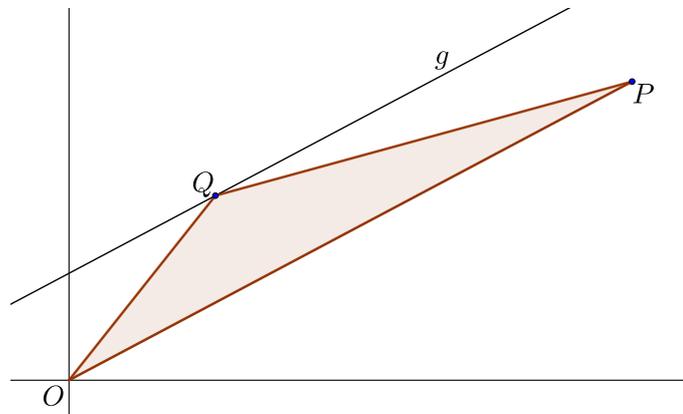


Abb. 3.26: Der Gitterpunkt Q hat minimalen orthogonalen Abstand zu \overline{OP} .

Folglich liegen weder Gitterpunkte im Inneren des Dreiecks OPQ noch auf dem relativen Inneren einer der Strecken OQ oder QP . Es sei $m := \text{ggT}(a, b)$. Die Strecke OP wird von den auf ihr liegenden Gitterpunkten in m Abschnitte unterteilt, also liegen $m + 1$ Gitterpunkte auf ihr. Insgesamt besitzt OPQ daher $m + 2$ Randpunkte, und mit dem Satz von Pick folgt

$$\mu(OPQ) = 0 + \frac{m + 2}{2} - 1 = \frac{m}{2}.$$

Nach Lemma 3.2 gilt hingegen $\mu(OPQ) = \frac{av-bu}{2}$, woraus

$$av - bu = \text{ggT}(a, b)$$

folgt.

Die Methode soll anhand eines Beispiels illustriert werden (siehe Abbildung 3.27).

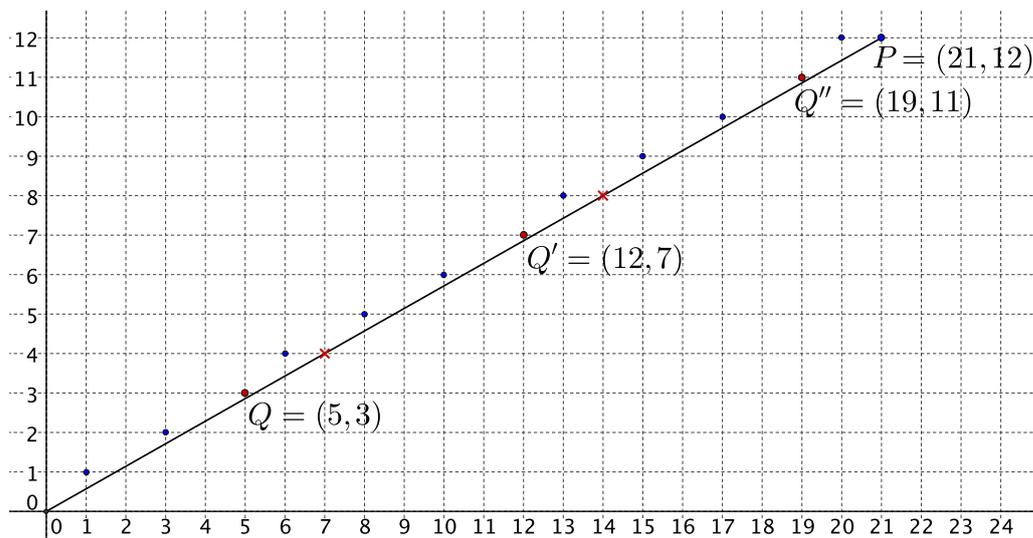


Abb. 3.27: geometrische Bestimmung von Lösungen der Gleichung $12u - 21v = 3$

Gesucht ist eine Darstellung von $\text{ggT}(a, b)$ als Linearkombination der Zahlen $a = 21$ und $b = 12$. Wir betrachten also die Strecke OP , wobei $P = (21, 12)$ sei. Die Strecke wird wegen $\text{ggT}(21, 12) = 3$ von den auf ihr liegenden Gitterpunkten in drei Abschnitte unterteilt. Das Beispiel zeigt, dass es mehr als einen Gitterpunkt gibt, dessen orthogonaler Abstand zu \overline{OP} minimal ist. Im betrachteten Bereich finden wir drei Punkte, die auf den ersten Blick in Frage kommen, nämlich $Q = (5, 3)$, $Q' = (12, 7)$ und $Q'' = (19, 11)$. In der Tat liefert jeder dieser Punkte eine Lösung, denn es gilt

$$21 \cdot 3 - 12 \cdot 5 = 3 \quad \text{und} \quad 21 \cdot 7 - 12 \cdot 12 = 3 \quad \text{und} \quad 21 \cdot 11 - 12 \cdot 19 = 3.$$

Das Beispiel eignet sich auch, um einen weiteren allgemeinen Zusammenhang herauszuarbeiten. Wegen $\text{ggT}(21, 12) = 3$ wird die Strecke OP in drei Abschnitte gleicher Länge unterteilt. Über jedem dieser Abschnitte finden wir genau eine Lösung der Gleichung $21u - 12v = 3$. Betrachten wir anstelle der Strecke OP die Gerade \overline{OP} , so liegen auf dieser unendlich viele Gitterpunkte in äquidistanter Verteilung, und wir erhalten unendlich viele Lösungen.

Wir sehen außerdem, wie die verschiedenen Lösungen auseinander hervorgehen. Wir erhalten $Q' = (12, 7)$ aus $Q = (5, 3)$, indem wir die x -Koordinate um 7 und die y -Koordinate um 4 erhöhen. Aus Q' erhalten wir $Q'' = (19, 11)$ auf dieselbe Weise.

Eine weitere Lösung sollte folglich $Q''' = (26, 15)$ sein. In der Tat gilt

$$21 \cdot 15 - 12 \cdot 26 = 3.$$

Auf Grundlage dieser Beobachtungen ist es leicht, einen weiteren aus der elementaren Zahlentheorie wohlbekannten Satz zu formulieren und auf geometrischem Wege zu beweisen.

Satz 3.2. *Es seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $m := \text{ggT}(a, b)$ sowie $a' := \frac{a}{m}$ und $b' := \frac{b}{m}$. Dann besitzt die Gleichung*

$$av - bu = m \tag{3.4}$$

unendlich viele Lösungen. Ist (u_0, v_0) eine beliebige Lösung, so besitzen alle Lösungen die Gestalt

$$(u_0 + ja', v_0 + jb'), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Es sei wie zuvor $P = (a, b)$. Wir betrachten erneut \overline{OP} sowie eine dazu parallele Gerade g , welche von \overline{OP} aus nach oben verschoben wird, bis wenigstens ein Gitterpunkt auf ihr liegt. Dann gilt

$$(u, v) \text{ ist Lösung von (3.4)} \iff (u, v) \text{ ist Gitterpunkt und liegt auf } g.$$

Wir weisen dies nach. Es sei zunächst $Q_0 = (u_0, v_0)$ ein Gitterpunkt, der auf g liegt. Wie zuvor stellt man fest, dass das Dreieck OPQ_0 keine inneren und genau $m + 2$ Randgitterpunkte besitzt. Sein Flächeninhalt ist also nach dem Satz von Pick gleich $\frac{m}{2}$. Nach Lemma 3.2 ist der Flächeninhalt gleich $\frac{av_0 - bu_0}{2}$, woraus $av_0 - bu_0 = m$ folgt.

Nun sei $Q = (u, v)$ eine Lösung von (3.4). Dann ist Q ein Gitterpunkt, und indem wir (3.4) durch 2 dividieren, erhalten wir

$$\frac{av - bu}{2} = \frac{m}{2}.$$

Das bedeutet, dass das Dreieck OPQ denselben Flächeninhalt besitzt wie das oben betrachtete Dreieck OPQ_0 . Da die beiden Dreiecke die Grundseite OP gemeinsam haben, besitzen sie über dieser auch dieselbe Höhe. Wegen $Q_0 \in g$ ist die Länge dieser Höhe gleich dem orthogonalen Abstand von \overline{OP} zu g (siehe Abbildung 3.28). Es folgt $Q \in g$.

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch nachweisen, dass sämtliche Gitterpunkte auf g von der Gestalt $(u_0 + ja', v_0 + jb')$, $j \in \mathbb{Z}$, sind. Hierbei ist $Q_0 = (u_0, v_0)$ ein beliebiger Gitterpunkt auf g , dessen Existenz wir aufgrund der Konstruktion von g nicht nachweisen müssen.

Wie wir bereits wissen, wird die Strecke OP durch die auf ihr liegenden Gitterpunkte

$$P_j := (ja', jb'), \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

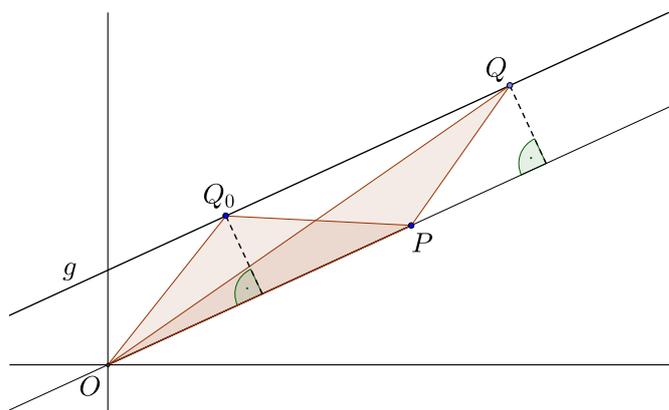


Abb. 3.28: Die Dreiecke OPQ_0 und OPQ besitzen denselben Flächeninhalt, also auch dieselbe Höhe über der gemeinsamen Seite OP .

in m Abschnitte gleicher Länge unterteilt. Die Gerade \overline{OP} wird durch die Gitterpunkte P_j , $j \in \mathbb{Z}$, in unendlich viele solcher Abschnitte zerlegt. Die Menge $\{P_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ ist die Menge aller Gitterpunkte auf \overline{OP} .

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts 3.8.1 bemerkt, besitzen g und \overline{OP} als zueinander parallele Geraden kongruente Gitterpunktverteilungen. Hieraus folgt direkt, dass alle weiteren Gitterpunkte auf g die Gestalt $Q_j = (u_o + ja', v_o + jb')$, $j \in \mathbb{Z}$, besitzen (vgl. Abbildung 3.29). Der Beweis ist abgeschlossen. \square

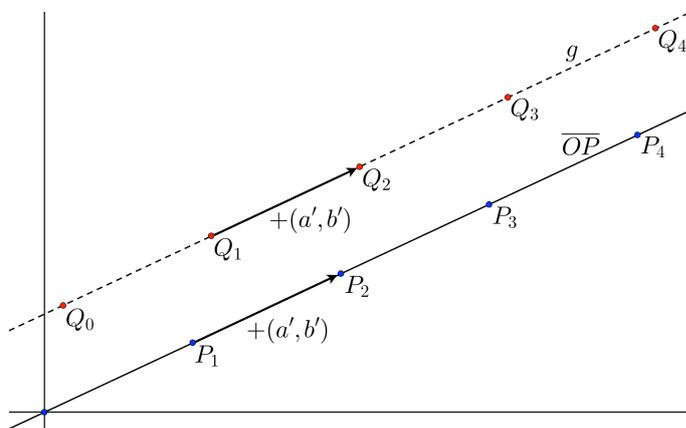


Abb. 3.29: Die Geraden g und \overline{OP} besitzen kongruente Gitterpunktverteilungen.

3.8.3 Brüche im Koordinatensystem und Farey-Folgen

Wir wollen hier ein weiteres fruchtbares Betätigungsfeld für Mathematik-Lernende, das verblüffende Bezüge zum Satz von Pick aufweist, beleuchten und einen mög-

lichen Unterrichtsgang andeuten²⁴. Die grundlegenden Eigenschaften von Farey-Folgen sind wohlbekannt und finden sich (auf rein zahlentheoretischer Basis hergeleitet) z. B. bei Hardy/Wright (1958). Zusammenhänge zwischen dem Satz von Pick und Farey-Folgen werden in Honsberger (1970) sowie Arcavi/Bruckheimer (1995) aufgezeigt. Es sei noch angemerkt, dass bereits Pick (1899) seinen Satz anwendet, um eine grundlegende Eigenschaft der Farey-Folgen nachzuweisen.

Begriffsklärung

Wir unterscheiden in diesem Abschnitt die Ausdrücke *rationale Zahl* und *Bruch* folgendermaßen: Die Elemente von \mathbb{Q} bezeichnen wir wie üblich als rationale Zahlen. Jede solche kann auf unendlich viele Weisen dargestellt werden, so gilt z. B.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = 0,75 = \frac{42\sqrt{3\pi}}{56\sqrt{3\pi}} = \dots$$

Eine *rationale Zahl* ist eine Äquivalenzklasse, die durch Angabe eines beliebigen Repräsentanten angesprochen werden kann. Jede Darstellung einer rationalen Zahl durch die Angabe von Zähler $y \in \mathbb{Z}$ und Nenner $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ in der Form $\frac{y}{x}$ nennen wir einen *Bruch*. Dabei sagen wir, dass zwei Brüche gleich sind, wenn sie denselben Zähler und denselben Nenner besitzen. Andernfalls sind sie voneinander verschieden. Wir identifizieren also jeden Bruch $\frac{y}{x}$ mit einem Paar $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ (also vor der Bildung von Äquivalenzklassen). So sind z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ voneinander verschieden, obwohl sie Darstellungen derselben rationalen Zahl sind. Wir wollen auf zusätzliche Begriffsbildungen wie etwa den „Wert eines Bruches“ verzichten. Wir werden auch weiterhin Gleichungen wie $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ schreiben, wenn die Gefahr einer Fehlinterpretation durch den Leser als gering angesehen wird.

Die erläuterte Begriffstrennung ist aus didaktischer Sicht durchaus diskussionswürdig, wird sich aber im folgenden Abschnitt definitiv als nützlich erweisen. Für eine Behandlung der hier vorgestellten Inhalte mit Schülern müssen die unterschiedlichen Begriffe meines Erachtens nur gegebenenfalls, d. h. auf Nachfrage, thematisiert werden.²⁵

²⁴ Andeuten meint hier, dass wir die Erkenntnisse und Resultate in einer Schrittfolge herleiten, die für Schüler angemessen wäre und stets aufzeigt, wie Beweisideen etc. zustande kommen. Trotzdem ähnelt die Struktur („Definition – Satz – Beweis“) weiterhin eher einem Fachtext.

²⁵ Eine analoge Begriffstrennung unter ausschließlicher Betrachtung positiver Zähler und Nenner findet in Padberg/Danckwerts/Stein (1995) unter Verwendung der Worte *Bruch* und *Bruchzahl* statt. Zur Frage der Thematisierung im Unterricht äußert sich Padberg folgendermaßen: „Es ist unbestritten, dass insbesondere den Lehrern, aber auch den Schülern der Unterschied zwischen einem Bruch und einer Bruchzahl als Klasse gleichwertiger Brüche bekannt sein sollte. [...] Ferner ergibt es keinen Sinn, aus übertriebenen Exaktheitsgründen oder wegen mathematischer Gewissensbisse (, die kein Schüler nachvollziehen kann,) die Sprechweise unnötig kompliziert zu gestalten, ohne dass dies irgendeinen wirklichen Gewinn erbringt.“ (Padberg (2002), S. 33)

Darstellung von Brüchen im Koordinatensystem

Wie oben erläutert identifizieren wir einen Bruch $\frac{y}{x}$ mit dem Gitterpunkt (x, y) im kartesischen Koordinatensystem. Diese Interpretation kann bereits in frühen Klassenstufen genutzt werden, um Eigenschaften von Brüchen zu untersuchen und geometrisch zu deuten. So stammen z. B. die in Abbildung 3.30 gezeigten Darstellungen aus einem Schulbuch für die Klassenstufe 6 am Gymnasium.

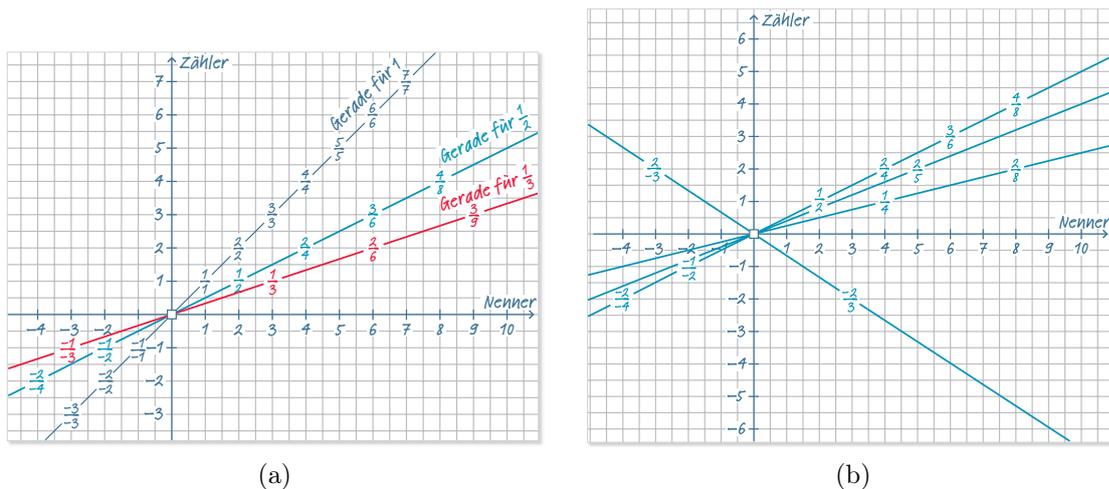


Abb. 3.30: Darstellungen aus Lambacher Schweizer 6. Mathematik für Gymnasien (Baum/Lorenzen/Schmitz (2013))

Folgende Erkenntnisse können von den Schülern in einer heuristischen Phase erlangt und begründet werden:

1. Alle Brüche, die dieselbe rationale Zahl darstellen, liegen auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden. Man kann also von der *zu einem Bruch gehörigen Geraden* sprechen.
2. Die vollständig gekürzten Brüche liegen auf den zu ihnen gehörigen Geraden dem Ursprung am nächsten.²⁶
3. Ist ein Bruch $\frac{y}{x}$ nicht vollständig gekürzt, d. h. $m := \text{ggT}(y, x) > 1$, so liegen zwischen dem Ursprung und dem Gitterpunkt $P = (x, y)$ genau $m - 1$ weitere Gitterpunkte auf der Geraden. Die Strecke OP wird auf diese Weise in m Abschnitte gleicher Länge unterteilt.
4. Es gilt $\frac{y}{x} > \frac{z}{w}$ genau dann, wenn die zum Bruch $\frac{y}{x}$ gehörige Gerade eine größere Steigung besitzt als die zum Bruch $\frac{z}{w}$ gehörige Gerade.²⁷

²⁶Einige Autoren (z. B. Honsberger (1970)) nennen solche Gitterpunkte in Anlehnung an die Vorstellung eines Betrachters, der im Koordinatenursprung steht, *sichtbar*.

²⁷Aus diesem Grund identifizieren wir den Bruch $\frac{y}{x}$ mit dem Punkt (x, y) und nicht mit (y, x) .

Es lassen sich weitere interessante Beobachtungen tätigen bzw. weiterführende Fragen stellen (siehe etwa Baum/Lorenzen/Schmitz (2013), S. 113). Für unsere Zwecke sind die aufgelisteten Erkenntnisse die zentralen.

Generelle Voraussetzung

Da sich alle folgenden Überlegungen auf nicht-negative, rationale Zahlen beschränken, und wir diese stets durch einen Bruch darstellen können, dessen Zähler und Nenner beide nicht negativ sind, werden wir von nun an *nur Brüche $\frac{y}{x}$ mit $y \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{N}$* betrachten.

Farey-Folgen finden

Eine für das Training im Umgang mit Brüchen an sich sinnvolle Aufgabe, die mit unseren vorherigen Überlegungen zunächst nichts zu tun zu haben scheint, ist die folgende:

Man finde alle vollständig gekürzten Brüche $\frac{y}{x}$ mit $0 \leq \frac{y}{x} \leq 1$, deren Nenner x kleiner oder gleich 5 ist, und sortiere sie nach aufsteigender Größe.

Ein sinnvolles Vorgehen könnte darin bestehen, zunächst systematisch alle Brüche aufzuschreiben, dann alle ungekürzten Brüche zu streichen und den Rest anschließend der Größe nach zu sortieren. Die zu streichenden Brüche sind rot markiert:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$$

Wir erhalten als Lösung der Aufgabe

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}$$

Dies ist die sogenannte *fünfte Farey-Folge*. Ist in der Aufgabenstellung der maximale Nenner n , so erhält man als Lösung die *n -te Farey-Folge*.²⁸

Definition 3.1. (Farey-Folge der Ordnung n)

Sie $n \in \mathbb{N}$. Die Farey-Folge F_n der Ordnung n (oder auch n -te Farey-Folge) ist die aufsteigende Folge aller Brüche $\frac{y}{x}$ mit $ggT(x, y) = 1$ und $0 \leq y \leq x \leq n$.

Bemerkung 3.2. *Da jede ganze Zahl ein Teiler von 0 ist, gilt $ggT(0, x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Es folgt also zwingend aus der Definition, dass die Zahl 0 in der Form $\frac{0}{1}$ in der Farey-Folge auftaucht. Ebenso gilt $ggT(x, x) = x$, also muss die Zahl 1 durch den Bruch $\frac{1}{1}$ in der Farey-Folge repräsentiert werden.*

²⁸ Der Namensgeber John Farey (1766-1826) war ein britischer Geologe und Schriftsteller. In einer Note im PHILOSOPHICAL MAGAZINE veröffentlichte er im Jahr 1816 einen zentralen Satz über Farey-Folgen, allerdings ohne einen Beweis zu liefern. Der erste solche wird Cauchy zugeschrieben (vgl. Hardy/Wright (1958), S. 39).

Die Schüler sollten zunächst selbst einige weitere Farey-Folgen bestimmen, etwa F_1 bis F_7 . Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.1 zu sehen.

$$\begin{array}{l}
 F_1 : \qquad \qquad \qquad \frac{0}{1} \ \frac{1}{1} \\
 F_2 : \qquad \qquad \qquad \frac{0}{1} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{1} \\
 F_3 : \qquad \qquad \qquad \frac{0}{1} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{2} \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{1} \\
 F_4 : \qquad \qquad \qquad \frac{0}{1} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{2} \ \frac{2}{3} \ \frac{3}{4} \ \frac{1}{1} \\
 F_5 : \qquad \qquad \frac{0}{1} \ \frac{1}{5} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{5} \ \frac{1}{2} \ \frac{3}{5} \ \frac{2}{3} \ \frac{3}{4} \ \frac{4}{5} \ \frac{1}{1} \\
 F_6 : \qquad \qquad \frac{0}{1} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{5} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{5} \ \frac{1}{2} \ \frac{3}{5} \ \frac{2}{3} \ \frac{3}{4} \ \frac{4}{5} \ \frac{5}{6} \ \frac{1}{1} \\
 F_7 : \ \frac{0}{1} \ \frac{1}{7} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{5} \ \frac{1}{4} \ \frac{2}{7} \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{5} \ \frac{3}{7} \ \frac{1}{2} \ \frac{4}{7} \ \frac{3}{5} \ \frac{2}{3} \ \frac{5}{7} \ \frac{3}{4} \ \frac{4}{5} \ \frac{5}{6} \ \frac{6}{7} \ \frac{1}{1}
 \end{array}$$

Tab. 3.1: Die Farey-Folgen F_1 bis F_7 .

Schon an diesen Beispielen lassen sich einige Beobachtungen festhalten: Für $n > 1$ besitzt jede Farey-Folge eine ungerade Anzahl an Gliedern, und das mittlere Folgenglied von F_n ist stets $\frac{1}{2}$. Diesbezüglich erkennen wir eine Symmetrie: Von $\frac{1}{2}$ aus gesehen lassen sich im selben Abstand je eine Zahl auf der linken und eine Zahl auf der rechten Seite zu einem Paar, dessen Summe gleich 1 ist, zusammenfassen, wie am Beispiel von F_4 erläutert sei. Die gleichfarbig dargestellten Brüche ergeben die Summe 1:

$$\frac{0}{1} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{2} \ \frac{2}{3} \ \frac{3}{4} \ \frac{1}{1}$$

Wir haben dies nicht bewiesen, bemerken aber eine Schlussfolgerung, die zutrifft, wenn unsere Beobachtung allgemeingültig ist.

Bemerkung 3.3. *Die Summe aller Folgenglieder von F_n ist gleich der Hälfte ihrer Anzahl.*

Dies ist in der Tat wahr, lässt sich leicht zeigen und ist z. B. in Wright (1968) auf sehr kurzem Wege durchgeführt. Wir wollen unser Augenmerk zunächst auf das Aufstellen von Farey-Folgen legen, denn das oben am Beispiel von F_5 beschriebene Verfahren ist zwar sicher eine gute Übung im Umgang mit Brüchen aber auf Dauer doch anstrengend.

Wir erinnern uns an die zuvor betrachtete Darstellung von Brüchen im Koordinatensystem. Man muss die in dieser Darstellung erkennbaren Eigenschaften der Folgenglieder von F_n nur aussprechen, um auf ein geometrisches Verfahren zu deren Konstruktion zu stoßen. Diese Erkenntnis können Schüler ab etwa der 7. Klassenstufe selbstständig erlangen und in eigenen Worten begründen: Die Folgenglieder $\frac{y}{x}$ von F_n – bzw. die mit ihnen identifizierten Gitterpunkte (x, y) – liegen wegen

$$0 \leq y \leq x \leq n$$

alle im Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(n, 0)$, (n, n) . Die unterschiedlichen Brüche liegen auf verschiedenen Geraden, und wegen der aufsteigenden Anordnung ist die Gerade eines Folgengliedes stets steiler als die des vorangegangenen. Da die Brüche vollständig gekürzt sind, ist jedes Folgenglied vom Ursprung aus gesehen der erste Gitterpunkt auf seiner Geraden. Wir betrachten einen vom Ursprung ausgehenden Strahl, der beginnend auf der x -Achse gegen den Uhrzeigersinn das genannte Dreieck überstreicht. Die Folgenglieder von F_n werden in der richtigen Reihenfolge nacheinander von diesem „getroffen“. Es gehört stets nur der Punkt zur Farey-Folge, der dem Ursprung am nächsten liegt, da andere Gitterpunkte keine vollständig gekürzten Brüche darstellen. Abbildung 3.31 zeigt das Verfahren am Beispiel von F_4 .

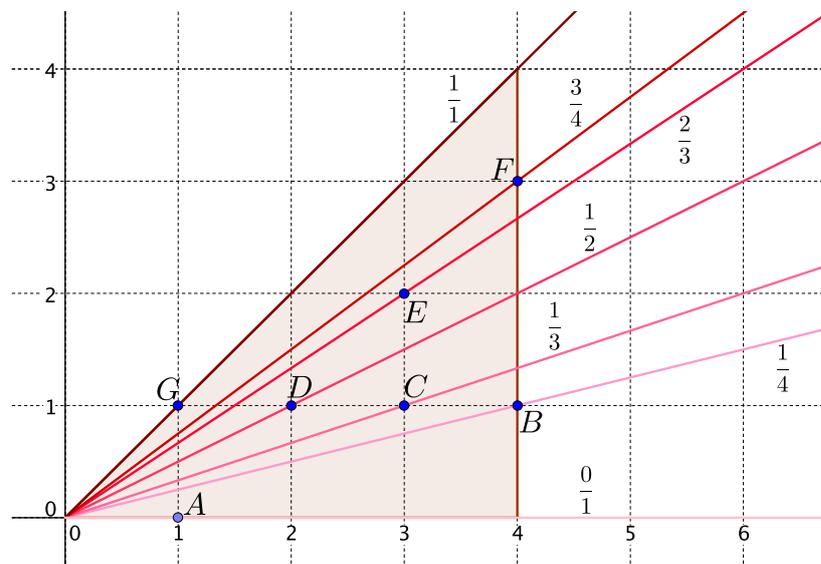


Abb. 3.31: Der vom Ursprung ausgehende Strahl wandert beginnend auf der x -Achse gegen den Uhrzeigersinn über das Dreieck. Die markierten Gitterpunkte werden in alphabetischer Reihenfolge „getroffen“ und repräsentieren die aufsteigend angeordneten Folgenglieder von F_4 .

Damit haben wir eine geometrische Methode zur Konstruktion von Farey-Folgen gefunden und zudem ein neues Werkzeug in der Hand, um neue Eigenschaften von F_n zu beweisen. Folgende Aufgabe kann nun erfolgreich bewältigt werden:

Man untersuche für direkt benachbarte Glieder $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ von F_n die „über Kreuz“ gebildeten Produkte bu , av . Man formuliere einen Satz und beweise diesen.

Anhand verschiedener Beispiele erkennt man leicht, dass die genannten Produkte für benachbarte Glieder stets aufeinanderfolgende Zahlen liefern. Der zu formulierende Satz könnte also folgendermaßen lauten.

Satz 3.3. *(Eine fundamentale Eigenschaft der Farey-Folgen)*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ direkt aufeinanderfolgende Glieder von F_n . Dann gilt

$$av - bu = 1.$$

Bemerkung 3.4. Die Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ sollen in dieser Reihenfolge auftreten, d. h., es soll $\frac{b}{a} < \frac{v}{u}$ gelten. Von nun an sei dies stets vorausgesetzt, wenn in der obigen Weise von aufeinanderfolgenden oder benachbarten Gliedern einer Farey-Folge gesprochen wird.

Der Satz von Pick wird den Beweis erbringen.

Beweis. Es sei $P = (a, b)$ und $Q = (u, v)$. Wir betrachten das Dreieck OPQ (siehe Abbildung 3.32).

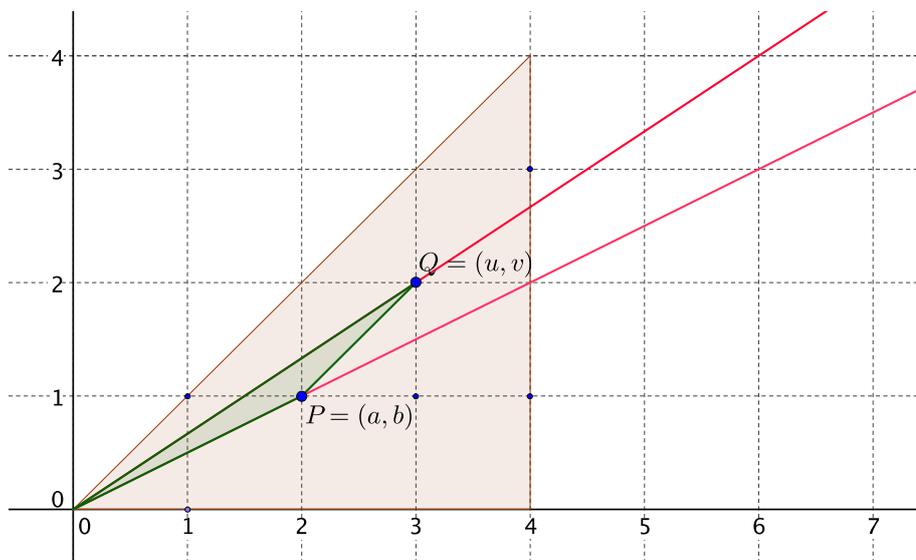


Abb. 3.32: Das Dreieck OPQ besitzt keine inneren Gitterpunkte und genau drei Randgitterpunkte.

Weil $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ Folgenglieder einer Farey-Folge sind, sind die Brüche vollständig gekürzt, und daher liegen außer den Endpunkten weder Gitterpunkte auf der Strecke OP noch auf der Strecke OQ . Im Inneren des Dreiecks OPQ oder im relativen Inneren der Strecke PQ liegen auch keine weiteren Gitterpunkte, denn sonst wären $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ nicht direkt aufeinanderfolgend in F_n . Nach dem Satz von Pick besitzt das Dreieck also den Flächeninhalt $0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Nach Lemma 3.2 besitzt OPQ den Flächeninhalt $\frac{av-bu}{2}$, also folgt

$$av - bu = 1.$$

□

Farey-Folgen sukzessiv konstruieren

Nachdem wir ein geometrisches Verfahren zur Konstruktion von F_n gefunden haben, richten wir unseren Blick noch einmal auf die arithmetischen Eigenschaften der

Farey-Folgen. Alle Glieder von F_n treten auch in F_{n+1} auf und zwar in derselben Reihenfolge, denn sie sind ja bereits in F_n der Größe nach sortiert. Zwischen einigen Folgengliedern kommen neue hinzu, zwischen anderen nicht. Die folgenden Fragen sind naheliegend:

1. Zwischen welchen Folgengliedern von F_n kommt in F_{n+1} ein neues hinzu und zwischen welchen nicht? Gibt es ein Kriterium?
2. Gibt es ein Bildungsgesetz für die neu hinzukommenden Folgenglieder?

Mit diesen Fragen kann die Lerngruppe in eine erneute heuristische Phase entlassen werden. Welche Ergebnisse können wir erwarten? Wir betrachten als Beispiel den Übergang von F_6 zu F_7 . Tabelle 3.2 zeigt die direkt benachbarten Folgenglieder von F_6 und – wenn vorhanden – das in F_7 zwischen diesen liegende, neue Folgenglied.

In F_6 benachbarte Glieder	Zwischenglied in F_7 ?
$\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$	nein
$\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{4}$	nein
$\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$
$\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{5}$	nein
$\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$
$\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}$
\vdots	\vdots

Tab. 3.2: Übergang von F_6 zu F_7

Wir halten einige Erkenntnisse fest, deren Entdeckung wahrscheinlich ist. Es seien dazu $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ direkt benachbarte Folgenglieder in F_n .

1. Zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ kommt in F_{n+1} genau dann ein neues Folgenglied hinzu, wenn $a + u = n + 1$ gilt.
2. Wenn $a + u = n + 1$ ist, dann ist das neue Folgenglied gleich $\frac{b+v}{a+u}$. Scheinbar ist dieser Bruch bereits automatisch vollständig gekürzt.

Betrachtet man auf Grundlage dieser Erkenntnisse noch einmal ausführlich Tabelle 3.1, so fällt darüber hinaus vielleicht das Folgende auf:

3. Stets gilt $a + u > n$. Der Bruch $\frac{b+v}{a+u}$ taucht in einer späteren Folge F_m in jedem Fall zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ auf und zwar für $m = a + u$. In allen vorherigen Farey-Folgen sind $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ direkt benachbart.

Ein Beispiel soll die letzte Beobachtung verdeutlichen.

Beispiel 3.1. Die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ sind in F_4 direkt benachbart. Es gilt $\frac{1+1}{3+4} = \frac{2}{7}$. Aufgrund des Nenners 7 kann $\frac{2}{7}$ nicht in einer der Folgen F_5 oder F_6 auftreten. In diesen bleiben $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ direkt benachbart. In F_7 taucht $\frac{2}{7}$ dann als Zwischenglied zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ auf.

Es ist angebracht, einen neuen Begriff zu definieren.

Definition 3.2. (*Mediant zweier Brüche*)

Der Mediant²⁹ zweier Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ ($b, v \in \mathbb{N}_0$, $a, u \in \mathbb{N}$) ist definiert als

$$\text{med} \left(\frac{b}{a}, \frac{v}{u} \right) := \frac{b+v}{a+u}.$$

Bemerkung 3.5. Der Mediant wird hier ausdrücklich nur für Brüche im oben erläuterten Sinn definiert, nicht aber für rationale Zahlen, denn für diese wäre die Definition vom Repräsentanten abhängig, d. h., der Mediant derselben rationalen Zahlen ist, je nach deren Darstellung, unterschiedlich.³⁰ Es gilt z. B.

$$\text{med} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{5} \quad \text{aber} \quad \text{med} \left(\frac{2}{4}, \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{7}.$$

Wie die Namensgebung vermuten lässt, sollte der Mediant zweier Brüche stets zwischen ihnen liegen. Dies ist im folgenden Lemma festgehalten.

Lemma 3.3. Es seien $a, u \in \mathbb{N}$, $b, v \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\frac{b}{a} < \frac{v}{u}$. Dann gilt

$$\frac{b}{a} < \text{med} \left(\frac{b}{a}, \frac{v}{u} \right) < \frac{v}{u}.$$

Beweis. Wir betrachten die mit $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ identifizierten Gitterpunkte $P = (a, b)$ und $Q = (u, v)$. Der mit $\text{med} \left(\frac{b}{a}, \frac{v}{u} \right)$ identifizierte Punkt ist dann $M := P + Q$, womit sofort klar ist, dass

$$\frac{b}{a} < \text{med} \left(\frac{b}{a}, \frac{v}{u} \right) < \frac{v}{u}$$

gilt (vgl. Abbildung 3.33). □

²⁹Eine charmante, in der englischsprachigen Literatur bisweilen zu findende Bezeichnung für den Medianten lautet *freshman-sum* – in Anspielung auf einen weit verbreiteten Anfängerfehler beim Addieren von Brüchen.

³⁰Eine Möglichkeit wäre die Definition über die maximal gekürzte Darstellung einer jeden rationalen Zahl zu treffen. Wir benötigen dies hier aber nicht.

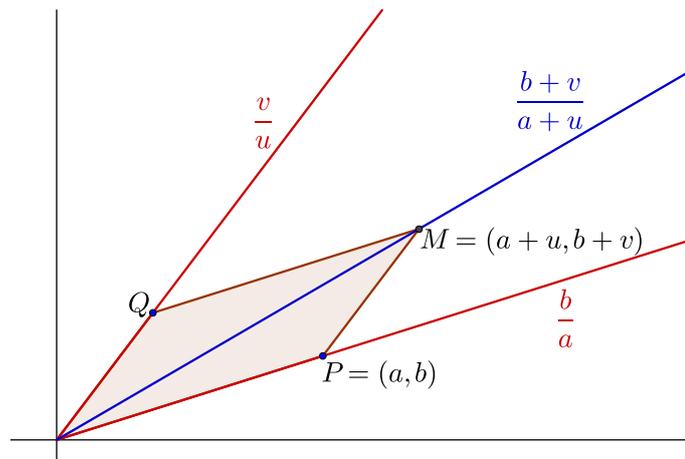


Abb. 3.33: Der Mediant zweier verschiedener Brüche liegt strikt zwischen diesen.

Bemerkung 3.6. Wir betrachten hier nur Brüche mit nicht-negativen Zählern und Nennern. Lässt man beliebige Zähler und Nenner zu, so muss der Mediant zweier Brüche nicht zwingend (arithmetisch) zwischen diesen liegen, wie man z. B. an Abbildung 3.34 sieht.

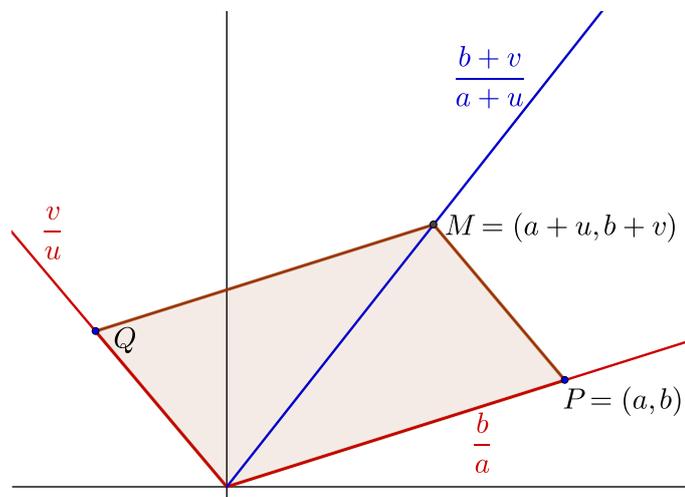


Abb. 3.34: Lässt man in der Definition des Medianten beliebige Zähler und Nenner zu, so muss $\text{med}\left(\frac{b}{a}, \frac{v}{u}\right)$ nicht zwingend (arithmetisch) zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ liegen, wie man dem Beispiel entnimmt. Hier gilt offenbar $\frac{b+v}{a+u} > \frac{b}{a} > 0 > \frac{v}{u}$.

An Abbildung 3.33 kann man sich noch eine weitere wichtige Eigenschaft des Medianten klarmachen, die im folgenden Lemma festgehalten ist.

Lemma 3.4. Es seien $a, u \in \mathbb{N}$, $b, v \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $av - bu = 1$. Dann ist der Mediant der Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ vollständig gekürzt.

Beweis. Wir betrachten erneut Abbildung 3.33. Das Parallelogramm $OPMQ$ hat nach Lemma 3.2 den Flächeninhalt $av - bu$. Dieser Ausdruck ist nach Voraussetzung gleich 1. Weil die vier Eckpunkte von $OPMQ$ Gitterpunkte sind, kann es daher nach dem Satz von Pick keine weiteren Gitterpunkte enthalten ($\frac{1}{2} - 1 = 1$). Insbesondere liegen auf der Diagonalen OM außer den Endpunkten keine Gitterpunkte. Das bedeutet, dass $\frac{b+v}{a+u}$ vollständig gekürzt ist. \square

Bemerkung 3.7. Nach Satz 3.3 erfüllen zwei direkt benachbarte Glieder einer Farey-Folge die Voraussetzungen des Lemmas, so dass deren Mediant stets vollständig gekürzt ist.

Wir haben bis zu dieser Stelle insgesamt eingesehen, dass der Mediant $\frac{b+v}{a+u}$ von zwei direkt benachbarten Folgengliedern $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ einer Farey-Folge F_n in der $(a+u)$ -ten Farey-Folge auftreten wird und dann zwischen diesen steht. Wir haben noch nicht nachgewiesen, dass nicht in einer früheren Farey-Folge ein anderer Bruch zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ auftaucht. Dies gewährleistet das folgende Lemma. Der anschließend gezeigte Beweis ist meines Erachtens neu und sehr anschaulich, so dass er auch für Schüler zugänglich ist und mit Hilfen sogar von diesen selbst entwickelt werden kann.

Lemma 3.5. Es seien $a, u \in \mathbb{N}$, $b, v \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $av - bu = 1$. Dann folgt: Der Nenner jedes vollständig gekürzten Bruches, der von $\frac{b+v}{a+u}$ verschieden ist und strikt zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ liegt, ist echt größer als $a+u$.

Beweis. Wir arbeiten anhand von Abbildung 3.35.

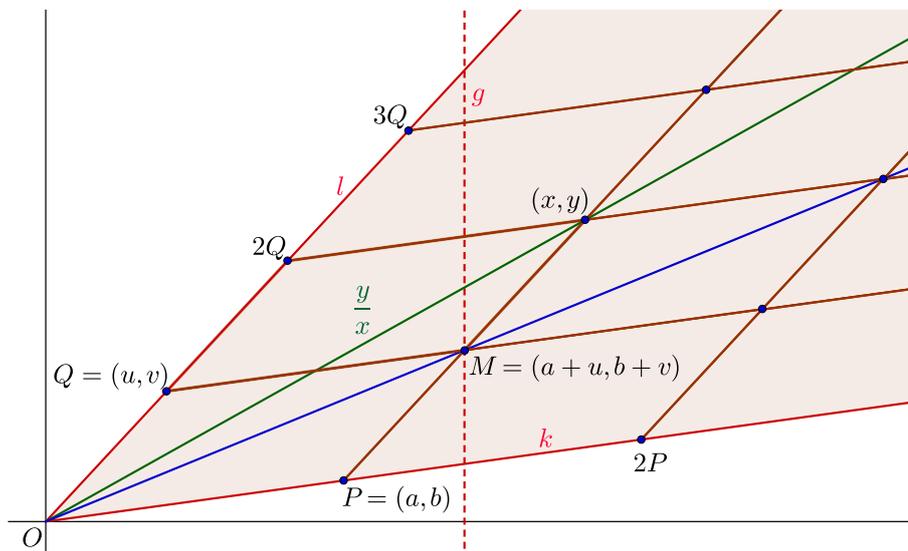


Abb. 3.35: Keines der Parallelogramme enthält außer seinen Eckpunkten weitere Gitterpunkte. Daher sind auf den Geraden, die innerhalb des roten Bereichs verlaufen, Gitterpunkte nur rechts von g zu finden.

Wie im vorangegangenen Beweis betrachten wir das Parallelogramm $OPMQ$, wobei die Punkte wie üblich definiert seien. Alle Gitterpunkte (x, y) , die Brüche $\frac{y}{x}$ mit $\frac{b}{a} < \frac{y}{x} < \frac{v}{u}$ repräsentieren, liegen auf vom Ursprung ausgehenden Strahlen, die im Inneren des von den Strahlen k und l berandeten Bereichs verlaufen. Alle Brüche, deren Nenner kleiner oder gleich $a+u$ sind, liegen links von der vertikalen Geraden g durch M bzw. auf dieser Geraden. Zwischen k und l und gleichzeitig links von bzw. auf g kann aber außer M kein Gitterpunkt liegen, was man sich folgendermaßen klar macht: Der Bereich lässt sich mit zu $OPMQ$ kongruenten Parallelogrammen parkettieren. Jedes dieser hat wegen der Voraussetzung $av - bu = 1$ den Flächeninhalt 1. Nach dem Satz von Pick kann ein solches Parallelogramm außer seinen Eckpunkten also keine weiteren Gitterpunkte enthalten. Die Abbildung zeigt daher alle Gitterpunkte im betreffenden Bereich. Diese liegen entweder auf k bzw. l oder wegen $u > 0$ rechts von g . \square

Bemerkung 3.8. *Man kann Lemma 3.5 auch folgendermaßen formulieren: Sind $a, u \in \mathbb{N}$, $b, v \in \mathbb{N}_0$ und gilt $av - bu = 1$, so folgt: $\text{med}\left(\frac{b}{a}, \frac{v}{u}\right)$ ist unter allen vollständig gekürzten Brüchen, die echt zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ liegen, derjenige (eindeutig bestimmte) mit dem kleinsten Nenner.*

Bemerkung 3.9. *Direkt benachbarte Glieder einer Farey-Folge erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 3.5.*

Die Umkehrung von Lemma 3.5 ist ebenfalls wahr. Wir formulieren dies in einem weiteren Lemma und führen den Beweis, der erneut Abbildung 3.35 verwendet, anschließend durch.

Lemma 3.6. *Seien $a, u \in \mathbb{N}$, $b, v \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\frac{b}{a} < \frac{v}{u}$. Wenn $\text{med}\left(\frac{b}{a}, \frac{v}{u}\right)$ unter allen vollständig gekürzten Brüchen, die strikt zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ liegen, den kleinsten Nenner besitzt, dann gilt $av - bu = 1$.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass alle vollständig gekürzten Brüche, die strikt zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ liegen, einen Nenner besitzen, der größer als $a+u$ ist. Wir betrachten Abbildung 3.35. Aus der Voraussetzung folgt, dass im rot gefärbten Bereich zwischen den Strahlen k und l Gitterpunkte nur rechts von g zu finden sind. Damit kann das Parallelogramm $OPMQ$ außer seinen Eckpunkten keine weiteren Gitterpunkte enthalten und sein Flächeninhalt $av - bu$ ist damit nach dem Satz von Pick gleich $0 + \frac{4}{2} - 1 = 1$. \square

Der Beweis von Lemma 3.5 zeigt auch die Aussagen der Lemmata 3.3 und 3.4. Die oben geführten, separaten Beweise dieser Aussagen sind also aus fachlicher Sicht redundant. Sie dienen vielmehr dazu, die einzelnen Schritte eines möglichen didaktischen Ganges durch das Thema aufzuzeigen. Der folgende Satz muss nicht mehr bewiesen werden; er stellt lediglich eine Zusammenfassung der drei Lemmata 3.3, 3.4 und 3.5 dar.

Satz 3.4. (*Zusammenfassender Satz über Medianten und Farey-Folgen*)

Es seien $a, u \in \mathbb{N}$, $b, v \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\frac{b}{a} < \frac{v}{u}$. Dann folgt

- (i) $\frac{b}{a} < \frac{b+v}{a+u} < \frac{v}{u}$.
- (ii) $\frac{b+v}{a+u}$ ist vollständig gekürzt $\Leftrightarrow av - bu = 1$.
- (iii) Falls $av - bu = 1$ gilt, dann ist $\frac{b+v}{a+u}$ unter allen vollständig gekürzten Brüchen zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ derjenige, eindeutig bestimmte Bruch mit dem kleinsten Nenner.
- (iv) Falls $av - bu = 1$ und $\frac{b}{a}, \frac{v}{u} \leq 1$ gilt, so sind $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ direkt aufeinanderfolgend in F_n für $n := \max\{a, u\}$ sowie in F_m für alle $m \in \{n, n+1, \dots, a+u-1\}$. In F_{a+u} liegt genau ein Bruch zwischen $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$, und zwar deren Mediant $\frac{b+v}{a+u}$.

Eine weitere Eigenschaft der Farey-Folgen, die in der Literatur hin und wieder zu finden ist, unterscheidet sich leicht von den hier formulierten Resultaten und sollte nicht damit verwechselt werden. Sie lautet: Für je drei direkt benachbarte Folgenglieder $\frac{b}{a}, \frac{f}{e}, \frac{v}{u}$ in F_n gilt stets

$$\frac{f}{e} = \frac{b+v}{a+u}.$$

Diese Gleichung muss als eine Gleichung zwischen rationalen Zahlen verstanden werden, d. h., der Bruch $\frac{b+v}{a+u}$ ist eventuell noch nicht vollständig gekürzt (wohl aber $\frac{f}{e}$ als Folgenglied einer Farey-Folge).

Dies widerspricht nicht dem, was wir bewiesen haben, denn es gibt Folgenglieder, die in keiner Farey-Folge F_n je benachbart waren. Man betrachte z. B. den Übergang von

$$F_2 : \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \quad \text{zu} \quad F_3 : \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}.$$

Die hinzukommenden Folgenglieder $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ sind in F_3 nicht benachbart und tauchen in F_1 und F_2 nicht auf. Ihr Mediant $\frac{1+2}{3+3} = \frac{3}{6}$ ist nicht vollständig gekürzt, stimmt aber als rationale Zahl mit dem zwischen ihnen stehenden Folgenglied $\frac{1}{2}$ überein.

Da es uns hier hauptsächlich um die konstruktive Gewinnung von Farey-Folgen geht, verzichten wir auf den Beweis. Es sei aber darauf hingewiesen, dass auch dieser mit den Mitteln der elementaren Geometrie erbracht werden kann, was in Arcavi/Bruckheimer (1995) sehr verständlich und elegant durchgeführt wird.

3.8.4 Farey-Folgen und Ford-Kreise

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt mit einer weit verbreiteten und naheliegenden Veranschaulichung von Brüchen durch Gitterpunkte gearbeitet. Ford (1938) schlägt eine völlig andere Veranschaulichung der rationalen Zahlen vor, welche eine verblüffende Beziehung zu Farey-Folgen besitzt, die dort auch aufgezeigt wird. Wir folgen hier weitestgehend den Ideen von Ford.

Für eine rationale Zahl $q > 0$ in vollständig gekürzter Darstellung $q = \frac{b}{a}$ sei der *Ford-Kreis* $\varphi(q)$ definiert als die offene Kreisscheibe $K(X, r)$ um den Punkt $X = (\frac{b}{a}, \frac{1}{2a^2})$ mit dem Radius $r = \frac{1}{2a^2}$. Man beachte, dass die y -Koordinate des Mittelpunktes und der Radius übereinstimmen. Der Ford-Kreis von $q = \frac{b}{a}$ berührt also die x -Achse im Punkt $(q, 0)$ ³¹ und ist vollständig in der oberen Halbebene enthalten (vgl. Abbildung 3.36). Den Ford-Kreis von 0 definieren wir als $\varphi(0) := K((0, \frac{1}{2}), \frac{1}{2})$.

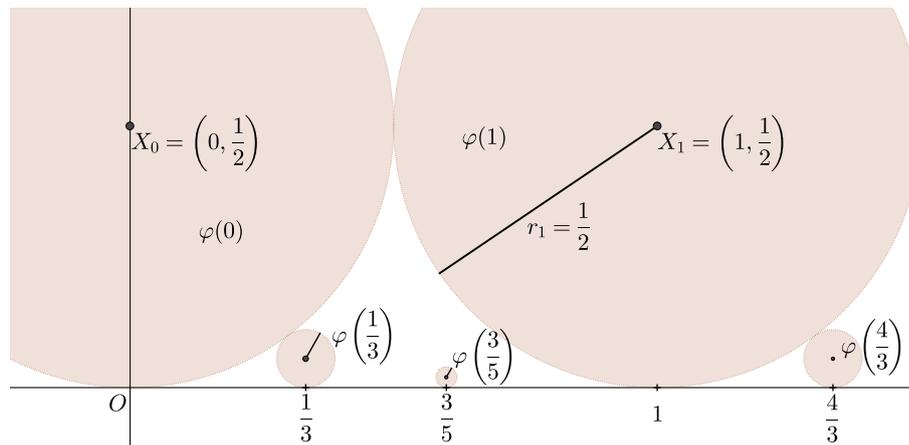


Abb. 3.36: Dargestellt sind die Ford-Kreise von $0, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, 1$ und $\frac{4}{3}$. Diese Zahlen sind zugleich die x -Koordinaten der Mittelpunkte. Die Radien sind $\frac{1}{2}, \frac{1}{18}, \frac{1}{50}, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{18}$. Dies sind zugleich die y -Koordinaten der Mittelpunkte.

Die Ford-Kreise ganzer Zahlen haben den Radius $\frac{1}{2}$ und berühren sich. Die Ford-Kreise aller anderen rationalen Zahlen liegen dazwischen und besitzen kleinere Radien. Aufgrund der Definition der Ford-Kreise werden wir auf allen Intervallen zwischen zwei ganzen Zahlen stets dasselbe Bild erhalten. Wir beschränken uns in der Folge also auf die Untersuchung des Intervalls $[0, 1]$.

Beginnt man sich mit dieser eher unüblichen Veranschaulichung der rationalen Zahlen näher zu beschäftigen, wird man sicher zunächst eine Reihe von Beispielen be-

³¹Das meint, dass $(q, 0)$ Randpunkt der Kreisscheibe ist. Wir sagen, dass sich zwei Kreisscheiben berühren, wenn sie genau einen gemeinsamen Randpunkt besitzen.

trachten, was z. B. mit GeoGebra ohne viel Aufwand möglich ist.³² Man stellt bereits nach kurzer Zeit fest, dass es Ford-Kreise gibt, die einander berühren, und auch solche, die voneinander separiert sind. Ford-Kreise, die sich gegenseitig schneiden, scheint es hingegen nicht zu geben. Es ist eine anspruchsvolle Aufgabe auf dem begrifflichen Niveau der neunten Klasse, dies zu beweisen. Eine mögliche Lösung könnte folgendermaßen aussehen.

Wir betrachten zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{b}{a}, \frac{v}{u}$ mit $\frac{b}{a} < \frac{v}{u}$. Die Mittelpunkte der zugehörigen Ford-Kreise sind

$$X_1 = \left(\frac{b}{a}, \frac{1}{2a^2} \right) \quad \text{und} \quad X_2 = \left(\frac{v}{u}, \frac{1}{2u^2} \right)$$

und ihre Radien sind $r_1 = \frac{1}{2a^2}$ und $r_2 = \frac{1}{2u^2}$. Abbildung 3.37 zeigt eine mögliche gegenseitige Lage der Mittelpunkte. Die Ford-Kreise sind nicht dargestellt.

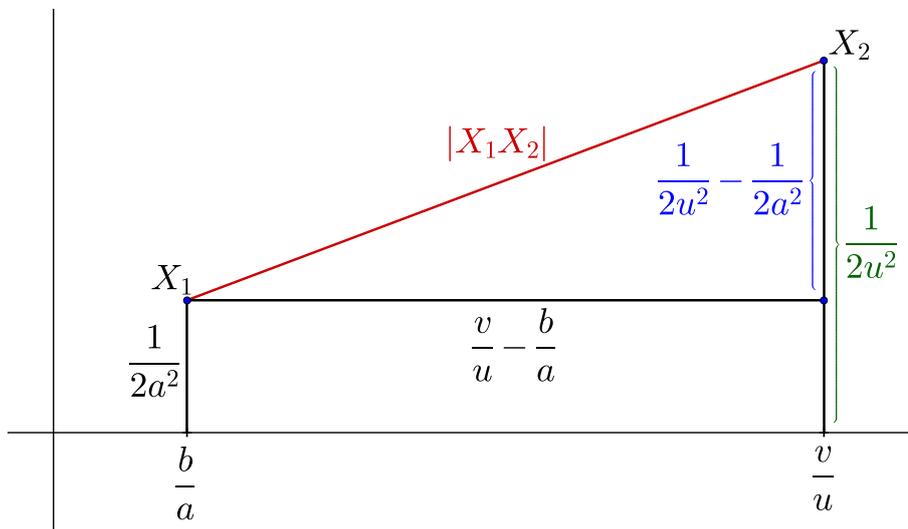


Abb. 3.37: Diese Situation liegt vor, falls $u < a$ gilt. Für $u > a$ verläuft der Beweis analog. Der Fall $u = a$ ist trivial.

Wir wollen zeigen, dass $|X_1X_2| \geq r_1 + r_2$ gilt. Nach dem Satz von Pythagoras gilt

$$|X_1X_2|^2 = \left(\frac{v}{u} - \frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{2a^2} \right)^2.$$

Wir beachten

$$\left(\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{2a^2} \right)^2 = \left(\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{2a^2} \right)^2 - \frac{1}{u^2a^2}$$

³²Methodischer Hinweis: Es lässt sich leicht mit dem Befehl „Werkzeug erstellen“ ein eigenes Werkzeug (z. B. `Ford[Zähler, Nenner]`) definieren, das sowohl aus der Befehlszeile als auch über einen Button verwendet werden kann. Auf diese Weise lassen sich mit wenig Zeitaufwand viele Ford-Kreise zeichnen.

und erhalten

$$\begin{aligned} |X_1 X_2|^2 &= \left(\frac{v}{u} - \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{2a^2}\right)^2 - \frac{1}{u^2 a^2} \\ &= (r_1 + r_2)^2 + \frac{(av - bu)^2}{u^2 a^2} - \frac{1}{u^2 a^2} \\ &= (r_1 + r_2)^2 + \frac{(av - bu)^2 - 1}{u^2 a^2}. \end{aligned}$$

Können wir nachweisen, dass

$$\frac{(av - bu)^2 - 1}{u^2 a^2} \geq 0$$

ist, so ist der Beweis abgeschlossen. Dies ist in der Tat der Fall, denn es gilt

$$av - bu = 0 \iff \frac{b}{a} = \frac{v}{u}.$$

Aus der Voraussetzung $\frac{b}{a} \neq \frac{v}{u}$ folgt $(av - bu)^2 \geq 1$, denn $av - bu$ ist eine von Null verschiedene ganze Zahl. Wie wir sehen, haben wir sogar mehr gezeigt, als ursprünglich intendiert: Genau dann, wenn $av - bu = 1$ ist, berühren sich die beiden Ford-Kreise. Da wir die Bedeutung der Aussage $av - bu = 1$ in Bezug auf Farey-Folgen im vorangegangenen Abschnitt genau analysiert haben, erhalten wir ohne weitere Arbeit einen verblüffenden Zusammenhang, der im folgenden Satz festgehalten wird.

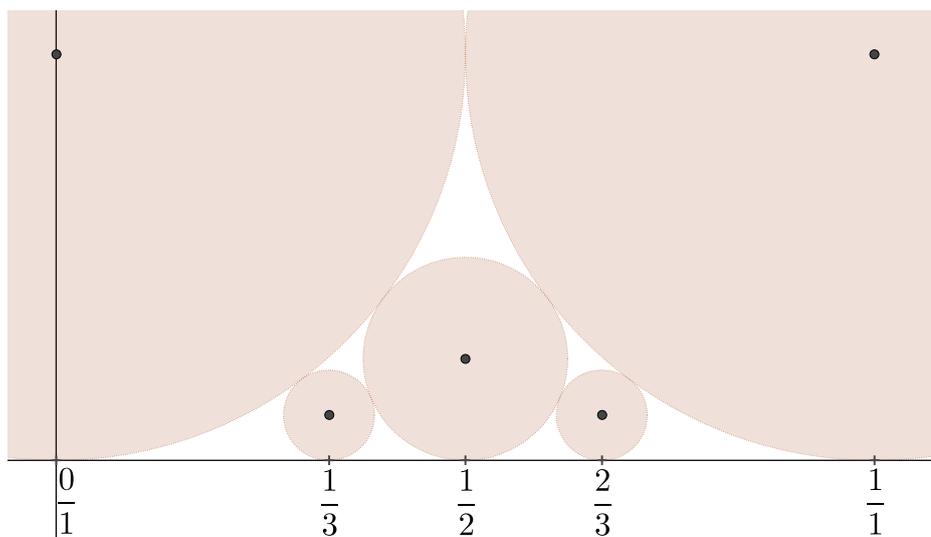
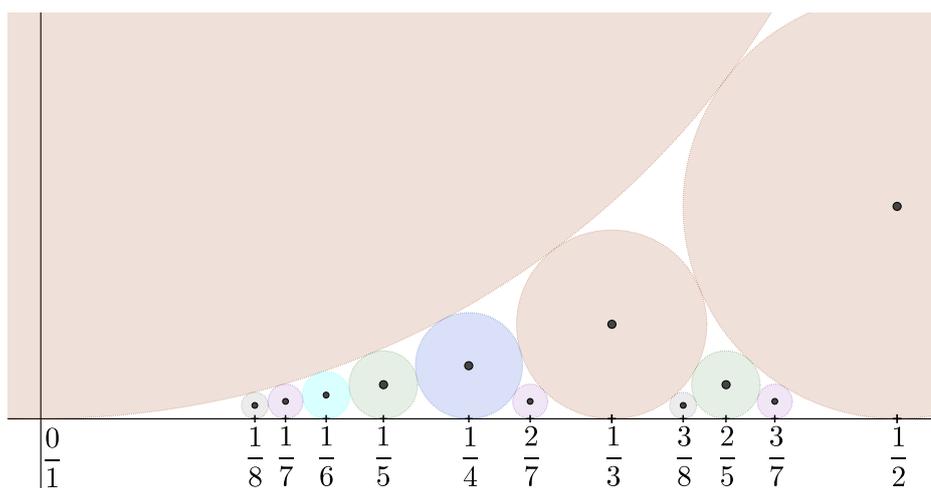
Satz 3.5. *Es seien $a, u \in \mathbb{N}$, $b, v \in \mathbb{N}_0$, so dass $0 \leq \frac{b}{a}, \frac{v}{u} \leq 1$ gilt und die Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ vollständig gekürzt sind. Dann gilt*

- (i) *Die Ford-Kreise von $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ sind stets disjunkt. Sie berühren sich genau dann in einem Punkt, wenn $av - bu = 1$ gilt.*
- (ii) *Genau dann, wenn sich die zugehörigen Ford-Kreise in einem Punkt berühren, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ in F_n direkt benachbart sind.*

Abbildung 3.38 zeigt die Glieder der Folge F_3 veranschaulicht als sich berührende Ford-Kreise. Die Ford-Kreise der in den Farey-Folgen der nächst höheren Ordnung hinzukommenden Folgenglieder passen perfekt in die Lücken. Abbildung 3.39 zeigt die Ford-Kreise aller Glieder von F_8 zwischen 0 und $\frac{1}{2}$.

3.8.5 Farey-Folgen und Fibonacci-Zahlen

Zwischen zwei sich berührenden Ford-Kreisen findet man stets einen weiteren, kleineren Ford-Kreis, der die beiden größeren berührt.

Abb. 3.38: die Ford-Kreise der Folgenglieder von F_3 Abb. 3.39: die Ford-Kreise der Folgenglieder von F_8 zwischen 0 und $\frac{1}{2}$

Dies definiert eine Folge von Ford-Kreisen (bzw. Farey-Folgengliedern). Es sei $x_1 = \frac{1}{1}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$. Die zugehörigen Ford-Kreise berühren sich, und es gibt genau eine Zahl, deren Ford-Kreis diese beiden berührt. Dies ist das in F_3 auftretende, zu beiden Vorgängern benachbarte Farey-Folgenglied $x_3 = \frac{2}{3}$ (vgl. Abbildung 3.40). Ebenso sei jedes weitere Folgenglied x_n dadurch festgelegt, dass sein Ford-Kreis die der beiden Vorgänger x_{n-1} und x_{n-2} berührt.

Die resultierende Zahlenfolge lautet

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \dots$$

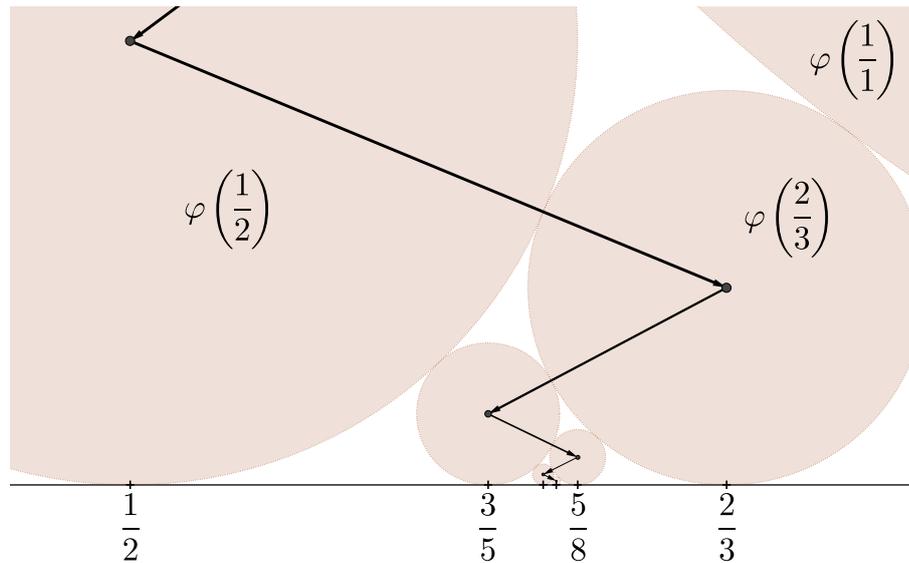


Abb. 3.40: Der Ford-Kreis eines jeden Folgengliedes ist durch die Eigenschaft, dass er die Ford-Kreise seiner beiden direkten Vorgänger berührt, eindeutig bestimmt.

Es scheint sich bei der Folge der Zähler um die Fibonacci-Folge zu handeln, und die Nenner-Folge scheint bis auf das fehlende erste Folgenglied auch mit dieser übereinzustimmen. Wir können uns leicht davon überzeugen, dass dies kein Zufall ist, denn wir wissen bereits nach welchem Bildungsgesetz die betrachtete Folge von Brüchen aufgebaut ist. Der Ford-Kreis eines Folgengliedes von F_n berührt genau die Ford-Kreise der beiden in F_n direkt zu ihm benachbarten Folgenglieder. Zu zwei in irgendeiner Farey-Folge benachbarten Gliedern $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ erhält man das nächste, in einer späteren Farey-Folge zwischen diesen auftauchende Glied, durch Bildung des Medianten $\frac{b+v}{a+u}$. Die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Zähler genügt also in der Tat der bekannten Definition

$$u_1 = u_2 = 1 \quad \text{und} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

der *Fibonacci-Folge*. Die Folge $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Nenner genügt ebenfalls der Rekursionsvorschrift

$$\tilde{u}_{n+2} = \tilde{u}_{n+1} + \tilde{u}_n.$$

Nur bei den Startzahlen $\tilde{u}_1 = 1$ und $\tilde{u}_2 = 2$ handelt es sich bereits um die zweite bzw. dritte Fibonacci-Zahl. Insgesamt ist die betrachtete Folge damit definiert durch

$$x_n := \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

wobei u_n die n -te Fibonacci-Zahl bezeichnet. Sie genügt dem Bildungsgesetz

$$x_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{u_n + u_{n-1}} \quad \text{für alle } n \geq 3.$$

Wir könnten uns auf den Standpunkt stellen, aus den vorliegenden Resultaten der Zahlentheorie einige Eigenschaften dieser Zahlenfolge zu kennen³³ und unsere Untersuchung an dieser Stelle beenden. Wir wollen jedoch der Philosophie des aktuellen Abschnitts treu bleiben und anders herum fragen, welche aus der Zahlentheorie bekannten Resultate über die Fibonacci-Folge sich eigenständig aus unseren geometrischen Erkenntnissen über Farey-Folgen herleiten lassen. Arcavi/Bruckheimer (2000) stellen eine instruktive Argumentation vor, die wir hier im Detail ausführen wollen.

Wir wissen bereits, dass der Mediant zweier direkt benachbarter Folgenglieder einer Farey-Folge stets vollständig gekürzt ist. Da die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den direkten Nachbarn $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{2}$ beginnt, sind alle weiteren Folgenglieder automatisch vollständig gekürzt, und wir haben die erste wohlbekannte Eigenschaft der Fibonacci-Folge bereits ohne weitere Arbeit gewonnen.

Lemma 3.7. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\text{ggT}(u_n, u_{n+1}) = 1.$$

Betrachten wir die Folge der Zahlen $y_n := \frac{u_n}{u_{n+2}}$, also

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \dots,$$

so können wir ebenso argumentieren: $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind direkt benachbart in F_3 , also sind alle folgenden Brüche als Medianten benachbarter Farey-Folgenglieder vollständig gekürzt. Es gilt damit auch das folgende Lemma.

Lemma 3.8. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\text{ggT}(u_n, u_{n+2}) = 1.$$

Man ist geneigt, das Argument ein weiteres Mal zu wiederholen, um zu beweisen, dass auch u_n und u_{n+3} stets teilerfremd sind. Betrachten wir aber die zu diesem Zweck heranzuziehende Folge

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{8}, \dots,$$

so sehen wir auf der Stelle ein Gegenbeispiel in Gestalt des ungekürzten Bruches $\frac{2}{8}$. Wir haben aber zuvor nicht etwa einen Fehler gemacht, sondern müssen feststellen, dass sich der Ausgangspunkt der Argumentation verändert hat. Die ersten beiden Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ sind in keiner Farey-Folge benachbart, denn in F_5 steht bereits $\frac{1}{4}$ zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$. Damit muss auch der Mediant nicht gekürzt sein (was er ja tatsächlich nicht ist).

³³So zum Beispiel, dass sie konvergent ist und gegen welchen Grenzwert sie strebt.

Wir blicken noch einmal zurück auf Abbildung 3.40. Es ist angedeutet, dass sich die Folgenglieder x_n im „Zickzack-Kurs“ einem Grenzwert annähern. Zunächst stellen wir fest, dass jedes Folgenglied abwechselnd größer bzw. kleiner als sein direkter Vorgänger ist, d. h.

$$x_1 > x_2, \quad x_2 < x_3, \quad x_3 > x_4, \quad \dots \quad x_{2n-1} > x_{2n}, \quad x_{2n} < x_{2n+1}.$$

Der Beweis hierfür folgt aus der Tatsache, dass der Mediant zweier Brüche stets strikt zwischen diesen liegt. Es gilt $x_3 = \text{med}(x_1, x_2)$, also

$$x_1 > x_3 > x_2.$$

Weiter ist $x_4 = \text{med}(x_2, x_3)$, also

$$x_3 > x_4 > x_2$$

und so weiter. Anschaulich verhält sich die Folge wie in Abbildung 3.41 dargestellt.

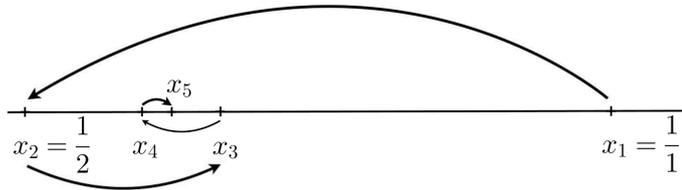


Abb. 3.41: Die Folgenglieder von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind abwechselnd größer bzw. kleiner als ihr direkter Vorgänger.

Als aufeinanderfolgende Glieder von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \quad \text{und} \quad \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ direkt benachbarte Farey-Folgenglieder. Damit sind die „über Kreuz“ gebildeten Produkte der Zähler und Nenner nach Satz 3.3 aufeinanderfolgende ganze Zahlen, also gilt

$$|u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2}| = 1.$$

Dabei ist der Ausdruck innerhalb der Betragsstriche, aufgrund der direkt vorangegangenen Überlegung, abwechselnd positiv und negativ. Die Folge der Zahlen x_n beginnt mit $x_1 = \frac{u_1}{u_2}$ gefolgt von $x_2 = \frac{u_2}{u_3}$. Es gilt

$$u_2^2 - u_1 \cdot u_3 = 1^2 - 1 \cdot 2 = -1.$$

Als nächste Differenz tritt

$$u_3^2 - u_2 \cdot u_4 = 2^2 - 1 \cdot 3 = +1$$

auf. Wir können eine weitere fundamentale Eigenschaft der Fibonacci-Folge festhalten.

Lemma 3.9. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n. \quad (3.5)$$

Dividieren wir (3.5) durch $u_{n+1}u_{n+2}$ so erhalten wir

$$\underbrace{\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}}_{=x_{n+1}} - \underbrace{\frac{u_n}{u_{n+1}}}_{=x_n} = \frac{(-1)^n}{u_{n+1}u_{n+2}},$$

und damit

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}}. \quad (3.6)$$

Hiermit können wir zeigen, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} und damit konvergent ist. Wir halten dies als Lemma fest und führen den Beweis im Detail durch.

Lemma 3.10. Die durch $x_n := \frac{u_n}{u_{n+1}}$ definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $g \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Beweis. Wir zeigen, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Da die Fibonacci-Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{u_N u_{N+1}} < \varepsilon$ gilt. Nun seien $n, m > N$. Das Folgenglied x_{N+1} und alle späteren Folgenglieder liegen zwischen x_N und x_{N-1} . Also gilt

$$|x_n - x_m| \leq |x_N - x_{N-1}| \stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{u_N u_{N+1}} < \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Der Grenzwert liegt zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, da alle Folgenglieder zwischen diesen Grenzen liegen. \square

Abschließend wollen wir den Grenzwert g bestimmen. Aufgrund der Definition der Fibonacci-Folge gilt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} + \frac{u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

also

$$\frac{1}{x_n} = 1 + x_{n-1}.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{g}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = g$ erhalten wir durch Grenzübergang

$$\frac{1}{g} = 1 + g.$$

Diese Gleichung können wir leicht lösen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} = 1 + g &\Leftrightarrow g^2 + g = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(g + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow g = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad g = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die negative Lösung kommt wegen $g \in [\frac{1}{2}, 1]$ nicht in Betracht, also gilt

$$g = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Bezeichnet $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ den *goldenen Schnitt*, so gilt

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = g.$$

Wir haben also gezeigt, dass $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ gegen den Kehrwert des goldenen Schnitts konvergiert. Dies impliziert eine weitere berühmte Eigenschaft der Fibonacci-Folge: Der Quotient aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen strebt gegen den goldenen Schnitt; das meint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \Phi.$$

Zuletzt sei noch erwähnt, dass wir automatisch den Grenzwert einer weiteren Folge mitbestimmt haben. Betrachten wir die durch

$$y_1 = \frac{0}{1}, \quad y_2 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad y_{n+1} = \text{med}(y_n, y_{n-1})$$

definierte Folge, so gilt

$$y_n + x_n = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und der Grenzwert der Folge ist $1 - g$. Beachten wir noch, dass

$$g = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \Phi - 1$$

ist, so erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2 - \Phi.$$

3.8.6 Eine geometrische Scherzaufgabe und ihre Bezüge zur Fibonacci-Folge und zum Satz von Pick

Burton/Dalkowski (2005) stellen eine hin und wieder auch in der populärwissenschaftlichen Literatur auftauchende Scherzaufgabe vor und erläutern den Bezug zur Fibonacci-Folge. Über den Bezug zur Fibonacci-Folge können wir nun auch einen Bezug zum Satz von Pick herstellen.

Wir betrachten Abbildung 3.42. Das Quadrat mit der Seitenlänge 8 in (a) wird in zwei Dreiecke und zwei Trapeze zerlegt. Die Teilfiguren werden in (b) zu einem Rechteck mit den Seitenlängen 5 und 13 zusammengesetzt. Erstaunlicherweise gilt jedoch $8^2 = 64$ wohingegen $5 \cdot 13 = 65$ ist. Wo liegt der Fehler?

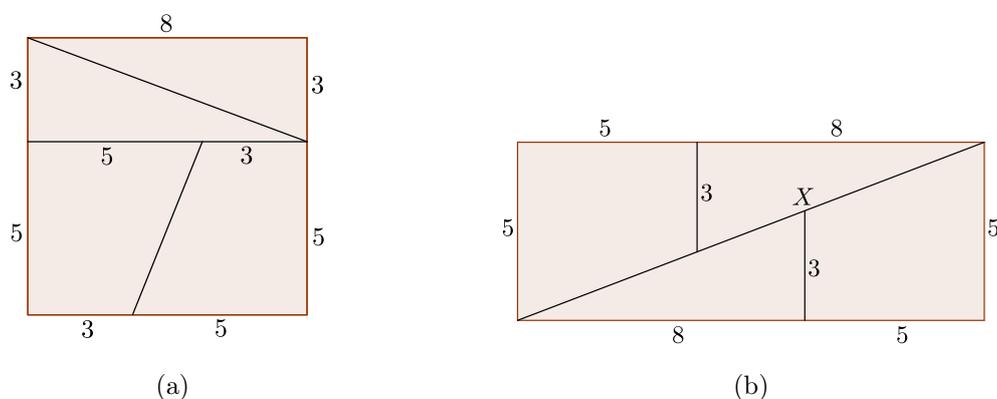


Abb. 3.42: ein geometrischer Scherz

Der Fehler liegt wie so häufig in der Anschauung bzw. in der ungenauen Darstellung. Die Einzelteile aus (a) lassen sich tatsächlich nicht nahtlos zu einem Rechteck zusammensetzen, wie man sich leicht klarmacht. Die Diagonale des Rechtecks hat bis zur mit X markierten Stelle die Steigung $\frac{3}{8}$. Von dort aus geht es noch 5 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach oben, d. h., es geht mit der Steigung $\frac{2}{5}$ weiter. Wegen $\frac{3}{8} \neq \frac{2}{5}$ liegt der Punkt X gar nicht auf der Diagonalen des Rechtecks. Abbildung 3.43 stellt die aus den Einzelteilen zusammengesetzte Figur überspitzt dar.

Das Rechteck besitzt eine Lücke von der Gestalt eines Parallelogramms. Offenbar ist dieses Parallelogramm für die hinzugekommene Flächeneinheit verantwortlich.

Man fragt sich, ob es auch andere Zahlen gibt, die sich für diesen Trick eignen. Im betrachteten Beispiel wurden die Zahlen 3, 5 und 8 verwendet: drei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen. In der Tat funktioniert der Trick immer, wenn man für die Seitenlänge des Ausgangs-Quadrats eine Fibonacci-Zahl wählt, und dieses unter Verwendung der beiden Vorgängerzahlen analog zu Abbildung 3.42 (a) zerlegt. Je nachdem, ob die zuerst gewählte Fibonacci-Zahl einen geraden oder einen ungeraden Index besitzt, enthält das aus den Einzelteilen zusammengesetzte Rechteck eine Lücke oder einen Bereich, in dem sich die Einzelteile überschneiden. Im Falle $u_6 = 8$

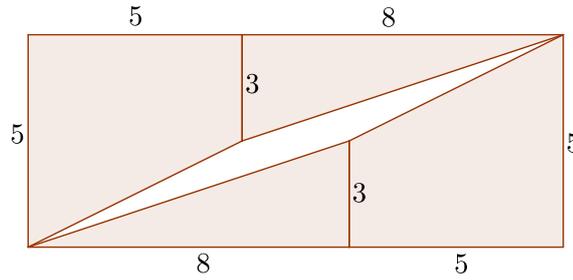


Abb. 3.43: übertriebene Darstellung der aus den Einzelteilen zusammengesetzten Figur

entsteht wie gesehen eine Lücke. Wählen wir etwa $u_5 = 5$, so erhalten wir einen Überschneidungsbereich (vgl. Abbildung 3.44).

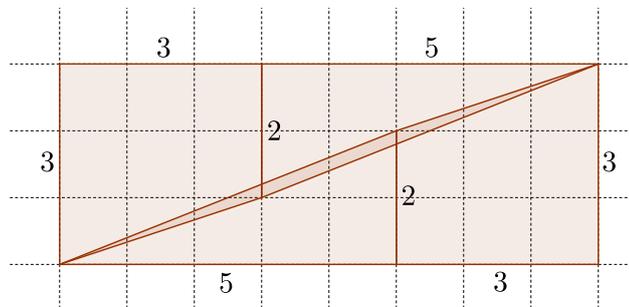


Abb. 3.44: Trägt die für die Seitenlänge des Quadrats ausgewählte Fibonacci-Zahl einen ungeraden Index, so überschneiden sich die Einzelteile, wenn man sie zu einem Rechteck zusammensetzt.

Den Beweis für die von uns angestellten Beobachtungen liefert Lemma 3.9, denn dieses besagt

$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Wir wählen u_{n+1} als Seitenlänge des Ausgangs-Quadrats. u_n und u_{n+2} sind dann die Seitenlängen des durch Umlegen erzeugten Rechtecks. Dabei setzt sich die längere Rechteck-Seite aus Strecken mit den Längen u_{n+1} und u_n zusammen; die Summe ist u_{n+2} (vgl. Abbildung 3.45).

Ist $n + 1$ gerade, so ist nach (3.7) der Flächeninhalt des Quadrats um 1 kleiner als der Flächeninhalt des vollständigen Rechtecks. Die aus den Einzelteilen zusammengesetzte Figur enthält also eine Lücke mit dem Flächeninhalt 1. Ist $n + 1$ ungerade, so ergibt sich gemäß $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+1} + 1$ ein Überschneidungsbereich mit dem Flächeninhalt 1.

Wir können anstelle von Lemma 3.9 auch den Satz von Pick verwenden, um den Flächeninhalt des besagten Parallelogramms zu bestimmen. Wir betrachten nun die Figur mit Lücke, d. h., wir setzen voraus, dass $n + 1$ gerade ist und legen das

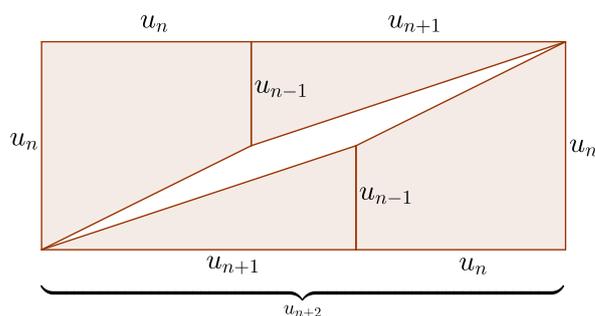


Abb. 3.45: Dargestellt ist ein Rechteck mit Lücke, d. h., $n + 1$ ist gerade.

Rechteck mit der linken unteren Ecke in den Ursprung eines Koordinatensystems (vgl. Abbildung 3.46).

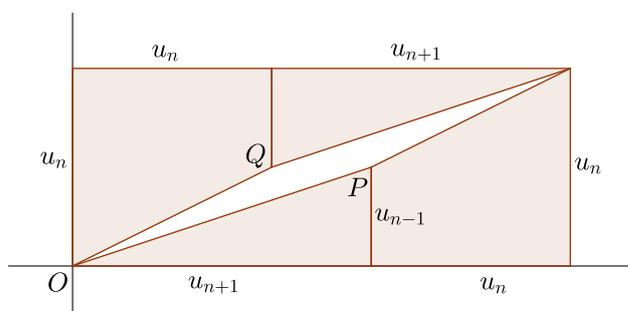


Abb. 3.46: Das Rechteck mit Lücke im kartesischen Koordinatensystem.

Offenbar gilt $P = (u_{n+1}, u_{n-1})$. Zur Bestimmung der Koordinaten von Q beachten wir, dass aufgrund des Bildungsgesetzes der Fibonacci-Folge

$$u_n - u_{n-1} = u_{n-2}$$

gilt und erhalten $Q = (u_n, u_{n-2})$. Die Punkte P und Q repräsentieren also die Brüche

$$\frac{u_{n-1}}{u_{n+1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{u_{n-2}}{u_n}.$$

Diese Brüche sind wegen der Monotonie der Fibonacci-Folge kleiner als 1, nach Lemma 3.8 teilerfremd und für das „über Kreuz“ gebildete Produkt der Zähler und Nenner gilt

$$\begin{aligned} u_{n+1}u_{n-2} - u_{n-1}u_n &= (u_n + u_{n-1})u_{n-2} - u_{n-1}(u_{n-1} + u_{n-2}) \\ &= u_nu_{n-2} + u_{n-1}u_{n-2} - u_{n-1}u_{n-2} - u_{n-1}^2 \\ &= u_nu_{n-2} - u_{n-1}^2 \\ &\stackrel{(3.7)}{=} -(-1)^{n-2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass $n - 2$ ungerade ist. Nach Satz 3.4 (iv) folgt, dass $\frac{u_{n-1}}{u_{n+1}}$ und $\frac{u_{n-2}}{u_n}$ direkt benachbarte Folgenglieder einer Farey-Folge sind. Daher besitzt das Dreieck OPQ keine inneren oder Randgitterpunkte und nach dem Satz von Pick folglich den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$. Die Lücke von der Gestalt eines Parallelogramms besitzt also den Flächeninhalt 1.

Abschließend wollen wir noch die Güte der optischen Täuschung beispielhaft analysieren. Je schmaler die Lücke, d. h. je kleiner die Höhe des Parallelogramms ist, desto überzeugender funktioniert die Täuschung etwa mit einem gebastelten Modell, anhand dessen das Umlegen zum Rechteck praktisch durchgeführt wird. Bezeichnet h die Höhe des Parallelogramms, so gilt – unabhängig von der Wahl der verwendeten Fibonacci-Zahlen – die Gleichung $1 = |OP| \cdot h$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $|OP| = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}$ (vgl. Abbildung 3.46). Wir erhalten

$$h = \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}}.$$

Betrachten wir als Beispiel $u_{n+1} = u_8 = 21$ cm als Seitenlänge des Ausgangs-Quadrates, so erhalten wir

$$h = \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}} = \frac{1}{\sqrt{21^2 + 8^2}} \approx 0,04 \text{ [cm]}.$$

Der Schlitz im Rechteck ist also weniger als einen halben Millimeter breit, die Täuschung sicher überzeugend.

3.9 Probleme

Im Folgenden sollen exemplarisch einige wenige bereichernde Aufgaben, die sich im Rahmen einer Behandlung des Satzes von Pick mit Schülern oder Studenten einsetzen ließen, vorgestellt werden.

Die Idee für das erste Problem stammt von Fraedrich (1980).

Problem 3.1. *Man betrachte verschiedene Gitterdreiecke mit genau drei Randgitterpunkten und genau einem inneren Gitterpunkt. Der innere Gitterpunkt besitzt eine besondere geometrische Eigenschaft. Man stelle eine Vermutung auf und beweise diese.*

Lösungsvorschlag

Durch Betrachten von Beispielen lässt sich herausfinden, dass der einzige innere Gitterpunkt stets der *Schwerpunkt des Dreiecks* ist. Wir wollen dies beweisen, wo-

bei folgende Definition zugrunde gelegt sei: Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden.³⁴

Wir betrachten ein Gitterdreieck mit genau drei Randgitterpunkten A, B, C – die folglich die Eckpunkte des Dreiecks sind – und genau einem inneren Gitterpunkt X . Man verfolge die Argumentation anhand von Abbildung 3.47.

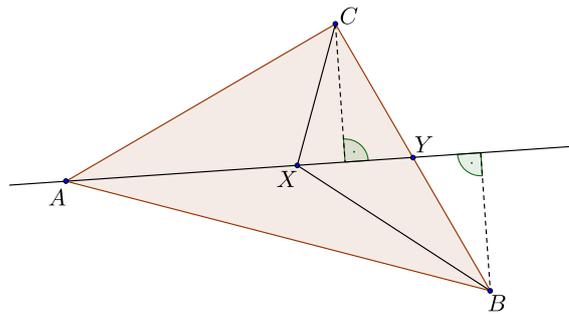


Abb. 3.47: \overline{AX} halbiert die Seite BC .

\overline{AX} schneidet BC in einem Punkt Y . Die Dreiecke ABX und AXC besitzen genau drei Randgitterpunkte und keine inneren Gitterpunkte, sind nach dem Satz von Pick also flächengleich. Sie besitzen über der gemeinsamen Grundseite AX also Höhen derselben Länge. Da die Höhenlinien zueinander parallel sind, können wir den Strahlensatz anwenden und erhalten $|BY| = |CY|$, also ist Y Mittelpunkt von BC . Ebenso sieht man ein, dass \overline{BX} Seitenhalbierende ist. Folglich ist X Schnittpunkt der Seitenhalbierenden also Schwerpunkt von ABC .

Kommentar

Verschiedene andere Lösungen sind denkbar. Je nachdem, welche Definition zugrunde liegt bzw. welche Eigenschaften des Schwerpunkts bekannt sind, gibt es auch sehr kurze Lösungen, wie etwa die folgende: Die Dreiecke ABX , BCX und AXC besitzen keine inneren und genau drei Randgitterpunkte. Sie sind also nach dem Satz von Pick flächengleich, und folglich ist X der Schwerpunkt von ABC .

Problem 3.2. Es seien $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ zwei direkt benachbarte Folgenglieder einer Farey-Folge F_n . Man zeige, dass $a + u > n$ gilt.

Lösungsvorschlag

Wenn wir den zusammenfassenden Satz 3.4 anwenden, ist fast nichts zu zeigen. Wir wollen hier eine unabhängige Lösung vorstellen, die bereits zu einem frühen

³⁴ Die Definition setzt voraus, dass bereits bekannt ist, dass sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden.

Zeitpunkt zugänglich ist.

Es sei $P = (a, b)$ und $Q = (u, v)$. Weil $\frac{b}{a}$ und $\frac{v}{u}$ in F_n benachbart sind, findet sich zwischen den Geraden \overline{OP} und \overline{OQ} innerhalb des Dreiecks mit den Eckpunkten $O, (n, 0), (n, n)$ kein Gitterpunkt (vgl. Abbildung 3.48).

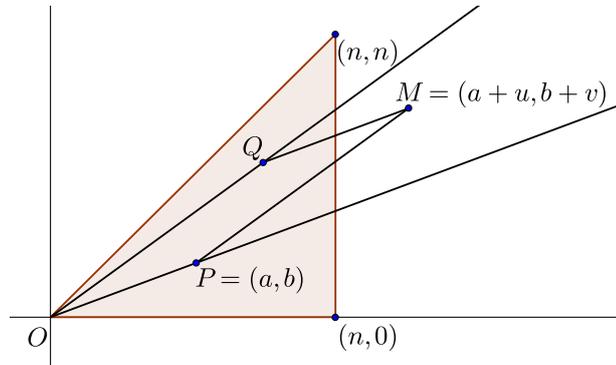


Abb. 3.48: M liegt außerhalb des Dreiecks mit den Eckpunkten $O, (n, 0)$ und (n, n) .

Der Gitterpunkt $M = (a + u, b + v)$ liegt zwischen diesen Geraden, muss also außerhalb des besagten Dreiecks liegen. Wegen $\frac{b+v}{a+u} < \frac{v}{u} \leq 1$, liegt M unterhalb der Geraden durch den Ursprung und den Punkt (n, n) . Daher muss M rechts von der vertikalen Geraden durch die Punkte $(n, 0)$ und (n, n) liegen. Es folgt $a + u > n$.

Problem 3.3. *Man zeige auf geometrische Weise: Für $n \geq 2$ sind die Nenner direkt benachbarter Folgenglieder einer Farey-Folge F_n stets voneinander verschieden.*

Lösungsvorschlag

Sei $n \geq 2$. Wir nehmen an, es gäbe in F_n direkt benachbarte Folgenglieder $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ mit demselben Nenner a . Dann besitzen die zugehörigen Gitterpunkte $P = (a, b)$ und $Q = (a, c)$ dieselbe x -Koordinate, liegen also auf einer vertikalen Geraden (vgl. Abbildung 3.49).

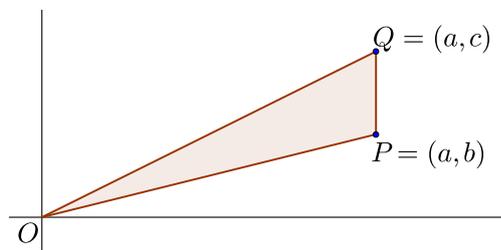


Abb. 3.49: Besitzen zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder denselben Nenner, so liegen die zugehörigen Gitterpunkte auf einer vertikalen Geraden.

Da $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ direkt benachbarte Farey-Folglieder sind, enthält das Dreieck OPQ außer den drei Eckpunkten keine weiteren Gitterpunkte, besitzt also nach dem Satz von Pick den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$. Weil es sich bei P und Q um Gitterpunkte handelt, und auf dem relativen Inneren von PQ keine weiteren Gitterpunkten liegen, hat die Strecke PQ die Länge 1. Damit muss die Höhe über dieser Strecke ebenfalls die Länge 1 besitzen. Es folgt $a = 1$, also können $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ nur Glieder der Folge F_1 sein. Dies ist ein Widerspruch zu $n \geq 2$.

Das nächste Problem ist anspruchsvoll und stammt aus Ball (2003). Dieser schreibt, Pierre de la Harpe hätte ihm die Aufgabe mündlich mitgeteilt und dazu gesagt, dass jemand anderes sie ihm erzählt habe. Wo die Aufgabe ursprünglich herkommt, kann also nicht genau geklärt werden.

Wir bezeichnen einen Punkt $H \in \mathbb{R}^2$ als *Halbgitterpunkt*, wenn es ganze Zahlen x, y gibt, so dass $H = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ gilt, und wenigstens eine der Zahlen x, y ungerade ist. Die letzte Forderung dient dazu, dass Gitterpunkte keine Halbgitterpunkte sind. Es ist klar, dass man zu jedem Halbgitterpunkt H Gitterpunkte A, B findet, so dass $H = M_{AB}$ gilt. Ebenfalls klar ist, dass es stets unendlich viele solcher Gitterpunkte A, B gibt und die Darstellung von H als Mittelpunkt zweier Gitterpunkte auf unterschiedliche Weisen geschehen kann. Abbildung 3.50 zeigt zwei Halbgitterpunkte als Mittelpunkte verschiedener Gitterpunkte.

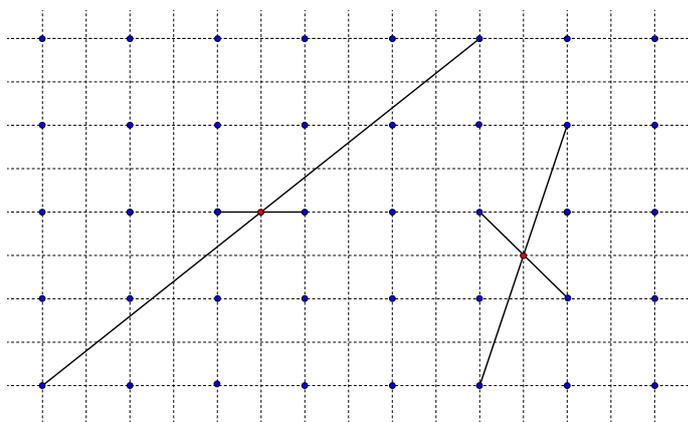


Abb. 3.50: Halbgitterpunkte lassen sich als Mittelpunkte von Gitterpunkten darstellen.

Problem 3.4. *Man beweise, dass es für jedes einfache Gitterpolygon P und jeden Halbgitterpunkt $H \in P$ zwei Gitterpunkte $A, B \in P$ gibt, so dass $H = M_{AB}$ gilt.*

Kommentar

Entscheidend ist, dass die Gitterpunkte A, B in P gefunden werden müssen. Es kann sein, dass A, B Randpunkte von P sind. Abbildung 3.51 lässt erahnen, dass es

weder offensichtlich ist, wie man die Punkte A, B finden kann, noch dass man sie überhaupt finden kann.

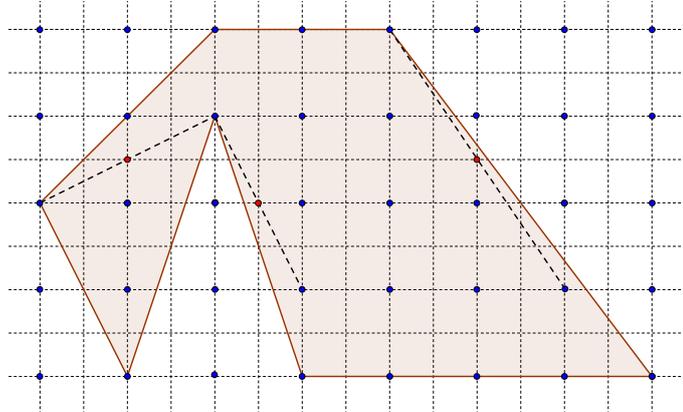


Abb. 3.51: drei Beispiele für die Darstellung von Halbgitterpunkten innerhalb eines Polygons

Lösungsvorschlag

Es sei P ein einfaches Gitterpolygon und $H \in P$ ein Halbgitterpunkt. Wir haben in Abschnitt 2.3.3 bewiesen, dass wir primitive Dreiecke D_1, \dots, D_k mit paarweise disjunktem Inneren finden, so dass $P = D_1 \cup \dots \cup D_k$ gilt.

Wegen $H \in P$ finden wir ein $j \leq k$ mit $H \in D_j$. Es seien A, B, C die Eckpunkte von D_j . Wir werden nachweisen, dass H der Mittelpunkt einer der Seitenstrecken AB, AC oder BC ist. Das schließt den Beweis ab, denn es gilt $A, B, C \in P$. Nach dem Satz von Pick gilt $\mu(D_j) = \frac{1}{2}$. Es sei σ die zentrische Streckung mit dem Streckzentrum A und dem Streckfaktor 2. Wir betrachten das Dreieck D'_j mit den Eckpunkten $A, B' := \sigma(B)$ und $C' := \sigma(C)$ (vgl. Abbildung 3.52).

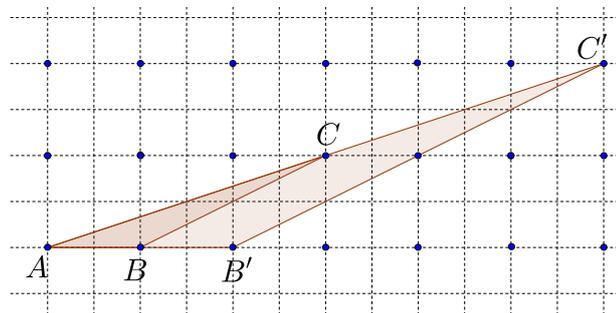


Abb. 3.52: Ein primitives Dreieck kann Halbgitterpunkte nur als Mittelpunkte von Seitenstrecken enthalten. Durch eine Streckung mit dem Streckfaktor 2 werden diese auf Randgitterpunkte des Bilddreiecks abgebildet.

Es gilt $\sigma(H) \in D'_j$, und $\sigma(H)$ ist wegen des Streckfaktors 2 ein Gitterpunkt. Ferner gilt

$$\mu(D'_j) = 4 \cdot \mu(D_j) = 2.$$

Das Dreieck D'_j besitzt neben seinen Eckpunkten noch drei weitere Randgitterpunkte, nämlich die Mittelpunkte der drei Seitenstrecken (vgl. Abbildung 3.52). Insgesamt sind das 6 Randgitterpunkte. Wegen $\frac{6}{2} - 1 = 2$ kann D'_j nach dem Satz von Pick keine weiteren Gitterpunkte enthalten. Daher muss $\sigma(H)$ einer der Seitenmittelpunkte von D'_j sein. Es folgt, dass H Mittelpunkt einer der Seitenstrecken von D_j ist, was den Beweis abschließt.

Teil II

Gleichungen vom Grad größer als zwei

Einleitung

Im Mathematikunterricht werden üblicherweise in der 7. Klasse lineare Gleichungen und in der 9. Klasse quadratische Gleichungen behandelt. In beiden Fällen stellt sich heraus, dass man eine beliebige Gleichung des jeweiligen Typs mit einer allgemeinen Methode bzw. Formel exakt lösen kann oder anhand der in der Gleichung vorkommenden Koeffizienten erkennt, dass die Gleichung keine Lösungen besitzt. Die bei Gleichungen zweiten Grades verwendete Methode nennt man *Ergänzen zu einem vollständigen Quadrat* oder kurz *Quadratische Ergänzung*. Führt man diese für die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten p, q durch, so erhält man die unter dem Namen *p, q-Formel* bekannte und von Generationen von Schülern auswendig gelernte Lösung³⁵

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Erfreulicherweise gibt der Radikand $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, den man *Diskriminante* nennt, Auskunft über die Anzahl der Lösungen. Für eine strikt positive Diskriminante existieren zwei verschiedene reelle Lösungen. Ist die Diskriminante Null, so gibt es genau eine Lösung ($x = -\frac{p}{2}$), und bei negativer Diskriminante besitzt die Gleichung keine reelle Lösung. Die Lösungsformel funktioniert also perfekt.

Es ist eine natürliche Frage, ob es eine ebenso einwandfreie Methode (bzw. Formel) auch für Gleichungen dritten Grades, d. h. für Gleichungen der Gestalt

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

gibt. In der Regel wird diese Frage in der Schule weder gestellt noch beantwortet, und eine umfassende Behandlung des Problems würde auch sicher den Rahmen des regulären Unterrichts sprengen. Dennoch sei darauf hingewiesen, dass es ein

³⁵Die hier verwendete Schreibweise (Angabe zweier Lösungen unter Verschweigen des logischen *oder*; Verwendung des Wurzel-Symbols über einem möglicherweise negativen Ausdruck) ist aus fachlicher und didaktischer Sicht zweifelhaft; sie wurde an dieser Stelle aus Gründen der Wiedererkennung dennoch gewählt.

Ziel des Mathematikunterrichts sein sollte, den Schülern zu vermitteln, ein erfolgreich behandeltes Problem stets dahingehend zu reflektieren, welche weiterführenden Fragen sich aus der Lösung ergeben. Der Lehrer muss seine Schüler für solche Fragen sensibilisieren und sie ermutigen, diese zu stellen. Mason/Burton/Stacey (2006) äußern sich in diesem Zusammenhang voll Inbrunst mit folgender Stellungnahme: „*Verallgemeinerungen sind das Lebenselixier der Mathematik.*“³⁶

Den didaktischen Bedeutungsgehalt des Themas werden wir in Kapitel 6 diskutieren. Um die mathemathikhistorische Bedeutung der unter dem Namen **Formel von Cardano** berühmt gewordenen allgemeinen Lösung einer Gleichung dritten Grades aufzuzeigen, werden im folgenden Abschnitt zunächst die geschichtlichen Zusammenhänge dargestellt.

³⁶siehe ebd., S. 9

Kapitel 4

Exkurs: Geschichte einer berühmten Formel

Das Jahr 1545, in welchem *Gerolamo Cardano*¹ sein Werk *ARS MAGNA* veröffentlichte, wird von vielen als Geburtsstunde der modernen Mathematik gefeiert. So schreibt z. B. Felix Klein über dieses Buch:

*„This most valuable work contains the germ of modern Algebra, surpassing the bounds of ancient mathematics.“*²

Die folgende Darstellung bezieht sich hauptsächlich auf Boyer/Merzbach (1989), Bourbaki (1994), Gindikin (2007) und Katz (2009) sowie die von T. R. Witmer übersetzte Version des Originaltextes³ *ARS MAGNA*⁴.

Vor ARS MAGNA – Die Ausgangssituation

Das Lösen von Gleichungen ist von jeher ein zentrales Anliegen der Mathematik. Bereits vor über 4000 Jahren waren die Babylonier in der Lage, quadratische Gleichungen zu lösen. Sie konnten dazu eine beliebige quadratische Gleichung in eine Form bringen, welche sie zu behandeln vermochten und hatten in diesem Sinne ein allgemeines Lösungsverfahren entwickelt. Sie waren sogar in der Lage, einige spezielle kubische Gleichungen zu lösen, von einer allgemeinen Methode waren sie aber weit entfernt. Die Babylonier verfügten dabei über keinen algebraischen Symbolismus, sondern beschrieben sowohl die Probleme als auch deren Lösungen in Textform.

¹ Je nach Quelle auch Girolamo oder Geronimo Cardano. Bei der Schreibweise dieses und anderer Namen folgen wir Gindikin (2007).

²Gindikin (2007), S. 1

³Cardano (2007)

⁴Der vollständige Titel lautet *ARTIS MAGNAE SIVE DE REGULIS ALGEBRAICIS*, was übersetzt *Große Kunst oder Über die Regeln der Algebra* bedeutet. Der Kurztitel *ARS MAGNA* (*Große Kunst*) hat sich im Laufe der Jahre durchgesetzt.

Auch in Griechenland wurden bereits in der Antike quadratische Gleichungen gelöst. Im zweiten Buch von EUKLIDS ELEMENTEN wird ein geometrisches Lösungsverfahren für Gleichungen vom Grad zwei beschrieben.⁵ Die Methode ist allerdings nicht als algebraisches Verfahren im heutigen Sinne zu bezeichnen.⁶

Es ist erstaunlich, wie viel Zeit verging, bis ein Lösungsverfahren für kubische Gleichungen gefunden werden konnte und wenigstens ebenso erstaunlich ist, dass dieser Erfolg schlussendlich in Europa errungen wurde.

Zu Beginn des 16. Jahrhunderts, als sich die Wissenschaften in Europa von den Rückschlägen des Mittelalters zu erholen begannen, waren die europäischen Mathematiker eigentlich nichts weiter als „Lehrlinge“ der arabischen Mathematik.⁷ Das Werk SUMMA DE ARITHMETICA von *Fra Luca Pacioli* aus dem Jahr 1494 – eines der ersten gedruckten Mathematikbücher – fasste den Wissensstand der Mathematik zusammen und besaß große Autorität. Vermutlich trug dieses Buch mit dazu bei, dass die Entdeckung einer Lösungsformel für kubische Gleichungen nicht früher stattfand, denn an dessen Ende findet sich das folgende Zitat:

„*The means [for solving cubic equations] by the art of algebra are not yet given, just as the means for squaring the circle are not given.*“⁸

Der hier gebrachte Vergleich mit der Quadratur des Kreises führte bei einigen Mitgliedern der damaligen Fachwelt vielleicht zu der Überzeugung, dass es unmöglich sei, ein Lösungsverfahren für kubische Gleichungen zu finden.

ARS MAGNA

Scipione dal Ferro (1465 – 1526), Mathematikprofessor an der Universität von Bologna, ließ sich von Paciolis Worten offenbar nicht beeindrucken. Er fand ein Lösungsverfahren⁹ für Gleichungen der Form $x^3 + ax = b$. *Dal Ferro* hatte damit allerdings kein Lösungsverfahren für eine beliebige kubische Gleichung ohne quadratisches Glied gefunden. Aufgrund der Tatsache, dass in der damaligen Zeit noch nicht mit negativen Koeffizienten operiert wurde, stellte z. B. eine Gleichung der Form $x^3 = ax + b$ bereits ein neues Problem dar. *Dal Ferro* gab seine Lösung an mindestens zwei Personen weiter: *Annibale della Nave* war sein zukünftiger Schwiegersohn und designierter Nachfolger an der Fakultät; *Antonio Maria Fior* war ein Student *dal Ferros* und wird von Boyer/Merzbach (1989) als „mittelmäßiger Mathematiker“ bezeichnet.

⁵siehe etwa Heath (1956), S. 383

⁶Die erste algebraische Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen wurde viel später entwickelt. Sie findet sich in *Raffael Bombellis* Werk ALGEBRA aus dem Jahr 1572.

⁷vgl. Gindikin (2007), S. 1

⁸Gindikin (2007), S. 3

⁹Der Lösungsweg und der genaue Zeitpunkt der Entdeckung sind nicht übermittelt. Katz (2009) gibt den Zeitraum 1500 bis 1515 an. Siehe ebd., S. 399.

Nach dem Tod *dal Ferros* wollte *Fior* sein Wissen nutzen, um in den zu dieser Zeit im akademischen Milieu weit verbreiteten Problemlöse-Disputen Erfolge zu feiern. Die wissenschaftlichen Kontrahenten fertigten im Vorfeld jeweils eine Liste mit (in diesem Fall) mathematischen Problemen an und ließen sie sich gegenseitig zukommen. Zu einem ausgemachten Termin präsentierten die Kandidaten ihre Lösungen vor einem öffentlichen Publikum. Anschließend wurde ein Gewinner deklariert, welcher häufig ein Preisgeld erhielt und außerdem seine wissenschaftliche Reputation steigerte. **Im Jahr 1535** kam es zu einem ebensolchen Disput zwischen *Antonio Maria Fior* und *Niccolò Tartaglia*¹⁰, einem aufstrebenden Wissenschaftler und Mathematiker, welcher wie sein Kontrahent Ansehen und Einfluss erlangen wollte.

Tartaglia stammte aus einer armen Familie und hatte daher keine vollständige Schullaufbahn absolviert. Er bildete sich später im Selbststudium zum Abakus-Meister (Rechenlehrer) aus und schrieb zwei Bücher über Ingenieurskunst, deren Stil – die Dialogform – später von *Galileo* übernommen wurde.¹¹ Aufgrund der niederen Herkunft *Tartaglias* war dieser in Bezug auf Ansehen und Einfluss seinem späteren Kontrahenten *Cardano* weit unterlegen; ein Aspekt, der im weiteren Verlauf der Geschichte noch entscheidend sein wird.

Kommen wir zurück zum anstehenden Disput zwischen *Antonio Maria Fior* und *Niccolò Tartaglia* im Jahr 1535. Während in der Fachwelt Gerüchte kursierten, dass *Fior* Gleichungen der Form $x^3 + ax = b$ lösen könne, brüstete sich *Tartaglia* damit, dass er eine Lösungsmethode für Gleichungen der Form $x^3 + ax^2 = b$ gefunden habe. Die Aufgaben auf *Fiors* Liste waren ausschließlich kubische Gleichungen der Form $x^3 + ax = b$, da er davon ausging, dass *Tartaglia* nicht imstande war, sie zu lösen. In der Tat hatte dieser zunächst kein Verfahren für diesen Gleichungstyp an der Hand, er begann jedoch fieberhaft nach einer Methode zu forschen und hatte laut Katz (2009) am 12. Februar 1535 Erfolg, woraufhin er alle ihm gestellten Probleme erfolgreich löste. *Fior* hingegen konnte viele der ihm gestellten Aufgaben, welche z. T. auch andere Bereiche der Mathematik abdeckten, nicht bewältigen und *Tartaglia* wurde zum Gewinner erklärt.

Im Jahr 1539 trat *Gerolamo Cardano*, der von den Erfolgen *Tartaglias* beim Lösen bestimmter kubischer Gleichungen gehört hatte, mit der Bitte um Aushändigung seiner Methoden an diesen heran. *Cardano* war im Gegensatz zu *Tartaglia* wissenschaftlich und gesellschaftlich einflussreich. Aus gutem Hause stammend (sein Vater war Jurist) hatte er einen Abschluss an der Universität von Padua gemacht. *Cardano* wollte daraufhin in Mailand Medizin studieren und wurde nach einmaliger Ablehnung¹² im zweiten Anlauf angenommen. Er wurde zu einem der berühmtesten Ärzte

¹⁰In Wirklichkeit hieß dieser Niccolò Fontana; er trug den Spitznamen Tartaglia, was Stotterer bedeutet, wegen eines Sprachfehlers, den er aufgrund einer Kehlkopfverletzung seit dem Kindesalter hatte (vgl. Gindikin (2007), S. 3).

¹¹Gindikin (2007) bezeichnet *Tartaglia* in diesem Zusammenhang sogar als „Vorgänger“ von Galileo (siehe ebd., S. 4).

¹²Gindikin (2007) begründet dies in der Tatsache, dass *Cardano* ein uneheliches Kind war.

seiner Zeit, behandelte viele hochrangige Persönlichkeiten und war ein guter Freund von *Andreas Vesalius*. Wie viele Wissenschaftler in der damaligen Zeit beschränkte *Cardano* sich nicht auf ein Fachgebiet und war auch in der mathematischen Forschung aktiv und erfolgreich. So stammt z. B. *THE BOOK ON GAMES OF CHANCE* – eines der ersten Bücher, das in Ansätzen stochastische Theorien¹³ entwickelte, von ihm.

Zu Beginn des Jahres 1539 fragte *Cardano* zweimal bei *Tartaglia* nach den Lösungsmethoden für kubische Gleichungen an. Dieser schlug beide Bitten aus und begründete seine Ablehnung damit, dass er die Methoden selbst zu einem späteren Zeitpunkt in einem Buch veröffentlichen wolle.

Im März 1539 erfolgte eine Einladung von *Cardano* an *Tartaglia* zu einem Besuch auf seinem Anwesen in Mailand. *Tartaglia* willigte ein; mutmaßlich in der Hoffnung auf eine Anstellung als Berater des spanischen Vizekönigs und obersten Befehlshabers von Mailand *Alfonso d'Avalos*. Natürlich bedrängte *Cardano* ihn bei dieser Gelegenheit, die Formeln auszuhändigen. Rekonstruiert aus den persönlichen Aufzeichnungen *Tartaglias* gab er schlussendlich sein Geheimnis preis, nachdem *Cardano* zuvor bei seiner Ehre als Christ geschworen hätte, dieses Wissen nie zu veröffentlichen und nur in verschlüsselter Form niederzuschreiben. Oystein Ore weist im Vorwort zu *Cardano* (2007) darauf hin, dass dem entgegen eine spätere Aussage von *Ludovico Ferrari*¹⁴ stehe, welcher zu dieser Zeit bereits als Bediensteter in *Cardanos* Haus beschäftigt war: Er sei bei dem Treffen zugegen gewesen, und es sei mit keinem Wort von Geheimhaltung gesprochen worden.

Nach *Katz* (2009) gab *Tartaglia* im März 1539 die Lösungsmethoden für drei Formen kubischer Gleichungen an *Cardano* weiter.¹⁵ Dieser erhielt jedoch keinen Hinweis zu deren Herleitung. Gemeinsam mit seinem Schüler *Ferrari* arbeitete *Cardano* in den nächsten Jahren fieberhaft an den Herleitungen und der Weiterentwicklung der Lösungsverfahren aller möglichen verschiedenen Arten¹⁶ von kubischen Gleichungen und Gleichungen vierten Grades.

Im Jahr 1543 kamen *Cardano* Gerüchte zu Ohren, dass bereits *Scipione dal Ferro* in der Lage war, kubische Gleichungen zu lösen. Er reiste gemeinsam mit *Ferrari* nach Bologna, und *Annibale della Nave* gewährte ihnen Einsicht in die persönlichen Aufzeichnungen *dal Ferros*. Von diesem Zeitpunkt an wusste *Cardano*, dass bereits 20 Jahre vor *Tartaglias* Entdeckungen, kubische Gleichungen gelöst werden konnten. *Katz* (2009) interpretiert dies als den Punkt, von dem an *Cardano* keine

¹³Es wird z. B. eine erste Version des Gesetzes der großen Zahlen formuliert.

¹⁴*Ferrari* wurde später *Cardanos* Schüler und spielt im weiteren Verlauf eine entscheidende Rolle. Er soll ein ausgezeichneter Mathematiker und später mehr als ein Gehilfe für *Cardano* gewesen sein.

¹⁵Die Methoden wurden *Cardano* in Form von Gedichten mitgeteilt. Der Vers zur Gleichung $x^3 + ax = b$ ist in *Katz* (2009) auf S. 400 wiedergegeben.

¹⁶In *ARS MAGNA* werden 13 verschiedene Typen kubischer Gleichungen behandelt.

Verpflichtung mehr gegenüber Tartaglia empfunden habe.¹⁷

Zwei Jahre später, also **im Jahr 1545** erschien das Buch ARS MAGNA, in welchem *Cardano* sein gesamtes Wissen über kubische Gleichungen preisgab und somit insbesondere sein Versprechen gegenüber *Tartaglia* brach, so es dieses Versprechen gegeben hat. Im darauffolgenden Jahr veröffentlichte *Tartaglia* in seinem Werk QUESITI ET INVENTIONI DIVERSE seine persönlichen Aufzeichnungen über seinen Austausch mit *Cardano* und überhäufte diesen darin mit Anschuldigungen. Es folgte eine jahrelange erbitterte Auseinandersetzung zwischen *Tartaglia* auf der einen und *Cardano* nebst *Ferrari* auf der anderen Seite, welche in weiten Teilen eher von *Ferrari* als von *Cardano* selbst bestritten wurde.

Viele Quellen betrachten es als erwiesen, dass *Cardano* *Tartaglia* gegenüber ein Versprechen gab, welches er später brach. Dem entgegen steht die oben genannte Aussage von *Ferrari*. Fest steht, dass *Cardano* die Entdeckung der Lösungsmethode von Gleichungen der Form $x^3 + ax = b$ nicht als seine eigene darstellt, ohne auf *Tartaglia* zu verweisen. *Cardano* leitet das Kapitel zu der entsprechenden Gleichung mit den folgenden Worten ein:

*„Scipio Ferro of Bologna well-nigh thirty years ago discovered this rule and handed it on to Antonio Maria Fior of Venice, whose contest with Niccolò Tartaglia of Brescia gave Niccolò occasion to discover it. He [Tartaglia] gave it to me in response to my entreaties, though withholding the demonstration. Armed with this assistance, I thought out its demonstration in [various] forms. This was very difficult. My version of it follows.“*¹⁸

Tartaglia scheint hingegen in seinen Büchern an verschiedenen Stellen Resultate anderer als seine eigenen auszugeben. Dies wirft ihm *Ferrari* in einer Antwort auf die gegen *Cardano* erhobenen Beschuldigungen im Verlauf der Auseinandersetzung auch vor.¹⁹

Der Anteil, den *Tartaglia* tatsächlich am Gesamtverständnis kubischer Gleichungen hat, ist schwer einzuschätzen. Die Ausführungen von *Cardano* gehen weit über das hinaus, was *Tartaglia* ihm übermittelte; allerdings scheint *Cardano* im Gegensatz zu *Tartaglia* nicht in der Lage gewesen zu sein, den ersten Schritt zur Lösung kubischer Gleichungen eigenständig zu gehen.

Eine weitere Frage, deren Beantwortung zwar hochinteressant aber kaum möglich erscheint, ist die folgende: Aus welchem Grund veröffentlichte *Tartaglia* seine Ergebnisse über kubische Gleichungen in den zehn Jahren zwischen der Entdeckung (1535) und dem Erscheinen von ARS MAGNA (1545) nicht selbst? Er hatte dieses Vorhaben gegenüber *Cardano* im Jahr 1539 geäußert. Es sind verschiedene Mutmaßungen möglich. Mit großer Sicherheit war das Verständnis, welches *Tartaglia* über

¹⁷siehe ebd., S. 400

¹⁸Cardano (2007), S. 96

¹⁹siehe Gindikin (2007), S. 17

kubische Gleichungen erlangt hatte, weniger tief als das von *Cardano*. Es könnte also sein, dass er nicht veröffentlichte, weil er nichts hatte, was einer Veröffentlichung würdig gewesen wäre. Zu Bedenken ist hierbei jedoch, dass *Tartaglia* eigenen Angaben zufolge bis zur Veröffentlichung der Ergebnisse durch *Cardano* hauptsächlich anderweitig gearbeitet hat. Er übersetzte in dieser Zeit EUKLIDS ELEMENTE aus dem Lateinischen. Sollte er fest davon ausgegangen sein, dass *Cardano* sein Versprechen halten würde, so hätte er keinen besonderen zeitlichen Druck empfunden, die Lösungsmethoden für kubische Gleichungen auszuarbeiten und zu veröffentlichen.

Es darf zudem nicht vergessen werden, dass sich die Beweggründe für oder gegen eine wissenschaftliche Veröffentlichung im Laufe der Zeit gewandelt haben. Es ist nicht ausgeschlossen, dass *Tartaglia* seine Kenntnisse über kubische Gleichungen lieber unveröffentlicht ließ, um den gewinnbringenden Einsatz in Problemlöse-Disputen zu gewährleisten.²⁰ *Cardano* schien die Bedeutung der Lösungsformeln für kubische Gleichungen zwar hoch einzuordnen, er konnte jedoch nicht vorhersehen, dass sein Name durch die Veröffentlichung in der Bezeichnung *Formel von Cardano* unsterblich werden würde. Die folgende Notiz aus einem persönlichen Gespräch zwischen *Cardano* und *Tartaglia* im Jahr 1547 könnte man dahingehend auslegen, dass *Cardano* Wortbruch zum Wohle der Wissenschaft beging:

*“Really, since we are born not for ourselves only [...], and when you possess within yourself something good, why don't you want to let others share it?“*²¹

Einen Hinweis auf ein unreines Gewissen von *Cardano* sieht Gindikin (2007) auf den letzten Seiten von dessen Autobiographie THE BOOK OF MY LIFE:

*„I confess that in mathematics I received a few suggestions, but ever few, from brother Niccolò.“*²²

Nach ARS MAGNA – Die Folgen

Wie eingangs erläutert, gilt die Veröffentlichung der allgemeinen Lösungsmethoden für Gleichungen dritten und vierten Grades durch *Cardano* und seinen Schüler *Ferrari* als Meilenstein der Geschichte der Mathematik. Man könnte hieraus schließen, dass heutzutage jeder, der etwas auf seine mathematische Bildung hält, diese Methoden routinemäßig beherrschen muss. Dass dies keineswegs der Fall ist, erfordert eine Erklärung.

²⁰Katz (2009) betont diesen Gegensatz zur heutigen akademischen Welt. Der Erfolg in Problemlöse-Disputen sei damals förderlicher für die wissenschaftliche Karriere gewesen als Publikationen (s. ebd., S. 399).

²¹Gindikin (2007), S. 18

²²siehe ebd., S. 19

Die Bedeutung der Methoden von Cardano und Ferrari liegt nicht in ihrer Anwendung sondern in der Tatsache, dass mit ihrer Entdeckung allgemeine Lösungsverfahren für alle Gleichungen bis zum Grad vier existieren und in der daraus resultierenden Frage: Existieren allgemeine Lösungsverfahren auch für Gleichungen höheren Grades? Die Suche nach der Antwort auf diese Frage wurde zu einer Haupttriebfeder der Mathematik vom 16. bis ins 19. Jahrhundert.

In diesem Zeitraum und unter diesem Antrieb entstand die moderne Algebra. Die Entwicklung der „frühneuzeitlichen Algebra“ wurde vor allem durch François Viète (1540 – 1603) und René Descartes (1596 – 1650) geprägt. „Sowohl Viète als auch Descartes führten eine angepasste Notation und eine Symbolik zum Studium allgemeiner Gleichungen und zur Darstellung der Beziehungen zwischen Koeffizienten und Wurzeln ein.“ (Scholz (1990), S. 184) Doch es dauerte bis zum Ende des 18. Jahrhunderts, bis Mathematiker die Unmöglichkeit allgemeiner Lösungsmethoden für Gleichungen höheren Grades in Betracht zogen. „Paolo Ruffini (1765 – 1822) sprach in seinem Buch »Teoria generale delle equazioni ...« (1799) zum erstenmal die Ansicht aus (und begründete sie teilweise), dass die allgemeine Gleichung n -ten Grades für $n \geq 5$ nicht durch Radikale (geschachtelte Wurzelausdrücke) lösbar ist.“ (Scholz (1990), S. 372) Niels Henrik Abel (1802 – 1829) lieferte im Jahr 1826 schließlich den ersten Beweis für den Fall $n = 5$. Eine vollständige und bahnbrechende Theorie entwickelte der Franzose Évariste Galois (1811 – 1832) im Jahr 1831, bevor er 1832 im Alter von 20 Jahren bei einem Duell starb.²³ Er begründete in seiner Arbeit, die erst Jahre nach seinem Tod verstanden wurde, die Grundbegriffe der modernen Algebra:

*„The proofs of this fact by Abel (1826) and Galois (1831) were a quantum leap in the development of algebra, a leap above the details of computation to a realm of powerful abstract concepts [groups, fields and dimension].“*²⁴

Es ist exemplarisch für mathematisch forschende Aktivitäten, dass die erfolgreiche Lösung eines speziellen Problems (hier die Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades) nicht das Ende sondern vielmehr den Anfang der eigentlichen Forschung markiert. Die Rückschau auf den Lösungsweg wirft neue Fragen auf, welche umso fruchtbarer sein können, je schwieriger sie zu beantworten sind. Dieser Aspekt ist auch und vor allem aus didaktischer Sicht bedeutend, da er eine wesentliche Facette des Wesens der Mathematik darstellt. Diese an wenigstens einem konkreten Beispiel kennenzulernen, ist für Mathematik-Lernende unbedingt wertvoll.

²³Für eine Kurzbiographie und weitere Verweise siehe etwa Katz (2009), S. 727.

²⁴Stillwell (1994), S. 14

Kapitel 5

Fachwissenschaftliche Darstellung

5.1 Generelle Voraussetzungen

Es geht im folgenden Kapitel um das Lösen von Polynom-Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Wir betrachten dazu *Polynom-Funktionen* der Form

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}).$$

Es ist in allgemeineren Zusammenhängen notwendig, Polynom-Funktionen von *Polynomen*, d. h. von formalen Rechenausdrücken der Form $a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$, zu unterscheiden.¹ Im Falle reeller Polynome bzw. Polynom-Funktionen ist eine Identifizierung der Begriffe jedoch unproblematisch, weshalb wir im Folgenden davon Gebrauch machen. Wir definieren Funktionen also in der Regel als Polynome, d. h. unter Verzicht auf die Angabe von Definitions- und Zielbereich. Das Auffassen reeller Funktionen als Polynome in der Unbekannten x führt auch dazu, dass Gleichungen mit x nicht quantorisiert werden müssen.

Ist f ein Polynom, $c \in \mathbb{R}$ und es gilt $f(c) = 0$, so nennen wir c eine *Nullstelle* von f . Der Exponent der höchsten Potenz von x in f heißt der *Grad* von f . Besitzt f den Grad n , so bezeichnen wir eine Gleichung der Form $f(x) = 0$ als eine *Gleichung vom Grad n* .

Folgende Aspekte sind wohlbekannt und im Folgenden hin und wieder von Bedeutung:

- Reelle Polynom-Funktionen sind durch ihre Koeffizienten eindeutig festgelegt.²
- Die Addition und Multiplikation von Polynom-Funktionen wird punktweise definiert. Mit den analog definierten Verknüpfungen für Polynome mit reellen

¹ Für eine exakte Definition des Begriffs Polynom siehe etwa Stillwell (1994), S. 57. Für eine Erläuterung der notwendigen Begriffstrennung siehe etwa Lang (1987), S. 73/74.

²Für einen Beweis siehe etwa von Grudzinski/Schnabel (2002), S. 141. Für Polynome gilt dies per Definition.

Koeffizienten in der Unbekannten x bilden diese einen Ring, welcher mit $\mathbb{R}[x]$ notiert wird.³

- In $\mathbb{R}[x]$ lässt sich wie üblich eine Teilbarkeitsrelation definieren:

$$f|g :\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}[x] : fh = g$$

- In $\mathbb{R}[x]$ gilt der *Satz von der Division mit Rest*: Sind $f, g \in \mathbb{R}[x]$ und $g \neq 0$, so existieren $q, r \in \mathbb{R}[x]$ mit $f = qg + r$ und der Grad von r ist kleiner als der Grad von g .

Wir betrachten in diesem Abschnitt stets Gleichungen mit reellen Koeffizienten und suchen Lösungen in den reellen Zahlen. Wenn wir also eine Gleichung wie

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

betrachten, so sei stets vorausgesetzt, dass $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind. Wenn wir sagen, dass diese Gleichung genau zwei Lösungen besitzt, so meinen wir, dass sie genau zwei reelle Lösungen besitzt. Wir wissen, dass ein Polynom vom Grad drei höchstens drei Nullstellen besitzen kann (siehe Korollar 1.1 in Anhang A.1).

5.2 Ein Lösungsverfahren für kubische Gleichungen

Wir wollen hier eine Gleichung der Form

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{5.1}$$

lösen. Zunächst überzeugen wir uns davon, dass wir diese auf eine Gleichung ohne quadratisches Glied reduzieren können, d. h., dass wir sie durch geeignete Substitution in eine Gleichung der Form

$$z^3 + pz + q = 0. \tag{5.2}$$

überführen können.

5.2.1 Erste Reduktion

Das folgende Lemma fasst die angestrebte Beseitigung des quadratischen Gliedes in (5.1) zusammen.

³Für Näheres zu diesem und den folgenden Punkten siehe etwa Stillwell (1994), S. 57 ff.

Lemma 5.1. *Es seien $a, b, c, x \in \mathbb{R}$. Setzen wir*

$$z := x + \frac{a}{3} \quad \text{sowie} \quad p := b - \frac{a^2}{3} \quad \text{und} \quad q := 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c,$$

so gilt

$$x^3 + ax^2 + bx + c = z^3 + pz + q.$$

Beweis. Mit den obigen Setzungen gilt

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c \\ &= z^3 + 3\left(\frac{a}{3}\right)^2 z - \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{2}{3}a^2 z + a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + bz - \frac{ab}{3} + c \\ &= z^3 + \left(b + \frac{a^2}{3} - \frac{2}{3}a^2\right)z - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c \\ &= z^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)z + \left(2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c\right) \\ &= z^3 + pz + q \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.1. *Suchen wir die Lösungen von $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so erhalten wir diese also, indem wir zu jeder Lösung z der Gleichung $z^3 + pz + q = 0$ (mit obigen Setzungen) $x = z - \frac{a}{3}$ bestimmen.*

Wir betrachten von nun an nur noch kubische Gleichungen **ohne quadratisches Glied**.

5.2.2 Ermittlung eines Lösungskandidaten

Wir betrachten die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0. \tag{5.3}$$

Unser Ansatz zur Findung eines Lösungskandidaten ist erneut eine Substitution der Form

$$y = x + u.$$

Wir bestimmen zunächst, welche Bedingungen u und y erfüllen müssen, damit $x = y - u$ überhaupt als Lösung in Frage kommt. Aus $y = x + u$ folgt

$$y^3 = x^3 + 3ux^2 + 3u^2x + u^3 = x^3 + 3ux(x + u) + u^3 = x^3 + 3uxy + u^3.$$

Wir erhalten

$$x^3 + (3uy)x + (u^3 - y^3) = 0.$$

Koeffizientenvergleich⁴ mit (5.3) liefert

$$(I) \quad 3uy = p \quad \text{und} \quad (II) \quad u^3 - y^3 = q.$$

Wir schreiben diese Bedingungen in etwas anderer Form

$$(I) \quad u^3(-y^3) = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad \text{und} \quad (II) \quad u^3 + (-y^3) = q.$$

Der Satz von Vieta⁵ besagt nun, dass u^3 und $-y^3$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 - qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

sind. Es folgt

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad -y^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

oder anders herum (was keinen Unterschied macht). Wir setzen dabei voraus, dass $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ gilt. Wir beseitigen das Minuszeichen vor y^3 , ziehen jeweils die dritte Wurzel⁶ und erhalten

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Schlussendlich folgt

$$x = y - u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

wobei aus ästhetischen Gründen das Minuszeichen unter das zweite Wurzelzeichen gezogen wurde. Dies ist die berühmte *Formel von Cardano*.

⁴Die Methode des Koeffizientenvergleichs beruht auf der oben erwähnten Tatsache, dass reelle Polynom-Funktionen durch ihre Koeffizienten eindeutig bestimmt sind.

⁵Man vergleiche Satz 1.5 in Anhang A.1. Der Satz geht auf den bereits in Kapitel 4 genannten *François Viète* zurück.

⁶Die Verwendung des Symbols $\sqrt[3]{}$ ist problematisch, wenn unter dem Wurzelzeichen ein Ausdruck steht, der negativ sein könnte. Aus Gründen der leichteren Lesbarkeit soll hier trotzdem von dieser Schreibweise Gebrauch gemacht werden. Wir definieren für den Moment *die dritte Wurzel einer beliebigen reellen Zahl a* als diejenige (eindeutig bestimmte) reelle Zahl, deren dritte Potenz gleich a ist. Wir definieren ausdrücklich keine höheren Wurzeln aus negativen Zahlen und vermeiden in diesem Abschnitt strikt die Verwendung von Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten.

5.2.3 Beweis der Formel von Cardano

Da wir nun einen Lösungskandidaten kennen, lässt sich der folgende Satz leicht formulieren und beweisen.⁷

Satz 5.1. (*Formel von Cardano*)

Es seien $p, q \in \mathbb{R}$. Falls $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ gilt, so ist

$$x_0 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \quad (5.4)$$

eine Lösung der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0.$$

Beweis. Es seien

$$D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad u := \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}}, \quad y := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}.$$

Dann folgt $y - u = x_0$ und

$$y^3 - u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} - \left(\frac{q}{2} + \sqrt{D}\right) = -q$$

sowie

$$yu = \sqrt[3]{\left(\sqrt{D} + \frac{q}{2}\right)\left(\sqrt{D} - \frac{q}{2}\right)} = \sqrt[3]{D - \left(\frac{q}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{p}{3}.$$

Wir erhalten

$$x_0^3 = (y - u)^3 = y^3 - 3y^2u + 3yu^2 - u^3 = \underbrace{-3yu}_{-p} \underbrace{(y - u)}_{x_0} + \underbrace{y^3 - u^3}_{-q} = -px_0 - q,$$

also $x_0^3 + px_0 + q = 0$. □

Bemerkung 5.2. Wir haben derzeit nur eine Lösung der Gleichung gefunden. Da es sich um eine Gleichung dritten Grades handelt, könnte sie bis zu drei reelle Lösungen besitzen. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, bestimmt das Vorzeichen des Ausdrucks

$$D(p, q) := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

die Anzahl der Lösungen. Man nennt diesen die *Diskriminante* der Gleichung.

⁷Es ist für die mathematische Vollständigkeit nicht notwendig, die vorherige Herleitung des Lösungskandidaten mit aufzunehmen. Der Beweis des folgenden Satzes ist auch ohne sie vollständig. In mathematischen Fachtexten findet sich häufig nur der Beweis, nicht aber die Herleitung einer Lösung. Wir wollen hier beide Aspekte abbilden.

5.3 Die Anzahl der Lösungen einer kubischen Gleichung

Wir wollen im Folgenden untersuchen, wie viele Lösungen die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 \tag{5.5}$$

in Abhängigkeit von p, q besitzt. Es sei noch einmal daran erinnert, dass wir immer **reelle** Lösungen bzw. deren Anzahl meinen, wenn wir von Lösungen einer Gleichung oder von deren Anzahl sprechen. Das folgende Lemma ist entscheidend.

Lemma 5.2. *Es seien $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$x^3 + px + q = 0 \text{ besitzt genau 2 Lösungen} \iff D(p, q) = 0.$$

Vorüberlegung zum Beweis: Nach der reellen Version des Fundamentalsatzes der Algebra⁸ lässt sich das Polynom $f(x) = x^3 + px + q$ unter ausschließlicher Verwendung von Linearfaktoren und von quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten ausdrücken. Es folgt

$$f \text{ besitzt genau zwei Nullstellen} \iff \exists a, b \in \mathbb{R} : a \neq b \wedge f(x) = (x - a)(x - b)^2.$$

Gilt $f(x) = (x - a)(x - b)^2$, so folgt mit dem Satz von Vieta $a + 2b = 0$, also $a = -2b$. Insgesamt erhalten wir:

$$\text{Gleichung (5.5) hat genau zwei Lösungen} \iff f(x) = (x + 2b)(x - b)^2,$$

wobei b eine doppelte Nullstelle⁹ von f ist. Es gilt $b \neq 0$, weil $p, q \neq 0$ vorausgesetzt wurde. Nun beweisen wir das Lemma.

Beweis. Zunächst besitze (5.5) genau zwei Lösungen. Laut Vorüberlegung gilt dann

$$\begin{aligned} x^3 + px + q = 0 &\iff (x + 2b)(x - b)^2 = 0 \\ &\iff x^3 - 2bx^2 + b^2x + 2bx^2 - 4b^2x + 2b^3 = 0 \\ &\iff x^3 - 3b^2x + 2b^3 = 0. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$p = -3b^2 \quad \text{und} \quad q = 2b^3.$$

Es folgt $\frac{p}{3} = -b^2$ und $\frac{q}{2} = b^3$, also

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

⁸siehe Korollar 1.2 in Anhang A.1

⁹Die Definition der Vielfachheit einer Nullstelle ist in Anhang A.1 angegeben.

Zum Beweis der umgekehrten Implikation sei nun diese Bedingung als wahr vorausgesetzt. Es gilt dann

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

also

$$p = -3 \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \right)^2.$$

Es folgt

$$\left(x + 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right) \left(x - \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)^2 = x^3 - 3 \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)^2 x + 2 \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)^3 = x^3 + px + q.$$

Die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ besitzt also die beiden voneinander verschiedenen Lösungen $x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ und $x_2 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$. Da wir $x^3 + px + q$ in Linearfaktoren zerlegt haben, gibt es keine weiteren Lösungen. Gleichung (5.5) besitzt folglich genau zwei Lösungen. \square

Es lohnt sich, den Beweis auf nützliche „Abfallprodukte“ zu untersuchen. Wir haben nicht nur bewiesen, dass genau zwei Lösungen existieren, falls $D(p, q) = 0$ gilt; es wurden sogar beide Lösungen explizit angegeben. Wir erhalten ohne weitere Arbeit das folgende Korollar.

Korollar 5.1. *Es gelte $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Dann sind*

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad \text{und} \quad x_2 = \sqrt[3]{-4q}$$

sämtliche Lösungen der Gleichung

$$x^3 + px + q = 0.$$

Bemerkung 5.3. *Man kann die Lösungen auch mithilfe von p ausdrücken, muss dann allerdings zwei Fälle unterscheiden. Falls $q \geq 0$ ist, sind die beiden Lösungen*

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{und} \quad x_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Ist $q < 0$, so sind die beiden Lösungen

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{und} \quad x_2 = +2\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Beweis. Der Beweis ist relativ einfach und wird im fachdidaktischen Teil der Arbeit im Abschnitt 6.2 durchgeführt. \square

Man kann den Beweis zu Lemma 5.2 alternativ über die Betrachtung der Graphen von Funktionen dritten Grades führen. Diese Beweisvariante verdient Beachtung, da sie sehr anschaulich ist und aus diesem Grund in der fachdidaktischen Aufbereitung bevorzugt wird (siehe Abschnitt 6.2). Hinzu kommt, dass noch ein weiterer Beweis am Ende dieses Abschnitts auf der nun folgenden Beweisvariante von Lemma 5.2 aufbauen wird.

Vorüberlegungen zum Alternativbeweis von Lemma 5.2:

Die Lösungen von Gleichung (5.5) sind die Nullstellen von $f(x) = x^3 + px + q$. Wir betrachten zunächst das einfachere Polynom

$$g(x) = x^3 + px.$$

Es gilt

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + px = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + p) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 = -p.$$

Also hat g eine Nullstelle falls $p > 0$ ist und drei Nullstellen, falls $p < 0$ ist (siehe Abbildung 5.1).

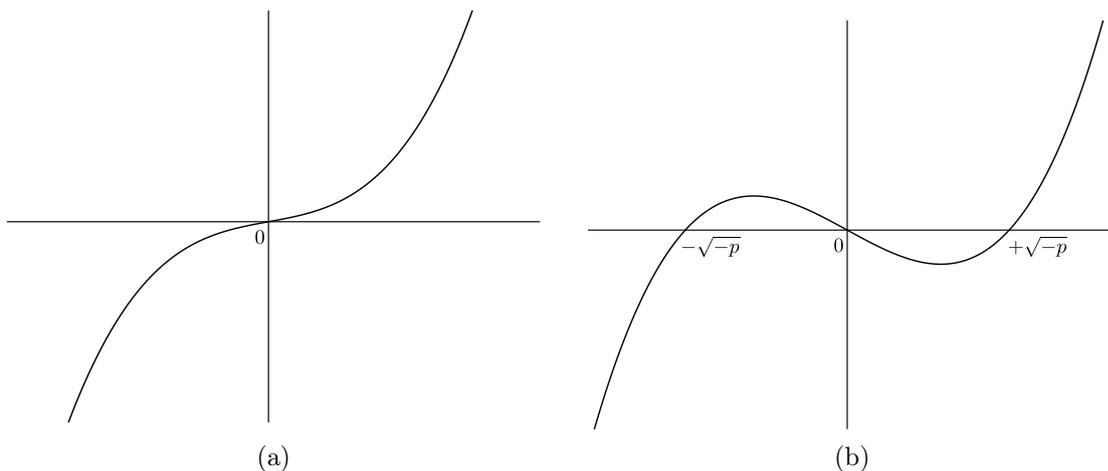


Abb. 5.1: (a) Für $p > 0$ besitzt g eine Nullstelle. (b) Für $p < 0$ besitzt g drei Nullstellen.

Offenbar entsteht f aus g durch Verschiebung nach oben bzw. unten. Folglich besitzt f eine Nullstelle, falls $p > 0$ ist. Wenn $p < 0$ ist, kann f je nach Richtung und Ausmaß der Verschiebung, d. h. abhängig von der Größe von q , unterschiedlich viele Nullstellen besitzen. Abbildung 5.2 zeigt eine mögliche Situation mit drei Nullstellen (a) und eine mögliche Situation mit einer Nullstelle (b). In Abbildung 5.3 sind zwei mögliche Situationen mit jeweils zwei Nullstellen dargestellt. Eine dieser Konstellationen liegt vor, falls f genau zwei Nullstellen besitzt.

Beweis. (Alternativbeweis zu Lemma 5.2)

Wir haben zu zeigen:

$$f \text{ besitzt genau 2 Nullstellen} \iff D(p, q) = 0.$$

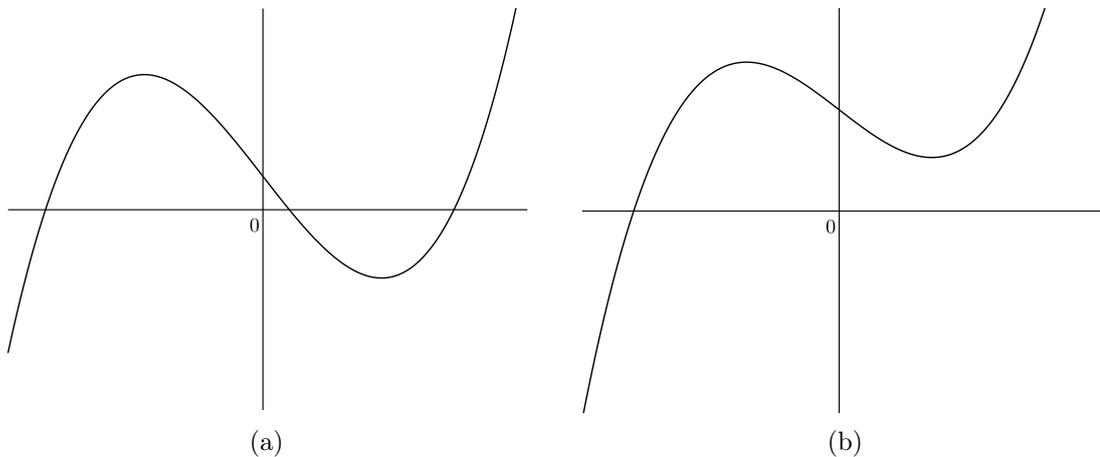


Abb. 5.2: (a) Für $p < 0$ besitzt f drei Nullstellen, falls die beiden Extrema auf unterschiedlichen Seiten der x -Achse liegen. (b) Liegen beide Extrema oberhalb (bzw. beide unterhalb) der x -Achse, so besitzt f nur eine Nullstelle.

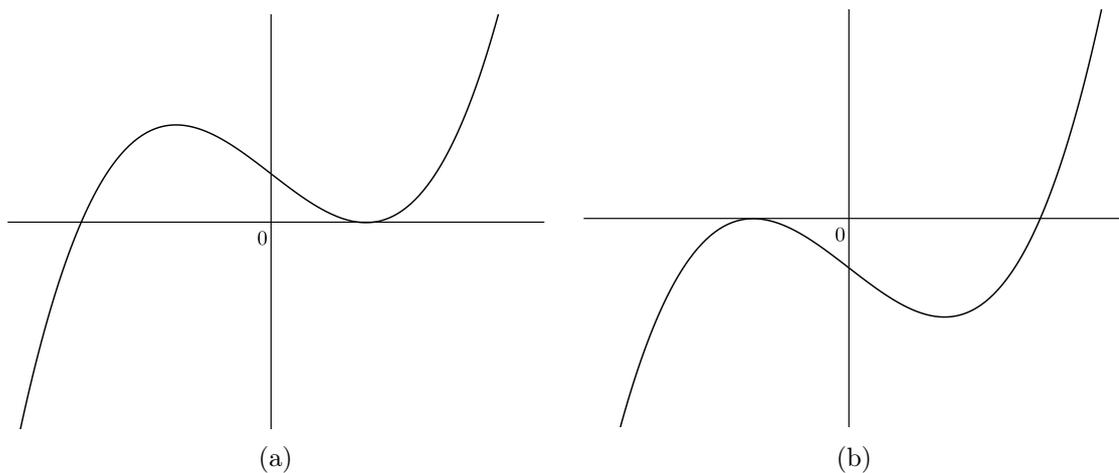


Abb. 5.3: f besitzt genau dann genau zwei Nullstellen, wenn einer der Extrempunkte auf der x -Achse liegt.

Aufgrund unserer Vorüberlegung können wir $p < 0$ voraussetzen. f besitzt folglich ein lokales Maximum, etwa an der Stelle x_{\max} , und ein lokales Minimum, etwa an der Stelle x_{\min} . Mithilfe der Ableitung von f bestimmen wir x_{\max} und x_{\min} . Es gilt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + p = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{oder} \quad x = +\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ gilt $x_{\max} < x_{\min}$, und es folgt

$$x_{\max} = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{und} \quad x_{\min} = +\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

1. Fall: $q \geq 0$.

In diesem Fall ist f aus g durch Verschiebung nach oben hervorgegangen (vgl. Abbildung 5.3 (a)). Daher gilt

$$f \text{ hat genau 2 Nullstellen} \Leftrightarrow f(x_{\min}) = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f(x_{\min}) = 0 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0 \\ &\Leftrightarrow q = -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} q^2 = \frac{4}{9}p^2 \left(-\frac{p}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0. \end{aligned}$$

An der mit (*) markierten Stelle handelt es sich in der Tat um eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten der Gleichung in der Zeile darüber nicht negativ sind.

2. Fall: $q < 0$.

In diesem Fall ist f aus g durch Verschiebung nach unten hervorgegangen (vgl. Abbildung 5.3 (b)). Daher gilt

$$f \text{ hat genau 2 Nullstellen} \Leftrightarrow f(x_{\max}) = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(x_{\max}) = 0 &\Leftrightarrow \left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) + q = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0 \\
 &\Leftrightarrow -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0 \\
 &\Leftrightarrow q = \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} \\
 &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} q^2 = \frac{4}{9}p^2\left(-\frac{p}{3}\right) \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.
 \end{aligned}$$

An der mit (*) markierten Stelle handelt es sich in der Tat um eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten der Gleichung in der Zeile darüber negativ sind. Insgesamt ist der Beweis abgeschlossen. \square

Das nächste Lemma klärt, unter welcher Bedingung Gleichung (5.5) genau drei Lösungen besitzt.

Lemma 5.3. *Es seien $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$x^3 + px + q = 0 \text{ besitzt genau 3 Lösungen} \iff D(p, q) < 0.$$

Beweis. Erneut können wir $p < 0$ voraussetzen. Aus dem vorangegangenen Beweis wissen wir, dass f ein lokales Maximum an der Stelle $x_{\max} = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ und ein lokales Minimum an der Stelle $x_{\min} = +\sqrt{-\frac{p}{3}}$ besitzt. Es gilt

$$f \text{ hat genau drei Nullstellen} \iff [f(x_{\max}) > 0 \text{ und } f(x_{\min}) < 0].$$

Wir zeigen also

$$D(p, q) < 0 \iff [f(x_{\max}) > 0 \text{ und } f(x_{\min}) < 0].$$

1. Fall: $q \geq 0$.

Dann gilt

$$f(x_{\max}) > 0 \iff -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0 \iff -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} > -q.$$

Die letzte Ungleichung ist in diesem Fall erfüllt, da die linke Seite positiv und die rechte Seite kleiner oder gleich Null ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} f(x_{\min}) < 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q < 0 \\ &\Leftrightarrow q < -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} q^2 < \frac{4}{9}p^2 \left(-\frac{p}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow D(p, q) < 0 \end{aligned}$$

An der mit (*) markierten Stelle handelt es sich in der Tat um eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten der Ungleichung in der Zeile darüber nicht negativ sind.

2. Fall: $q < 0$.

Dann gilt

$$f(x_{\min}) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} < -q.$$

Die letzte Ungleichung ist in diesem Fall erfüllt, da die linke Seite negativ und die rechte Seite positiv ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} f(x_{\max}) > 0 &\Leftrightarrow -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} > -q \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{4}{9}p^2 \left(-\frac{p}{3}\right) > q^2 \\ &\Leftrightarrow D(p, q) < 0 \end{aligned}$$

An der mit (*) markierten Stelle handelt es sich in der Tat um eine Äquivalenzumformung, da beide Seiten der Ungleichung in der Zeile darüber nicht negativ sind. Insgesamt ist der Beweis abgeschlossen. \square

Da die Funktion f stets mindestens eine Nullstelle besitzt, folgt, dass die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ genau dann genau eine Lösung hat, wenn $D(p, q) > 0$ gilt. Der folgende Satz fasst die bisherigen Ergebnisse zusammen.

Satz 5.2. *Es seien $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $D(p, q) := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Dann besitzt die Gleichung $x^3 + px + q = 0$*

$$\begin{aligned} \text{genau eine Lösung} &\Leftrightarrow D(p, q) > 0 \\ \text{genau zwei Lösungen} &\Leftrightarrow D(p, q) = 0 \\ \text{genau drei Lösungen} &\Leftrightarrow D(p, q) < 0. \end{aligned}$$

Aufgrund unserer bisherigen Überlegungen können wir in den ersten beiden Fällen sämtliche Lösungen bestimmen, wohingegen wir im dritten Fall (3 Lösungen) mit unserer Lösungsformel (5.4) keinen Erfolg haben werden, da wir die Wurzel aus der negativen Diskriminante nicht ziehen können. Die mathematische Welt ist hier offenbar weniger freundlich als bei den quadratischen Gleichungen. Die Formel von Cardano funktioniert leider nicht so einwandfrei wie die p, q -Formel.

5.4 Zwischenfazit

Abbildung 5.4 fasst noch einmal schematisch zusammen, welches Vorgehen wir zum Lösen einer allgemeinen Gleichung dritten Grades bisher entwickelt haben und in welchen Fällen diese Methode zum Erfolg führt.

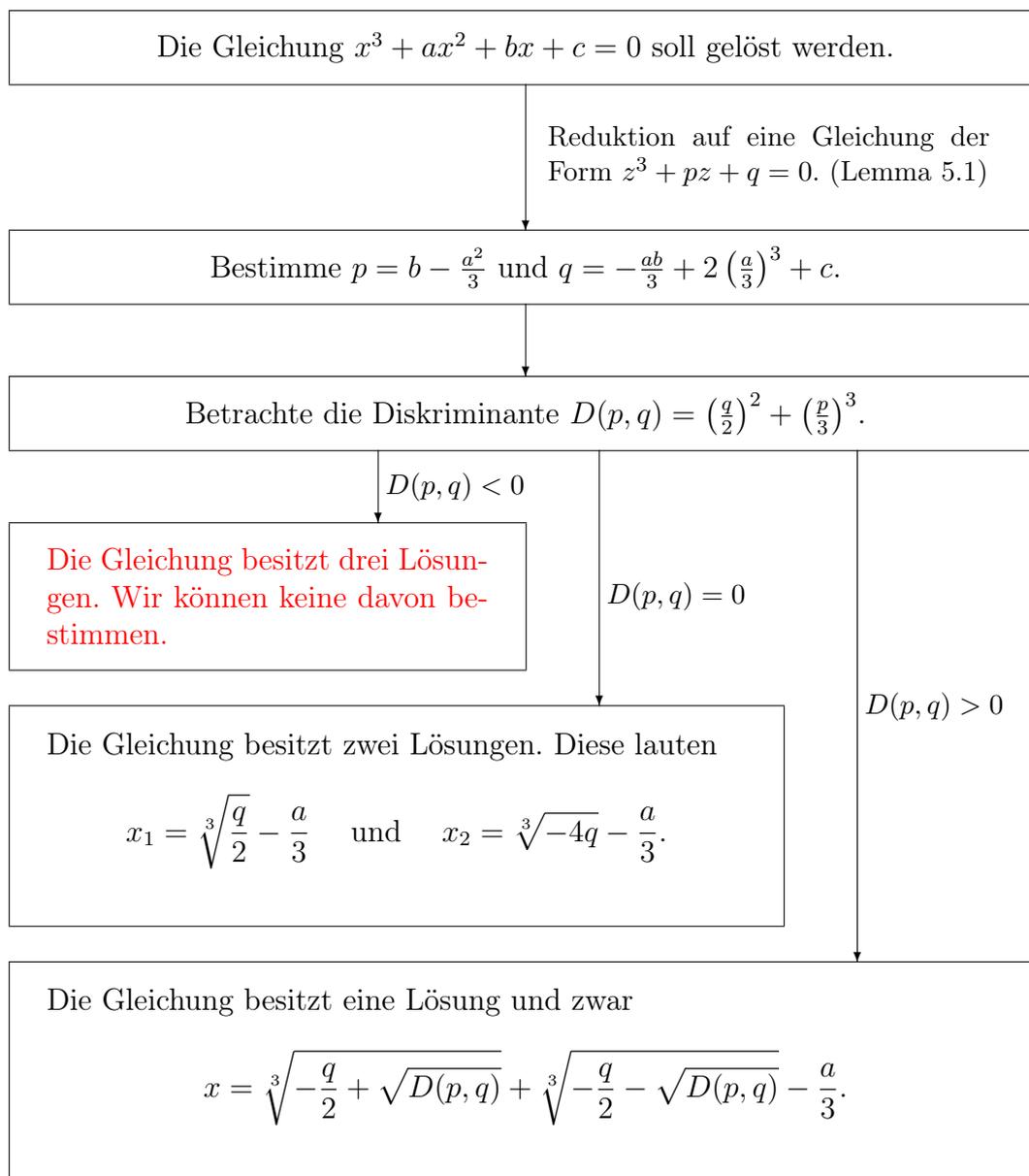


Abb. 5.4: Übersicht zum Lösen einer Gleichung dritten Grades

5.5 Anwendung der Formel von Cardano

Es ist sicher nicht befriedigend, dass das Lösungsverfahren versagt, wenn eine Gleichung dritten Grades drei Lösungen besitzt. In Abschnitt 5.6 wird dieser Fall ausführlich behandelt.

Wir wollen hier zunächst einige Beispiele¹⁰ für kubische Gleichungen mit einer bzw. zwei reellen Lösungen betrachten.

Beispiel 5.1. *Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung*

$$x^3 + 6x - 2 = 0.$$

Die Gleichung liegt bereits in reduzierter Form vor. Wir lesen $p = 6$ und $q = -2$ ab und erhalten $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 1 + 8 = 9 > 0$. Folglich besitzt die Gleichung genau eine Lösung und zwar nach der Formel von Cardano (5.4):

$$x = \sqrt[3]{1+3} + \sqrt[3]{1-3} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

Das Beispiel zeigt, wie effektiv die Formel von Cardano funktionieren kann. Es ist nicht ohne Weiteres möglich, die exakte Lösung auf andere Weise einfach zu ermitteln. Methoden wie z. B. Newton- oder Fixpunktverfahren liefern nur Näherungswerte. Das nächste Beispiel sieht zunächst ähnlich simpel aus.

Beispiel 5.2. *Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung*

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Erneut liegt die Gleichung bereits in reduzierter Form vor, und wir lesen $p = 3$ und $q = -4$ ab. Wir erhalten $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 4 + 1 = 5 > 0$. Demnach besitzt die Gleichung eine Lösung und zwar

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

Betrachten wir die Gleichung erneut, so stellen wir fest, dass eine Lösung leicht erraten werden kann: $1^3 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 0$. Also gibt es eine weitere Lösung. Das kann aber nicht sein, da die Diskriminante besagt, dass die Gleichung nur eine einzige reelle Lösung besitzt. Der scheinbare Widerspruch wird durch die Erkenntnis

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$$

aufgelöst. Wir haben diese Gleichheit mit unserer Argumentation nämlich soeben bewiesen.¹¹ Hätten wir die Lösung $x = 1$ nicht erraten, wäre uns wohl nicht aufgefallen, dass der mit der Formel ermittelte Ausdruck in Wirklichkeit so einfach ist. Anhand der Ergebnisse der Formel von Cardano erkennt man rationale oder sogar ganzzahlige Lösungen häufig nicht. Andere Verfahren erlauben diese Erkenntnis aber ebenso wenig.

¹⁰Die Beispiele 5.1 und 5.2 stammen von Fuchs/Tabachnikov (2011).

¹¹Eine einfache Umformung, die die Gleichung zeigt, liegt nicht auf der Hand.

Kommentar

Interessanterweise handelt es sich auch bei dem von *Cardano* in *ARS MAGNA* zur Herleitung seiner Methode gewählten Beispiel um eines, bei dem eine ganzzahlige Lösung in komplizierter Darstellung erhalten wird. Die von *Cardano* gewählte Gleichung lautet

$$x^3 + 6x - 20 = 0.$$

Man erhält mit der Formel von Cardano

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$$

als eindeutig bestimmte Lösung. Wegen $2^3 + 6 \cdot 2 - 20 = 8 + 12 - 20 = 0$ handelt es sich um eine Darstellung der Zahl 2. Cardano war dies bewusst, und es wird dem Leser auch einige Seiten nach der Herleitung mitgeteilt.¹²

Beispiel 5.3. *Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung*

$$x^3 - 48x + 128 = 0.$$

Wir lesen $p = -48$ und $q = 128$ ab und erhalten

$$D(p, q) = -16^3 + 64^2 = -2^{12} + 2^{12} = 0.$$

Die Gleichung besitzt also genau zwei Lösungen und zwar nach Korollar 5.1

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

und

$$x_2 = \sqrt[3]{-4q} = -\sqrt[3]{4 \cdot 128} = -\sqrt[3]{2^9} = -2^3 = -8.$$

Beispiel 5.4. *Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung*

$$x^3 - 9x^2 - 8x - 20 = 0.$$

Die Gleichung liegt nicht in reduzierter Form vor. Es gilt

$$(x - 3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27,$$

also

$$\begin{aligned} & x^3 - 9x^2 - 8x - 20 = 0 \\ \Leftrightarrow & \underbrace{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}_{=(x-3)^3} \underbrace{-27x + 27}_{\text{Korrektur}} - 8x - 20 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 3)^3 - 35x + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 3)^3 - 35(x - 3) - 105 + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & y^3 - 35y - 98 = 0, \end{aligned}$$

¹²siehe Cardano (2007), S. 100

wobei $y := x - 3$ sei. Nun lesen wir $p = -35$ und $q = -98$ ab und erhalten

$$D(p, q) = \left(-\frac{35}{3}\right)^3 + 49^2 > 0.$$

Die reduzierte Gleichung besitzt also genau eine Lösung und zwar

$$y = \sqrt[3]{49 + \sqrt{\left(-\frac{35}{3}\right)^3 + 49^2}} + \sqrt[3]{49 - \sqrt{\left(-\frac{35}{3}\right)^3 + 49^2}}.$$

Tatsächlich handelt es sich hierbei um eine ganzzahlige Lösung, und zwar $y = 7$. Man beweist dies am einfachsten wie oben, indem man $y = 7$ in die Gleichung einsetzt. Wir erhalten als Lösung der Ausgangsgleichung $x = y + 3 = 10$.

5.6 Kubische Gleichungen mit negativer Diskriminante

Nach unseren bisherigen Erkenntnissen können wir zu kubischen Gleichungen mit nicht-negativer Diskriminante stets alle Lösungen bestimmen. Ist die Diskriminante negativ, so existieren drei reelle Lösungen, aber wir können keine davon bestimmen. Man nennt diesen Fall auch den *Casus irreduzibilis*. Fuchs/Tabachnikov (2011) zeigen eine elementare trigonometrische Methode zur Bestimmung aller drei Lösungen auf, welche wir hier genauer ausführen wollen.

Vorher soll noch einen weiteren interessanter Aspekt des Casus irreduzibilis beleuchtet werden. Man könnte meinen, dass die Lage unproblematisch ist, wenn man mit komplexen Zahlen umgehen kann. In der Tat gelingt die Lösung im Komplexen; jedoch nicht mit dem naivsten Ansatz.

5.6.1 Negative Diskriminante und komplexe Zahlen

Falls $D(p, q) < 0$ ist, taucht unter beiden Kubikwurzeln in der Formel von Cardano

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D(p, q)}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D(p, q)}}$$

je eine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl¹³ auf. Im Komplexen können wir die Quadratwurzeln bestimmen. Dann müssen wir also, um zu einer Lösung zu gelangen,

¹³Ähnlich wie bei Kubikwurzeln aus negativen Zahlen ist die Notation einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl – auch im Komplexen – problematisch. Genau genommen ist die Situation hier noch viel schlechter als bei den Kubikwurzeln, denn eine saubere Definition der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl a gelingt nicht, da stets zwei komplexe Zahlen existieren, deren Quadrat a ergibt. Weil es nicht möglich ist, den Körper \mathbb{C} anzuordnen, kann man zur Definition der Quadratwurzel nicht auf das Vorzeichen der beiden Kandidaten zurückgreifen. Am besten vermeidet man die Wurzel-Schreibweise also, wenn man länger damit arbeiten möchte. Wir verwenden hier für den Moment zur Vereinfachung der Lesbarkeit trotzdem diese Notation.

Kubikwurzeln komplexer Zahlen bestimmen. Zu gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$ haben wir also $x, y \in \mathbb{R}$ zu finden, so dass

$$(x + iy)^3 = a + ib \quad (5.6)$$

gilt. Es ist

$$(x + iy)^3 = x^3 + 3(iy)x^2 + 3(iy)^2x + (iy)^3 = (x^3 - 3y^2x) + i(3yx^2 - y^3).$$

Gleichung (5.6) ist also äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$(I) \quad x^3 - 3y^2x = a \quad \text{und} \quad (II) \quad 3yx^2 - y^3 = b \quad (5.7)$$

Da $a, b \neq 0$ gilt, ist auch $x \neq 0$. Wir dürfen also durch x dividieren, um einen Lösungskandidaten $x + iy$ zu ermitteln. Aus (I) erhalten wir

$$y^2 = \frac{x^3 - a}{3x},$$

und aus (II) folgt $y(3x^2 - y^2) = b$ und hieraus wiederum $y^2(3x^2 - y^2)^2 = b^2$. Es folgt

$$\frac{x^3 - a}{3x} \left(3x^2 - \frac{x^3 - a}{3x} \right)^2 = b^2. \quad (5.8)$$

Eine weitere Umformung ergibt

$$\begin{aligned} (5.8) &\Leftrightarrow \frac{x^3 - a}{3x} \left(\frac{8x^3 - a}{3x} \right)^2 = b^2 \\ &\Leftrightarrow (x^3 - a)(8x^3 - a)^2 = 27b^2x^3. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist kubisch in der Unbekannten x^3 . Sie muss drei Lösungen besitzen, da die Ausgangsgleichung drei Lösungen besitzt (wegen $D(p, q) < 0$). Es handelt sich also erneut um eine kubische Gleichung mit negativer Diskriminante. Wir haben uns im Kreis gedreht.

Dieser Ansatz führt also nicht zum Erfolg. Man kann dennoch mithilfe der komplexen Zahlen und der Formel von Cardano sämtliche Lösungen im Casus irreduzibilis ermitteln. Dazu kann man die *Formel von Abraham de Moivre*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \varphi \in \mathbb{R} : (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad (5.9)$$

verwenden, welche es einem erlaubt, n -te Wurzeln aus einer in *Polarkoordinatendarstellung* angegebenen komplexen Zahl

$$z = |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

zu bestimmen.¹⁴

¹⁴Für einen Beweis der Formel von *de Moivre* und Anwendungen derselben, siehe etwa Engel (2011), S. 26ff.

Wir führen dies hier durch. Es gelte $D(p, q) < 0$, insbesondere also $p < 0$. Es seien $s, t \in \mathbb{C}$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

also

$$s = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-D(p, q)} \quad \text{und} \quad t = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-D(p, q)}.$$

Um mithilfe der Formel von Cardano die Lösungen von $x^3 + px + q = 0$ zu bestimmen, ermitteln wir mithilfe der Formel von *de Moivre* die dritten Wurzeln aus s, t . Diese beiden Zahlen sind konjugiert komplex, so dass

$$|s| = |t| = \sqrt{st} = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)} = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

gilt. In den Polarkoordinatendarstellungen

$$s = |s|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \quad \text{und} \quad t = |t|(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))$$

gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\Re(s)}{|s|} = \frac{-q/2}{\sqrt{-(p/3)^3}} = -\frac{q}{2} \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}.$$

Hierbei steht $\Re(s)$ für den Realteil von s (vgl. Abbildung 5.5).

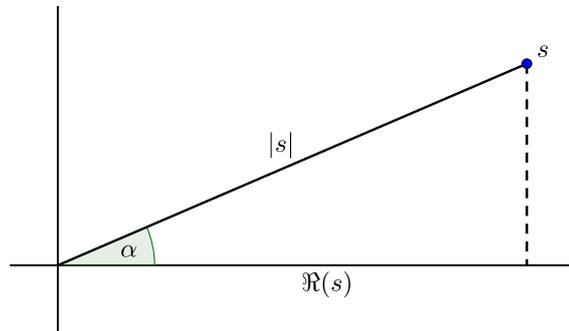


Abb. 5.5: Beziehung zwischen Betrag, Realteil und Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl

Wir erhalten

$$s = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \quad \text{und} \quad t = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)),$$

wobei $\alpha = \arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right)$ sei. Hierbei bezeichne $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ die Umkehrfunktion von $\cos|_{[0, \pi]}$. Wegen

$$\left|-\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right| < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{p}\right)^3 < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^2 < -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \Leftrightarrow D(p, q) < 0$$

dürfen wir das Argument in den arccos einsetzen. Nun wenden wir die Formel (5.9) von *de Moivre* an und erhalten, dass

$$\sigma_0 = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right) \quad \text{und} \quad \tau_0 = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right)$$

jeweils eine dritte Wurzel von s bzw. t sind. Offenbar sind auch

$$\sigma_k = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right) \right)$$

und

$$\tau_k = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\alpha + 2\pi k}{3}\right) \right)$$

für $k = 1, 2$ dritte Wurzeln von s bzw. t . Dies liefert uns drei Lösungen $x_k = \sigma_k + \tau_k$ der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, die im folgenden Satz explizit festgehalten sind.

Satz 5.3. *Es seien $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und es gelte $D(p, q) = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$. Dann besitzt die Gleichung*

$$x^3 + px + q = 0$$

die Lösungen

$$x_1 = c \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \quad x_2 = c \cdot \cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right), \quad x_3 = c \cdot \cos\left(\frac{\alpha + 4\pi}{3}\right),$$

wobei $\alpha := \arccos\left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right)$ und $c := 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ sei.

Wir befassen uns im nächsten Abschnitt mit einer Technik, die ohne Kenntnisse über komplexe Zahlen auskommt.

5.6.2 Negative Diskriminante ohne komplexe Zahlen

Das folgende Lemma über den Sinus eines Dreifachwinkels ist entscheidend.

Lemma 5.4. *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin(\alpha) - 4 \sin^3(\alpha).$$

Beweis. Wir verwenden zum Beweis die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:

$$\forall \mu, \nu \in \mathbb{R} : \sin(\mu + \nu) = \sin(\mu) \cos(\nu) + \sin(\nu) \cos(\mu), \quad (5.10)$$

sowie

$$\forall \mu, \nu \in \mathbb{R} : \cos(\mu + \nu) = \cos(\mu) \cos(\nu) - \sin(\mu) \sin(\nu). \quad (5.11)$$

Es folgt für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha) &\stackrel{(5.10)}{=} \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha) \\
 &\stackrel{(5.10),(5.11)}{=} 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)[\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] \\
 &= 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha) \\
 &= 3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha) \\
 &= 3\sin(\alpha)[1 - \sin^2(\alpha)] - \sin^3(\alpha) \\
 &= 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha).
 \end{aligned}$$

□

Was hat Lemma 5.4 mit kubischen Gleichungen zu tun? Die angegebene Formel ist eine kubische Gleichung mitsamt Lösung, denn sie ist äquivalent zu

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : 4\sin^3(\alpha) - 3\sin(\alpha) + \sin(3\alpha) = 0.$$

Das bedeutet: Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x_\alpha := \sin(\alpha)$ eine Lösung der Gleichung

$$4x^3 - 3x + \sin(3\alpha) = 0.$$

Wir bringen die Gleichung in die normalisierte Form

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\sin(3\alpha)}{4} = 0,$$

so dass wir $p = -\frac{3}{4}$ und $q = \frac{\sin(3\alpha)}{4}$ ablesen können und die Diskriminante

$$D(p, q) = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{\sin(3\alpha)}{8}\right)^2$$

erhalten. Wegen $-1 \leq \sin(3\alpha) \leq 1$ gilt

$$\left(\frac{\sin(3\alpha)}{8}\right)^2 \leq \frac{1}{64},$$

also $D(p, q) \leq 0$. Falls $\sin(3\alpha)$ echt zwischen -1 und 1 liegt, ist die Diskriminante strikt negativ. Wir haben also eine Klasse kubischer Gleichungen mit negativer Diskriminante gefunden, von denen wir eine Lösung kennen. Wir werden hierdurch jede kubische Gleichung mit negativer Diskriminante lösen können. Zunächst führen wir eine Notation ein. Es sei

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

die Umkehrfunktion von $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$. Nun leiten wir das allgemeine Lösungsverfahren her.

Lemma 5.5. Die Gleichung $x^3 - \frac{3}{4}x + q = 0$ besitzt genau dann eine negative Diskriminante, wenn

$$-1 < 4q < 1$$

gilt.

Beweis. Mit $p = -\frac{3}{4}$ gilt

$$D(p, q) < 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0 \Leftrightarrow q^2 < \frac{1}{16} \Leftrightarrow |q| < \frac{1}{4}.$$

Das zeigt die Behauptung. □

Der folgende Satz liefert eine Lösung für eine Klasse spezieller kubischer Gleichungen mit negativer Diskriminante. Das vorangestellte Lemma sichert, dass der Winkel φ korrekt definiert ist.

Satz 5.4. Die Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4}x + q = 0 \tag{5.12}$$

besitze eine negative Diskriminante. Dann ist $x_0 := \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ eine Lösung der Gleichung, wobei $\varphi := \arcsin(4q)$ sei.

Beweis. Gleichung (5.12) ist äquivalent zu $4x^3 - x + 4q = 0$. Wegen $\varphi = \arcsin(4q)$ gilt $\sin(\varphi) = 4q$. Also ist diese Gleichung äquivalent zu

$$4x^3 - x + \sin(\varphi) = 0.$$

Satz 5.4 angewendet auf $\alpha = \frac{\varphi}{3}$ liefert

$$4 \sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \sin(\varphi) = 0,$$

also ist $x_0 = \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ eine Lösung von (5.12). □

Wir wissen, dass Gleichung (5.12) drei reelle Lösungen besitzt, da ihre Diskriminante negativ ist. Satz 5.4 liefert zunächst nur eine Lösung. Wir können die weiteren beiden Lösungen aber leicht aus dieser konstruieren. Der Beweis zeigt, dass neben $\varphi = \arcsin(4q)$ auch jeder Winkel¹⁵ φ' mit $\sin(\varphi') = 4q$ eine Lösung $x' = \sin\left(\frac{\varphi'}{3}\right)$ liefert. Wir müssen also lediglich zwei weitere Winkel φ', φ'' finden, so dass die Werte

$$x = \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right), \quad x' = \sin\left(\frac{\varphi'}{3}\right), \quad x'' = \sin\left(\frac{\varphi''}{3}\right)$$

¹⁵Wir nennen die Argumente des Sinus in diesem Zusammenhang Winkel, da wir sie zum einen als im Bogenmaß angegebene Winkel auffassen können und uns diese Sprechweise zum anderen die Unterscheidung zwischen Funktionswerten und Argumenten erleichtert. Da wir in der folgenden Argumentation mehrfach zwischen diesen hin und her wechseln müssen, besteht eine gewisse Gefahr der Verwirrung, die auf diese Weise verringert werden soll.

paarweise verschieden sind.

Da die Funktion $\varphi \mapsto \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ die Periode 6π besitzt, können wir unsere Suche auf den Bereich zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{11}{2}\pi$ beschränken. Wir betrachten zunächst die Funktion $\varphi \mapsto \sin(\varphi)$ in diesem Bereich. Für $-1 < 4q < 1$ gibt es neben $\varphi_1 = \arcsin(4q)$ fünf weitere Winkel $\varphi_2, \dots, \varphi_6$ für die $\sin(\varphi_i) = 4q$ gilt (vgl. Abbildung 5.6).

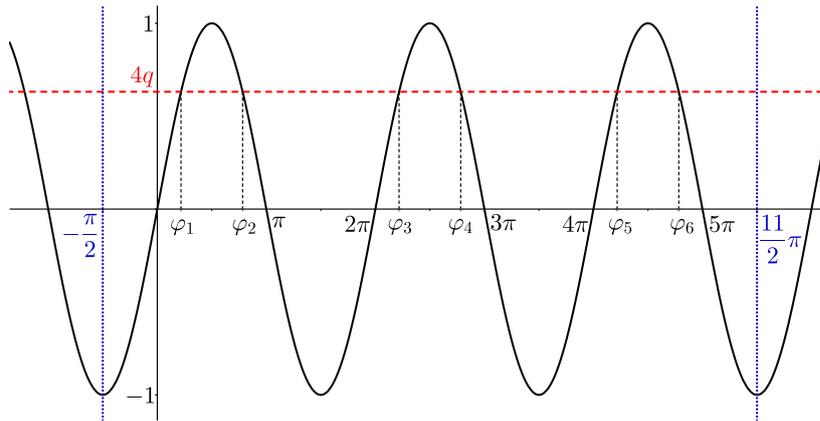


Abb. 5.6: Es gibt zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{11}{2}\pi$ sechs Winkel φ_i mit $\sin(\varphi_i) = 4q$.

Wie veranschaulicht handelt es sich um die Winkel

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1, \quad \varphi_3 = 2\pi + \varphi_1, \quad \varphi_4 = 3\pi - \varphi_1, \quad \varphi_5 = 4\pi + \varphi_1, \quad \varphi_6 = 5\pi - \varphi_1.$$

Einige dieser Winkel liefern eingesetzt in $s(\varphi) := \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ denselben Funktionswert. Es gilt $s(\varphi_1) = s(\varphi_4)$, $s(\varphi_2) = s(\varphi_3)$ sowie $s(\varphi_5) = s(\varphi_6)$ (vgl. Abbildung 5.7).

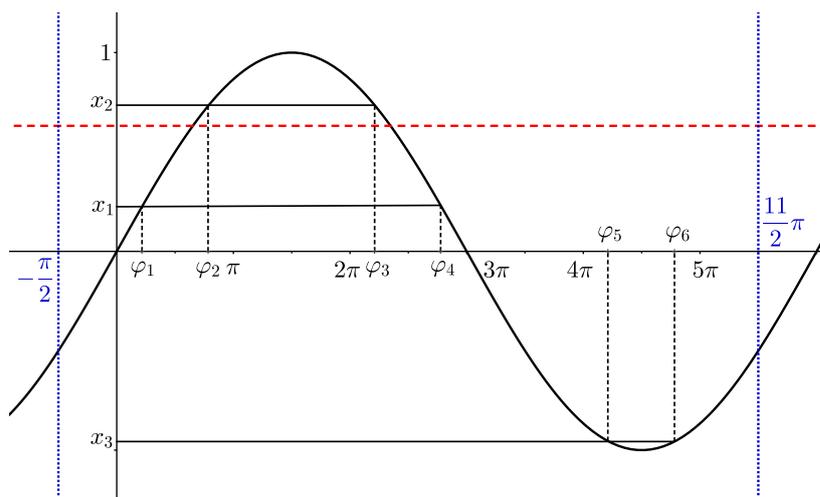


Abb. 5.7: Als Funktionswerte von $s(\varphi) = \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ erhalten wir die Lösungen x_1, x_2, x_3 .

Die gesuchten weiteren Lösungen von Gleichung (5.12) sind also gegeben durch

$$x' = \sin\left(\frac{\varphi_1 + 2\pi}{3}\right) \quad \text{und} \quad x'' = \sin\left(\frac{\varphi_1 + 4\pi}{3}\right).$$

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen.

Satz 5.5. *Die Gleichung*

$$x^3 - \frac{3}{4}x + q = 0$$

besitze eine negative Diskriminante. Dann sind

$$x_1 = \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right) \quad \text{und} \quad x_2 = \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) \quad \text{und} \quad x_3 = \sin\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right)$$

sämtliche Lösungen der Gleichung, wobei $\varphi := \arcsin(4q)$ sei.

Das folgende Beispiel illustriert die Anwendung des Satzes.

Beispiel 5.5. *Gesucht sind sämtliche Lösungen der Gleichung*

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0.$$

Wir lesen $p = -\frac{3}{4}$ und $q = \frac{1}{8}$ ab und erhalten

$$D(p, q) = -\frac{1}{64} + \frac{1}{256} < 0.$$

Die Gleichung besitzt also drei reelle Lösungen und wir können den eben formulierten Satz anwenden. Es gilt

$$\arcsin(4q) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

und wir erhalten mit $\varphi = \frac{\pi}{6}$ bzw. $\frac{\varphi}{3} = \frac{\pi}{18}$ die drei Lösungen

$$x_1 = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right); \quad x_2 = \sin\left(\frac{13}{18}\pi\right); \quad x_3 = \sin\left(\frac{25}{18}\pi\right).$$

5.6.3 Verallgemeinerung auf beliebige Gleichungen

Wir können nun Gleichungen der Form

$$x^3 - \frac{3}{4}x + q = 0$$

lösen, falls $-1 < 4q < 1$ gilt. Erfreulicherweise ist dies genau dann der Fall, wenn $D(p, q) < 0$ ist. Wir wollen eine allgemeine Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

mit negativer Diskriminante auf diesen Fall zurückführen. Dazu gehen wir – wie bereits einige Male zuvor – zu einer neuen Variablen y über. In diesem Fall ist ein Ansatz der Form $y = ax$ sinnvoll, da wir kein Glied eliminieren wollen, sondern lediglich den linearen Koeffizienten verändern möchten. Es gilt $y = ax \Leftrightarrow x = \frac{y}{a}$. Mit diesem Ansatz können wir die Gleichung folgendermaßen äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{y}{a}\right)^3 + p\left(\frac{y}{a}\right) + q &= 0 \\ \Leftrightarrow y^3 + pa^2y + qa^3 &= 0. \end{aligned}$$

Wir müssen also a so wählen, dass $pa^2 = -\frac{3}{4}$ gilt, d. h. $a = \sqrt{-\frac{3}{4p}}$, woraus

$$qa^3 = q\sqrt{-\frac{27}{64p^3}} = \frac{q}{8}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}$$

resultiert. Wir beachten, dass aufgrund der Voraussetzung $D(p, q) < 0$ auch $p < 0$ gelten muss, so dass alle auftretenden Quadratwurzeln definiert sind. Wir erhalten die Gleichung

$$y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{q}{8}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} = 0.$$

Um Satz 5.4 auf diese Gleichung anwenden zu können, muss

$$-1 < 4\left(\frac{q}{8}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right) < 1$$

gelten. Wir formen diese Bedingung äquivalent um:

$$\begin{aligned} -1 < \frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} < 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right| < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{q^2}{4} \cdot \left[-\left(\frac{3}{p}\right)^3\right] < 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^2 < -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0. \end{aligned}$$

Erneut passt die Voraussetzung der negativen Diskriminante perfekt mit der Anforderung an das absolute Glied zusammen. Wir können zur Lösung der Gleichung mit der neuen Unbekannten y nun Satz 5.5 anwenden. Die Lösungen lauten also

$$y_k = \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2,$$

wobei $\varphi = \arcsin\left(\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right)$ sei. Die Lösungen der Ausgangsgleichung erhalten wir durch Rücksubstitution vermöge $x = \frac{1}{a}y$:

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{-\frac{3}{4p}}}\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Wir haben damit den folgenden, zusammenfassenden Satz bewiesen.

Satz 5.6. *Es seien $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und es gelte $D(p, q) = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$. Dann besitzt die Gleichung*

$$x^3 + px + q = 0$$

die Lösungen

$$x_1 = c \sin\left(\frac{\varphi}{3}\right), \quad x_2 = c \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right), \quad x_3 = c \sin\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right),$$

wobei $\varphi := \arcsin\left(\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right)$ und $c := 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ sei.

Das folgende Beispiel illustriert die Anwendung des Satzes.

Beispiel 5.6. *Gesucht sind sämtliche Lösungen der Gleichung*

$$x^3 - 3x + \sqrt{3} = 0.$$

Wir lesen $p = -3, q = \sqrt{3}$ ab und erhalten

$$D(p, q) = \left(-\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Wir beachten $\sqrt{-(3/p)^3} = 1$ und berechnen

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad c = 2,$$

so dass wir die Lösungen

$$x_1 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right); \quad x_2 = 2 \sin\left(\frac{7}{9}\pi\right); \quad x_3 = 2 \sin\left(\frac{13}{9}\pi\right)$$

erhalten.

Kommentar 1

Wir haben in diesem Abschnitt die Lösungen einer kubischen Gleichung mit negativer Diskriminante ohne die Formel von *de Moivre* (5.9) ermittelt; Ausgangspunkt war Lemma 5.4. Es lässt sich leicht einsehen, dass sich hinter diesem Lemma die Formel von *de Moivre* für den Fall $n = 3$ verbirgt.¹⁶ Das soll bedeuten, dass wir aus

$$\forall \varphi \in \mathbb{R} : (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^3 = \cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi) \quad (5.13)$$

Lemma 5.4 erhalten, und anders herum aus dem Lemma und einer analogen Formel für den Kosinus eines Dreifachwinkels die Gleichung (5.13) folgt.

Dies soll im Folgenden skizziert werden. Wir setzen zunächst (5.13) als wahr voraus. Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^3 &= \cos^3(\varphi) + 3 \cos^2(\varphi) \cdot i \sin(\varphi) - 3 \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) - i \sin^3(\varphi) \\ &= \cos^3(\varphi) - \cos(\varphi) \sin^2(\varphi) + i [3 \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) - \sin^3(\varphi)]. \end{aligned}$$

Durch Vergleich der Imaginärteile der letzten Zeile und der rechten Seite von (5.13) folgt

$$\begin{aligned} \sin(3\varphi) &= 3 \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) - \sin^3(\varphi) \\ &= 3[1 - \sin^2(\varphi)] \sin(\varphi) - \sin^3(\varphi) \\ &= 3 \sin(\varphi) - 4 \sin^3(\varphi). \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 5.4 bewiesen. Setzen wir anders herum das Lemma als wahr voraus, so können wir mit der eben durchgeführten Rechnung aus

$$\sin(3\varphi) = 3 \sin(\varphi) - 4 \sin^3(\varphi)$$

folgern, dass (5.13) im Imaginärteil korrekt ist. Um (5.13) auch im Realteil zu bestätigen, kann man eine ähnliche Formel für den Kosinus eines Dreifachwinkels aus den Additionstheoremen herleiten.

¹⁶Ich danke Prof. Dr. Jens Heber für diesen Hinweis.

Kommentar 2

Natürlich stimmen die in Satz 5.6 angegebenen Lösungen mit den in Satz 5.3 angegebenen überein. Wir überzeugen uns davon. Es sei $\rho := -\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}$. Dann gilt

$$\alpha - \varphi = \arccos(\rho) - \arcsin(-\rho) = \arccos(\rho) + \arcsin(\rho) = \frac{\pi}{2}.$$

Wir haben dabei die in den Sätzen angegebenen Definitionen von α und φ sowie die Ursprungssymmetrie des Arkussinus und die Tatsache $\arccos + \arcsin \equiv \frac{\pi}{2}$ verwendet. Nun seien für $k = 0, 1, 2$

$$\mathcal{A}_k := \frac{\alpha + 2\pi k}{3} \quad \text{und} \quad \Phi_k := \frac{\varphi + 2\pi k}{3}.$$

Die Lösungen aus Satz 5.3 sind also $c \cdot \cos(\mathcal{A}_k)$, $k = 0, 1, 2$, und die Lösungen aus Satz 5.6 sind $c \cdot \sin(\Phi_k)$, $k = 0, 1, 2$. Es gilt

$$\mathcal{A}_0 - \Phi_1 = \frac{\alpha}{3} - \frac{\varphi + 2\pi}{3} = \frac{\alpha - \varphi}{3} - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Es folgt

$$\sin(\Phi_1) = \sin\left(\mathcal{A}_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\mathcal{A}_0).$$

Ebenso sieht man $\sin(\Phi_2) = \cos(\mathcal{A}_1)$ und $\sin(\Phi_0) = \cos(\mathcal{A}_2)$ ein.

Kapitel 6

Fachdidaktische Betrachtungen I

6.1 Fachdidaktischer Bedeutungsgehalt und Überblick

6.1.1 Bedeutungsgehalt

Wie im geschichtlichen Exkurs in Kapitel 4 ausführlich dargestellt wurde, ist die mathematik-historische Bedeutung der Formel von Cardano immens. Es soll nun begründet werden, warum eine Beschäftigung mit diesem Thema auch aus didaktischer Sicht wertvoll ist.

Die Untersuchung von Gleichungen dritten Grades knüpft an die im Schulunterricht in der Regel sehr ausführliche Analyse quadratischer Gleichungen in harmonischer Weise an. Dies meint sowohl die natürliche Fragestellung nach einer der quadratischen Ergänzung analogen Methode für Gleichungen höheren Grades als auch die Verwandtschaft vieler Techniken, die bei der Analyse kubischer bzw. quadratischer Gleichungen bedeutend sind.

Der historische Hintergrund bietet ein hohes Motivationspotenzial, denn wann kommt man als Schüler schon in den Genuss, einen Meilenstein der (nicht antiken) Mathematikgeschichte in weiten Teilen eigenständig bewältigen zu können. Es ist eine seltene Gelegenheit, auf elementarem Niveau mit der Original-Lösung eines sehr alten und berühmten Problems arbeiten zu können. Kalman (2009) äußert sich dazu sehr treffend:

*„In mathematics, the first solution of a problem is often far from the best solution. [...] However, this is not the case for solving cubic equations. The algebraic solution first published by Cardano in 1545 is as simple as any of the many variations and alternatives that have appeared since.“*¹

Erfreulicherweise liegt ein günstiger Taschenbuch-Nachdruck (Cardano (2007)) der

¹siehe ebd., S. 71

ARS MAGNA vor, so dass man in der Tat anhand des (übersetzten und kommentierten) Originaltextes arbeiten kann.

Die Analyse kubischer Gleichungen illustriert ein Grundprinzip mathematischen Denkens, nämlich das Prinzip der Verallgemeinerung von bereits Bekanntem bzw. der Suche nach Analogien zu in der Vergangenheit gelösten Problemen, wie es etwa Pólya² immer wieder betont.

Wie bereits erläutert ist es ausdrücklich nicht der praktische Nutzen der Formel von Cardano, der deren Behandlung bedeutungsvoll macht. Die Formel anhand einer großen Zahl kubischer Gleichungen zu trainieren, wird nicht das Ziel einer Unterrichtseinheit sein. Vielmehr geht es darum, auf dem Weg zur Methode von Cardano eine Reihe exemplarischer Einsichten zu erlangen. So führen immer wiederkehrende Standard-Strategien der Buchstaben-Algebra³ relativ sicher zum Ziel. Unterwegs gibt es, wie wir im Folgenden sehen werden, unzählige fruchtbare algebraische Problemsituationen, die authentisch, kreativ und motivierend sind.

Ein möglicher Unterrichtsgang soll im nächsten Abschnitt zunächst in groben Zügen und anschließend in Abschnitt 6.2 detailliert dargestellt werden.

Wie schon in Kapitel 5 verwenden wir aus Gründen der leichteren Lesbarkeit das Symbol $\sqrt[3]{}$ auch dann, wenn Ausdrücke unter der Wurzel auftauchen, die möglicherweise negativ sind. Wir beachten dabei dieselben „Sicherheitsvorkehrungen“ wie zuvor. Bei einer Durchführung mit Schülern oder Studenten sollten die Gefahren der Verwendung dieser Schreibweise an geeigneter Stelle thematisiert werden.

6.1.2 Überblick

Es folgt eine grobe Gliederung für einen möglichen Unterrichtsgang. Die einzelnen Schritte werden in Abschnitt 6.2 aufgegriffen und im Detail diskutiert.

I Historische Motivation

Zunächst sollten sich die Schüler mit der spannenden Geschichte der Formel von Cardano auseinandersetzen. Diese ist bereits für sich genommen wissenswert und erzeugt eine hohe Motivation für alles, was in der Folge behandelt wird.

II Geometrische Interpretation der quadratischen Ergänzung

Es wird eine konkrete quadratische Gleichung mit den Schülern betrachtet und anhand deren Lösung eine geometrische Interpretation der quadratischen Ergänzung

²Man konsultiere etwa die berühmte Tabelle im Einband von Pólya (2010).

³Wir verwenden diesen Begriff, um deutlich zu machen, dass keine Einsichten im Bereich der Struktur-Algebra erzielt werden.

entwickelt.

III Die kubische Ergänzung anhand einer konkreten Gleichung

Unter Betrachtung einer konkreten kubischen Gleichung wird nach einer der quadratischen Ergänzung analogen geometrischen Entsprechung gesucht. Die Methode *Ergänzen zu einem vollständigen Würfel (kubische Ergänzung)* wird von den Schülern weitestgehend eigenständig entwickelt.

IV Die kubische Ergänzung anhand einer Gleichung mit Parametern liefert die Formel von Cardano

Die zuvor entwickelte Technik lässt sich leicht von einem konkreten Beispiel auf eine allgemeine Gleichung übertragen und liefert die Formel von Cardano. Diese lässt sich auf Gleichungen der Gestalt

$$x^3 + px + q = 0$$

anwenden. Die Reduktion einer allgemeinen kubischen Gleichung auf eine solche ohne quadratisches Glied kann zunächst kommentarlos hinten angestellt werden. Zu gegebener Zeit stellt sich die Frage nach allgemeineren kubischen Gleichungen von ganz allein.⁴

IV (a) Anwendung der Formel von Cardano

Anhand geeigneter Beispielgleichungen und Aufgaben erproben die Schüler die Anwendung der Formel von Cardano. Es lassen sich hier erste Probleme bei der praktischen Nutzung erkennen, und auch die anschließende Frage nach der Anzahl der Lösungen deutet sich an.

V Algebraische Reflexion und die Frage nach der Anzahl der Lösungen

Die bisher anschaulich motivierte Herleitung der Formel von Cardano wird nun algebraisch reflektiert. Das bedeutet, dass die durchgeführten Operationen losgelöst von der geometrischen Bedeutung im Hinblick auf Einschränkungen bzw. notwendige Voraussetzungen geprüft werden. Als Resultat erhalten die Schüler die Bedingung einer nicht-negativen Diskriminante, d. h.

$$D(p, q) := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0.$$

⁴In der Tat stellten die Schüler diese Frage im Rahmen einer der praktischen Erprobungen selbst.

Die Tatsache, dass die Formel von Cardano – anders als die p, q -Formel – auch dann nur eine Lösung liefert, wenn die Diskriminante strikt positiv ist, wirft die Frage auf, wie viele Lösungen eine kubische Gleichung in diesem Fall besitzt. Allgemeiner fragt man sich, ob die Anzahl der Lösungen, genau wie bei quadratischen Gleichungen, nur vom Vorzeichen der Diskriminante abhängt.

VI Graphen beantworten die Frage nach der Anzahl der Lösungen

Etwa mithilfe von GeoGebra kann der Graph von $f(x) = x^3 + px + q$ in Abhängigkeit von $D(p, q)$ auf Nullstellen untersucht werden. Das Ergebnis der Untersuchung

$$\begin{aligned} f \text{ besitzt 1 Nullstelle} &\Leftrightarrow D(p, q) > 0 \\ f \text{ besitzt 2 Nullstellen} &\Leftrightarrow D(p, q) = 0 \\ f \text{ besitzt 3 Nullstellen} &\Leftrightarrow D(p, q) < 0, \end{aligned}$$

welches man anhand der Darstellung mit GeoGebra erhält, kann als Beobachtung hingenommen oder bewiesen bzw. begründet werden.⁵ Gewisse Teile der Begründung sind leicht zugänglich und sollten unbedingt thematisiert werden.

VII Den Fall $D(p, q) = 0$ vollständig klären

Mithilfe des Satzes von Vieta können für diesen Fall beide Lösungen leicht ermittelt werden.

VIII Eliminierung des quadratischen Gliedes anhand konkreter Beispiele

Anhand eines Beispiels kann eingesehen werden, wie man eine beliebige kubische Gleichung auf eine Gleichung ohne quadratisches Glied zurückführen kann. Die Rechnung lässt sich leicht auf den allgemeinen Fall übertragen.⁶

IX Untersuchungen für den Fall $D(p, q) < 0$

Auch ohne die Kenntnis komplexer Zahlen lassen sich kubische Gleichungen mit negativer Diskriminante mit den Methoden der Schulmathematik lösen (vgl. Abschnitte 5.6.2 und 5.6.3).

⁵Im Rahmen einer praktischen Erprobung zeigte sich, dass einige Schüler mit nur wenig Hilfe dazu in der Lage waren, den Beweis der entscheidenden Aussage ($2 \text{ Nst.} \Leftrightarrow D(p, q) = 0$) selbst zu entwickeln.

⁶Da die anhand einer konkreten Gleichung angestellten Überlegungen sehr exemplarisch sind, ist die anschließende Übertragung auf eine Gleichung mit Parametern nicht zwingend notwendig.

6.2 Ein möglicher Unterrichtsgang

Die eben genannten einzelnen Schritte des Unterrichtsgangs sollen im Folgenden näher erläutert werden.

I Die Geschichte einer berühmten Formel

Die Geschichte der Formel von Cardano bietet eine Vielzahl interessanter und motivierender Gesichtspunkte. Bemerkenswert ist die Zeitspanne zwischen der Findung einer Lösungsmethode für quadratische Gleichungen und einer solchen für kubische Gleichungen. Es gilt, diesen Aspekt hervorzuheben und damit zu betonen, dass die Behandlung eines mathematisch fundamentalen Problems bevorsteht. Als weiterer motivationaler Gesichtspunkt ist die Tatsache zu nennen, dass mit dem Erscheinen der ARS MAGNA eine der größten Fehden der Geschichte der Mathematik ausgelöst wurde. Dieses Werk beinhaltet das zuvor streng behütete Geheimnis der Lösungsmethoden für kubische Gleichungen, markiert nach Meinung vieler Fachleute die Geburtsstunde der modernen Mathematik und wird zu den bedeutendsten Mathematik-Büchern aller Zeiten gezählt. Der vor ihnen liegende Unterrichtsgang kann sich den Schülern wie die Schatzsuche nach einem heiligen Gral der Geschichte der Mathematik ankündigen. Es bietet sich allein aus atmosphärischen Gründen an, neben Sekundärliteratur auch mit dem Nachdruck des Originaltextes der ARS MAGNA zu arbeiten.

Ein untergeordneter aber trotzdem erwähnenswerter Aspekt ist der geringe allgemeine Kenntnisstand zur Formel von Cardano.⁷ Der Erwerb exklusiver Fähigkeiten, die vermutlich nicht einmal der eigene Mathematik-Lehrer besitzt, ist für Schüler durchaus attraktiv. Ursachen für die geringe Verbreitung der Kenntnisse zur Formel von Cardano müssen an dieser Stelle noch nicht thematisiert werden, wohl aber zu einem späteren Zeitpunkt.

Selbstverständlich kann man die Bedeutung algebraischer Gleichungen auch durch Beispiele untermauern. Dies meint die Betrachtung von Problemen, deren Lösungen sich etwa in Gleichungen dritten Grades ausdrücken lassen.

II Geometrische Interpretation der quadratischen Ergänzung

Die Zielsetzung des Unterrichtsgangs ist klar vorgegeben: Wir wollen eine allgemeine Lösungsmethode für Gleichungen dritten Grades entwickeln; doch wie finden wir einen Ansatz? Pólya (2010) weist auf etwas Grundsätzliches hin: „*Gute Ideen beruhen auf Erfahrung und früher erworbenem Wissen.*“ (siehe ebd., S. 22) In seinem

⁷Das meint nicht eine geringe Bekanntheit der (durchaus berühmten) Formel von Cardano als solche, sondern eher die Tatsache, dass fundierte Kenntnisse im Zusammenhang mit derselben zumindest ad hoc auch bei Mathematikern nicht zwingend vorliegen.

berühmten Katalog von Fragen, die man sich stellen kann, um einer Problemlösung näher zu kommen, finden sich die folgenden weiteren Hinweise: „*Kennst Du eine verwandte Aufgabe? [...] Kannst Du sie gebrauchen? [...] Kannst Du ihre Methode verwenden?*“ (Pólya (2010), Tabelle im Einband).

Wir analysieren also zuerst das bereits bekannte Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen. Es ist an dieser Stelle nicht notwendig, eine allgemeine quadratische Gleichung mit Parametern zu betrachten. Stattdessen bietet sich die Behandlung eines konkreten, paradigmatischen Beispiels an. Wir betrachten die Gleichung

$$x^2 + 6x - 112 = 0.$$

Es soll zunächst unser Ziel sein, die geometrische Entsprechung der quadratischen Ergänzung möglichst genau zu verstehen. Die Grundidee besteht darin, die Unbekannte x als zu bestimmende Streckenlänge zu interpretieren. Folglich wird x^2 als Flächeninhalt einer quadratischen Fläche angesehen. Ein weiterer Bestandteil der Gleichung ist $6x$. Es handelt sich also um das Produkt zweier vermutlich unterschiedlicher Streckenlängen: 6 und x . Demnach kann man $6x$ als Flächeninhalt einer rechteckigen Fläche auffassen. Die Zahl -112 lässt sich geometrisch schlecht deuten, da sie negativ ist. Abhilfe schafft das Umstellen der Gleichung zu

$$x^2 + 6x = 112.$$

Auch nach dieser Umformung liegt es nicht auf der Hand, wie man den Zahlenwert 112 interpretieren sollte. Da es sich nach den bisherigen Überlegungen bei der linken Seite $x^2 + 6x$ um die Summe zweier Flächeninhalte handelt, sollte 112 auch als Flächeninhalt angesehen werden. Die einfachste ebene Figur ist das Quadrat; wir deuten 112 als den Flächeninhalt einer quadratischen Fläche. Abbildung 6.1 veranschaulicht die bisherigen Überlegungen.

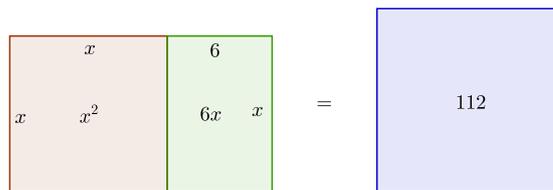


Abb. 6.1: geometrische Entsprechung der Gleichung $x^2 + 6x = 112$

Eine erneute Rückschau⁸ hilft von nun an weiter. Die einfachsten quadratischen Gleichungen sind die sogenannten rein quadratischen Gleichungen, d. h. Gleichungen von der Art „ $x^2 = \text{Zahl}$ “. Diese können nämlich durch Wurzelziehen direkt gelöst werden. Die geometrische Entsprechung einer solchen Gleichung wäre eine quadratische Fläche mit bekanntem Flächeninhalt und unbekannter Seitenlänge. Es ist also

⁸Die *Rückschau* als Teilschritt eines Problemlöseprozesses wird in Pólya (2010) ausführlich erläutert.

ein sinnvolles Ziel, in unserer Situation ein ebensolches Bild anzustreben. Indem man die rechteckige Fläche mit dem Flächeninhalt $6x$ halbiert und eine der Hälften neu anlegt, kommt man diesem Ziel näher (vgl. Abbildung 6.2).

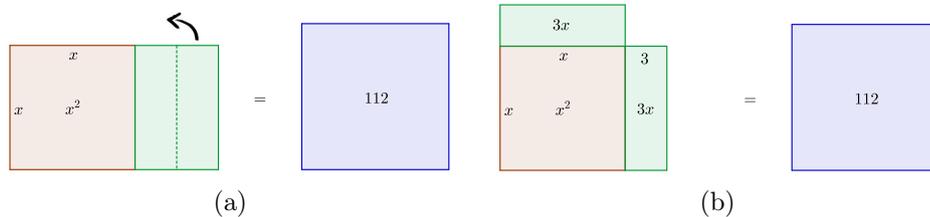


Abb. 6.2: (a) Die rechteckige Fläche mit dem Flächeninhalt $6x$ wird halbiert und umgelegt. (b) Es resultiert eine dem Quadrat ähnelnere Gestalt auf der linken Seite der Gleichung.

Nun liegt das weitere Vorgehen auf der Hand, denn die Methode heißt *Ergänzen zu einem vollständigen Quadrat*. Die Lücke in der rechten oberen Ecke in Abbildung 6.2 (b) muss durch ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $3 \cdot 3 = 9$ ergänzt werden, und um die Gleichung nicht zu verfälschen, muss auch der Flächeninhalt des Quadrats auf der rechten Seite um 9 vergrößert werden (vgl. Abbildung 6.3).

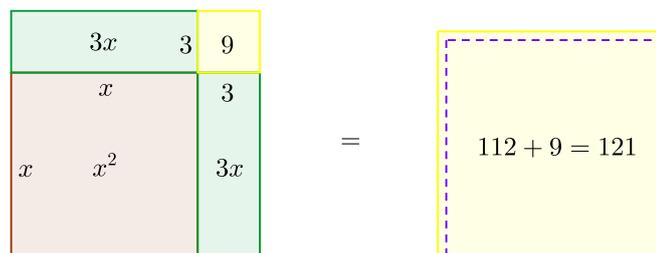


Abb. 6.3: Auf der linken Seite wurde zu einem vollständigen Quadrat ergänzt. Der Flächeninhalt des Quadrats auf der rechten Seite wurde entsprechend vergrößert.

Der Rest ist einfach. Die Gleichung lautet nun

$$x^2 + 2 \cdot 3x + 9 = 121 \quad \text{bzw.} \quad (x + 3)^2 = 121.$$

Durch Wurzelziehen erhält man $x + 3 = 11$ (aufgrund geometrischer Interpretation scheidet eine negative Lösung aus) und damit $x = 8$ als eine Lösung der Gleichung.

Wir wollen das eben angewendete Vorgehen noch einmal reflektieren, um die entscheidenden Ideen klar zu sehen. Wir sind von der Unbekannten x übergegangen zu einer neuen Unbekannten y von der Form $y = x + u$ (hier $y = x + 3$). Die Figur mit dem Flächeninhalt $x^2 + 2ux$ haben wir um ein Quadrat mit dem Flächeninhalt u^2 (hier $u^2 = 9$) ergänzt, so dass auf der linken Seite eine quadratische Fläche entstand. Auf der rechten Seite der Gleichung haben wir ebenfalls u^2 ergänzt, um die Gleichung nicht zu verfälschen (vgl. Abbildung 6.4).

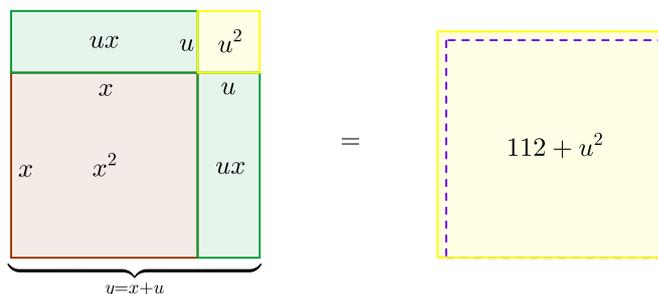


Abb. 6.4: Die quadratische Ergänzung stellt einen Übergang zu einer neuen Unbekannten der Form $y = x + u$ dar. Hierdurch erhalten wir eine rein quadratische Gleichung.

Wir entnehmen dem Bild $x^2 + 2ux + u^2 = y^2$, also

$$x^2 + 2ux = y^2 - u^2.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der Ausgangsgleichung

$$x^2 + 6x = 112$$

erhalten wir $2u = 6$ und $y^2 - u^2 = 112$ und damit $u = 3$ sowie

$$y^2 - 9 = 112 \Leftrightarrow y^2 = 121 \Leftrightarrow y = 11.$$

Negative Lösungen kommen aufgrund der geometrischen Interpretation nicht in Betracht. Da wir nun u und y bestimmt haben, erhalten wir $x = y - u = 11 - 3 = 8$.

Kommentar zur Wahl des Beispiels

Die Gleichung $x^2 + 6x - 112 = 0$ besitzt eine ganzzahlige Lösung, so dass rechnerische Schwierigkeiten die Aufmerksamkeit nicht von der Analyse der Methode ablenken. Die Zahlen sind allerdings hinreichend groß, so dass man die Lösung nicht auf den ersten Blick sieht, was z. B. bei Lösungen wie $x = 2$ oder $x = 3$ der Fall sein könnte. Zudem wurde beachtet, dass der lineare Koeffizient geradzahlig ist, so dass auch nach Halbieren nur ganze Zahlen auftreten.

Schritt III: Die kubische Ergänzung anhand einer konkreten Gleichung

Nach der intensiven Beschäftigung mit der quadratischen Ergänzung können die Schüler mit der ersten Gleichung dritten Grades konfrontiert werden. Wir betrachten erneut ein konkretes Beispiel. Den Schülern sollte bei der Lösung dieser Gleichung möglichst viel Eigenständigkeit ermöglicht werden, denn sie verfügen bereits über die entscheidenden Ideen und notwendigen Hilfsmittel. Wir betrachten die Gleichung

$$x^3 + 6x - 40 = 0.$$

In diesem Fall wurde eine Gleichung gewählt, die keine ganzzahlige Lösung besitzt. Große ganzzahlige Lösungen, führen zu großen Koeffizienten, was die Übersicht erschwert. Kleine ganzzahlige Lösungen sind leicht zu erraten. Es ist wichtig, die Schüler darauf hinzuweisen, Zwischenergebnisse nicht mit dem Taschenrechner auszurechnen, sondern als *konkrete Terme*⁹ mitzuführen, damit die Struktur der Formel später auf den allgemeinen Fall übertragbar ist.

Im Folgenden werden die einzelnen Überlegungen eines möglichen Lösungsweges detailliert erläutert. Die erste naheliegende Idee ist das Umstellen der Gleichung zu

$$x^3 + 6x = 40,$$

damit jeder Bestandteil der Gleichung geometrisch interpretiert werden kann.

Im Rahmen der praktischen Erprobungen wurde als nächster Schritt mehrfach der Übergang zur neuen Variablen $y = x + 2$ vorgeschlagen. Auf Rückfrage erläuterten die Schüler, dass bei der quadratischen Gleichung die Hälfte des linearen Koeffizienten die richtige Wahl zum Ergänzen war, so dass es nun bei der kubischen Gleichung sicher ein Drittel des linearen Koeffizienten sein müsse.¹⁰ In der Tat ist die erkannte Analogie wertvoll, denn es handelt sich hierbei um die korrekte Substitution zur Eliminierung des quadratischen Gliedes in einer allgemeinen kubischen Gleichung, wie man anhand der Identität

$$y^3 = (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

erkennt. Man kann dies aufgreifen und sofort verwerten oder den Gedanken für einen späteren Zeitpunkt konservieren. Sicher zeigt sich hier, dass es durchaus Vorteile mit sich bringen kann, die Reduktion des quadratischen Gliedes zuerst zu behandeln. Zu bedenken ist allerdings, dass dies den Weg zur ersten eigenständig gelösten kubischen Gleichung für die Schüler verlängert. Es ist fraglich, ob bei diesem Vorgehen der Spannungsbogen aufrecht erhalten werden kann.

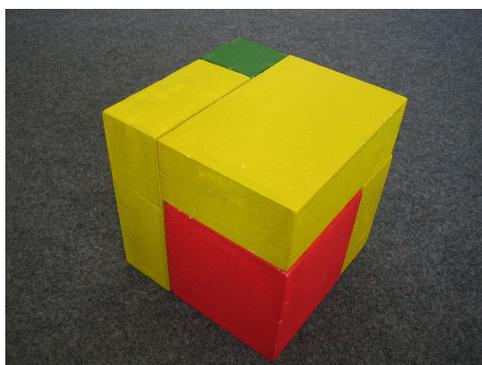
Von Schülern geäußerte Ansätze sollten nicht abgelehnt werden, weil sie nicht (direkt) auf das vom Lehrer anvisierte Ziel zusteuern. Stattdessen kann man den geplanten Fortgang des Unterrichts anpassen oder einen Ansatz so lange verfolgen, bis die Schüler selbst erkennen, dass sie nicht auf dem richtigen Weg sind. Auf diese Weise entsteht eine authentische mathematische Forschungssituation, in der sich die Schüler ernst genommen fühlen und das Entwickeln von eigenen Gedanken für notwendig erachten. Nimmt der Lehrer nur Schülervorschläge an, die in seinen geplanten Ablauf passen, so empfinden die Schüler den Unterricht zurecht als sinnloses Ratespiel, bei dem der Lehrer auch gleich die von ihm vorgesehene Lösung an die Tafel schreiben könnte.

⁹Unter einem konkreten Term verstehen wir einen Term ohne Variablen.

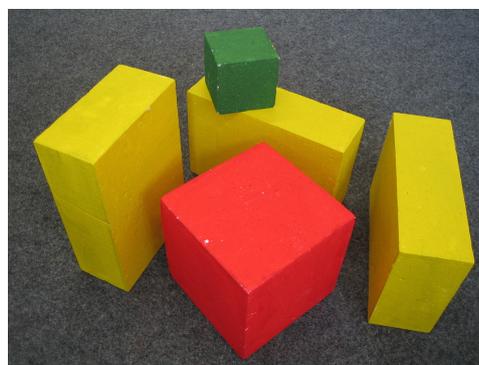
¹⁰Es handelt sich hier nicht um eine wörtliche Wiedergabe von Schüleräußerungen, sondern um sinngemäß zusammengefasste Gesprächsergebnisse in sprachlich präzisierter Form.

Kommen wir zurück zur Gleichung $x^3 + 6x = 40$. Wenn eine zielführende Substitution nicht intuitiv gefunden werden kann, ist es naheliegend, zunächst $y = x + u$ zu schreiben, und die korrekte Ergänzung u durch weitere Überlegungen zu bestimmen.

Da eine zeichnerische Darstellung der kubischen Ergänzung aufgrund der dreidimensionalen Problemstellung recht anspruchsvoll ist, bietet es sich an, als Hilfsmittel eine ausreichende Anzahl gleichartiger Holzwürfel bereitzustellen. Eine gewisse Anzahl an Kantenlängen stellt dabei die Unbekannte x und eine andere Anzahl an Kantenlängen stellt u dar. Die Schüler suchen nach einer der quadratischen Ergänzung analogen Anordnung, die eine Reduktion auf eine rein kubische Gleichung zulässt. Eine solche Anordnung ist in Abbildung 6.5 mit Holzwürfeln, als Styropor-Modell¹¹ bzw. zeichnerisch dargestellt zu sehen.



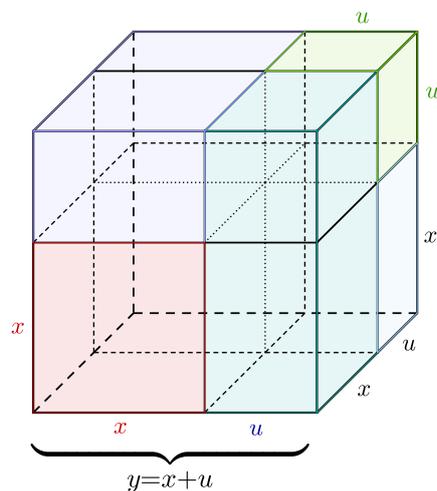
(a)



(b)



(c)



(d)

Abb. 6.5: verschiedene Darstellungen der kubischen Ergänzung

¹¹Das Modell ist im Rahmen einer praktischen Erprobung an der Klaus-Groth-Schule Neumünster entstanden. Bildquelle: eigene Fotos.

Man erkennt, dass sich der gesamte Würfel aus einem Würfel mit dem Volumen x^3 (rot), einem Würfel mit dem Volumen u^3 (grün) und drei Quadern, die jeweils das Volumen uyx besitzen, zusammensetzt. Die Schüler sollten nun in der Lage sein, folgende algebraische Konsequenz zu formulieren:

$$x^3 + 3uyx + u^3 = y^3.$$

Wie bei der quadratischen Ergänzung führen wir einen Koeffizientenvergleich mit der Ausgangsgleichung durch, d.h wir vergleichen

$$x^3 + 6x = 40$$

mit

$$x^3 + 3uyx = y^3 - u^3$$

und erhalten

$$(I) \quad 3uy = 6 \quad \text{und} \quad (II) \quad y^3 - u^3 = 40.$$

Es liegen nun zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vor. Man kann dieses Gleichungssystem elegant mithilfe des Satzes von Vieta (vgl. Abschnitt 5.2.2) oder weniger elegant (z. B. nach dem sogenannten Einsetzungsverfahren) lösen. In jedem Fall ist die verbleibende Arbeit überwiegend technischer Natur und kann, da Aufgaben diesen Typs in der Schule häufiger vorkommen, von Schülern eigenständig bewältigt werden. Es soll hier noch die für Schüler näher liegende Lösung mithilfe des Einsetzungsverfahrens vorgestellt werden.¹² Wir beachten bei unseren Umformungen, dass alle auftretenden Variablen strikt positiv sind. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$\begin{aligned} 3uy = 6 \quad \text{und} \quad y^3 - u^3 &= 40 \\ u = \frac{2}{y} \quad \text{und} \quad y^3 - u^3 &= 40 \\ y^3 - \frac{8}{y^3} = 40 \quad \text{und} \quad y^3 - u^3 &= 40 \\ (y^3)^2 - 8 = 40y^3 \quad \text{und} \quad y^3 - u^3 &= 40 \\ (y^3 - 20)^2 = 408 \quad \text{und} \quad u^3 = y^3 - 40 & \\ (*) \quad y^3 = 20 + \sqrt{408} \quad \text{und} \quad u^3 = y^3 - 40 & \\ y^3 = 20 + \sqrt{408} \quad \text{und} \quad u^3 = -20 + \sqrt{408} & \\ y = \sqrt[3]{20 + \sqrt{408}} \quad \text{und} \quad u = \sqrt[3]{-20 + \sqrt{408}}. & \end{aligned}$$

¹²Die Lösung des Gleichungssystems wird hier in einer für Schüler unüblichen Form notiert. Im Schulunterricht wird das Einsetzungsverfahren meistens durchgeführt, indem zunächst eine Gleichung nach einer Unbekannten aufgelöst, das Ergebnis in die zweite Gleichung eingesetzt wird und diese dann (unter Weglassen der ersten Gleichung) nach der zweiten Unbekannten gelöst wird. Es liegen dann allerdings keine Äquivalenzumformungen mehr vor, so dass eine Probe durchgeführt werden muss, um die logische Rückrichtung nachzuweisen. Wir führen hier stets Äquivalenzumformungen des gesamten Systems durch.

An der mit (*) markierten Stelle beachte man, dass die zweite mögliche Lösung $y^3 = 20 - \sqrt{408}$ nicht in Frage kommt, da sie negativ ist (y ist als Streckenlänge positiv und damit ist auch $y^3 > 0$ vorausgesetzt). Schlussendlich erhalten wir

$$x = y - u = \sqrt[3]{20 + \sqrt{408}} - \sqrt[3]{-20 + \sqrt{408}}$$

als eine Lösung der Ausgangsgleichung.

IV Herleitung der Formel von Cardano

Nun kann die Formel von Cardano hergeleitet werden. Wir betrachten die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

und orientieren uns an der Rechnung, die wir im konkreten Fall durchgeführt haben. Die Schüler sind nach der geleisteten Vorarbeit weitestgehend eigenständig in der Lage, die Herleitung der berühmten Formel zu bewältigen. Die einzelnen Schritte der Herleitung wurden in Abschnitt 5.2.2 ausführlich dargestellt.

Eine charmante Art der Lösungs-Selbstkontrolle besteht darin, ein (optisch möglichst beeindruckendes) Buch mitzubringen, welches die Formel von Cardano mit den im Kurs verwendeten Bezeichnungen enthält. Die Schüler können am Ende ihrer Rechnung dort nachschlagen und müssen eventuelle Abweichungen analysieren und ggf. Fehler suchen und korrigieren. Bei Erfolg ist die Freude über die Übereinstimmung mit dem gedruckten Werk groß.¹³

Diese Art der Lösungskontrolle bringt weitere erfreuliche Nebeneffekte mit sich. Nicht selten kommt es vor, dass die Schüler zu einer „anderen Formel von Cardano“ gelangen obwohl ihre Herleitung keinen Fehler aufweist. Sie müssen in diesem Fall die Übereinstimmung der beiden Lösungen herausarbeiten und trainieren hierbei den Umgang mit komplexen Termen auf kreative Art und Weise. Des Weiteren freuen sich Schüler z. T., dass sie sogar zwei Lösungen gefunden hätten, das Buch aber nur eine angebe. Die beiden gefundenen Schülerlösungen sind tatsächlich aber identisch oder die Herleitung enthält einen Fehler. In jedem Fall müssen die Schüler auch diese Situation mathematisch analysieren. Der Unterrichtsgang bietet an dieser Stelle eine authentische algebraische Problemstellung von großer Komplexität, die zudem hoch motivierend ist.

Insgesamt kann diese Phase von einer spannungsvollen Atmosphäre geprägt sein, wenn es gelingt, die Schüler in Goldgräber-Stimmung auf der Suche nach einem der größten Schätze der Mathematik-Geschichte zu versetzen. Sie stellt gewissermaßen den Zenit des Unterrichtsgangs dar.

¹³Im Rahmen der praktischen Erprobungen wurde Dieudonné (1985) verwendet.

V und VI Algebraische Reflexion und die Frage nach der Anzahl der Lösungen

Wir betrachten nach wie vor die Gleichung

$$x^3 + px + q = 0$$

und setzen voraus, dass $p, q \neq 0$ gilt, da sie sonst trivial ist. Indem die einzelnen algebraischen Operationen zur Herleitung der Formel von Cardano auf notwendige Voraussetzungen geprüft werden, kann leicht herausgearbeitet werden, dass die Formel eine korrekte Lösung der Gleichung liefert, falls

$$D(p, q) = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \geq 0$$

gilt. Ist die Diskriminante $D(p, q)$ hingegen negativ, so ist unsere Herleitung nicht zulässig bzw. liefert die Formel von Cardano keine Lösung. Andere Einschränkungen müssen nicht in Kauf genommen werden. Die Schüler sollten sich an die p, q -Formel bzw. die quadratische Ergänzung erinnern, bei welcher eine analoge Forderung nach einer nicht-negativen Diskriminante vorliegt.

Es muss als nächstes geklärt werden, dass es keine Selbstverständlichkeit ist, dass eine quadratische Gleichung jeweils genau so viele reelle Lösungen besitzt, wie die p, q -Formel liefert. Vorbereitend für die Untersuchungen über Gleichungen dritten Grades kann die folgende Überlegung mit den Schülern besprochen werden.

Für eine quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

ist die Diskriminante bekanntlich definiert als $d(p, q) := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ und die p, q -Formel liefert

$$\begin{aligned} \text{keine Lösung} &\Leftrightarrow d(p, q) < 0, \\ \text{eine Lösung} &\Leftrightarrow d(p, q) = 0, \\ \text{zwei Lösungen} &\Leftrightarrow d(p, q) > 0. \end{aligned}$$

Das Polynom $f(x) = x^2 + px + q$ lässt sich in die sogenannte *Scheitelpunkt-Form* überführen:

$$f(x) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - d(p, q).$$

Aus dieser Darstellung liest man ab, dass der Graph von f eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S = \left(-\frac{p}{2}, -d(p, q)\right)$ ist. Der Scheitelpunkt liegt also

$$\begin{aligned} \text{oberhalb der } x\text{-Achse} &\Leftrightarrow d(p, q) < 0, \\ \text{auf der } x\text{-Achse} &\Leftrightarrow d(p, q) = 0, \\ \text{unterhalb der } x\text{-Achse} &\Leftrightarrow d(p, q) > 0. \end{aligned}$$

Daher gilt: Der Graph von f besitzt mit der x -Achse keinen Schnittpunkt, falls $d(p, q) < 0$, einen Schnittpunkt, falls $d(p, q) = 0$ und zwei Schnittpunkte, falls $d(p, q) > 0$ gilt. Die p, q -Formel liefert daher stets alle existierenden reellen Lösungen. Eine Veranschaulichung kann etwa mit GeoGebra zusätzlich entwickelt werden und das weitere Vorgehen vorbereiten (vgl. Abbildung 6.6). Die Werte von p und q können hier mittels Schieberegler eingestellt werden, der resultierende Wert von $d(p, q)$ wird berechnet und angezeigt. Der Scheitelpunkt S wird angezeigt und seine Koordinaten werden ebenfalls berechnet und angezeigt.

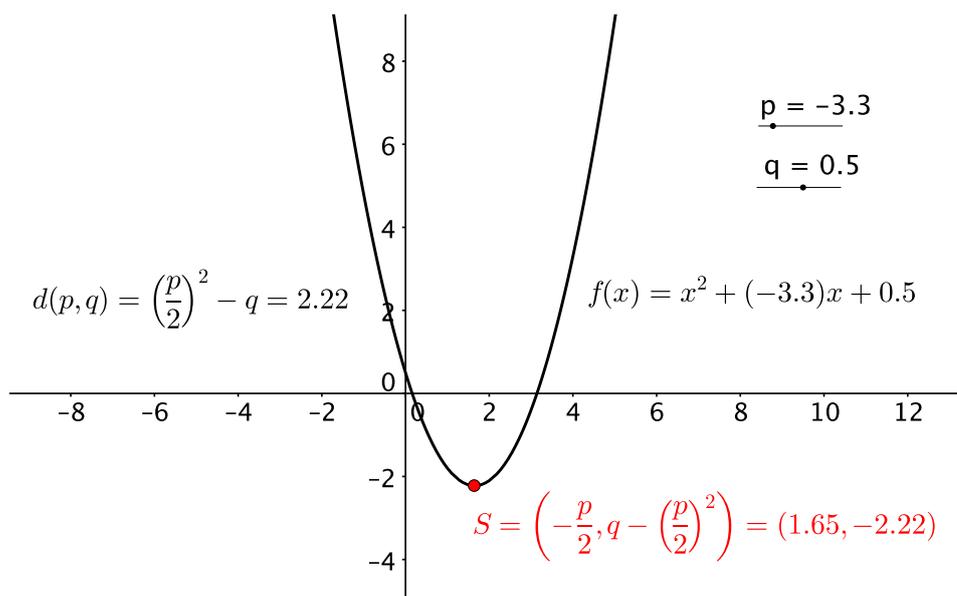


Abb. 6.6: Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen von $d(p, q)$ und der Lage des Graphen von f

Eine ähnliche Darstellung zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem Vorzeichen von $D(p, q)$ und der Anzahl der Nullstellen von $f(x) = x^3 + px + q$ ist in Abbildung 6.7 zu sehen.

In dieser Darstellung findet sich neben dem Graphen von f auch der Graph von $g(x) = x^3 + px$. Zum Verständnis des Zusammenhangs

$$\begin{aligned} f \text{ besitzt 1 Nullstelle} &\Leftrightarrow D(p, q) > 0 \\ f \text{ besitzt 2 Nullstellen} &\Leftrightarrow D(p, q) = 0 \\ f \text{ besitzt 3 Nullstellen} &\Leftrightarrow D(p, q) < 0, \end{aligned}$$

der sich durch eine Untersuchung mithilfe der Schieberegler beobachten lässt, analysieren wir die Graphen und deren Zusammenspiel; einige Erkenntnisse lassen sich auf diese Weise sehr gut einsehen. Es gilt $f(x) = g(x) + q$, also erhält man den Graphen von f , indem man den Graphen von g um q nach oben verschiebt.¹⁴ Der Zusam-

¹⁴Falls q negativ ist, meint dies eine Verschiebung um $|q|$ nach unten.

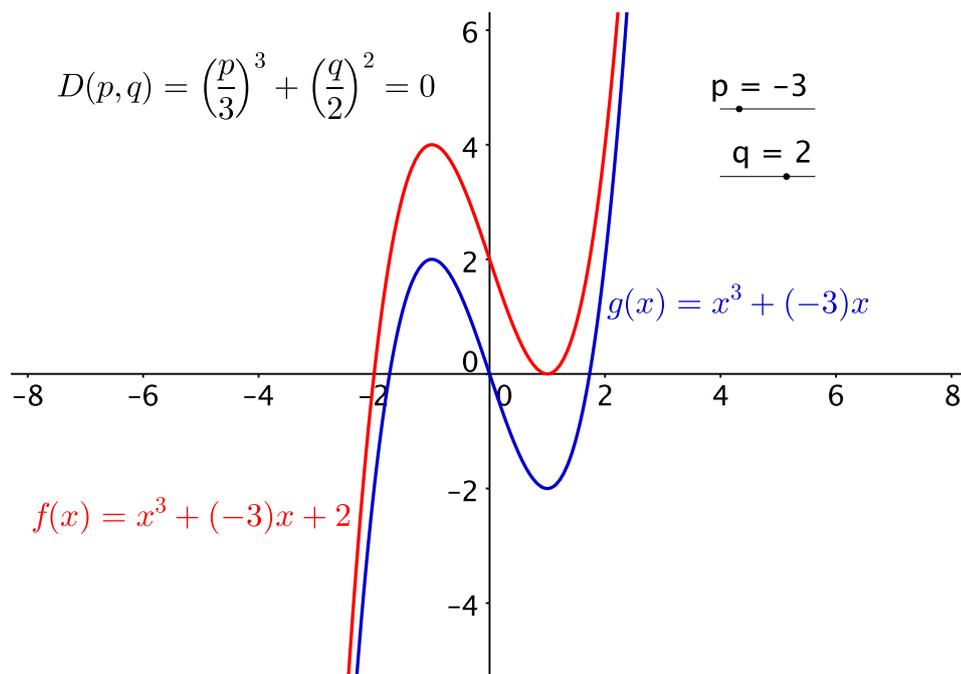


Abb. 6.7: Untersuchung von $g(x) = x^3 + px$ und $f(x) = g(x) + q$ in Abhängigkeit von $D(p, q)$ mithilfe von GeoGebra

menhang zwischen der Anzahl der Nullstellen von g und dem Wert des Parameters p ist schlicht, denn es gilt

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + px = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + p) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 = -p.$$

Die Funktion g hat also drei Nullstellen, falls $p < 0$ gilt, und nur eine Nullstelle, falls $p > 0$ ist. Offenbar hat f genau eine Nullstelle, falls p genau eine Nullstelle besitzt. Falls also $p > 0$ ist, so besitzt die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ genau eine Lösung. In diesem Fall ist auch $D(p, q)$ positiv, also liefert die Formel von Cardano eine und damit alle Lösungen der Gleichung. Natürlich ist die Analyse unvollständig, denn auch wenn p negativ ist, kann $D(p, q) \geq 0$ sein. Wir wissen in diesem Fall aber nicht, wie viele Nullstellen f besitzt, da die Tatsache, dass g drei Nullstellen besitzt, nicht zwingend impliziert, dass auch f drei Nullstellen besitzt. Eine mögliche Situation, in der g drei Nullstellen aber f nur eine Nullstelle besitzt, ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Es wäre ebenso möglich, dass g drei Nullstellen besitzt während f genau zwei Nullstellen besitzt. Wir wissen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $D(p, q) = 0$ gilt. Eine vollständig elementare Herleitung dieser und weiterer Einsichten liegt jedoch nicht auf der Hand. Ein naheliegender Weg, der auch für Oberstufenschüler gangbar ist, wurde in Abschnitt 5.3 vorgestellt. Der Schlüssel zu dieser Lösung ist die relative Lage der beiden lokalen Extrema von f zur x -Achse; diese entscheidet über die Anzahl der Nullstellen. Die Extrema sind über Differenzieren leicht zugänglich und etwaige Schwierigkeiten des weiteren Lösungswegs dürften überwiegend technischer Natur sein.

VII Den Fall $D(p, q) = 0$ vollständig klären

Falls $D(p, q) = 0$ gilt, lässt sich die Formel von Cardano zum Lösen der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ anwenden. Sie ist in diesem Fall sogar besonders einfach, denn die Quadratwurzeln unter beiden dritten Wurzeln sind gleich Null. Wir erhalten gemäß (5.4) die Lösung

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{-4q}.$$

Wir wissen, dass die Gleichung noch eine weitere Lösung besitzt; die Formel von Cardano liefert diese aber nicht. Im Folgenden wird eine Überlegung dargestellt, die für Schüler gangbar ist.

Wir haben zuvor bereits die Graphen von $f(x) = x^3 + px + q$ und $g(x) = x^3 + px$ untersucht und kennen die möglichen Konstellationen für den Fall $D(p, q) = 0$. Damit f genau zwei Nullstellen besitzt, muss das lokale Minimum oder das lokale Maximum auf die x -Achse fallen. Da f eine vertikale Verschiebung von g um q ist, gilt im ersten Fall $q > 0$ und im zweiten Fall $q < 0$ (vgl. Abbildung 6.8).

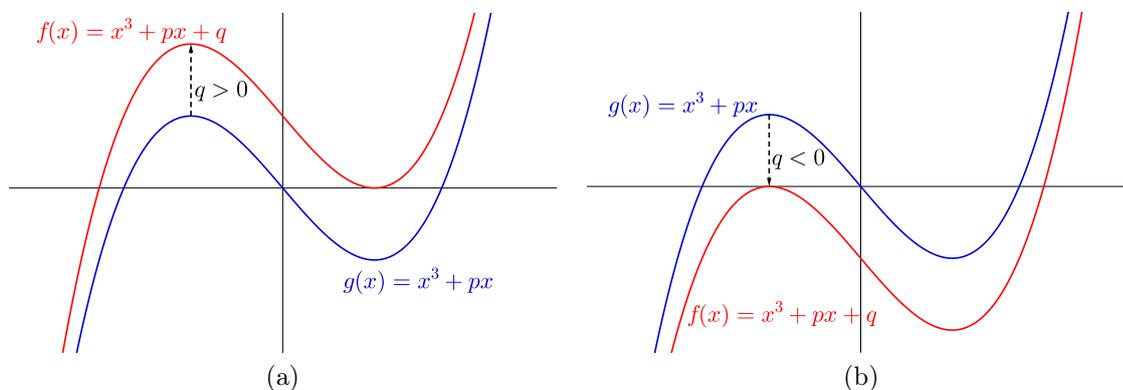


Abb. 6.8: (a) Das lokale Minimum von f liegt auf der x -Achse ($\Rightarrow q > 0$). (b) Das lokale Maximum von f liegt auf der x -Achse ($\Rightarrow q < 0$).

Wir wollen in beiden möglichen Fällen beide Nullstellen von f bestimmen. Dabei setzen wir stets $D(p, q) = 0$ voraus, so dass insbesondere $p < 0$ gilt.

f besitzt in beiden Fällen je eine einfache und eine doppelte Nullstelle. Wir bestimmen die möglichen Kandidaten für eine doppelte Nullstelle, indem wir die erste

Ableitung von f gleich Null setzen.¹⁵ Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 + p = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = -\frac{p}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ oder } x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}. \end{aligned}$$

1. Fall: $q > 0$.

Die doppelte Nullstelle ist in diesem Fall positiv (vgl. Abbildung 6.8 (a)), also lautet eine Lösung der Gleichung

$$x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Bezeichnen wir mit x_2 die zweite Lösung, also die einfache Nullstelle von f , so gilt nach dem Satz von Vieta

$$2x_1 + x_2 = 0 \text{ bzw. } x_2 = -2x_1.$$

Die zweite Lösung der Gleichung ist also

$$x_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Zusatz: Wir haben beide Lösungen mithilfe von p ausgedrückt. Die Formel von Cardano liefert uns eine Lösung, die als Term von q angegeben ist. Wollen wir auch die zweite Lösung in Abhängigkeit von q ausdrücken, so können wir folgendermaßen vorgehen: Die mit der Formel von Cardano erhaltene Lösung $\sqrt[3]{-4q}$ ist wegen $q > 0$ negativ, also muss Sie mit der einfachen Nullstelle $x_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ übereinstimmen (im Einklang mit $D(p, q) = 0$). Wegen $2x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2$ erhalten wir die doppelte Nullstelle

$$x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{-4q} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

2. Fall: $q < 0$.

Die doppelte Nullstelle ist in diesem Fall negativ (vgl. Abbildung 6.8 (b)), also lautet eine Lösung der Gleichung

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Wieder sei x_2 die andere Lösung, d.h. die einfache Nullstelle. Mit dem Satz von Vieta erhalten wir

$$x_2 = -2x_1 = +2\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

¹⁵Es wird hier verwendet, dass eine doppelte Nullstelle von f auch eine Nullstelle von f' ist. Vgl. Satz 1.3 in Anhang A.1

Zusatz: Erneut können wir beide Lösungen auch in Abhängigkeit von q ausdrücken: Wegen $q < 0$ ist die mit der Formel von Cardano erhaltene Lösung $\sqrt[3]{-4q}$ positiv, also muss Sie mit $x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ übereinstimmen. Mit dem Satz von Vieta erhalten wir als zweite Lösung

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{-4q} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Will man insgesamt weniger formal bzw. lieber beispielhaft an konkreten Gleichungen arbeiten, so ist folgendes Vorgehen denkbar:

Es wird zunächst an den Satz von Vieta für quadratische Gleichungen erinnert und darauf aufbauend der Satz von Vieta für Gleichungen dritten Grades entwickelt. Unterstützt durch Beispiele wird herausgearbeitet und mit dem Satz von Vieta begründet, dass die Summe aller Lösungen einer kubischen Gleichung ohne quadratisches Glied Null ergibt. Betrachtet man nun kubische Gleichungen der Form $x^3 + px + q = 0$ mit nur zwei Lösungen a und b , so stellt man fest, dass $a + 2b = 0$ oder $2a + b = 0$ gilt, je nachdem welches die einfache und welches die doppelte Nullstelle des Polynoms $x^3 + px + q$ ist. Sagen wir, a sei die einfache Nullstelle und b die doppelte. Dann gilt $a + 2b = 0$ und man kann a aus b bestimmen und anders herum.

Bestimmt man nun eine Lösung einer kubischen Gleichung mit $D(p, q) = 0$ mithilfe der Formel von Cardano, so müsste man nur wissen, ob es sich um die einfache oder um die doppelte Nullstelle handelt. An dieser Stelle wäre es akzeptabel, anhand der Betrachtung einiger Beispiele zu beobachten, dass die Formel von Cardano stets die einfache Nullstelle a liefert. Ein Beweis muss nicht zwingend erbracht werden. Die zweite Nullstelle kann dann gemäß

$$b = -\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{-4q} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

berechnet werden.

VIII Eliminierung des quadratischen Gliedes anhand konkreter Beispiele

Wir haben bisher nur kubische Gleichungen ohne quadratisches Glied gelöst und wollen uns von dieser Einschränkung befreien. Erfreulicherweise glückt die Reduktion einer allgemeinen kubischen Gleichung der Form

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

auf eine Gleichung ohne quadratisches Glied mit einer uns mittlerweile sehr vertrauten Technik: Wir suchen ein Binom der Form $(x+u)^3$, welches den quadratischen Teil

ax^2 bereits enthält und passen den Rest der Gleichung entsprechend an. Es ist eine legitime didaktische Reduktion, diese Rechnung beispielgebunden¹⁶ durchzuführen.

Wir betrachten etwa die Gleichung

$$x^3 + 6x^2 + 2x + 3 = 0. \quad (6.1)$$

Es gilt

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8,$$

also ergänzen wir die fehlenden Teile auf beiden Seiten von Gleichung (6.1):

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 2x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= 10x + 5 \\ \Leftrightarrow (x + 2)^3 - 10x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen auch im linearen Teil der Gleichung zu der neuen Variablen $(x + 2)$ übergehen, beachten $-10(x + 2) = -10x - 20$ und ergänzen daher auf beiden Seiten -15 :

$$\begin{aligned} (x + 2)^3 - 10x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)^3 - 10x - 20 &= -15 \\ \Leftrightarrow (x + 2)^3 - 10(x + 2) + 15 &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist eine kubische Gleichung ohne quadratisches Glied in der Unbekannten $y = x + 2$. Wir können diese mit der Formel von Cardano lösen, denn mit $p = -10$ und $q = 15$ gilt

$$D(p, q) = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\frac{1000}{27} + \frac{225}{4} > 0.$$

Als Lösung der Ausgangsgleichung erhalten wir

$$x = \sqrt[3]{\frac{-15}{2} + \sqrt{D(p, q)}} + \sqrt[3]{\frac{-15}{2} - \sqrt{D(p, q)}} - 2 \approx -5,74.$$

Die beispielgebundene Eliminierung des quadratischen Gliedes lässt sich ohne Probleme auf eine Gleichung mit Parametern übertragen, was in Lemma 5.1 in Abschnitt 5.2.1 durchgeführt wurde. Natürlich kann die resultierende Gleichung eine negative Diskriminante besitzen, so dass die Formel von Cardano nicht anwendbar ist. Wir können dann die in Abschnitt 5.6 vorgestellte Technik verwenden, um die Lösungen zu ermitteln.

¹⁶Zum Begriff der *beispielgebundenen Beweisstrategie* siehe etwa Padberg (2007), S. 2.

IX Untersuchungen für den Fall $D(p, q) < 0$

Die in den Abschnitten 5.6.2 und 5.6.3 dargestellten Überlegungen sind auch ohne Kenntnisse komplexer Zahlen, etwa mit Oberstufenschülern, zu bewältigen. Zu beachten ist, dass einige notwendige Werkzeuge (wie z. B. die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus) heute nicht mehr zum obligatorischen Schulstoff zählen.¹⁷ Selbstverständlich kann dies auch als Anlass für Exkurse genommen werden.

¹⁷vgl. Ministerium für Bildung und Wissenschaft des Landes Schleswig-Holstein (2012) sowie Kultusministerkonferenz (2002)

Kapitel 7

Fachdidaktische Betrachtungen II

Im folgenden Kapitel werden zunächst in Abschnitt 7.1 Möglichkeiten zur Visualisierung der bisher behandelten Lösungsverfahren für quadratische und kubische Gleichungen vorgestellt. In Abschnitt 7.2 wird ein geometrisches Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen diskutiert, welches in Abschnitt 7.3 auf Gleichungen beliebigen Grades verallgemeinert wird.

7.1 Zwei GeoGebra-Applets

7.1.1 Ein Applet zum graphischen Lösen quadratischer Gleichungen

Wir wollen hier ein einfaches GeoGebra-Applet zum Veranschaulichen der quadratischen Ergänzung erzeugen und betrachten dazu die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ bzw.

$$x^2 + px = -q. \quad (7.1)$$

Wir interpretieren x als unbekannte Streckenlänge, setzen also $x > 0$ voraus, und fassen $-q$ als Flächeninhalt auf, so dass wir zudem $-q > 0$ (also $q < 0$) fordern. Da auch der Ausdruck px als Flächeninhalt interpretiert wird, nehmen wir außerdem $p > 0$ an.

Der gewählte Ansatz ist eine Substitution der Form $y = x + u$, wobei wir auch $y, u > 0$ als Streckenlängen auffassen. Wir erhalten

$$y^2 = x^2 + 2ux + u^2,$$

woraus wir wie bereits gesehen

$$u = \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad y^2 = u^2 - q$$

ableiten. Gleichung (7.1) ist also erfüllt, falls das Quadrat mit der Seitenlänge y den Flächeninhalt $u^2 - q$ besitzt, bzw. wenn

$$y = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ist.

Das gewünschte Applet kann nun folgendermaßen aufgebaut werden: Die Parameter p und q sind einzugeben, und wir definieren $u = \frac{p}{2}$ als Termobjekt. Wir zeichnen eine Strecke von beliebiger Länge x_0 und verlängern diese um u . Indem wir die Streckenlänge x_0 verändern, verändern wir die Länge $y = x_0 + u$ der gesamten Strecke. Stellen wir x_0 so ein, dass das Quadrat mit der Seitenlänge y den Flächeninhalt $u^2 - q$ besitzt, so ist x_0 eine Lösung der Gleichung (7.1).

Im Folgenden wird die Erstellung des Applets detailliert erläutert. Die einzelnen Schritte können anhand von Abbildung 7.1 (a) nachvollzogen werden.

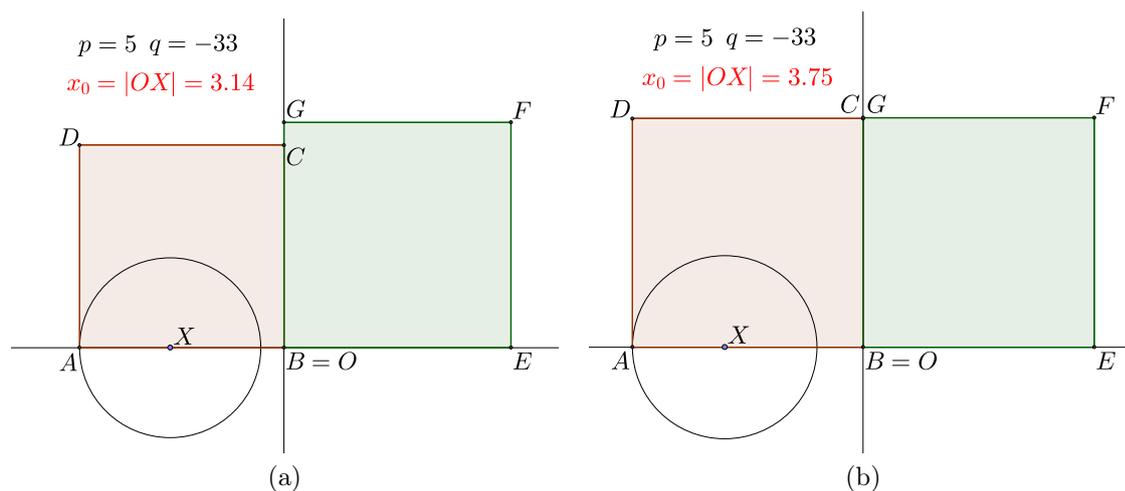


Abb. 7.1: möglicher Grundaufbau eines GeoGebra-Applets zum näherungsweise, graphischen Lösen quadratischer Gleichungen

1. Setze einen Punkt X auf der negativen x -Halbachse und definiere x_0 als den Abstand von X zum Koordinatenursprung O .
2. Erstelle Eingabefelder für die Parameter p, q .
3. Definiere $u = \frac{p}{2}$ als Termobjekt.
4. Zeichne einen Kreis um X mit dem Radius u . Der Schnittpunkt des Kreises mit der x -Achse, der links von X liegt, sei A .

5. Errichte ein Quadrat $ABCD$ über der Strecke AB wobei $B = O$ der Koordinatenursprung sei.
6. Definiere $w = \sqrt{u^2 - q}$ als Termobjekt und den Punkt $E = (w, 0)$.
7. Errichte ein Quadrat $BEFG$ über der Strecke BE .

Das Applet ist nun funktionstüchtig. Positioniert man den Punkt X so, dass die Quadrate $ABCD$ und $BEFG$ denselben Flächeninhalt besitzen (vgl. Abbildung 7.1 (b)), so ist $x_0 = |OX|$ eine Lösung von Gleichung (7.1). Man kann das Applet zur besseren Veranschaulichung noch vervollständigen, indem man auf der linken Seite die Zerlegung in Teilfiguren ergänzt und die Gleichung sowie die Flächeninhalte anzeigen lässt (siehe Abbildung 7.2).

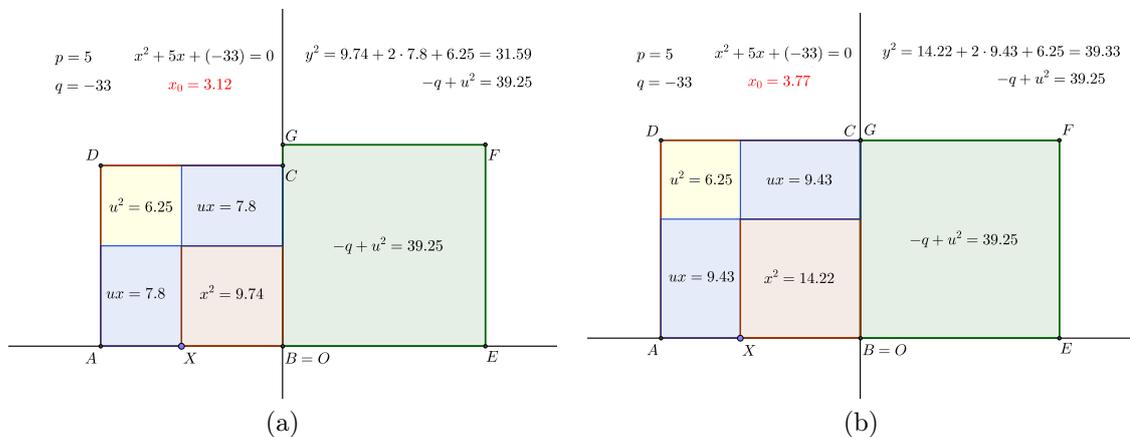


Abb. 7.2: das vollständige Applet zum graphischen Lösen quadratischer Gleichungen

7.1.2 Ein Applet zum graphischen Lösen kubischer Gleichungen

Nun soll ein Applet zum Lösen einer Gleichung der Form $x^3 + px + q = 0$ bzw.

$$x^3 + px = -q \quad (7.2)$$

erzeugt werden. Das Vorgehen orientiert sich am Applet für quadratische Gleichungen. Erneut interpretieren wir x als unbekannte Streckenlänge, setzen also $x > 0$ voraus. Der Ausdruck $-q$ auf der rechten Seite von (7.2) wird als Volumen aufgefasst, so dass wir $-q > 0$ (bzw. $q < 0$) annehmen. Damit auch auf der linken Seite ein positiver Ausdruck steht, setzen wir noch $p > 0$ voraus. Folglich ist die Diskriminante der Gleichung (7.2) strikt positiv, womit sie genau eine Lösung besitzt. Wegen $q < 0$ ist diese Lösung zwangsläufig positiv. Wir substituieren $y = x + u$ ($y, u > 0$) und erhalten

$$y^3 = x^3 + 3yux + u^3,$$

was äquivalent ist zu

$$x^3 + 3yux = y^3 - u^3.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (7.2) erhalten wir

$$(I) \ 3uy = p \quad \text{und} \quad (II) \ y^3 - u^3 = -q.$$

Wir formen (I) äquivalent um:

$$\begin{aligned} 3uy = p &\Leftrightarrow 3u(x + u) = p \\ &\Leftrightarrow u^2 + ux = \frac{p}{3} \\ &\Leftrightarrow \left(u + \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{p}{3} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow u = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{p}{3} + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Auch die letzte Umformung ist äquivalent, da u nach Voraussetzung positiv ist. Durch Umstellen von Gleichung (II) erhalten wir

$$y^3 = u^3 - q.$$

Das bedeutet, dass Gleichung (7.2) erfüllt ist, wenn der Würfel mit der Kantenlänge y das Volumen $u^3 - q$ besitzt bzw. wenn $y = \sqrt[3]{u^3 - q}$ ist.

Wir bauen das Applet folgendermaßen auf: Die Parameter p und q können zunächst eingegeben werden. Wir zeichnen eine Strecke mit Variabler Länge x_0 . Da nun x_0 und p gegeben sind, kann GeoGebra durch ein Termobjekt, die Streckenlänge

$$u = -\frac{x_0}{2} + \sqrt{\frac{p}{3} + \left(\frac{x_0}{2}\right)^2}$$

berechnen und die Strecke der Länge x_0 um u verlängern. Im Unterschied zum Applet für quadratische Gleichungen erwirkt eine Veränderung von x_0 auch eine Veränderung von u . Die Software setzt dies dynamisch um. Die Gesamtstrecke hat nun die variable Länge $y = x_0 + u$. Wir können durch ein Termobjekt außerdem

$$w = \sqrt[3]{u^3 - q}$$

berechnen und eine Strecke dieser Länge konstruieren lassen. Auch die Streckenlänge w hängt von x_0 ab, ändert sich also, wenn x_0 verändert wird. Über beiden Strecken errichten wir je einen Würfel und stellen die Streckenlänge x_0 so ein, dass beide Würfel gleiche Kantenlängen, d. h. gleiche Volumina, besitzen. Die jetzt eingestellte Streckenlänge x_0 ist folglich eine (und zwar aufgrund unserer Voraussetzungen die einzige) Lösung von Gleichung (7.2).

Die Umsetzung des Grundaufbaus gleicht fast der des Applets für quadratische Gleichungen. Die einzelnen Schritte können daher erneut anhand von Abbildung 7.1 (a) nachvollzogen werden.

1. Setze einen Punkt X auf der negativen x -Halbachse. Definiere x_0 als den Abstand von X zum Koordinatenursprung O .
2. Füge Eingabefelder für p und q hinzu.
3. Definiere das Termobjekt $u = -\frac{x_0}{2} + \sqrt{\frac{p}{3} + \left(\frac{x_0}{2}\right)^2}$.
4. Zeichne einen Kreis um X mit Radius u . Der Schnittpunkt A des Kreises mit der x -Achse links von X ist der untere, linke Eckpunkt des Würfels mit dem Volumen y^3 .
5. Errichte das Quadrat $ABCD$ über der Strecke AB (wie oben sei $B = O$). Es handelt sich um die nach vorn weisende Fläche des Würfels mit der Kantenlänge y .
6. Definiere das Termobjekt $w = \sqrt[3]{u^3 - q}$ und den Punkt $E = (w, 0)$.
7. Errichte ein Quadrat $BEPF$ über der Strecke BE . Es handelt sich um die nach vorn weisende Fläche des Würfels mit der Kantenlänge w .

Das Applet ist nun funktionstüchtig. Positioniert man den Punkt X so, dass die Quadrate $ABCD$ und $BEPF$ flächengleich sind, dann sind die (bisher nicht veranschaulichten) Würfel mit diesen Seitenflächen volumengleich und $x_0 = |OX|$ ist eine Lösung von Gleichung (7.2). Schlussendlich kann man das Applet noch optisch aufwerten, indem man die Quadrate zu Würfeln vervollständigt, die zu lösende Gleichung neben einigen weiteren Informationen anzeigen lässt und die Achsen ausblendet (siehe Abbildung 7.3).

$p=17$	$x^3 + 17x + (-186) = 0$	$y^3 = 114.56691$	$p=17$	$x^3 + 17x + (-186) = 0$	$y^3 = 186.62438$
$q=-186$	$x = 3.69009$	$-q + u^3 = 187.58827$	$q=-186$	$x = 4.72304$	$-q + u^3 = 186.97502$

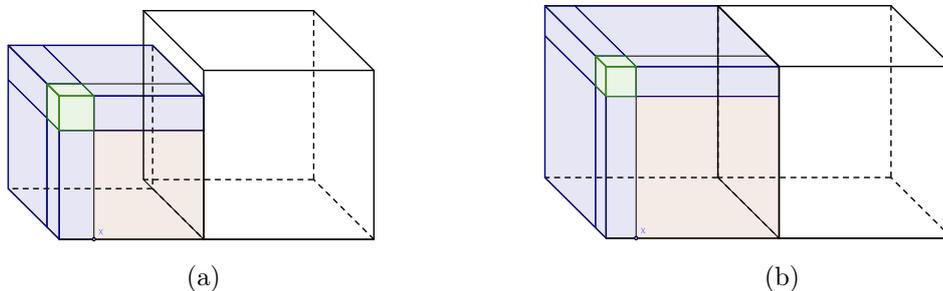


Abb. 7.3: Das Applet veranschaulicht die kubische Ergänzung und zeigt z. B. eine korrekte Näherungslösung für die Gleichung $x^3 + 17x - 186 = 0$ an.

7.2 Carlyle-Kreise

Im Folgenden soll eine graphische Methode zum Finden von Näherungs-Lösungen quadratischer Gleichungen erläutert werden, die eine natürliche Verallgemeinerung auf Polynom-Gleichungen beliebigen Grades zulässt. Die Methode geht laut DeTemple (1991) zurück auf den schottischen Historiker *Thomas Carlyle*¹.

Wir wollen hier die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad (7.3)$$

geometrisch lösen. Wir arbeiten dazu im kartesischen Koordinatensystem und es sei $A = (0, 1)$ sowie $B = (-p, q)$. Der Kreis K mit dem Durchmesser AB heißt *Carlyle-Kreis* zur Gleichung (7.3). Die Methode von Carlyle ist im folgenden Satz formuliert.

Satz 7.1. *Die Menge $K \cap \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ der Schnittpunkte des Carlyle-Kreises mit der x -Achse stimmt mit der Menge der reellen Lösungen von Gleichung (7.3) überein.*

Beweis. **Zunächst sei $p < 0$ und $q > 0$.** Es sei $M := M_{AB}$ der Mittelpunkt und r der Radius von K . Dann gilt $M = \left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ und

$$r = |MA| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$

K schneidet die x -Achse also genau dann nicht, wenn

$$\frac{q+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2} > 0$$

gilt. Wir formen diese Bedingung äquivalent um:

$$\begin{aligned} \frac{q+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2} > 0 &\Leftrightarrow \frac{q+1}{2} > \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \end{aligned}$$

An der mit (*) markierten Stelle liegt eine Äquivalenzumformung vor, da wegen $q > 0$ beide Seiten in der vorherigen Zeile positiv sind. Gleichung (7.3) besitzt also

¹Bevor Carlyle (1795 – 1881) sich der Geschichte widmete, unterrichtete er Mathematik und übersetzte *Legendres* ELEMENTS DE GÉOMETRIE ins Englische (vgl. DeTemple (1991), S. 98).

genau dann keine reellen Lösungen, wenn K keinen Schnittpunkt mit der x -Achse besitzt.

Nun schneide K die x -Achse in den Punkten $L_1 = (x_1, 0)$ und $L_2 = (x_2, 0)$ mit $x_1 \leq x_2$ (vgl. Abbildung 7.4 (a)).

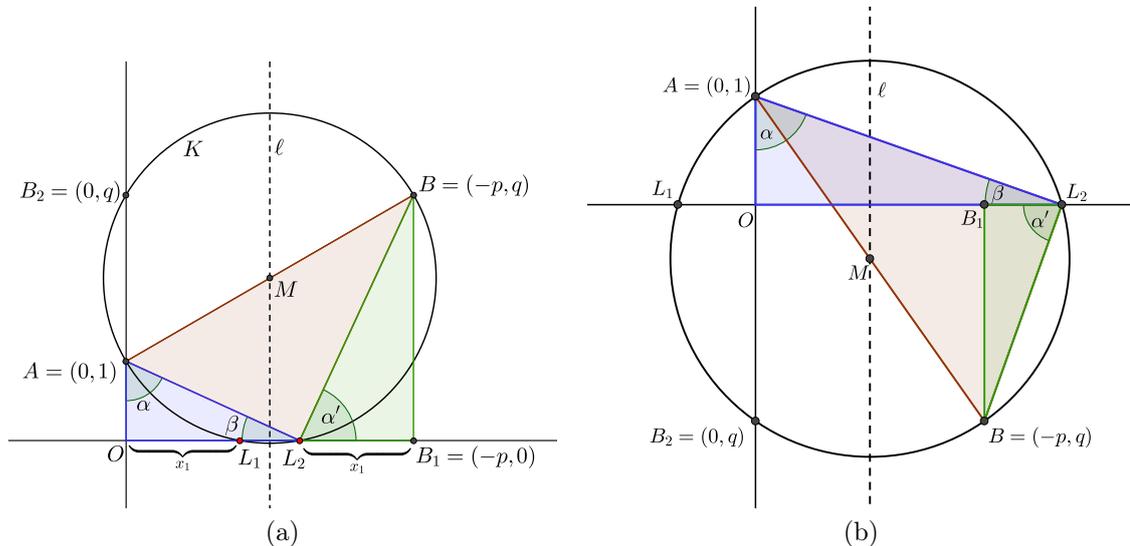


Abb. 7.4: (a) der Fall $p < 0$ und $q > 0$; (b) der Fall $p < 0$ und $q < 0$.

Bevor wir den weiteren Beweis im Detail durchgehen, wollen wir die wunderbar einfache **Beweis-Idee** anhand dieser Abbildung kurz skizzieren. Wir werden zeigen:

Aus Symmetriegründen gilt $x_1 + x_2 = -p$. Weiterhin erhält man aus der Ähnlichkeit des blauen und des grünen Dreiecks: $\frac{x_2}{1} = \frac{q}{x_1}$, also $x_1 \cdot x_2 = q$. Mit dem Satz von Vieta folgt daraus die Behauptung.

Nun führen wir die Details aus: Der Fall $L_1 = L_2$ ist ausdrücklich zugelassen. Es seien $B_1 := (-p, 0)$ und $B_2 := (0, q)$ die orthogonalen Projektionen von B auf die x -Achse bzw. y -Achse und ℓ das Lot von M auf die x -Achse. Das Lot schneidet die x -Achse bei $x = -\frac{p}{2}$. Folglich ist B_2 das Bild von B unter der Spiegelung an ℓ . Es folgt $B_2 \in K$, also ist B_2 neben A der zweite Schnittpunkt von K mit der y -Achse (oder $B_2 = A$ ist Berührungspunkt von K mit der y -Achse). Wegen $q > 0$ liegen die Schnittpunkte auf der positiven y -Halbachse. Da außerdem $p < 0$ gilt, liegt $M = \left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ im 1. Quadranten und folglich liegen L_1 und L_2 auf der positiven x -Halbachse, d. h. $x_1, x_2 > 0$. Auch die Punkte L_1 und L_2 liegen symmetrisch bezüglich ℓ und ebenfalls B_1 und der Koordinatenursprung O . Es folgt $x_1 = |OL_1| = |L_2B_1|$ und wir erhalten

$$x_1 + x_2 = |L_2B_1| + |OL_2| = |OB_1| = -p. \quad (7.4)$$

K ist der Thaleskreis über AB und es gilt $L_2 \in K$. Folglich besitzt das Dreieck AL_2B einen rechten Winkel im Punkt L_2 und daher gilt $\alpha' + \beta = 90^\circ$ (Winkel-

bezeichnungen laut Abbildung 7.4 (a)). Offenbar sind auch die Dreiecke OL_2A und L_2B_1B rechtwinklig. Wir erhalten $\alpha + \beta = 90^\circ$, also $\alpha = \alpha'$. Aus $\tan(\alpha) = x_2$ und $\tan(\alpha') = \frac{q}{x_1}$ folgt nun $x_2 = \frac{q}{x_1}$ was äquivalent ist zu

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Zusammen mit (7.4) folgt unter Anwendung des Satzes von Vieta, dass x_1 und x_2 die Lösungen von Gleichung (7.3) sind.

Nun betrachten wir den Fall $p < 0$ und $q < 0$. Dann liegt $B = (-p, q)$ unterhalb der x -Achse und $A = (0, 1)$ oberhalb der x -Achse. Wegen $A, B \in K$ besitzt K also stets zwei Schnittpunkte $L_1 = (x_1, 0)$ und $L_2 = (x_2, 0)$ mit der x -Achse (siehe Abbildung 7.4 (b)).

$B_2 = (0, q)$ ist Schnittpunkt von K mit der y -Achse und liegt auf der negativen y -Halbachse, wohingegen der zweite Schnittpunkt A auf der positiven Halbachse liegt. Folglich liegt L_1 auf der negativen x -Halbachse und L_2 auf der positiven x -Halbachse, d. h. es gilt $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$.

Wie im ersten Fall sieht man ein, dass B_1 und O symmetrisch bezüglich ℓ liegen und ebenso L_1 und L_2 . Es folgt

$$|x_1| = |L_1O| = |B_1L_2|.$$

Wegen $x_2 = |OL_2|$ und $x_1 < 0$ folgt daraus

$$x_1 + x_2 = x_2 - |x_1| = |OL_2| - |B_1L_2| = |OB_1| = -p.$$

Ebenfalls wie im ersten Fall erkennen wir $\alpha' + \beta = 90^\circ$ und $\alpha + \beta = 90^\circ$, also $\alpha = \alpha'$. Aus $\tan(\alpha) = x_2$ und $\tan(\alpha') = \frac{-q}{-x_1} = \frac{q}{x_1}$ folgt $x_2 = \frac{q}{x_1}$ bzw.

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

und der Satz von Vieta liefert wie oben die Behauptung.

Falls $p > 0$ ist, liegt jeweils eine bezüglich der y -Achse spiegelbildliche Situation vor, und die Argumentationen lassen sich unter Beachtung veränderter Vorzeichen genauso führen wie eben gesehen. Die Fälle $p = 0$ bzw. $q = 0$ sind ebenfalls leicht einzusehen; wir verzichten auf eine Darstellung. \square

Es sei angemerkt, dass es weitere elementare Beweise für den Satz von Carlyle gibt. In DeTemple (1991) wird ein Beweis unter Verwendung des Sehnen- und des Sekanten-Satzes durchgeführt und auf die Möglichkeit eines weiteren Beweises mithilfe des Satzes von Pythagoras hingewiesen. Darüber hinaus zeigt DeTemple auf, dass sich die Methode von Carlyle erweitern lässt, um auch komplexe Nullstellen quadratischer Polynome zu finden. Der hier durchgeführte Beweis hat den Vorteil, dass er sich gut zur Verallgemeinerung eignet, um die im folgenden Abschnitt vorgestellte Methode von Lill zum Finden der Nullstellen von Polynomen höheren Grades auf elementarem Niveau herzuleiten.

Wir wollen die Einfachheit der Methode von Carlyle abschließend an zwei Beispielen illustrieren. Suchen wir etwa eine Näherungslösung zu $x^2 - 7x + 4 = 0$, so zeichnen wir einen Kreis mit dem Durchmesser AB zu $A = (0, 1)$ und $B = (7, 4)$. Die Schnittpunkte mit der x -Achse sind die Lösungen. (vgl. Abbildung 7.5 (a)). In Abbildung 7.5 (b) wurden die Lösungen zur Gleichung $x^2 - 7 = 0$, also Näherungen für $-\sqrt{7}$ bzw. $\sqrt{7}$, ermittelt.

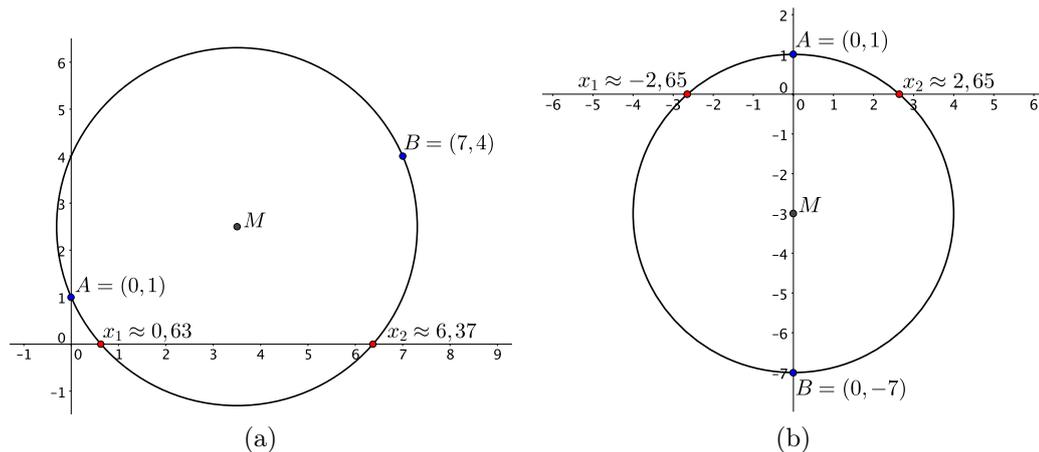


Abb. 7.5: zwei Beispiele für die Anwendung der Methode von Carlyle

7.3 Die Methode von Lill

Die Methode von Carlyle zur Bestimmung der Nullstellen quadratischer Polynome lässt sich auf Polynome höheren Grades verallgemeinern. Im Beweis von Satz 7.1 haben wir im ersten Fall den rechtwinkligen Streckenzug AO_1B_1B mit

$$|AO_1| = 1, |OB_1| = -p \text{ und } |B_1B| = q$$

betrachtet (vgl. Abbildung 7.4 (a)). In diesen Streckenzug war der kürzere, ebenfalls rechtwinklige Streckenzug AL_2B eingezeichnet. Wir haben festgestellt, dass $x_2 = \tan(\alpha)$ eine Nullstelle von $x^2 + px + q$ ist. Entscheidend für den Beweis war die Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke AOL_2 (blau) und L_2B_1B (grün). Um die Methode von Carlyle zur Methode von Lill zu verallgemeinern, werden wir zu einem beliebigen Polynom mit zunächst positiven Koeffizienten einen rechtwinkligen Streckenzug zeichnen, dessen Streckenlängen mit den Koeffizienten des Polynoms übereinstimmen. Dieser sogenannte äußere Streckenzug wird durch einen inneren, ebenfalls rechtwinkligen Streckenzug ergänzt. Auf diese Weise entstehen n rechtwinklige, zueinander ähnliche Dreiecke, wobei n der Grad des Polynoms ist. Als Nullstelle erhalten wir $x = -\tan(\alpha)$, falls die Endpunkte von innerem und äußerem Streckenzug zusammenfallen. Hierbei bezeichnet α den Dreiecks-Innenwinkel im gemeinsamen Ausgangspunkt der beiden Streckenzüge.

Die Methode von Lill geht zurück auf M. E. Lill, einen österreichischen Militär-Ingenieur, der sein Verfahren in Lill (1867) veröffentlichte und auf der Weltausstellung 1867 in Paris als eine Maschine zur Bestimmung reeller Nullstellen von Polynomen vorstellte. Auch wenn das Verfahren heutzutage wenig verbreitet zu sein scheint, wird doch fast vom Zeitpunkt seiner ersten Veröffentlichung an immer wieder von verschiedenen Autoren Bezug darauf genommen.² So wurden im Laufe der Jahre verschiedene Verallgemeinerungen und Varianten von Lills Methode entwickelt und beschrieben. Das Verfahren eignet sich in besonderem Maße zur dynamischen Visualisierung. Verschiedene Webseiten bieten weiterführende Informationen sowie interaktive Animationen an.³

7.3.1 Ein spezieller Fall

Wir betrachten das Polynom

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

und setzen voraus, dass die Koeffizienten a, b, c, d, e positiv sind. In Abschnitt 7.3.2 wird eine allgemeine Version der Methode von Lill formuliert und bewiesen, die sich auf Polynome beliebigen Grades mit beliebigen Koeffizienten anwenden lässt. Doch zunächst wollen wir hier einige exemplarische Einsichten gewinnen, die auch für Schüler zugänglich sind.

Wir konstruieren einen Streckenzug $ABCDEF$ mit folgenden Eigenschaften

1. $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp DE$ und $DE \perp EF$.
2. Die Dreiecke ABC , BCD , CDE und DEF sind positiv orientiert.
3. $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DE| = d$ und $|EF| = e$.

Wir nennen $ABCDEF$ den *äußeren Streckenzug* des Polynoms f . Dieser entsteht anschaulich gesprochen, indem man eine Strecke der Länge a zeichnet, im rechten Winkel links abbiegt und eine Strecke der Länge b zeichnet, im rechten Winkel links abbiegt usw. (vgl. Abbildung 7.6 (a)).

Wir konstruieren nun einen weiteren Streckenzug (vgl. Abbildung 7.6 (b)). Es sei $W \in BC$. Die Orthogonale zu AW durch den Punkt W schneide CD im Punkt X . Die Orthogonale zu WX durch den Punkt X schneide DE im Punkt Y . Die Orthogonale zu XY durch den Punkt Y schneide EF im Punkt Z . Der Streckenzug $AWXYZ$ heißt *innerer Streckenzug* des Polynoms f . Es sei α der Innenwinkel des Dreiecks ABW im Punkt A .

²„Today, Lill’s method seems to be largely forgotten, despite periodic efforts to publicize it.“ (Kalman (2009), S. 13)

³Siehe Kalman (2013) sowie Bradford (2013) (Webseiten).

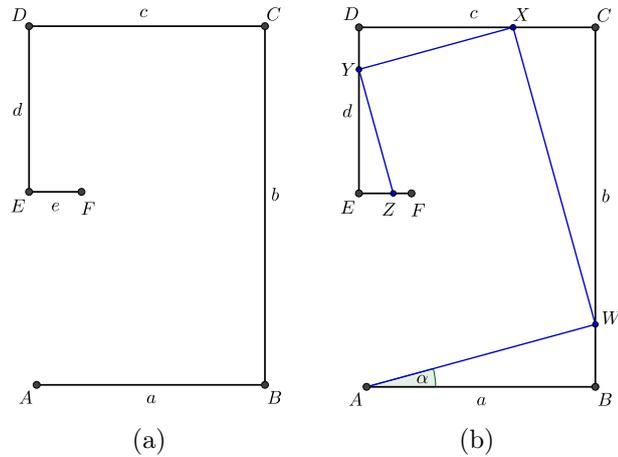


Abb. 7.6: äußerer und innerer Streckenzug des Polynoms $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a, b, c, d, e > 0$

Offenbar ist die Lage des Punktes Z von der Größe des Winkels α abhängig. Man kann z. B. mit GeoGebra eine dynamische Konstruktion erzeugen, die es einem erlaubt, den Punkt W auf BC zu verschieben, um den Winkel α so einzustellen, dass die Endpunkte von äußerem und innerem Streckenzug zusammenfallen.⁴ Der **Satz von Lill** besagt:

$x_\alpha := -\tan(\alpha)$ ist genau dann eine Nullstelle von f , wenn $Z = F$ gilt.

Abbildungung 7.7 (a) zeigt eine Situation, in der $-\tan(\alpha)$ eine Nullstelle von f ist.

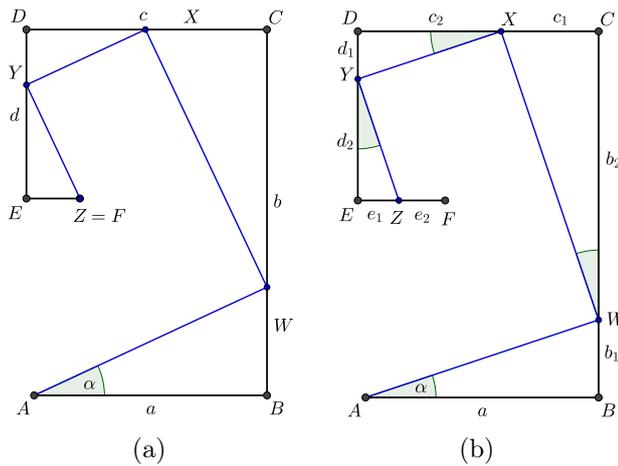


Abb. 7.7: (a) $x_\alpha = -\tan(\alpha)$ ist eine Nullstelle von f . (b) Bezeichnungen für den Beweis

⁴Falls dies möglich ist. Das hängt natürlich von den Koeffizienten des Polynoms ab.

Beweis. Es seien b_1, b_2 die Längen der Abschnitte BW bzw. WC , in die der Punkt W die Strecke BC unterteilt. Analog seien die Abschnitte auf den Strecken CD, DE und EF bezeichnet (vgl. Abbildung 7.7 (b)). Aufgrund der Rechtwinkligkeit von innerem und äußerem Streckenzug sind alle in der Abbildung markierten Winkel gleich groß. Folglich sind die vier Dreiecke ABW, WCX, XDY und YEZ zueinander ähnlich.

Es gilt $b_1 = a \tan(\alpha) = -ax_\alpha$, woraus

$$b_2 = b - b_1 = ax_\alpha + b$$

folgt. Weiter gilt $c_1 = b_2 \tan(\alpha) = -b_2 x_\alpha = -(ax_\alpha + b)x_\alpha$, also

$$c_2 = c - c_1 = (ax_\alpha + b)x_\alpha + c = ax_\alpha^2 + bx_\alpha + c.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir $d_2 = ax_\alpha^3 + bx_\alpha^2 + cx_\alpha + d$ und schließlich

$$e_2 = ax_\alpha^4 + bx_\alpha^3 + cx_\alpha^2 + dx_\alpha + e = f(x_\alpha).$$

Das bedeutet

$$f(x_\alpha) = 0 \iff e_2 = 0 \iff Z = F.$$

□

Wir haben sogar mehr gezeigt als ursprünglich behauptet. Der Abstand e_2 der Punkte Z und F ist stets der Funktionswert von f an der Stelle x_α . Liegt Z wie in unserer Abbildung auf der Strecke EF , so ist $f(x_\alpha)$ positiv. Trifft der letzte Arm des inneren Streckenzugs die Strecke EF nicht, so können wir Z als Schnittpunkt der Orthogonalen zu XY im Punkt Y und der Geraden \overline{EF} definieren. In diesem Fall ist $f(x_\alpha) = -|FZ|$.

Linearfaktoren abspalten

Wir wollen eine weitere Erkenntnis festhalten. Es sei α so gewählt, dass x_α eine Nullstelle von f ist. Wir können dann den inneren Streckenzug von f als äußeren Streckenzug eines neuen Polynoms $g(x) = \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d}$ auffassen (vgl. Abbildung 7.8 (a)). Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Polynomen f und g ? Man hofft vielleicht, dass g aus f durch Abspalten des Linearfaktors $(x - x_\alpha)$ entsteht, also dass $f(x) = (x - x_\alpha)g(x)$ gilt. Die Rechnung

$$(\tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d})(x - x_\alpha) = \tilde{a}x^4 + (\tilde{b} - \tilde{a}x_\alpha)x^3 + (\tilde{c} - \tilde{b}x_\alpha)x^2 + (\tilde{d} - \tilde{c}x_\alpha)x - \tilde{d}x_\alpha$$

zeigt jedoch bereits am höchsten Koeffizienten, dass dies bestenfalls bis auf einen konstanten Faktor richtig sein kann. Der Faktor müsste folglich $\frac{\tilde{a}}{a}$, also $\cos(\alpha)$ sein (vgl. Abbildung 7.8 (a)).

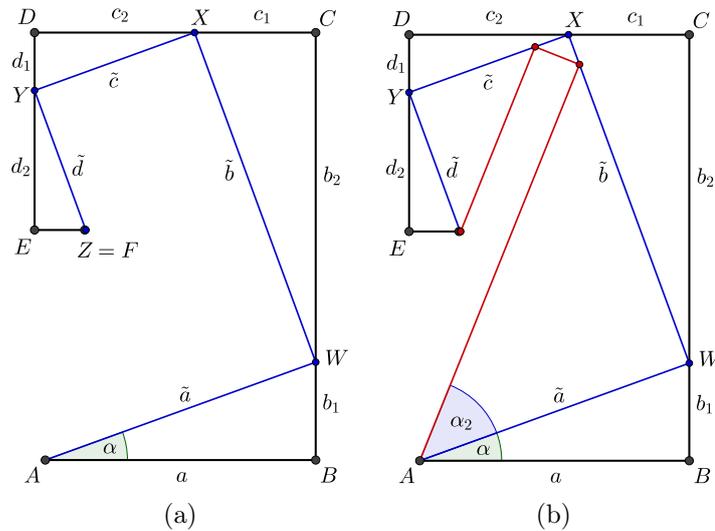


Abb. 7.8: Der innere Streckenzug von f ist äußerer Streckenzug zu $g(x) = \tilde{a}x^3 + \tilde{b}x^2 + \tilde{c}x + \tilde{d}$. $x_{\alpha_2} = -\tan(\alpha_2)$ ist eine zweite Nullstelle von f .

Wir prüfen dies nach. Der höchste Koeffizient des Polynoms $\cos(\alpha)g(x)(x - x_\alpha)$ ist $\tilde{a} \cos(\alpha) = a$. Der zweite Koeffizient ist

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)(\tilde{b} - \tilde{a}x_\alpha) &= \cos(\alpha)\tilde{b} - \cos(\alpha)x_\alpha\tilde{a} \\ &= b_2 + \cos(\alpha)\tan(\alpha)\tilde{a} \\ &= b_2 + \sin(\alpha)\tilde{a} \\ &= b_2 + b_1 = b. \end{aligned}$$

Ebenso sieht man

$$\cos(\alpha)(\tilde{c} - \tilde{b}x_\alpha) = c \quad \text{und} \quad \cos(\alpha)(\tilde{d} - \tilde{c}x_\alpha) = d$$

ein. Schlussendlich gilt noch $\cos(\alpha)(-\tilde{d}x_\alpha) = \cos(\alpha)\tan(\alpha)\tilde{d} = e$, womit wir

$$f(x) = \cos(\alpha)(x - x_\alpha)g(x)$$

bewiesen haben.

Wir können also eine weitere Nullstelle von f bestimmen, indem wir eine Nullstelle von g bestimmen. Dazu zeichnen wir in den inneren Streckenzug einen dritten Streckenzug (vgl. Abbildung 7.8 (b)).

Polynome mit Koeffizienten in umgekehrter Reihenfolge

Wir betrachten noch einmal das Polynom $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit seinem äußeren und seinem inneren Streckenzug. Der Winkel α sei so gewählt, dass $x_\alpha = -\tan(\alpha)$ eine Nullstelle von f ist (vgl. Abbildung 7.9).

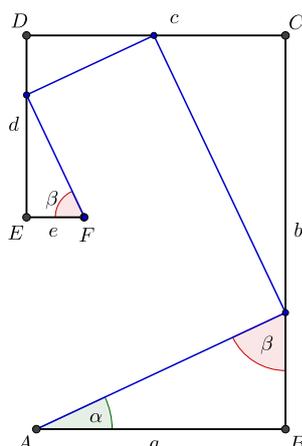


Abb. 7.9: innerer und äußerer Streckenzug zu $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Wir können nun den äußeren Streckenzug in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen, d.h. den Streckenzug $FEDCBA$ betrachten. Dies ist ein äußerer Streckenzug des Polynoms, das aus f durch Umkehren der Reihenfolge der Koeffizienten entsteht, also von $f^*(x) := ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$. Der Streckenzug „biegt zwar stets nach rechts statt nach links ab“, man macht sich aber leicht klar, dass der Beweis der Methode von Lill auch in diesem Fall analog gelingt. Der zu betrachtende Winkel ist nun β anstelle von α (vgl. Abbildung 7.9) und wir wissen $\alpha + \beta = 90^\circ$. Weil innerer und äußerer Streckenzug denselben Startpunkt besitzen, ist $x_\beta := -\tan(\beta)$ eine Nullstelle von f^* . Es gilt

$$x_\beta = -\tan(\beta) = -\tan(90^\circ - \alpha) = -\frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{1}{x_\alpha}.$$

Wir haben somit bewiesen: Für jede Nullstelle $x \neq 0$ von f ist $1/x$ eine Nullstelle von f^* . Man sagt auch, dass das Umkehren der Koeffizienten eines Polynoms zu reziproken Nullstellen führt. Diese Tatsache lässt sich auch direkt nachrechnen, erfährt durch die Methode von Lill aber eine neue Veranschaulichung.

7.3.2 Eine allgemeine Version

Wir haben uns bisher auf Polynome vom Grad vier mit positiven Koeffizienten beschränkt. In diesem Abschnitt wollen wir uns von diesen Einschränkungen lösen und eine allgemeine Version der Methode von Lill formulieren und beweisen. Bevor dies in aller Exaktheit durchgeführt wird, soll die Funktionsweise der allgemeinen Methode anschaulich beschrieben werden. Wir betrachten ein beliebiges Polynom

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Der *äußere Streckenzug* $A_0A_1 \dots A_{n+1}$ zu f entsteht folgendermaßen: Es sei $A_0 := (0, 0)$. Wir stehen im Punkt A_0 mit Blickrichtung entlang

der positiven x -Halbachse. Von dort schreiten wir eine Strecke der Länge a_0 bis zum Punkt A_1 ab. Dabei gehen wir vorwärts, wenn a_0 positiv ist, und rückwärts, wenn a_0 negativ ist. Im Punkt A_1 drehen wir uns um 90° nach links und schreiten eine Strecke der Länge a_1 bis zum Punkt A_2 ab. In A_2 drehen wir uns erneut um 90° nach links und schreiten eine Strecke der Länge a_2 bis zum Punkt A_3 ab und so fort. Stets gehen wir vorwärts, wenn $a_i > 0$ ist, und rückwärts, wenn $a_i < 0$ gilt. Ist ein Koeffizient $a_i = 0$, so führen wir zwar die Vierteldrehung im Punkt A_i aus, gehen aber weder vor noch zurück. Es gilt dann also $A_i = A_{i+1}$ (Abbildung 7.10 zeigt zwei Beispiele).

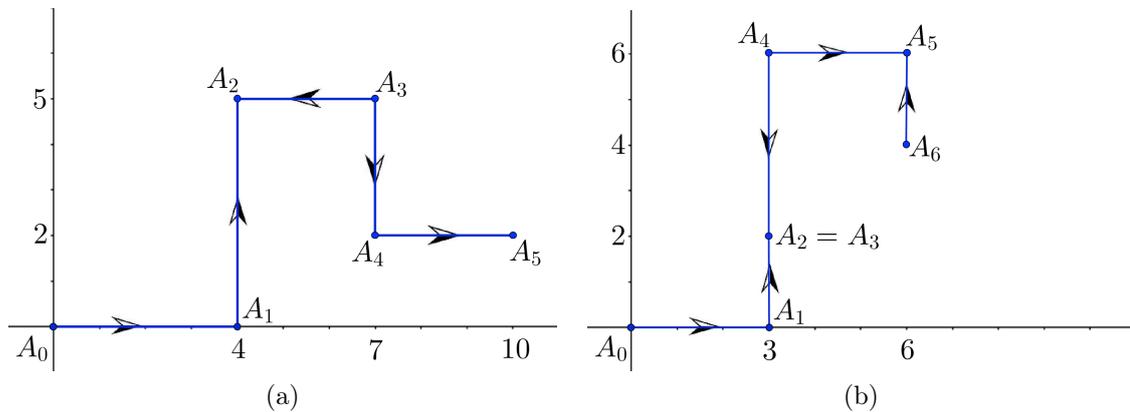


Abb. 7.10: (a) Äußerer Streckenzug zu $4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 3x + 3$. (b) Äußerer Streckenzug zu $3x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 3x - 2$ (man beachte $a_2 = 0$). Die Pfeile zeigen die Blickrichtung an.

Hierbei ist es durchaus möglich, dass ein Streckenstück mehrfach abgelaufen wird, was z. B. in Abbildung 7.10 (b) einträte, wenn der Koeffizient vor x^2 positiv wäre.

Liegt nun ein äußerer Streckenzug $A_0A_1 \dots A_{n+1}$ von Strecken mit den Längen

$$|A_iA_{i+1}| = |a_i| \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

vor, so konstruieren wir den *inneren Streckenzug* $B_0 \dots B_n$ folgendermaßen: Es sei $B_0 := A_0$. Nun wählen wir einen beliebigen von A_1 verschiedenen Punkt B_1 auf der Geraden $\overline{A_1A_2}$. Wir betrachten nun die zu B_0B_1 orthogonale Gerade durch den Punkt B_1 . Diese schneide die Gerade $\overline{A_2A_3}$ im Punkt B_2 . Als nächstes betrachten wir die zu B_1B_2 orthogonale Gerade durch den Punkt B_2 . Es sei B_3 deren Schnittpunkt mit $\overline{A_3A_4}$. Analog konstruieren wir die Punkte B_4, \dots, B_n . Es sei α der Innenwinkel des Dreiecks $A_0A_1B_1$ im Punkt A_0 , falls dieses positiv orientiert ist. Andernfalls sei α der Außenwinkel dieses Dreiecks im Punkt A_0 . Wie bereits im speziellen Fall sei $x_\alpha := -\tan(\alpha)$. Es gilt auch in der allgemeinen Situation, dass x_α eine Nullstelle von f ist, wenn die Endpunkte von innerem und äußerem Streckenzug zusammenfallen und andernfalls nicht, d. h.

$$f(x_\alpha) = 0 \iff B_n = A_{n+1}.$$

In Abbildung 7.11 sind zwei Beispiele dargestellt.

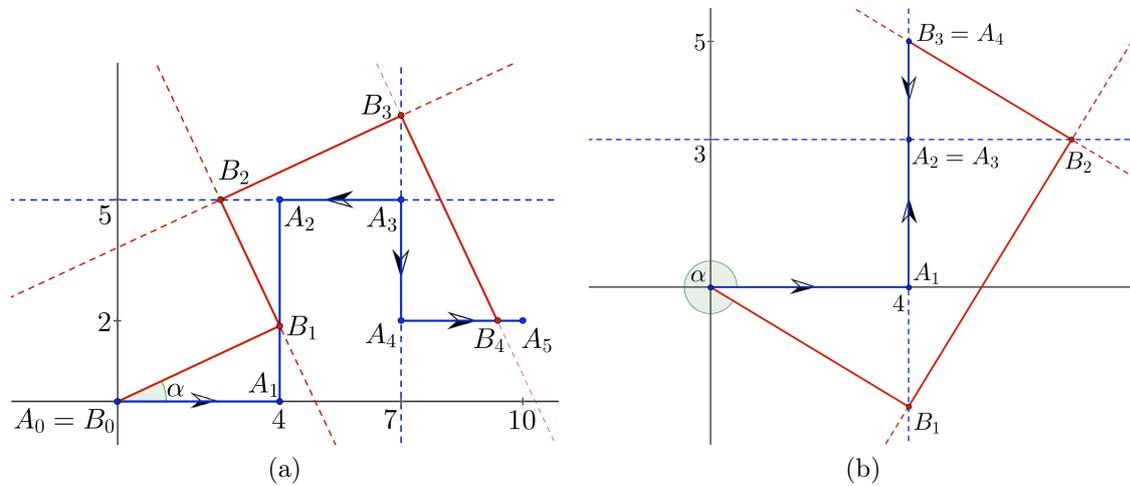


Abb. 7.11: (a) innerer und äußerer Streckenzug zu $4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 3x + 3$; (b) innerer und äußerer Streckenzug zu $4x^3 + 3x^2 - 2$

Das in (b) dargestellte Beispiel zeigt eine wichtige Besonderheit auf. Abgebildet sind innerer und äußerer Streckenzug des Polynoms $4x^3 + 3x^2 - 2$. Wegen $a_2 = 0$ gilt $A_2 = A_3$, so dass die Gerade $\overline{A_2A_3}$ nicht eindeutig festgelegt ist. Man muss in diesem Fall, die „durch die zwischenzeitlich eingenommene Blickrichtung festgelegte“ Orthogonale zu A_1A_2 durch den Punkt A_2 verwenden, um B_2 zu lokalisieren.

Exakte Formulierung und Beweis

Wir orientieren uns hier stark an der eleganten Darstellung von Kalman (2009). Wir unterscheiden im Folgenden Punkte von Vektoren, weshalb wir die Letztgenannten als Spalten notieren. Es sei $e := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der erste Standardbasisvektor, und

$$R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sei die in Matrixdarstellung angegebene lineare Abbildung, die die Ebene um 90° gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung dreht. Wir betrachten wieder

$$f(x) = a_0x^n + a_1x_{n-1} + \dots + a_n$$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir definieren nun zunächst den äußeren Streckenzug $A_0 \dots A_{n+1}$ durch die Angabe von Vektoren v_0, v_1, \dots, v_n . Dies meint, dass $A_0 := (0, 0)$ der Koordinatenursprung sei, und dass A_{i+1} aus A_i für $i = 1, \dots, n$ durch eine Verschiebung um v_i entstehe. Um der oben gegebenen anschaulichen Beschreibung zu entsprechen,

muss jeder Vektor v_i in der Länge mit $|a_i|$ übereinstimmen. Zudem muss beim Übergang von v_i zu v_{i+1} eine Vierteldrehung nach links erfolgen und das Vorzeichen von a_i muss zudem die Richtung von v_i festlegen. Dies geschieht durch die Definition

$$v_i := a_i R^i e \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Auch den inneren Streckenzug legen wir durch die Angabe von Vektoren fest. Wir definieren dazu zwei Folgen u_0, \dots, u_n und w_0, \dots, w_n von Vektoren. Es sei $B_0 := A_0$ und für $i = 1, \dots, n$ entstehe B_i durch Verschiebung von A_i um u_i . Eine Verschiebung von B_i um w_i liefert wiederum A_{i+1} , d. h., es gilt $v_i = u_i + w_i$ für $i = 1, \dots, n$ (vgl. Abbildung 7.12).

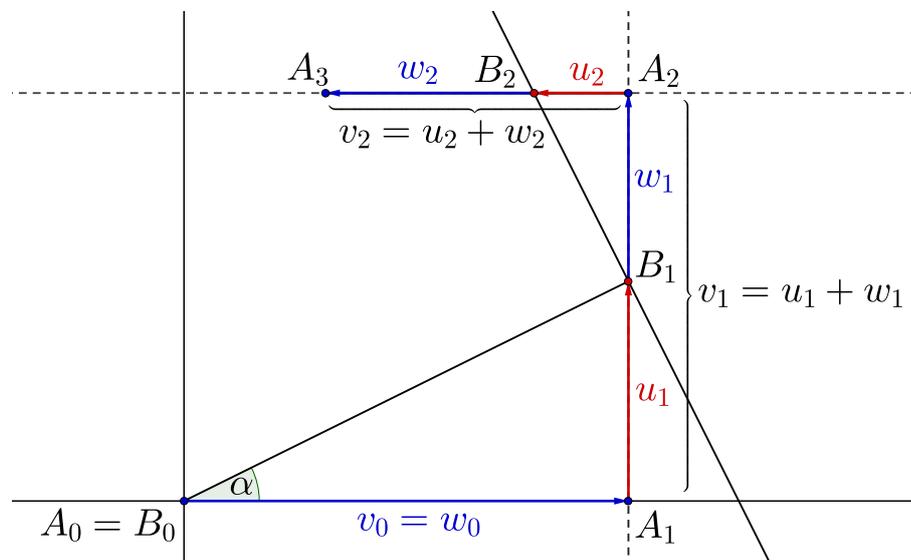


Abb. 7.12: Die Vektoren v_i legen den äußeren und die Vektoren u_i den inneren Streckenzug fest. w_i ergänzt jeweils u_i zu v_i .

Wir definieren $u_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Winkel α sei zunächst beliebig und alle weiteren Vektoren definieren wir induktiv durch

$$u_{i+1} := \tan(\alpha) R w_i \quad \text{und} \quad w_i := v_i - u_i \quad \text{für } i = 0, \dots, n.$$

Man vergleiche zur Verdeutlichung die Abbildungen 7.12 und 7.13. Die letztgenannte veranschaulicht zwei weitere mögliche Situationen für unterschiedliche Größen des Winkels α .

Wir wollen nun beweisen, dass die Streckenzüge $A_0 \dots A_{n+1}$ und $B_0 \dots B_n$ genau dann einen gemeinsamen Endpunkt besitzen, wenn $f(x_\alpha) = 0$ gilt, wobei wie immer $x_\alpha := -\tan(\alpha)$ sei. Offenbar gilt

$$B_n = A_{n+1} \iff w_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

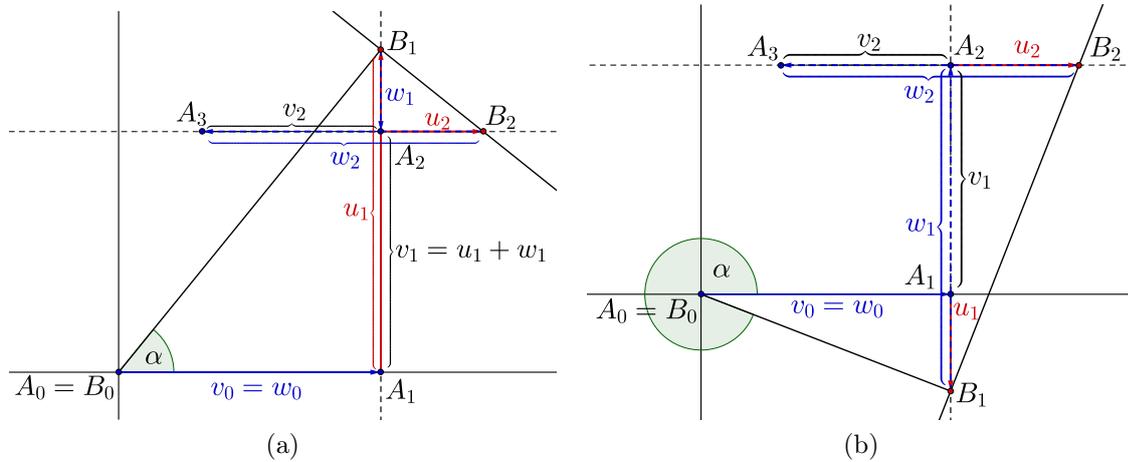


Abb. 7.13: Veranschaulichung der Definitionen der Vektoren v_i , u_i und w_i für verschiedene Größen des Winkels α

Wir werden also nachweisen, dass w_n genau dann der Nullvektor ist, wenn $f(x_\alpha) = 0$ gilt. Dazu zeigen wir, dass für $i = 1, \dots, n$

$$w_i = R^i(a_0x_\alpha^i + a_1x_\alpha^{i-1} + \dots + a_{i-1}x_\alpha + a_i)e \quad (7.5)$$

gilt. Wir führen dazu eine vollständige Induktion durch. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} w_1 = v_1 - u_1 &= a_1R^1e - \tan(\alpha)Rw_0 \\ &= a_1Re + x_\alpha Ra_0e \\ &= R(a_0x_\alpha + a_1)e. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Linearität von R verwendet. Nun sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und es gelte (7.5). Dann folgt

$$\begin{aligned} w_{i+1} = v_{i+1} - u_{i+1} &= a_{i+1}R^{i+1}e - \tan(\alpha)Rw_i \\ &= a_{i+1}R^{i+1}e + x_\alpha R(R^i(a_0x_\alpha^i + a_1x_\alpha^{i-1} + \dots + a_{i-1}x_\alpha + a_i)e) \\ &= R^{i+1}(a_0x_\alpha^{i+1} + a_1x_\alpha^i + \dots + a_{i-1}x_\alpha^2 + a_ix_\alpha + a_{i+1})e, \end{aligned}$$

wobei wir erneut die Linearität von R verwendet haben. Die Induktion ist abgeschlossen und es folgt insbesondere $w_n = R^n f(x_\alpha)e$ und damit

$$B_n = A_{n+1} \iff w_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff f(x_\alpha) = 0,$$

weil jede Potenz von R nur den Nullvektor auf den Nullvektor abbildet und ein skalares Vielfaches von e genau dann der Nullvektor ist, wenn der Skalar Null ist. Der Beweis ist abgeschlossen.

Kalman (2009) weist auf einen weiteren bemerkenswerten Aspekt hin, der anhand dieses Beweises deutlich wird. Wir haben die spezielle Gestalt der Drehmatrix R nicht benötigt, so dass man auch eine Drehung mit einem anderem Drehwinkel ϕ verwenden könnte. In diesem Fall sind äußerer und innerer Streckenzug nicht rechtwinklig, sondern biegen lediglich in allen Eckpunkten im selben Winkel ϕ ab. Als Nullstelle des Polynoms erhält man dann $x_{\alpha,\phi} = -\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\phi-\alpha)}$, vorausgesetzt die Endpunkte von innerem und äußerem Streckenzug fallen zusammen. Für $\phi = 90^\circ$ erhalten wir den „rechtwinkligen Fall“ wegen

$$x_{\alpha,90^\circ} = -\frac{\sin(\alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha)$$

als Spezialfall. Für eine ausführlichere Erläuterung mit Abbildungen siehe Kalman (2009), S. 20/21.

7.3.3 Kubische Gleichungen durch Origami lösen

Die Methode von Lill legt die Frage nahe, ob sich der innere Streckenzug, zu gegebenem äußeren, mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt, d. h., ob eine konstruktive Lösung allgemeiner Polynomgleichungen im Sinne der klassischen Elementargeometrie existiert. Dies ist leider nicht der Fall,⁵ aber verschiedene Autoren zeigen auf, dass sich die Lösungen allgemeiner kubischer Gleichungen durch Origami konstruieren lassen.⁶ Die folgende Darstellung ist angelehnt an Hull (2011).

Unter einer Konstruktion durch Origami versteht man das Erzeugen von Faltlinien (Geraden) durch Falten und anschließendes Entfalten eines Blattes Papier. Punkte entstehen als Schnittpunkte von Faltlinien. Um zu entscheiden, welche Konstruktionen möglich sind, muss man sich auf gewisse Grundkonstruktionen (Axiome), die als durchführbar angenommen werden, einigen. Weithin anerkannt ist das aus sechs Grundoperationen bestehende *Huzita-Axiomensystem*⁷, welches wir hier zugrunde legen wollen. Die Axiome lauten:

(O1) Sind zwei Punkte A, B gegeben, so können wir eine Faltlinie erzeugen, die durch A und B verläuft (vgl. Abbildung 7.14 (a)).

(O2) Sind zwei Punkte A, B gegeben, so können wir eine Faltlinie erzeugen, die A und B zur Deckung bringt (vgl. Abbildung 7.14 (b)).

(O3) Sind zwei Geraden g, h gegeben, so können wir eine Faltlinie erzeugen, die g und h zur Deckung bringt (vgl. Abbildung 7.14 (c)).

⁵„Straightedge and compass constructions [...] can only solve general quadratic equations.“ (Hull (2011), S. 309)

⁶Man siehe etwa Lang (2010) oder Hull (2011). Letzterer betont, dass die Italienerin *Margharita P. Beloch* die erste war, die dies herausfand (Beloch (1936)).

⁷Man siehe etwa Lang (2010), S. 42/43. Hier werden alle sechs Grundoperationen aufgelistet und erläutert. Es wird außerdem auf die Erweiterung durch ein siebtes Axiom zum *Huzita-Justin-Axiomensystem* hingewiesen, von der wir keinen Gebrauch machen.

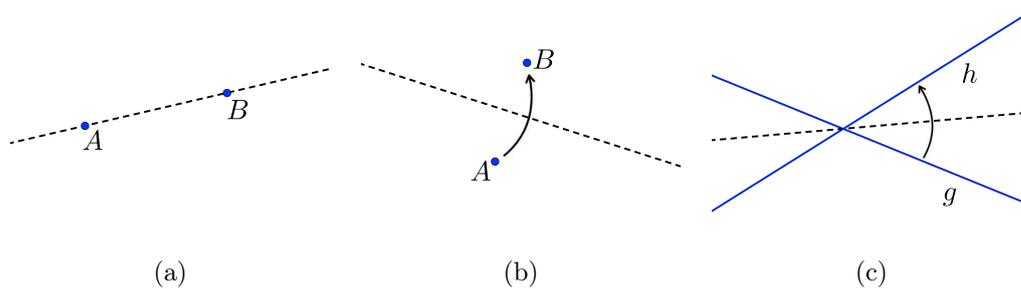


Abb. 7.14: die Huzita-Axiome (O1), (O2) und (O3)

(O4) Ist ein Punkt A und eine Gerade g gegeben, so können wir eine zu g orthogonale Faltlinie erzeugen, die durch A verläuft (vgl. Abbildung 7.15 (a)).

(O5) Sind zwei Punkte A, B und eine Gerade g gegeben, so können wir eine Faltlinie erzeugen, die durch B verläuft und A mit einem Punkt $A' \in g$ zur Deckung bringt (vgl. Abbildung 7.15 (b)).

(O6) Sind zwei Punkte A_1, A_2 und zwei Geraden g_1, g_2 gegeben, so können wir eine Faltlinie erzeugen, die A_1 mit einem Punkt $A_1' \in g_1$ und A_2 mit einem Punkt $A_2' \in g_2$ zur Deckung bringt (vgl. Abbildung 7.15 (c)).

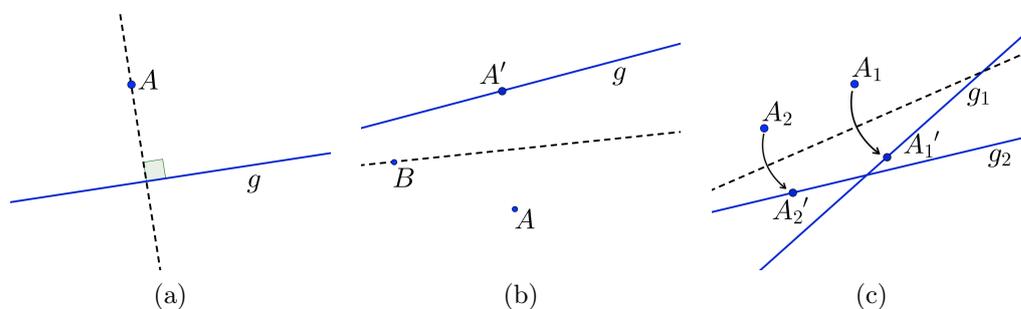


Abb. 7.15: die Huzita-Axiome (O4), (O5) und (O6)

Die Axiome (O5) und (O6) meinen, dass eine solche Faltlinie erzeugt werden kann, sofern sie existiert, was je nach Lage der Punkte und Geraden nicht der Fall sein muss. Des Weiteren ist zu beachten, dass solche Faltlinien nicht eindeutig bestimmt sein müssen.

Das Beloch-Quadrat

Als Vorbereitung einer konstruktiven Lösung kubischer Gleichungen im Huzita-Axiomensystem dient eine Konstruktion, die Hull (2011) zu Ehren von Margarita

Beloch das *Beloch-Quadrat* getauft hat.⁸

Es seien Punkte P_1, P_2 und Geraden g_1, g_2 gegeben. Wir wollen zeigen, dass durch Origami ein Quadrat $WXYZ$ mit folgenden Eigenschaften konstruierbar ist:

1. $X \in g_2$ und $Y \in g_1$,
2. $P_2 \in \overline{WX}$ und $P_1 \in \overline{YZ}$.

Erneut ist gemeint, dass die Konstruktion unter der Voraussetzung möglich ist, dass ein solches Quadrat in der gegebenen Lage existiert. Abbildung 7.16 zeigt eine solche Situation.

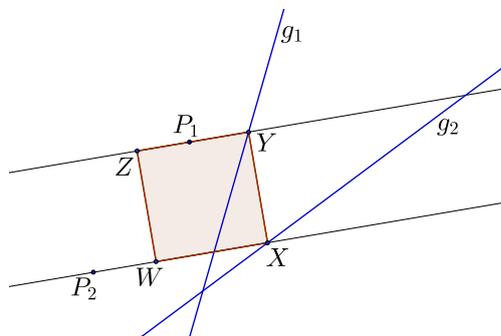


Abb. 7.16: ein Beloch-Quadrat

Die Konstruktion des Quadrats $WXYZ$ gelingt folgendermaßen: Zunächst konstruieren wir eine zu g_1 parallele Gerade g'_1 so, dass $d(g_1, g'_1) = d(g_1, P_1)$ gilt (vgl. Abbildung 7.17).

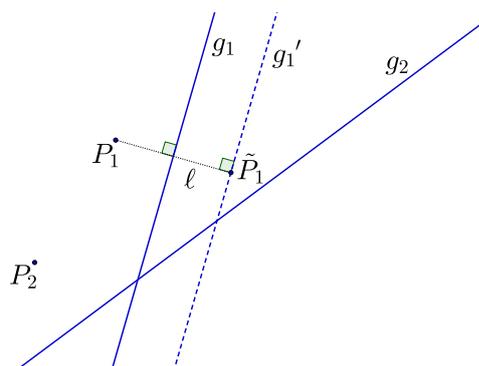


Abb. 7.17: erster Schritt zur Konstruktion eines Beloch-Quadrats

⁸Die Konstruktion ist auch Grundlage für die Lösung weiterer Konstruktionsprobleme, wie etwa der Verdoppelung des Würfels, die im Huzita-Axiomensystem ebenfalls möglich ist, nicht aber mit Zirkel und Lineal. (vgl. Hull (2011), S. 307)

Dies gelingt durch die folgenden Huzita-Grundoperationen: Zunächst können wir gemäß (O4) das Lot ℓ von P_1 auf g_1 falten. Es sei B der Schnittpunkt von ℓ und g_1 . Nun können wir gemäß (O5) mit $g = \ell$ und $A = P_1$ eine Fallgerade durch B erzeugen, um einen weiteren Punkt \tilde{P}_1 auf ℓ zu erhalten. Es gilt offenbar $d(P_1, g_1) = d(g_1, \tilde{P}_1)$. Wir konstruieren noch gemäß (O4) eine zu ℓ orthogonale Falllinie g'_1 durch den Punkt \tilde{P}_1 .

Ebenso konstruieren wir eine zu g_2 parallele Gerade g'_2 , deren Abstand zu g_2 mit $d(P_2, g_2)$ übereinstimmt. Nun erzeugen wir gemäß (O6) eine Falllinie h , die P_1 mit einem Punkt $P'_1 \in g'_1$ und P_2 mit einem Punkt $P'_2 \in g'_2$ zur Deckung bringt (vgl. Abbildung 7.18 (a)). Es sei $X := M_{P_2 P'_2}$ und $Y := M_{P_1 P'_1}$. Nach Konstruktion von P'_1, P'_2 ist h sowohl Mittellot der Punkte P_1 und P'_1 als auch Mittellot der Punkte P_2 und P'_2 , also gilt $X, Y \in h$. Nach Konstruktion von g'_1, g'_2 gilt zudem $X \in g_2$ und $Y \in g_1$. Folglich ist X der Schnittpunkt von h und g_2 und Y der Schnittpunkt von h und g_1 und das über XY errichtete Quadrat $WXYZ$ erfüllt die gewünschten Bedingungen (vgl. Abbildung 7.18 (b)).

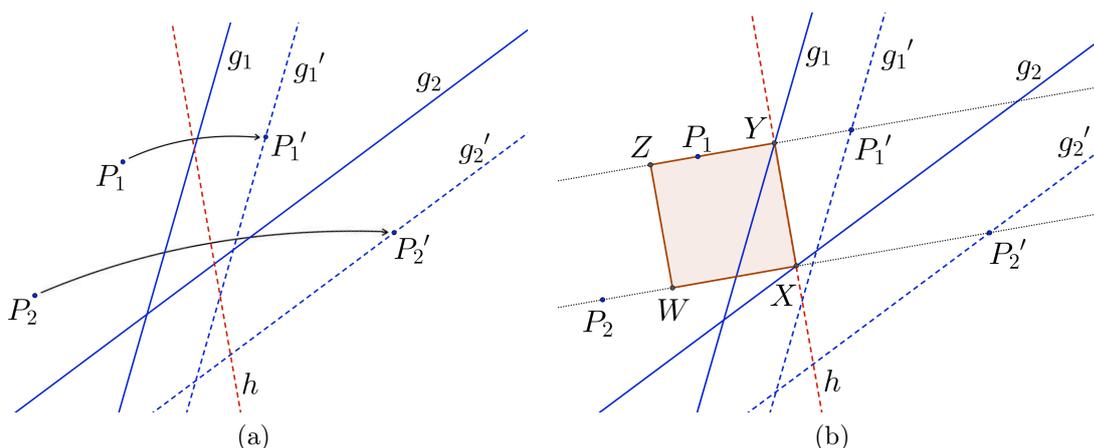


Abb. 7.18: weitere Schritte zur Konstruktion eines Beloch-Quadrats

Das Lösen kubischer Gleichungen

Wir betrachten nun ein Polynom dritten Grades

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

mit $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sowie dessen äußeren Streckenzug $A_0A_1A_2A_3A_4$. Wir wollen nachweisen, dass sich ein innerer Streckenzug $B_0B_1B_2B_3$ mit $B_0 = A_0$ und $B_3 = A_4$ durch Origami konstruieren lässt. Anhand von Abbildung 7.19 (dargestellt sind zwei mögliche Situationen) macht man sich klar, dass die Konstruktion eines Beloch-Quadrats die Lösung liefert: Zu den Punkten $P_1 := A_4$ und $P_2 := A_0$ und den

Geraden $g_1 := \overline{A_2A_3}$ und $g_2 := \overline{A_1A_2}$ können wir durch Falten ein Quadrat $WXYZ$ erzeugen, so dass $X \in g_2$ und $Y \in g_1$ sowie $P_1 \in \overline{YZ}$ und $P_2 \in \overline{WX}$ gilt. Wir wählen nun $B_1 := X$ und $B_2 := Y$ und erhalten so den gewünschten inneren Streckenzug.

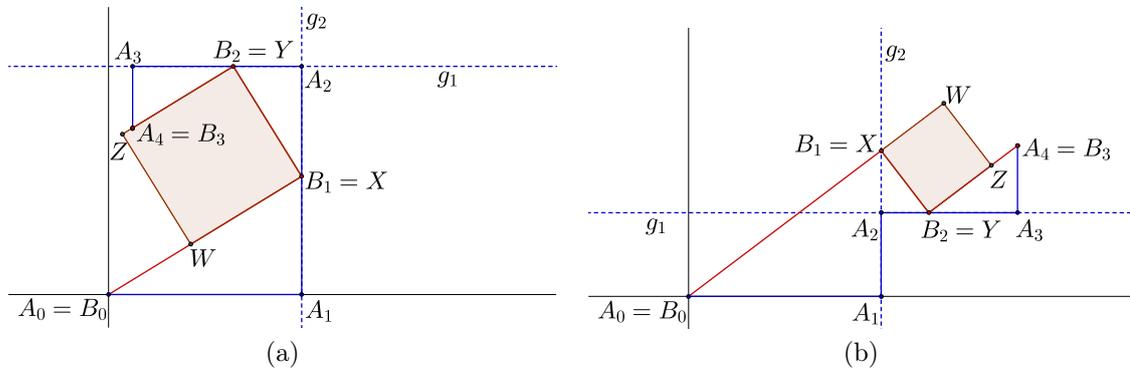


Abb. 7.19: Durch Konstruktion eines Beloch-Quadrats erhält man einen inneren Streckenzug.

Im Rahmen des Huzita-Axiomensystems existiert also eine konstruktive Lösung zu beliebigen kubischen Gleichungen durch Origami. Für einen historischen Hintergrund sowie weitere Konstruktionen durch Papierfalten⁹ konsultiere man Hull (2011) und Lang (2010).

⁹wie z. B. die Konstruktion der Kubikwurzel aus 2

Anhang A

Mathematische Ergänzungen

A.1 Algebraische Ergänzungen

Es folgen einige grundlegende Resultate über Polynome. Wir notieren den Ring der Polynome mit reellen Koeffizienten in der Unbekannten x wie gehabt mit $\mathbb{R}[x]$.

Satz 1.1. (*Faktorisierungssatz*)

Ist $f \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad n und $c \in \mathbb{R}$ ein Nullstelle von f , so existiert ein Polynom $g \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $n - 1$, so dass

$$f(x) = (x - c)g(x)$$

gilt.

Für einen Beweis siehe etwa Stillwell (1994), S. 59. Das folgende Korollar ist klar.

Korollar 1.1. *Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.*

Für eine Anleitung zu den folgenden Sätzen 1.2 und 1.3 sowie zur Definition der Vielfachheit einer Nullstelle siehe Barbeau (1989), S. 67/68.

Satz 1.2. *Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathbb{R}[x]$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}_0$ und ein $g \in \mathbb{R}[x]$, so dass gilt: r ist nicht größer als der Grad von f und*

$$f(x) = (x - c)^r g(x) \quad \text{und} \quad g(c) \neq 0.$$

Bemerkung 1.1. *Der Linearfaktor $x - c$ lässt sich also r -mal von f abspalten und kein weiteres Mal. Die Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ heißt die **Vielfachheit der Nullstelle** c in f . Man beachte: Ist $f(c) \neq 0$, so spricht man von einer Nullstelle der Vielfachheit 0.*

Fassen wir ein Polynom f als Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf, so ist diese beliebig oft differenzierbar. Es bezeichne f' die Ableitung von f und für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$ die k -te Ableitung von f .

Satz 1.3. Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathbb{R}[x]$. Genau dann ist c eine Nullstelle von f mit der Vielfachheit r , wenn gilt

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(r-1)}(c) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(r)}(c) \neq 0.$$

Satz 1.4. (*Fundamentalsatz der Algebra*)

Jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten aus \mathbb{C} hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Für einen Beweis siehe etwa Stillwell (1994), S. 51 ff.

Korollar 1.2. (*Fundamentalsatz der Algebra, reelle Version*)

Jedes Polynom mit Koeffizienten in \mathbb{R} kann als Produkt von Linearfaktoren und quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten ausgedrückt werden.

Der Beweis ist wohlbekannt aber so wunderbar einfach, dass er hier kurz skizziert werden soll. Bemerkenswert ist, dass ein Satz über reelle Zahlen mithilfe der komplexen Zahlen bewiesen wird.

Beweis. Es sei $f \in \mathbb{R}[x]$. Für jedes $z = a + ib \in \mathbb{C}$ bezeichne $\bar{z} = a - ib$ die zu z konjugiert komplexe Zahl. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{und} \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Es folgt $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Daher ist jedes $a \in \mathbb{C}$ genau dann eine Nullstelle von f , wenn \bar{a} eine Nullstelle von f ist. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt f in \mathbb{C} in Linearfaktoren, d. h. es gibt $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = C(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n),$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ der höchste Koeffizient von f ist. Einige der a_i sind reelle Zahlen, so dass die zugehörigen Faktoren $x - a_i$ Linearfaktoren mit reellen Koeffizienten sind. Für jedes $a_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ taucht neben $(x - a_i)$ auch $(x - \bar{a}_i)$ in der Liste der Linearfaktoren auf. Es gilt

$$(x - a_i)(x - \bar{a}_i) = x^2 - (a_i + \bar{a}_i)x + a_i\bar{a}_i.$$

Weil $a_i + \bar{a}_i$ und $a_i\bar{a}_i$ reelle Zahlen sind, handelt es sich um einen quadratischen Faktor mit reellen Koeffizienten und der Beweis ist abgeschlossen. □

Für ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ bezeichne N_f die Menge aller Nullstellen von f , d. h., es sei $N_f := \{x \in \mathbb{C} \mid f(x) = 0\}$.

Satz 1.5. (*Satz von Vieta*)

1. *Für quadratische Gleichungen.*

Es sei $f(x) = x^2 + px + q \in \mathbb{R}[x]$. Dann gilt für alle $u, v \in \mathbb{R}$:

$$N_f = \{u, v\} \iff u + v = -p \quad \text{und} \quad uv = q.$$

2. *Für kubische Gleichungen.*

Es sei $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r \in \mathbb{R}[x]$. Dann gilt für alle $u, v, w \in \mathbb{R}$:

$$N_f = \{u, v, w\} \iff u + v + w = -p \quad \text{und} \quad uv + uw + vw = q \quad \text{und} \quad uvw = -r.$$

Der Satz von Vieta ist weit verbreitet, weshalb wir hier auf einen Beweis verzichten.

A.2 Die Formel von Euler

Wir sprechen von einem *ebenen Graphen*, wenn eine Darstellung ohne sich schneidende Kanten in der Ebene \mathbb{R}^2 vorliegt. Durch eine solche Darstellung wird die Ebene in eine endliche Anzahl von disjunkten Gebieten zerlegt. Eines dieser Gebiete ist unbeschränkt, alle anderen sind beschränkt. Wir nennen diese Gebiete die *Flächen des Graphen*. Für einen eleganten Beweis des berühmten Satzes von Euler ohne vollständige Induktion siehe etwa Aigner/Ziegler (2001).

Satz A.1. (*Formel von Euler für ebene, zusammenhängende Graphen*)

Ist G ein ebener, zusammenhängender Graph mit v Ecken, k Kanten und f Flächen, so gilt

$$v - k + f = 2.$$

Anhang B

Literaturübersicht zum Satz von Pick

Die hohe Anzahl der Veröffentlichungen und verschiedenen Beweise zum Satz von Georg Pick erschweren die Orientierung, wenn man sich für einen bestimmten Aspekt interessiert. Die folgende Übersicht (Tabelle B.1) soll hierzu hilfreich sein. Zur Beschreibung der Beweise werden die einzelnen Beweisschritte stichwortartig angegeben.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Tabelle keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt; nicht im Bezug auf die für die vorliegende Arbeit verwendete Literatur, geschweige denn bezogen auf sämtliche zum Satz von Pick erschienenen Veröffentlichungen. Die Auswahl, der in die Tabelle aufgenommenen Werke, ist auf die inhaltliche Struktur dieser Arbeit abgestimmt.

Die Übersicht ist chronologisch nach dem Jahr des Erscheinens geordnet.

Tab. B.1: Übersicht einiger Veröffentlichungen, in denen der Satz von Pick bewiesen wird.

Quelle	Kurzbeschreibung der Inhalte
Pick (1899)	<p>alle Betrachtungen im Parallelogrammgitter</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Grundversion des Satzes von Pick</i> mit Beweis: <ul style="list-style-type: none"> – Additivität der Pick-Zahl – Pick-Zahl und Flächeninhalt stimmen überein für <ul style="list-style-type: none"> * achsenparallele Paralleleogramme * Dreiecke mit zwei Hauptgitterstrecken als Seiten * beliebige einfache Polygone (enthält die in Abschnitt 2.3.1 beschriebene Ungenauigkeit) • <i>Verallgemeinerte Version des Satzes von Pick</i> (vgl. Abschnitt 2.4) mit Beweis: <ul style="list-style-type: none"> – Invarianz der verallgemeinerten Pick-Zahl gegenüber Zerlegung durch Streckenzüge • <i>Anwendungen in der Zahlentheorie</i>: <ul style="list-style-type: none"> – Darstellung des ggT als Linearkombination – eine Eigenschaft der Fareyfolgen
Reeve (1957)	<ul style="list-style-type: none"> • <i>Verallgemeinerung des Satzes von Pick auf den dreidimensionalen Raum</i> <ul style="list-style-type: none"> – Verwendung von „rationalen Gittern“ zusätzlich zum ganzzahligen Gitter \mathbb{Z}^3 (vgl. Abschnitt 3.7) • Vermutung für Polyeder im vierdimensionalen Raum
Fortsetzung auf der nächsten Seite	

Tab. B.1: Fortsetzung von vorheriger Seite.

Quelle	Kurzbeschreibung der Inhalte
Honsberger (1970)	<p>alle Betrachtungen im kartesischen Gitter</p> <ul style="list-style-type: none"> • Grundversion des Satzes von Pick mit Beweis <ul style="list-style-type: none"> – Primitive Dreiecke besitzen den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$. – Zerlegung eines einfachen Gitterpolygons in primitive Dreiecke und Ermittlung von deren Anzahl • zwei fundamentale Eigenschaften der Farey-Folgen mit Beweis auf Grundlage des Satzes von Pick
DeTemple/ Robertson (1974)	<p>alle Betrachtungen im kartesischen Gitter</p> <ul style="list-style-type: none"> • Äquivalenz der <i>Formel von Euler</i> für ebene, zusammenhängende Graphen und des Satzes von Pick (mit Beweis) • unabhängige Beweise der Formel von Euler und des Satzes von Pick über ein <i>Winkelsummen-Bilanz-Argument</i> • <i>Verallgemeinerung des Satzes von Pick</i> auf Polygone mit polygonalen Löchern (ohne Definition) • <i>händischer Beweis</i> dafür, dass primitive Dreiecke stets die Fläche $\frac{1}{2}$ besitzen (vgl. Abschnitt 3.4)
Fortsetzung auf der nächsten Seite	

Tab. B.1: Fortsetzung von vorheriger Seite.

Quelle	Kurzbeschreibung der Inhalte
Fraedrich (1980)	<p>Betrachtungen überwiegend im kartesischen Gitter</p> <ul style="list-style-type: none"> • Verschiedene Erkenntnisse der <i>Teilbarkeitslehre</i> werden am ebenen Gitter hergeleitet. • Ein Gitterdreieck besitzt genau dann den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$, wenn es primitiv ist (mit Beweis). • ausführliche Beschreibung und Diskussion einer <i>heuristischen Unterrichtsphase</i> zur Findung der Formel von Pick • <i>Grundversion des Satzes von Pick</i> mit Beweis wie bei Pick (1899) (enthält dieselbe Ungenauigkeit) • Beweisskizze einer <i>vollständigen Induktion über die Anzahl der Eckpunkte</i> mit Verweis auf Schumann (1971) für eine ausführlichere Darstellung • Beweis durch <i>vollständige Induktion über die Anzahl der inneren und Randgitterpunkte</i> • Hinweis auf Beweis mithilfe der <i>Graphentheorie</i> <ul style="list-style-type: none"> – Der Satz von Pick ist äquivalent zur <i>Eulerschen Formel für ebene, zusammenhängende Graphen</i> (nicht durchgeführt; Verweis auf DeTemple/Robertson (1974)). • Hinweis auf <i>Reeves Verallgemeinerung</i> auf den dreidimensionalen Raum sowie auf geläufige <i>Verallgemeinerungen bezüglich nicht einfacher Polygone</i> • Hinweise auf die Verwendung bei <i>Grenzprozessen</i> (z. B. Näherung von π) • kurzer Hinweis auf Bezug zu <i>Farey-Folgen</i> • Ermittlung der <i>Lösungszahl von Ungleichungen</i> • viele weitere <i>Anwendungen von Gittern</i> (nicht speziell des Satzes von Pick) in der Elementargeometrie
Fortsetzung auf der nächsten Seite	

Tab. B.1: Fortsetzung von vorheriger Seite.

Quelle	Kurzbeschreibung der Inhalte
Jeger (1982)	<p>alle Betrachtungen im kartesischen Gitter</p> <ul style="list-style-type: none"> • ausführliche Beschreibung und Begründung einer <i>heuristischen Phase</i> zur Findung der Formel von Pick • <i>Grundversion des Satzes von Pick mit Beweis</i> wie bei Ball (2003) • Beweisalternative über primitive Dreiecke mithilfe der Anzahlformel aus Lemma 2.1 <ul style="list-style-type: none"> – Primitive Dreiecke besitzen den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ (mit Beweis). – Beweis der Anzahlformel aus Lemma 2.1 mittels <ul style="list-style-type: none"> * Innenwinkelsumme * <i>Eulerscher Polyederformel</i> (Skizze) * <i>Formel von Euler</i> für ebene, zusammenhängende Graphen • Verallgemeinerung des Satzes von Pick auf <i>h-fach zusammenhängende Polygone</i> • Anwendungsbeispiele aus der Kombinatorik
Fortsetzung auf der nächsten Seite	

Tab. B.1: Fortsetzung von vorheriger Seite.

Quelle	Kurzbeschreibung der Inhalte
Varberg (1985)	<p>alle Betrachtungen im kartesischen Gitter</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Grundversion des Satzes von Pick</i> mit Beweis über <i>alternative Interpretation der Pick-Zahl</i>: <ul style="list-style-type: none"> – Jedem Gitterpunkt eines Polygons wird ein <i>Gewicht</i> (s. Abschnitt 2.3.2) zugewiesen. – Die Summe aller Gewichte stimmt mit dem Flächeninhalt überein. – Die Summe aller Gewichte stimmt aufgrund der Winkelsumme mit der Pick-Zahl überein. • <i>Verallgemeinerte Version des Satzes von Pick</i> unter Verwendung der <i>Euler-Charakteristik</i>
Scott (1987)	<p>alle Betrachtungen im kartesischen Gitter</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Grundversion des Satzes von Pick</i>, Skizze und Kommentierung des Beweises von Coxeter (1981) • Hinweis: Für die Bestimmung der <i>Anzahl der primitiven Dreiecke</i>, in die ein Gitterpolygon zerlegbar ist, kann eine vom Gitter unabhängige Formel verwendet werden. • Für $n \neq 4$ gibt es kein reguläres, konvexes Gitter-n-Eck (mit Beweis). • weitere Betrachtungen zu konvexen und zu nicht einfachen Polygonen • Eine <i>Verallgemeinerung des Satzes von Pick für den dreidimensionalen Raum</i> wird unter Verweis auf Reeve (1957) erläutert.
Fortsetzung auf der nächsten Seite	

Tab. B.1: Fortsetzung von vorheriger Seite.

Quelle	Kurzbeschreibung der Inhalte
Ball (2003)	<p>alle Betrachtungen im kartesischen Gitter</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Grundversion des Satzes von Pick</i> mit Beweis: <ul style="list-style-type: none"> – Additivität der Pick-Zahl – Pick-Zahl und Flächeninhalt stimmen überein für <ul style="list-style-type: none"> * achsenparallele Rechtecke * rechtwinklige Dreiecke mit achsenparallelen Katheten * beliebige Dreiecke * beliebige einfache Polygone • Erläuterung einer <i>alternativen Interpretation der Pick-Zahl</i> unter Hinweis auf Varberg (1985) • Spezialfall der <i>Darstellung von $\text{ggT}(a, b)$ als Linearkombination</i> für den Fall $\text{ggT}(a, b) = 1$
Murty/ Thain (2007)	<p>alle Betrachtungen im kartesischen Gitter</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>Minkowskis Satz</i> über konvexe Körper im \mathbb{R}^n mit Beweis • Jedes primitive Dreieck hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ (Beweis mit Hilfe des Satzes von Minkowski). • <i>Grundversion des Satzes von Pick</i> mit Beweis über Zerlegung in primitive Dreiecke
Blatter (2012)	<p>Die <i>Grundversion des Satzes von Pick</i> wird mittels einer physikalischen Interpretation begründet (vgl. Abschnitt 3.6).</p>

Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen (einschließlich elektronischer Quellen, dem Internet und mündlicher Kommunikation) direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos unter genauer Quellenangabe als solche kenntlich gemacht. Insbesondere habe ich nicht die Hilfe sogenannter Promotionsberaterinnen / Promotionsberater in Anspruch genommen. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar Geld oder geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Michael Schmitz

Dank

Ich möchte mich an erster Stelle bei meiner Frau *Bianca* bedanken, die mir in den vergangenen drei Jahren immer zur Seite stand und sich in dieser intensiven Zeit mit aufopferungsvollem Einsatz um unsere lieben Kinder *Frida*, *Paula* und *Luise* gekümmert hat. Großer Dank gilt auch *meinen Eltern*, die unzählige Male für uns und unsere Kinder da waren, wenn wir Unterstützung brauchten.

Ich bedanke mich aufrichtig bei *Hinrich Lorenzen*, der meine Arbeit intensiv betreut hat und mich in den letzten Jahren im Rahmen vieler Gespräche und weiterer gemeinsamer Aktivitäten rund um die Mathematik inspiriert und meinen Horizont erweitert hat.

Ich bedanke mich bei *Johannes Blauert*, *Jan Christoph Hadenfeldt*, *Stefan Rollnik*, *Alexander Schmitz* und *Malte Wellnitz* für viele bereichernde Gespräche, Anregungen und Korrekturen. Ich danke *Peggy Daume* für das L^AT_EX-Gerüst dieser Arbeit.

Ich danke abschließend der gesamten *Abteilung für Mathematik und ihre Didaktik* am Institut für mathematische, naturwissenschaftliche und technische Bildung der Universität Flensburg für die positive und stets bereichernde Arbeitsatmosphäre.

Literaturverzeichnis

- Aigner, M./Ziegler, G. M. PROOFS FROM THE BOOK. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 2001.
- Arcavi, A./Bruckheimer, M. A VISUAL APPROACH TO SOME ELEMENTARY NUMBER THEORY. The Mathematical Gazette **Vol. 79, No. 486**, 1995, 471 – 478.
- Arcavi, A./Bruckheimer, M. FAREY RABBITS. The Mathematical Gazette **Vol. 84, No. 500**, 2000, 223 – 226.
- Ball, K. STRANGE CURVES, COUNTING RABBITS AND OTHER MATHEMATICAL EXPLORATIONS. Princeton University Press, Princeton, 2003.
- Barbeau, E. J. POLYNOMIALS. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- Barvinok, A. A COURSE IN CONVEXITY. American Mathematical Society, New York, 2002.
- Baum, M./Lorenzen, H./Schmitz, M. LAMBACHER SCHWEIZER 6 NIEDERSACHSEN, MATHEMATIK FÜR GYMNASIEN. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2013.
- Baum, M./Lorenzen, H./Thomsen, O. LAMBACHER SCHWEIZER 7 NIEDERSACHSEN, MATHEMATIK FÜR GYMNASIEN. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 2014.
- Beloch, M. P. SUL METODO DEL RIPIEGAMENTO DELLA CARTA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI GEOMETRICI. Periodico di Matematiche Ser. 4 **16**, 1936, 104 – 108.
- Bixby, W. H. GRAPHICAL METHOD FOR FINDING READILY THE REAL ROOTS OF NUMERICAL EQUATIONS OF ANY DEGREE IF CONTAINING BUT ONE VARIABLE. 1879.
- Blatter, C. DREI SÄTZE ÜBER EBENE POLYGONZÜGE. Bulletin des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP) **119**, 2012, 12 – 19.
- Bourbaki, N. ELEMENTS OF THE HISTORY OF MATHEMATICS. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

- Boyer, C. B./Merzbach, U. C. A HISTORY OF MATHEMATICS. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2. Auflage, 1989.
- Bradford, P. V. VISUALIZING SOLUTIONS TO N-TH DEGREE ALGEBRAIC EQUATIONS USING RIGHT-ANGLE GEOMETRIC PATHS: EXTENDING LILL'S METHOD OF 1867 (WEBPAGE). Zugriff am 15.09.2013 auf <http://www.concentric.net/%7EPvb/ALG/rightpaths.html>, 2013.
- Burton, D. M./Dalkowski, H. HANDBUCH DER ELEMENTAREN ZAHLENTHEORIE. Heldermann Verlag, Lemgo, 2005.
- Cardano, G. THE RULES OF ALGEBRA (ARS MAGNA). Dover Publications Inc., New York, 2007.
- Conway, J./Guy, R. THE BOOK OF NUMBERS. Springer-Verlag, New York, 1996.
- Coxeter, H. S. M. UNVERGÄNGLICHE GEOMETRIE. Birkhäuser, Stuttgart, 2. Auflage, 1981.
- DeTemple, D./Robertson, J. M. THE EQUIVALENCE OF EULER'S AND PICK'S THEOREMS. The Mathematics Teacher **Vol. 67, No. 3**, 1974, 222 – 226.
- DeTemple, D. W. CARLYLE CIRCLES AND THE LEMOINE SIMPLICITY OF POLYGON CONSTRUCTIONS. The American Mathematical Monthly **Vol. 98, No. 2**, 1991, 97 – 108.
- Dieudonné, J. GESCHICHTE DER MATHEMATIK. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 1985.
- Dittmann, H. ALGEBRAISCHE STRUKTUREN UND GLEICHUNGEN. Bayerischer Schulbuchverlag, München, 3. Auflage, 1967.
- Elstrod, J. MASS- UND INTERGATIONSTHEORIE. Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 2005.
- Engel, A. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK, BAND 1. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1973.
- Engel, J. KOMPLEXE ZAHLEN UND EBENE GEOMETRIE. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2. Auflage, 2011.
- Ford, L. R. FRACTIONS. The American Mathematical Monthly **Vol. 45, No. 9**, 1938, 586 – 601.
- Fraedrich, A. M. MATHEMATISCHE AKTIVITÄTEN AM EBENEN GITTER. Der Mathematikunterricht **Heft 3**, 1980, 5 – 59.
- Freudenthal, H. WAS IST AXIOMATIK UND WELCHEN BILDUNGSWERT KANN SIE HABEN? Der Mathematikunterricht **Heft 4**, 1963, 5 – 29.

- Fritsch, R. GEORG PICK UND LUDWIG BERWALD – ZWEI MATHEMATIKER AN DER DEUTSCHEN UNIVERSITÄT PRAG. ANSÄTZE ZU BIOGRAPHISCHEN WÜRDIGUNGEN. Forschungsbeiträge der Naturwissenschaftlichen Klasse (Schriften der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste) **22**, 2001, 1 – 8.
- Fuchs, D./Tabachnikov, S. EIN SCHAUBILD DER MATHEMATIK; 30 VORLESUNGEN ÜBER KLASSISCHE MATHEMATIK. Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 2011.
- Gindikin, S. TALES OF MATHEMATICIANS AND PHYSICISTS. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 2007.
- Hardy, G. H./Wright, E. M. EINFÜHRUNG IN DIE ZAHLENTHEORIE. Oldenbourg Verlag, München, 1958.
- Heath, T. L. THE THIRTEEN BOOKS OF EUCLID'S ELEMENTS, VOL. I. Dover Publications, New York, 2. Auflage, 1956.
- Hilbert, D. GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE. B. G. Teubner, Stuttgart, 12. Auflage, 1977.
- Honsberger, R. INGENUITY IN MATHEMATICS. Mathematical Association of America, New York, 1970.
- Hull, T. C. SOLVING CUBICS WITH CREASES: THE WORK OF BELOCH AND LILL. The American Mathematical Monthly **Vol. 118, No. 4**, 2011, 307 – 315.
- Huszkak, S. INTERNETSEITE DES ENRICHMENT-PROGRAMMS SCHLESWIG-HOLSTEIN. Zugriff am 19.03.2014 auf www.enrichment.lernnetz.de/content/index.php, 2014.
- Jeger, M. DIE FORMEL VON PICK UND IHR ELEMENTAR-MATHEMATISCHES UMFELD. Didaktik der Mathematik **10**, 1982, 1 – 24.
- Kalman, D. UNCOMMON MATHEMATICAL EXCURSIONS: POLYNOMIA AND RELATED REALMS. The Mathematical Association of America, New York, 2009.
- Kalman, D. UNCOMMON MATHEMATICAL EXCURSIONS: SUPPLEMENTARY RESOURCES (WEBPAGE). Zugriff am 25.09.2013 auf <http://www.dankalman.net/ume/>, 2013.
- Katz, V. J. A HISTORY OF MATHEMATICS. Addison-Wesley, München, 3. Auflage, 2009.
- Kidalla, V./Paasche, I. EINE GEMEINSAME METHODE ZUR AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN 2. BIS 4. GRADES. Praxis der Mathematik **2**, 1966, 198 – 300.
- Knopp, K. THEORY OF FUNCTIONS I. Dover Books on Mathematics, New York, 1945.

- Kultusministerkonferenz. EINHEITLICHE PRÜFUNGSANFORDERUNGEN IN DER ABITURPRÜFUNG MATHEMATIK. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.1989 i. d. F. vom 24.05.2002, 2002.
- Lang, R. J. ORIGAMI AND GEOMETRIC CONSTRUCTIONS. Zugriff am 12.03.2014 auf http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf, 2010.
- Lang, S. UNDERGRADUATE ALGEBRA. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- Leßner, G. MENGENTHEORETISCHE TOPOLOGIE. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- Lill, M. E. RÉOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES DE TOUS LES DEGRÉS À UNE SEULE INCONNUE, ET DESCRIPTION D'UN INSTRUMENT INVENTÉ DANS CE BUT. Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris **Deuxième Série, Tome Sixième**, 1867, 359 – 362.
- Lorenzen, H./Schmitz, M. INTERNETSEITE DER SCHÜLERAKADEMIE MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT FLENSBURG. Zugriff am 12.03.2014 auf www.uni-flensburg.de/mathematik/schuelerakademie/, 2014.
- Macdonald, I. G. THE VOLUME OF A LATTICE POLYHEDRON. Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society **59**, 1963, 719 – 726.
- Mason, J./Burton, L./Stacey, K. MATHEMATISCH DENKEN. Oldenbourg Verlag, München, 4. Auflage, 2006.
- Ministerium für Bildung und Wissenschaft des Landes Schleswig-Holstein. FACHANFORDERUNGEN MATHEMATIK, GYMNASIUM SEK. I, 2012.
- Murty, M. R./Thain, N. PICK'S THEOREM VIA MINKOWSKI'S THEOREM. The American Mathematical Monthly **Vol. 114, No. 8**, 2007, 732 – 736.
- Padberg, F. ZAHLENTHEORIE UND ARITHMETIK. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1999.
- Padberg, F. DIDAKTIK DER BRUCHRECHNUNG. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 3. Auflage, 2002.
- Padberg, F. EINFÜHRUNG IN DIE MATHEMATIK I. ARITHMETIK. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2007.
- Padberg, F./Danckwerts, R./Stein, M. ZAHLBEREICHE. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.
- Pick, G. GEOMETRISCHES ZUR ZAHLENLEHRE. Sitzungsberichte des Deutschen Naturwissenschaftlich-Medizinischen Vereines für Böhmen „Lotos“ in Prag, 1899, 311 – 319.

- Pólya, G. SCHULE DES DENKENS. VOM LÖSEN MATHEMATISCHER PROBLEME. Francke Verlag, Tübingen, Sonderausgabe der 4. Auflage, 2010.
- Reeve, J. E. ON THE VOLUME OF LATTICE POLYHEDRA. Proceedings of the London Mathematical Society **7**, 1957, 378 – 395.
- Reichel, H.-C. HAT DIE STOFFDIDAKTIK ZUKUNFT? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **27**, Heft **6**, 1995, 178 – 187.
- Riaz, M. GEOMETRIC SOLUTIONS OF ALGEBRAIC EQUATIONS. The American Mathematical Monthly **Vol. 69**, No. **7**, 1962, 654 – 658.
- Scholz, E. (Hrsg.). GESCHICHTE DER ALGEBRA. EINE EINFÜHRUNG. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990.
- Schumann, H. ÜBER DEN FLÄCHENINHALT VON GITTERPOLYGONEN. MNU **24**, 1971, 147 – 151.
- Schwarz, W. HEURISTISCHE STRATEGIEN DES PROBLEMLÖSENS: EINE FACHMETHODISCHE SYSTEMATIK FÜR DIE MATHEMATIK. WTM-Verlag, Münster, 2006.
- Scott, P. R. THE FASCINATION OF THE ELEMENTARY. The American Mathematical Monthly **Vol. 94**, No. **8**, 1987, 759 – 768.
- Stillwell, J. ELEMENTS OF ALGEBRA. GEOMETRY, NUMBERS, EQUATIONS. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- Varberg, D. E. PICK'S THEOREM REVISITED. The American Mathematical Monthly **Vol. 92**, No. **8**, 1985, 584 – 587.
- Vollrath, H.-J./Weigand, H.-G. ALGEBRA IN DER SEKUNDARSTUFE. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 3. Auflage, 2007.
- von Grudzinski, O./Schnabel, R. MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN. unveröffentlicht: Skriptum aus dem Wintersemester 2002/2003 an der CAU Kiel, 2002.
- von Querenburg, B. ELEMENTE DER TOPOLOGIE UND GRAPHENTHEORIE. Verlag Herder, Freiburg, 3. Auflage, 1980.
- Wittmann, E. C. GRUNDFRAGEN DES MATHEMATIKUNTERRICHTS. Vieweg, Braunschweig, 1981.
- Wittmann, E. C. STRUKTURGENETISCHE DIDAKTISCHE ANALYSEN – DIE EMPIRISCHE FORSCHUNG ERSTER ART. Beiträge zum Mathematikunterricht **Band 2**, 2013, 1094 – 1097.
- Wright, J. D. M. SOME PROPERTIES OF THE FAREY SERIES. The American Mathematical Monthly **Vol. 75**, No. **7**, 1968, 753 – 754.