

Das pragmatische Konzept für den Bruchrechnenunterricht

Ein neues didaktisches Konzept für den Bruchrechnenunterricht in der Sekundarstufe I, das anders als die bisher dominierenden Konzepte nicht auf der konkreten Ebene, sondern im Formalen ansetzt.

Ausgehend von dem Wunsch, jeden Quotienten zweier natürlicher Zahlen wieder als Zahl zu akzeptieren, wird der Zahlbereich erweitert. Alle Rechenregeln für diese Zahlen können in einer Teilmenge, nämlich in der Menge der natürlichen Zahlen, gewonnen und per Permanenzprinzip auf den neuen Zahlbereich übertragen werden.

Außerdem wird ein neuer, multiplikativer Algorithmus für die Entwicklung der Perioden „unendlicher Dezimalbrüche“ vorgestellt.

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Philosophie am
Institut für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Flensburg

vorgelegt im November 2009 von

Stefan Rollnik,

geb. am 2. 5. 1968, Kiel

Gutachter:

Prof. Dr. Eugen Peter Bauhoff, Institut für Mathematik und ihre Didaktik,
Universität Flensburg

Prof. Dr. Ulrich Spengler, Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts-
Universität zu Kiel

Hiermit versichere ich, dass die Arbeit selbstständig angefertigt wurde, die benutzten Hilfsmittel vollständig angegeben wurden und sämtliche dem Wortlaut oder dem Inhalt nach aus anderen Schriften übernommenen Stellen unter genauer Quellenangabe als solche kenntlich gemacht sind.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	6
2	Der Sinn des Bruchrechnenunterrichts in der Sekundarstufe 1	10
3	Die Ausgangslage	20
3.1	Die Darstellung der Bruchrechnung in Lernmedien	20
3.2	Weitverbreitete Fehlvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern vor Beginn des Bruchrechnenunterrichts	32
3.3	Falsche Vorstellungen, die durch den Bruchrechnenunterricht entstehen können	54
3.4	Begriffe und Pseudobegriffe im Bruchrechnenunterricht	60
4	Anforderungen an ein Konzept für den Bruchrechnenunterricht und Fragenkatalog zur Beurteilung von Konzepten	73
5	Innermathematische Konzepte	74
5.1	Die Konstruktion des Halbkörpers $(\mathbb{Q}_{\geq 0}, +, \cdot)$ mit der Ordnung $\leq$ aus dem geordneten kommutativen Halbring $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ oder die „Bottom- up-Methode“	74
5.2	Die Brüche aus der Perspektive der reellen Zahlen oder die „Top- down-Methode“	87
6	Bisherige didaktische Konzepte für den Bruchrechnenunterricht in der Sekundarstufe 1	90
6.1	Das Größenkonzept	91
6.2	Das Operatorkonzept	106
6.3	Das gemischte Konzept	116
6.4	Das Gleichungskonzept	118
7	Das pragmatische Konzept	125
7.1	Vorbemerkung	125
7.2	Notwendige Vorkenntnisse	128
7.3	Begründung der Vorgehensweise „vom Abstrakten zum Konkreten“	129
7.3.1	Ist Piagets Modell der entwicklungspsychologischen Stadien noch zeitgemäß?	133
7.3.1.1	Fehler in Piagets Methodik	133
7.3.1.2	Sozio-kulturelle Einflüsse auf die kognitive Entwicklung von Kindern	137

	und Jugendlichen	
7.3.1.3	Mögliche Effekte der informationstechnischen Gesellschaft	150
7.3.2	Entstehen von Fehlvorstellungen durch einen Einstieg auf der konkreten Ebene	163
7.3.3	Unmöglichkeit einer Einführung der negativen Zahlen auf der konkreten Ebene im Folgeschuljahr	166
7.3.4	Scheitern aller bisherigen didaktischen Konzepte	166
7.4	Beschreibung und Auswertung des Konzeptes anhand des Fragenkatalogs	167
7.5	Konkretisierung	197
8	Kommadarstellung von Brüchen	219
8.1	Ein multiplikativer Algorithmus zum Finden der Kommadarstellung von Brüchen	234
9	Zur Erprobung des Konzepts im Unterricht	249
9.1	Äußere Hindernisse und Schwierigkeiten	249
9.2	Grundvoraussetzungen	253
9.3	Erfahrungsbericht über die Erprobung des Konzepts	255
10	Fazit	295
 Anhang		
Literatur		297
Liste der inspizierten Schulbücher		302
Links zu zitierten Internetseiten		303

1 Vorwort

Die Bruchrechnung nimmt eine zentrale Stellung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1 ein. Dafür gibt es bekanntlich gute Argumente und deswegen soll darauf hier nur kurz eingegangen werden. Die Einführung der Brüche in Klassenstufe 6 ist die erste Zahlbereichserweiterung, die zu einem neuen algebraischen Gebilde führt, nämlich einem Ring. Während die aus der Grundschule bekannte Menge der natürlichen Zahlen sowohl mit der Addition als auch mit der Multiplikation als Verknüpfung jeweils eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element bildet, bildet die Menge der positiven Brüche mit der Multiplikation eine kommutative Gruppe. Anders gesagt, besteht der Gewinn der Zahlbereichserweiterung darin, dass nun jede Division außer durch 0 möglich ist, während man zuvor viele Divisionen gar nicht durchführen konnte, beziehungsweise erkennen musste, dass sie nicht ohne Rest durchgeführt werden können. Im folgenden Schuljahr wird dieser Zahlbereich üblicherweise mit der Einführung der negativen Zahlen zu einem anderen algebraischen Gebilde, dem Körper der rationalen Zahlen, erweitert, in dem sogar alle Grundrechenarten ohne Einschränkung möglich sind.

Die Brüche sind das Fundament für den gesamten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe. Sie werden in der Klassenstufe 6 eingeführt. In den Folgejahren gibt es zahlreiche Inhalte, für deren Verständnis und Bearbeitung die Fähigkeit zur Bruchrechnung nötig oder mindestens nützlich ist. Ab Klassenstufe 7 werden proportionale und antiproportionale Zuordnungen als Unterrichtsgegenstand behandelt. Sie werden meist an Sachproblemen erklärt, die dann mit dem sogenannten Dreisatz gelöst werden, der meist aus einer Verkettung einer Multiplikation mit einer Division in beliebiger Reihenfolge besteht. Jede dieser Verkettungen kann durch eine Multiplikation oder Division mit einem Bruch ersetzt werden.

Eine ebenfalls sehr große Bedeutung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1 nimmt die Prozentrechnung ein. Prozentrechnung aber ist nichts anderes als das Rechnen mit Hundertstel - Brüchen, denn das Wort „Prozent“ ist ein Synonym für das Wort „Hundertstel“. Ein weiteres Thema, das ohne Brüche nicht auskommt, ist die in den Lehrplänen vorgesehene Zins- und

Zinseszinsrechnung, denn diese ist zunächst eine spezielle und später eine erweiterte Prozentrechnung und somit schon wieder Bruchrechnung.

Gleichungslehre ist ohne Bruchrechnung nicht möglich und die Behandlung der Gleichungslehre ist als algebraische Grundlage unerlässlich.

Ebenso kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht ohne Brüche auskommen. Schon die Definition des Begriffs „Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses“ kommt nicht ohne einen Bruch aus. Denn diese Wahrscheinlichkeit wird definiert als Quotient aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen Ausgänge und der Anzahl aller möglichen Ausgänge. Die Wahrscheinlichkeit ist also ein Verhältnis von Anzahlen. Immer wenn es um Verhältnisse von Anzahlen geht, braucht man Brüche. Einige schulrelevante Beispiele dafür sind der Maßstab, die zentrische Streckung und der Strahlensatz.

Auch später, wenn längst schon die irrationalen Zahlen eingeführt wurden, benötigt man die Brüche. Wurzelrechnung ist nichts anderes als Potenzrechnung mit rationalen Exponenten.

Die trigonometrischen Funktionen werden als Abbildungen von reellen Zahlen auf Verhältnisse von Seitenlängen am rechtwinkligen Dreieck eingeführt. Diese Verhältnisse sind zwar meist irrational, werden aber als Quotienten üblicherweise in Bruchschreibweise notiert. In der Schule wird mit diesen reellen Quotienten so umgegangen, wie man es vorher im Bruchrechnenunterricht bei den rationalen Zahlen gelernt hat. Warum dies überhaupt zulässig ist, wird in den Schulbüchern gewöhnlich nicht diskutiert.

Fazit: Die Notwendigkeit des Bruchrechnenunterrichts ist offensichtlich. Die genannten Argumente werden später noch ausführlich beschrieben. (vgl. 2)

Dass der Bruchrechnenunterricht sich keinesfalls auf die Kommandarstellung der Brüche beschränken darf, sondern unbedingt eine ausführliche Behandlung der Bruchschreibweise beinhalten muss, zeigt schon die Tatsache, dass man sich beim Umformen von Gleichungen, bei jeder Art von Verhältnissen und im Bereich der reellen Zahlen gerne der Bruchschreibweise bedient. Dieses geschieht nicht aus Tradition, sondern weil diese Schreibweise allen anderen bezüglich der Übersichtlichkeit deutlich überlegen ist. Da also die Bruchrechnung das zentrale Thema im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1 ist, lohnt es sich, über die Didaktik der Bruchrechnung nachzudenken.

Im Folgenden werde ich zwei innermathematische Konzepte beschreiben. Bei der „Bottom-up“-Methode werden die Brüche innermathematisch aus der Menge der natürlichen Zahlen konstruiert. Bei der „Top-down“-Methode wird mit Kenntnis der reellen Zahlen ein Blick auf die Brüche geworfen, der sehr aufschlussreich ist. Diese beiden innermathematischen Konzepte sind für Lehrerinnen und Lehrer wichtig, um die Bruchrechnung auf der fachlichen Ebene durchdringen und ihre Hintergründe klären zu können. Sie sind aber aus verschiedenen Gründen als Konzepte für den Unterricht in der Sekundarstufe 1 nicht geeignet. Denn sie verlangen einerseits ein zu hohes Abstraktionsniveau und setzen andererseits Kenntnisse voraus, die erst weit nach der Bruchrechnung vermittelt werden.

Auf der fachlichen Grundlage dieser innermathematischen Konzepte sind also didaktische Konzepte nötig, die zur Planung des Unterrichts geeignet sind. Seit den 70er Jahren werden verschiedene Konzepte in der fachdidaktischen Literatur vorgestellt, propagiert und anschließend in den Schulbüchern und in der Praxis umgesetzt. Diese didaktischen Konzepte, die seit mehr als 30 Jahren dem Mathematikunterricht zugrunde liegen, werde ich beschreiben, ihre Vor- und Nachteile abwägen und einige Beispiele aus Lehrwerken anführen und kritisch beleuchten.

Zwar waren die Brüche schon vor mehr als 4000 Jahren in den antiken Hochkulturen der Babylonier und Ägypter bekannt; sie sind aber keineswegs trivial, was auch schon Goethe wusste, der seinen Mephistopheles in der Hexenküche sagen lässt: „Und merk dir ein für alle mal den wichtigsten von allen Sprüchen: Es liegt dir kein Geheimnis in der Zahl, allein ein großes in den Brüchen.“¹ Heute, mehr als 200 Jahre nachdem der Faust veröffentlicht wurde, ist die Bruchrechnung in der Sekundarstufe 1 immer noch ein Problembereich im Mathematikunterricht. Sie ist ein Dauerthema der fachdidaktischen Diskussion. Eine gemeinsame Eigenschaft all dieser didaktischen Konzepte nehme ich hier vorweg: Sie sind alle gescheitert.

Daher werde ich im Anschluss an meine Analyse ein neues von mir entwickeltes und erprobtes Konzept vorstellen. Dabei ist es unerlässlich auf die Vorkenntnisse einzugehen, die für die Arbeit nach diesem Konzept von den

¹ Goethe, J. W.: Faust, Paralipomena 22

Schülerinnen und Schülern mitgebracht werden müssen. Ebenso wichtig erscheint es mir dabei, neben den speziell für die Bruchrechnung notwendigen Fähigkeiten auch auf einige weitverbreitete Fehlvorstellungen einzugehen, die Schülerinnen und Schüler häufig im Grundschulunterricht erwerben und die möglicherweise bei der Einführung der Bruchrechnung, aber vielleicht auch später, das Verständnis erschweren. Außerdem wird auf Schwierigkeiten eingegangen, die üblicherweise erst durch die Art und Weise des Bruchrechnenunterrichts nach den bisherigen Konzepten verursacht werden. Insbesondere wird dabei Augenmerk auf die Begriffe und Pseudobegriffe gelegt, die meist im Rahmen des Bruchrechnenunterrichts auftauchen, um zu prüfen, welche von ihnen nötig und welche unnötig oder sogar irreführend oder verwirrend und damit gefährlich sind.

Außerdem wird gezeigt, dass einige der bisher typischen Fehler, die Schülerinnen und Schüler bisher bei der Bruchrechnung machten, im neuen Konzept kaum noch gemacht werden, weil diese Fehler durch den Zugang im Konkreten gefördert werden, nicht jedoch durch einen formalen Zugang.

Im Abschnitt, der das Rechnen in der Kommadarstellung behandelt, wird ein von mir entwickelter, bisher nicht veröffentlichter Algorithmus zur multiplikativen Dezimalbruchentwicklung periodischer Brüche vorgestellt, der manche Rechnung deutlich vereinfacht. Im Anschluss an die Vorstellung des Konzepts folgt eine Beschreibung der Erprobung des Konzepts in einer 6. Klasse mit vorausgehender Beschreibung der geleisteten Vorarbeiten und anschließender Analyse der Stärken und Schwächen meines Konzepts.

2 Der Sinn des Bruchrechnenunterrichts in der Sekundarstufe 1

Der Frage, welchen Sinn der Bruchrechnenunterricht heute noch hat, soll nicht ausgewichen werden. Es wäre sicher nicht überzeugend, als Argument für den Bruchrechnenunterricht nur den entsprechenden Auftrag in den Lehrplänen anzuführen.

Klar ist, dass die Bruchrechnung anspruchsvoll ist und dass die Zahlbereichserweiterung über die natürlichen Zahlen hinaus Schwierigkeiten mit sich bringt.

Wartha² sieht die Bruchrechnung seit jeher nicht nur von einer großen Fehleranfälligkeit gekennzeichnet, sondern meint auch, sie stelle für viele Schülerinnen und Schüler eine Verständnishürde dar.

Schon Zech räumt eine lange bekannte besondere Problematik des Bruchrechnenunterrichts in Klassenstufe 6 ein, die den „Mathematiklehrern, die sie zu unterrichten haben, oft schmerzlich bewusst“³ sei. Als Ursachen dafür nennt er neben der zu geringen Dauer der dafür vorgesehenen Einführungszeit und dem noch sehr jungen Alter der Schülerinnen und Schüler den umfangreichen Stoffkanon der Bruchrechnung. Außerdem sei die Bruchrechnung fachlich sehr komplex.

Er fordert daher „eine starke Konzentration der Bruchrechnung auf das, was die Schüler in Alltag und Schule tatsächlich brauchen:

- weitgehende Beschränkung auf einfache gewöhnliche Brüche
- weitgehender Verzicht auf das Rechnen mit Brüchen für lernschwache Schüler
- Betonung der Dezimalbruchrechnung
- frühzeitiger Einsatz des Taschenrechners bei schwierigen Rechnungen“⁴.

Es wird an dieser Stelle nicht diskutiert, ob das grundsätzliche Vermeiden schwieriger Unterrichtsinhalte nicht einen Niveauverlust zur Folge hat. Es ist

² Wartha (2007: 23)

³ Zech (1995: 138 ff.)

⁴ Zech (1995: 140)

klar, dass das Thema Bruchrechnung Anstrengung sowohl von Seite der Lehrperson als auch von Seite der Lernenden erfordert. Wenn diese Anstrengung geleistet wird, dann ist dieses Thema aber auch zu bewältigen. Es kann also nicht darum gehen, diesen Unterrichtsinhalt wegzulassen, nur weil er vielleicht unbequem ist. Stattdessen ist es wichtig, sich mit der Frage zu beschäftigen, wie man fachdidaktisch und auch methodisch den Bruchrechnenunterricht so verbessern kann, dass er von den Lernenden gut verstanden wird und seine Inhalte so verinnerlicht werden, dass die Lernenden auch Jahre später noch mit Brüchen umgehen können. Zum Thema ‚schwierige Rechnungen‘ ist zu entgegnen, dass, wenn man die Bruchregeln verstanden hat, der Schwierigkeitsgrad der Rechnungen mit Brüchen eng mit den Schwierigkeiten bei den Grundrechenarten im Bereich der natürlichen Zahlen zusammenhängt, doch dazu später mehr. Zunächst soll geklärt werden, welche Bedeutung die Bruchrechnung für den Mathematikunterricht hat.

Auch Padberg⁵ geht dieser Frage nach und stellt dabei fest, dass das Thema Bruchrechnung in den meisten Schulbüchern in zwei Bereiche unterteilt wird, von denen sich der erste, umfangreichere Teil mit den „gemeinen Brüchen“ befasst und der zweite, wesentlich kürzere Teil sich den „Dezimalbrüchen“ widmet. Die „Dezimalbrüche“ seien alltagsrelevant und deswegen wichtig, die Bedeutung der „gemeinen Brüche“ sei dagegen nicht offensichtlich.

Genau sagt Padberg, dass „der Sinn und Nutzen der *Dezimalbruchrechnung* wegen ihrer Relevanz für das tägliche Leben wie für den Beruf unbestritten“ sei, „während über den Sinn und Nutzen der *gemeinen Brüche* durchaus kontrovers diskutiert wird.“

Außerdem hat Padberg „einige Argumente gegen die Bruchrechnung mit gemeinen Brüchen“ zusammengetragen, die wiedergeben, wie die Bruchrechnung von vielen Mitmenschen eingeschätzt wird. Dabei handelt es sich stichwortartig um:

- Irrelevanz für das tägliche Leben
- Relikt aus längst vergangenen Zeiten
- Bequeme Spielwiese für Lehrer

⁵ Padberg (2002: 5 - 16)

- Mehr Zeit für Dezimalbrüche
- Zwei Schreibweisen für Bruchzahlen
- Gemeine Brüche - nur ein Selektionsinstrument

Eine typische Reaktion sei, dass man im privaten wie im beruflichen Leben sehr gut mit nur ganz wenigen einfachen Brüchen auskomme. Die „Dezimalbrüche“ seien schon vor Jahrhunderten zur Vereinfachung geschaffen worden, sie seien viel effizienter als die „gemeinen Brüche“, also solle man diese benutzen. Es rechne schließlich auch niemand mehr in der römischen Zahlschrift. Es wird argumentiert, man unterrichte das Rechnen mit „gemeinen Brüchen“ nur wegen der Bequemlichkeit der Lehrer so ausführlich. Und zwar sei die Bruchrechnung deswegen so bequem, weil die Lehrer auf einen sehr großen Vorrat an Aufgaben zurückgreifen könnten. Außerdem wird argumentiert, wir bräuchten im täglichen Leben keine „gemeinen Brüche“, sondern nur „Dezimalbrüche“. Statt die „Dezimalbrüche“ gründlich zu behandeln, werde zu viel Zeit mit „gemeinen Brüchen“ verschwendet. Ferner sei es ein Luxus, sich für die Bruchzahlen zwei verschiedene Schreibweisen zu leisten. So etwas gebe es weder bei den natürlichen, den ganzen noch bei den reellen Zahlen.

Als letztes Argument führt er an, die Bruchrechnung diene nur als Selektionsinstrument in der Schule und auch später bei Eignungstests.

Dem ist entgegenzusetzen, dass man den größten Teil der Unterrichtsinhalte aller Fächer wegen fehlender Alltagsrelevanz kritisieren könnte. Zumindest könnte man das dann, wenn die Alltagsrelevanz das einzige Kriterium wäre, das darüber entscheidet, was Unterrichtsinhalt wird. Das Maß an Bildung, das man benötigt, um irgendwie zu leben oder zu überleben, ist nicht sehr hoch. Vermutlich reicht in den meisten Alltagssituationen Grundschulwissen. Wo im Alltag braucht man trigonometrische Funktionen, Konjunktiv II, Hochsprung, Wissen über Vererbungslehre, die lateinische Sprache oder Goethes Faust? Es steht außer Zweifel, dass man ohne all dieses leben kann. Wenn man konsequent den Alltagsbezug der Inhalte für die Aufnahme in die Lehrpläne voraussetzt, dann bleibt nicht mehr viel von dem übrig, was bisher Inhalt der schulischen Bildung war.

Leider wird oft auf sehr krampfhaft Weise versucht einen Alltagsbezug herzustellen und auch noch argumentiert, der Alltagsbezug wirke motivierend, weil die Aufgaben dann interessanter seien. Die Erfahrung zeigt aber, dass Probleme, deren Alltagsbezug von Schülerinnen und Schülern sehr leicht als künstlich hergestellt durchschaut wird, oft viel weniger Ernst genommen werden als solche, die gar keinen Alltagsbezug haben. Also sollte man besser nicht unreflektiert auf den motivierenden Effekt scheinbar interessanter Alltagsbezüge setzen. Stattdessen wäre es doch viel mehr erstrebenswert den Lernenden die Erfahrung zu vermitteln, dass die Beschäftigung mit einer Sache an sich schon sinnvoll sein kann und dass viele Dinge erst dann interessant werden, wenn man sich intensiv mit ihnen beschäftigt.

Somit ist die Frage nach der Alltagsrelevanz aus zwei Gründen nicht nachvollziehbar. Einerseits erfordert nämlich der Anspruch an die höhere Bildung mehr als die Beschäftigung mit alltagsrelevanten Themen und täglich anwendbaren Methoden. Andererseits kann es darüber hinaus doch auch als sehr positiv angesehen werden, dass man sich mit Problemen beschäftigen darf, die keinen Alltagsbezug haben. In vielen Schulfächern ist der Alltags- und Realitätsbezug sehr groß. Dabei geht es oft um unangenehme Themen wie Kriege, Drogen, Umweltkatastrophen, Krankheit, Tod etc. Warum sollte man nicht im Mathematikunterricht den Vorteil nutzen, dass man Mathematik auch ohne Bezug zu Alltagsproblemen betreiben kann. Dadurch ist es ja niemandem versagt, tatsächlich im Alltag auftretende Probleme, falls möglich, mithilfe mathematischer Hilfsmittel zu lösen. Der ewig wiederkehrende Schrei nach Alltagsbezug sollte endlich abgelöst werden von der Verbreitung der Einsicht, dass es Dinge gibt, mit denen man sich beschäftigen darf, nicht weil man diese Dinge so dringend für die Anwendung im Alltag benötigt, sondern weil man sich durch die Beschäftigung mit diesen Dingen weiter entwickelt.

So geht es auch bei der Bruchrechnung nicht nur um die materiale Bildung, das heißt, nicht nur um das Lernen der Inhalte selbst, sondern ein wesentliches Argument für die Bruchrechnung ist die formale Bildung, hier insbesondere die Bildung der methodischen und der funktionalen Fähigkeiten.

Analog zur Fragestellung nach dem Sinn des Bruchrechnenunterrichts im Mathematikunterricht wie nach dem Sinn vieler anderer Unterrichtsinhalte,

deren Alltagsrelevanz sich einem nicht sofort offenbart, könnte man ebenso nach dem Sinn bestimmter Sportübungen fragen.

Im Sportunterricht muss man laufen und springen, obwohl die Alltagsrelevanz dieser Disziplinen ebenfalls nicht gegeben ist, denn Situationen, in denen man schnell laufen können muss, um einem Raubtier zu entkommen, oder in denen man weit springen können muss, um irgendeine Klippe zu überspringen, kommen im Alltag nicht vor. Trotzdem steht der Sinn des Sportunterrichts im Allgemeinen außer Zweifel. Niemand fragt, wozu man laufen oder springen lernen soll, weil jeder einsieht, dass es nicht um das Laufen oder Springen geht, sondern darum, durch Lauf- oder Springübungen seinen Körper zu ertüchtigen und eine gewisse Fitness zu erhalten. Ebenso wie die Körperertüchtigung eine wichtige Aufgabe des Sportunterrichts ist, ist die Geistesertüchtigung eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts. Auf diese Weise ist also die Frage nach dem *wozu* beantwortet und sie braucht nun nicht bei jedem Inhalt des Mathematikunterrichts neu gestellt zu werden.

Dass etwas als Selektionsinstrument diene, ist ein ebenso polemischer Vorwurf wie der vorige, den man an alles Beliebige richten kann, das man für schwierig und nicht unbedingt notwendig hält.

Statt diese schwachen vorgebrachten Argumente gegen die Bruchrechnung ausführlich zu entkräften, liefert Padberg selbst einige „Argumente zur Notwendigkeit der Bruchrechnung mit gemeinen Brüchen“, die hier stichwortartig aufgelistet werden:

- Brüche und die anschauliche Fundierung der Dezimalbruchrechnung
- Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Bruchrechnung?
- Bruchrechnung und Gleichungslehre
- Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}^+$.
- Bruchrechnung und Algebra

Er sagt, „gemeine Brüche“ seien viel leichter vorstellbar als „Dezimalbrüche, weil anschaulicher darstellbar“. Brüche wie $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ oder $\frac{5}{8}$ könne man leicht auf der Handlungsebene herstellen. Die Schülerinnen und Schüler sollten erst auf

der enaktiven und auf der ikonischen Ebene Erfahrungen mit Brüchen sammeln. Erst danach sei es sinnvoll, die Dezimalbruchschreibweise als elegante Schreibweise für Brüche einzuführen, die eine Zehnerpotenz als Nenner haben. Vorzüge der „gemeinen Brüche“ seien bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung unübersehbar. So ließen sich einige Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung leicht mithilfe „gemeiner Brüche“ ableiten. Ein weiterer Vorzug sei die hohe Praktikabilität der „gemeinen Brüche“ im Zusammenhang mit der Gleichungslehre. Die „gemeinen Brüche“ seien oft viel übersichtlicher als die „Dezimalbrüche“, insbesondere, wenn letztere sehr lange Perioden hätten und man mit ihnen im Kopf rechnen wolle. Auch algebraische Termumformungen seien später weniger problematisch, wenn man die „gemeinen Brüche“ ausführlich behandle.

Ergänzend erinnere ich an die schon im Vorwort genannte Tatsache, dass die Bruchrechnung auch schon deswegen ein sehr lohnenswerter Unterrichtsgegenstand ist, weil sie eine alte, interessante Kulturtechnik ist. Brüche waren schon in den antiken Hochkulturen der Ägypter und Babylonier bekannt.

Ein Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 kommt an den Brüchen nicht vorbei: Ohne Brüche ist alles nichts!

Zu den bereits bei Padberg angesprochenen innermathematischen Gebieten, in denen man ohne die Bruchrechnung nicht auskommt, führe ich nun beispielhaft die Begründung ihrer Notwendigkeit in einigen Gebieten weiter aus, die schon im Vorwort angesprochen wurden. Das Sachrechnen kommt ohne Brüche nicht aus. Wenn beispielsweise die reale Entfernung zweier Orte bestimmt werden soll, die in einer Karte mit dem Maßstab 1 : 10 000 000, wie man nachmessen kann, 7 cm voneinander entfernt sind, dann ist die Sachkenntnis nötig, dass eine Darstellung im Maßstab 1 : 10 000 000 bedeutet, dass jede Strecke auf der Karte $\frac{1}{10\,000\,000}$ Mal so groß ist wie in der Wirklichkeit. Mit dem Wissen,

dass 7cm so lang sind wie $\frac{1}{10\,000\,000}$ Mal der Abstand zwischen den beiden

Orten, lässt sich dieser Abstand berechnen.

Er ist $7 : \frac{1}{10\,000\,000}$ cm = $7 \cdot 10\,000\,000$ cm = $70\,000\,000$ cm = 700 km groß.

Unabhängig von der Schreibweise ist $1 : 10\,000\,000$ ein Bruch.

Bei zentrischen Streckungen werden mithilfe der Strahlensätze Streckenlängen berechnet. Wird beispielsweise eine 3 cm lange Strecke auf eine 7 cm lange Strecke abgebildet, dann wird eine 4 cm lange Strecke bei derselben zentrischen Streckung auf eine Strecke der Länge $\frac{7}{3} \cdot 4$ cm abgebildet.

In der siebten Klasse werden proportionale und antiproportionale Zuordnungen gelehrt. Beispielsweise wird die Information gegeben, dass 5 Äpfel 1,20 € kosten und es soll der Preis für 8 Äpfel bestimmt werden. Üblicherweise wird ein Lösungsweg mithilfe des sogenannten Dreisatzes eingeführt. Dabei wird zunächst der Preis für eine Anzahl von Äpfeln bestimmt, die ein gemeinsamer Teiler oder ein gemeinsames Vielfaches von 5 und 8 ist. Ein gemeinsamer Teiler ist 1, und dies ist auch der einzige gemeinsame Teiler. 1 Apfel ist $\frac{1}{5}$ von

5 Äpfeln und somit ist der Preis für 1 Apfel auch $\frac{1}{5}$ des Preises für 5 Äpfel, also

$\frac{1}{5}$ von 1,20 € und das sind 0,24 €. Um nun den Preis für 8 Äpfel zu bestimmen, stellen wir fest, dass 8 Äpfel 8 Mal so viele Äpfel sind wie 1 Apfel und, da der Preis pro Portion zu entrichten ist, wird der Preis für 1 Apfel mit 8 multipliziert. 8 Äpfel kosten also $8 \cdot 0,24 \text{ €} = 1,92 \text{ €}$.

Es wurde also nacheinander mit $\frac{1}{5}$ und mit 8 multipliziert, beziehungsweise durch 5 dividiert und mit 8 multipliziert. Der Weg über ein gemeinsames Vielfaches von 5 und 8 führt zum Beispiel über die 40. Man berechnet dabei erst den Preis für 40 Äpfel, in dem man mit 8 multipliziert. Anschließend dividiert man diesen Preis durch 5 oder multipliziert ihn mit $\frac{1}{5}$. Man macht also abgesehen von der Reihenfolge das gleiche wie in dem zuerst beschriebenen Beispiel.

Selbstverständlich lässt sich dieses Problem ohne Dreisatz lösen. Wer der Bruchrechnung kundig ist, multipliziert den Preis für 5 Äpfel mit $\frac{8}{5}$.

Ähnlich lässt sich bei den umgekehrt proportionalen oder antiproportionalen Zuordnungen die im Dreisatz nacheinander ausgeführte Multiplikation und Division durch die Multiplikation oder Division mit einem Bruch ersetzen.

Ein weiteres „Problemthema“ im Mathematikunterricht der Sekundarstufe ist die Prozentrechnung. Was bedeutet es, dass auf den Nettopreis einer Ware 19 % Mehrwertsteuer erhoben werden? Jeder, der weiß, dass Prozent das gleiche bedeutet wie Hundertstel, hat dieses Problem fast gelöst, denn beim Bruchrechnenunterricht in der Klassenstufe 6 lernt man, was $\frac{19}{100}$ von einem

Preis sind, man muss nämlich einfach $\frac{19}{100}$ mit diesem Preis multiplizieren.

Jedes Problem der Prozentrechnung lässt sich auf die Bruchrechnung zurückführen, da Prozentrechnung nichts anderes ist als Bruchrechnung mit „Hundertstel“-Brüchen.

Auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der sichere Umgang mit Brüchen wichtig. Schon der Begriff der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses wird meist definiert als

$$\frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}.$$

Es wird zwar gelegentlich die Meinung propagiert, man solle der Bruchschreibweise die Kommaschreibweise vorziehen, weil diese einfacher sei. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist aber ein gutes Beispiel dafür, dass auch die Bruchschreibweise gegenüber der Kommaschreibweise Vorteile hat. Wenn eine Wahrscheinlichkeit in Bruchschreibweise dargestellt ist, dann kann man sofort die Anzahl der für das Ereignis günstigen Ausgänge und die Anzahl der möglichen Ausgänge erkennen, oder man kann, falls der Bruch gekürzt oder erweitert dargestellt ist, zumindest das Verhältnis dieser Anzahlen direkt ablesen. Dies ist bei der Kommadarstellung nicht ohne Weiteres möglich. Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten ist in Bruchdarstellung viel besser nachvollziehbar als in Kommaschreibweise. Auch deren Veranschaulichung in Baumdiagrammen ist mit der Bruchdarstellung viel übersichtlicher.

Weitere Beispiele dafür, dass die Bruchdarstellung gegenüber der Kommaschreibweise vorteilhaft ist, finden wir umso leichter, je komplexer die mathematischen Inhalte werden oder dann, wenn diese Darstellung uns das Verständnis des Zustandekommens eines Terms erleichtert. Wenn es zum Beispiel um die Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks geht, dessen eine Seite 5 Einheiten lang und deren dazu gehörige Höhe 3 Einheiten lang ist, dann zeigt die Gleichung $F = \frac{5 \cdot 3}{2}$ deutlich den Zusammenhang zwischen den Maßzahlen für Seitenlänge, zugehöriger Höhe und Flächeninhalt. Wenn es um die Bestimmung der Summe der ersten 20 positiven natürlichen Zahlen geht, dann kann man aus der Darstellung $\frac{20 \cdot (20+1)}{2}$ direkt ablesen, wie sie bestimmt wurde. Wenn man in diesen Beispielen anstelle der Bruchterme den Flächeninhalt in der Schreibweise von 7,5 Flächeneinheiten oder die Summe als 210 schreibt, dann enthält man dem Leser die Gedanken vor, die dazu geführt haben.

Auch wenn man das Thema Brüche in der Schulmathematik schon wieder verlassen und schon irrationale Zahlen kennengelernt hat, sind Kenntnisse über die Brüche teils hilfreich, teils sogar nötig für das Verständnis.

Ein solches Beispiel ist die Potenzrechnung und die Erweiterung auf rationale Exponenten. Wenn $a^{\frac{m}{n}}$ als positive Lösung der Gleichung $x^n = a^m$ eingeführt wird und später um die Schreibweise $\sqrt[n]{a^m}$ erweitert wird, ist offensichtlich, dass man auf Brüche nicht verzichten kann. Ohne dass hier näher darauf eingegangen wird, ist klar, dass die rationalen Exponenten nötig für das Verständnis der Wurzelfunktionen sind. Es ist kontraproduktiv für die angestrebte geistige Entwicklung der Schülerinnen und Schüler, wenn sie nur mechanisch $\sqrt[3]{4}$ in ihren Taschenrechner tippen, sich nicht einmal wundern, dass dann eine Zahl mit vielen Nachkommastellen angezeigt wird und vielleicht nicht einmal wissen, dass diese Zahl die positive und in diesem Fall auch einzige Lösung der Gleichung $x^3 = 4$ ist, also $x = 4^{\frac{1}{3}}$.

Ein weiteres Beispiel ist die Trigonometrie. In der 10. Klasse werden üblicherweise Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels als Verhältnisse von Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken eingeführt. Ist beispielsweise der rechte Winkel bei C, also $\gamma = 90^\circ$, dann wird definiert: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ und $\tan \alpha = \frac{a}{b}$. Zwar sieht es hier so aus, als hätte man es mit Brüchen zu tun, aber man sollte sich nicht vom Bruchstrich irritieren lassen: Im Allgemeinen sind diese Verhältnisse irrational. Die im Rahmen der Bruchrechnung erworbenen Regeln werden hier aber im Allgemeinen einfach auf die reellen Zahlen übertragen. Das kann deswegen von der Lehrperson verantwortet werden, weil sie weiß, dass dies nur zum Schein so ist und dass diese Regeln in der Menge der reellen Zahlen gelten. Sie wurden nur bisher eingeschränkt auf die Menge der rationalen Zahlen betrachtet.

Wie gezeigt wurde, kommen Brüche und reelle Zahlen in Bruchdarstellung ständig im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1 vor. Die genannten Beispiele betreffen nämlich die Klassenstufe 6 und sind relevant für alle folgenden Klassenstufen.

Was die Einführung in Klassenstufe 6 betrifft, so ist es nicht nur sehr befriedigend zu wissen, dass zum Beispiel 1 : 7 *ab jetzt* irgendetwas ist, sondern es ist nach der erwähnten Zahlbereichserweiterung auch dringend notwendig, diese neu dazugewonnenen Zahlen kennenzulernen und mit ihnen zu rechnen. Da die rationalen Zahlen auf vielerlei Weisen darstellbar sind, zum Beispiel in der Bruchschreibweise, in Kommadarstellung, in Prozentdarstellung, und jede dieser Darstellungen ihre Berechtigung hat, ist es natürlich auch wichtig, den Umgang mit jeder dieser Darstellungen zu beherrschen. Dass man dabei an „gemeinen Brüchen“ nicht vorbei kommen kann, ist offensichtlich, denn das Rechnen mit „Dezimalbrüchen“ lässt sich zwar ohne das Verständnis der „gemeinen Brüche“ üben, jedoch niemals verstehen.

3 Die Ausgangslage

Bei der Ausarbeitung eines Konzeptes zum Bruchrechnenunterricht müssen natürlich ausführlich die bisher existierenden didaktischen Konzepte untersucht werden. Diese werden in Kapitel 4 beschrieben. Auch Schulbücher und andere Lernmedien wurden nicht außer Acht gelassen, da an ihnen sehr gut Schwachstellen der Konzepte sichtbar werden. Darüber hinaus verhindern sie oft durch eigene Schwächen das Verständnis. Weiter ist auf Fehlvorstellungen einzugehen, die bei Schülerinnen und Schülern weit verbreitet sind und die sie meistens in der Grundschule erworben haben und mit an die weiterführenden Schulen bringen. Außerdem bietet auch der herkömmliche Bruchrechnenunterricht viele Gelegenheiten für das Entstehen neuer Fehlvorstellungen. Erschwert wird das Verständnis schließlich auch noch durch viele zum Teil überflüssige Begriffe und Pseudobegriffe.

3.1 Die Darstellung der Bruchrechnung in Lernmedien

Wenn man sich die Lernmedien betrachtet, die sich mit der Bruchrechnung befassen, stellt man fest, dass sie viel Anlass zur Kritik liefern. In Schulbüchern muss man nicht lange suchen, um Widersprüche, verwirrende Pseudobegriffe, Unverständliches oder Merksätze zu finden, die aus verschiedenen Gründen nicht gut sind.

Neben den Schulbüchern gibt es mittlerweile sehr viele Bücher und Heftchen, die zum Selbststudium oder als Übungshilfe angeboten werden.

In den letzten Jahren hat das Internet als Medium zur Datenveröffentlichung und -beschaffung immer mehr an Bedeutung gewonnen. Viele Lehrerinnen und Lehrer stellen ihre Arbeitsmaterialien online, was per se nicht schlecht ist. Aber leider sind nicht alle Veröffentlichungen qualitativ gut, und leider gibt es auch Lehrerinnen und Lehrer, die sich kritiklos daran bedienen, um diese Materialien selbst einzusetzen.

Auch Lernsoftware wird immer weiter verbreitet. Es ist schwer möglich und auch nicht Ziel dieser Arbeit, alle Veröffentlichungen zu berücksichtigen, die sich mit Bruchrechnung befassen. So habe ich mich bei den Programmen nicht

mit käuflich erwerbbaaren Lernprogrammen beschäftigt, sondern den Blick auf kostenlos nutzbare Online-Lernprogramme geworfen.

Ich will hier keineswegs behaupten, dass alle Übungsmaterialien, die irgendwo veröffentlicht wurden, schlecht sind, aber gerade bezüglich der Bruchrechnung findet man sehr viele Materialien, die aus unterschiedlichen Gründen nicht gut sind.

Um auf diese Problematik aufmerksam zu machen, illustriere ich sie an einigen Beispielen aus Schulbüchern, einem Nachschlagewerk, einem Heft zum Selbstlernen und einer Internetseite, die Unterrichtsmaterial zur Verfügung stellt, sowie an einigen Online-Lern- beziehungsweise Übungsprogrammen zur Addition und Subtraktion von Brüchen.

An Schulbüchern ist häufig zu kritisieren, dass sie eine Sprache verwenden, die Fehlvorstellungen weckt. Ein einfaches Beispiel dafür ist ein Merksatzkästchen mit der Aussage:

„Beim Dividieren kann das Ergebnis ein Bruch sein.“⁶

Diese Aussage ist zwar zweifellos richtig, dennoch ist fragwürdig, ob eine solche Aussage geeignet ist, Schülerinnen und Schülern zu helfen oder ob sie nicht sogar eher Verwirrung stiftet oder falsche Vorstellungen hervorruft.

Diese Formulierung lässt nämlich Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 6 denken, das Ergebnis beim Dividieren zweier natürlicher Zahlen könne auch etwas anderes als ein Bruch sein. Denn das Wort „kann“ suggeriert in diesem Zusammenhang, dass es mehrere Möglichkeiten für das Ergebnis einer Division gibt, von denen eine ein Bruch ist. Somit ist nicht anzunehmen, dass Lernende hier erwarten, dass das Ergebnis in jedem Fall ein Bruch sein muss, zumindest dann, wenn, wie in Klassenstufe 6, noch keine irrationalen Zahlen bekannt sind.

Schülerinnen und Schüler dieser Altersklasse, die einen solchen Merksatz lesen, stellen sich hier nämlich im Allgemeinen nicht die Frage, ob das Ergebnis beim Dividieren auch etwas anderes sein könne als ein Bruch. Vielmehr setzen

⁶ Maßstab 6 (2007: 28)

sie dies aufgrund der Formulierung voraus, denn anderenfalls hätte man ihrer Meinung nach im Buch statt „kann“ das Wort „muss“ geschrieben.

Wenn man sich die Schulbücher ansieht, in denen die Bruchrechnung behandelt wird, dann muss man in den meisten nicht lange suchen, ehe man weitere Kritikpunkte findet. Oft stößt man zum Beispiel auf Anhäufungen von Merksätzen.

In einem Schulbuch⁷ liest man zum Beispiel zuerst einen Merksatz für die Multiplikation eines Bruches mit einer natürlichen Zahl. Zwei Seiten später folgt ein Merksatz für die Division eines Stammbruches durch eine natürliche Zahl. Noch eine Seite später folgt ein Merksatz für die Division eines Bruches durch eine natürliche Zahl. Drei Seiten später wird die Multiplikation eines „Dezimalbruchs“ mit einer natürlichen Zahl beschrieben mit dem dazu passenden Merksatz auf der nächsten Seite. Weitere Merksätze für die Division eines „Dezimalbruchs“ durch eine natürliche Zahl sowie für die Multiplikation „Bruch mal Bruch“, „Dezimalbruch mal Dezimalbruch“ und entsprechende Divisionsregeln folgen.

Ein anderes Schulbuch⁸ beginnt zunächst mit den „Dezimalzahlen“, lange bevor die „Brüche“ folgen. Eine Regel für die Multiplikation von Brüchen in Kommadarstellung und die Anzahl der Nachkommastellen wird dort zwar präsentiert, jedoch wird sie nicht hergeleitet, obwohl doch eine Herleitung beim Verständnis des Stellenwertsystems keine unüberwindbare Schwierigkeit darstellt.

Die folgenden drei Beispiele beziehen sich auf den Größenvergleich von Brüchen. Bevor auf sie eingegangen wird, werden alle drei zitiert.

Der folgende Merksatz stammt aus einem Schulbuch:

„Brüche kann man mithilfe ihrer Zähler der Größe nach vergleichen, wenn sie gleiche Nenner haben.

Bei ungleichen Nennern müssen wir die Brüche zuerst gleichnamig machen.“⁹

⁷ Maßstab 6 (2007: 68 ff., 154 ff.)

⁸ Mathematik 6 (2007: 18)

⁹ Schnittpunkt 6 (2004: 68)

Auch in Heften, die zum selbstständigen Erlernen der Bruchrechnung geeignet sein sollen, sieht es nicht immer besser aus:

„Will man ungleichnamige Brüche (Brüche mit ungleichen Nennern) vergleichen, muss man sie zuerst gleichnamig machen.“¹⁰

Zu diesen beiden Beispielen füge ich an, dass man Brüche sehr wohl ihrer Größe nach vergleichen kann, wenn sie nicht gleiche Nenner haben. Zum Beispiel sieht man sofort, dass $\frac{1}{7} > \frac{1}{100}$ ist, auch wenn die Brüche nicht im

gleichen Nenner dargestellt sind. Auch sieht man sofort, dass $\frac{9}{5} > \frac{4}{7}$ ist, da einer der Brüche größer als 1 und der andere kleiner als 1 ist. Die Beispiele zeigen, dass man keineswegs auf gleiche Nenner angewiesen ist. Es ist also offensichtlich, dass der zweite Teil des Merksatzes im Lehrbuch sowie der andere Merksatz schlichtweg falsch sind.

Denn keineswegs muss man die „Brüche gleichnamig machen“, wenn die Nenner ungleich sind. Zum Beispiel könnte man ja auch die Zähler „gleichnamig machen“, denn es ist $\frac{1}{7} = \frac{3}{21}$, also $\frac{1}{7} < \frac{3}{20}$, da $21 > 20$ und es ist leicht einzusehen, dass der einundzwanzigste Teil einer Größe kleiner ist als ihr zwanzigster Teil.

Ein anderes Schulbuch, das nicht deutlich zwischen den Zahlen und ihren Darstellungen unterscheidet, das also nicht mit den Begriffen „Bruchzahl“ für die Zahl selbst und „Bruch“ für ihre Darstellung arbeitet, sondern die Zahlen selbst als Brüche bezeichnet, bemerkt zum Thema Größenvergleich von Brüchen:

„Das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner gegebener Brüche heißt der Hauptnenner der Brüche.“¹¹

¹⁰ Voigt-Lambert (2007: 25)

¹¹ Mathematik Lehrbuch Klasse 6 (1994: 27)

Wenn man sich an diese Aussage hält, dann haben die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ den Hauptnenner 12 und die Brüche $\frac{3}{9}$ und $\frac{5}{20}$ haben den Hauptnenner 180. Wir haben in diesem Beispiel also zweimal das gleiche Zahlenpaar vorliegen, erhalten aber zwei verschiedene Hauptnenner. Was stimmt nicht an dieser Zuordnung? Die Antwort ist klar: Es gibt keine Zuordnung von zwei Zahlen auf ihren Hauptnenner, es gibt nicht einmal den Nenner einer Zahl. Der Nenner ist der Divisor in einer ausgewählten Darstellung. Es macht doch überhaupt keinen Sinn zum Beispiel zu sagen, 7 habe den Nenner 1, 2, 3 oder 23, denn die Zahl 7 kann mit jedem dieser Nenner als $\frac{7}{1}$, $\frac{14}{2}$, $\frac{21}{3}$ oder $\frac{161}{23}$ und auf unendliche viele andere Weisen dargestellt werden. Ebenso absurd wäre es zu argumentieren, 10 habe den Subtrahenden 2, weil man 10 als $12 - 2$ schreiben kann. Analog dazu hat ein Bruch auch keinen Nenner, sondern nur seine Darstellung besitzt einen Nenner.

Alle drei Beispiele betreffen den Größenvergleich von Brüchen. Es ist nicht schwierig auch negative Beispiele zu anderen Bereichen zu finden.

Aber auch das nächste betrifft den Größenvergleich. Es stammt jedoch nicht aus einem Schulbuch, sondern aus einem moderneren Medium, nämlich von einem Internetportal.

Das Internet ist nicht nur für Schülerinnen und Schüler eine immer beliebter werdende Informationsquelle geworden, auch Lehrerinnen und Lehrer bedienen sich dieses Mediums. Es gibt mittlerweile Portale für Unterrichtsmedien, auf denen Unterrichtsmaterialien online zur Verfügung gestellt werden. Auf einigen dieser Portale können auch Lehrerinnen und Lehrer ihre Materialien wie zum Beispiel Arbeitsblätter anbieten und selbst auf Materialien anderer Kolleginnen und Kollegen zurückgreifen. Gegen die Veröffentlichung von Unterrichtsmaterialien ist nichts einzuwenden, es kann sogar durchaus anregend sein, manche Arbeit anderer Kolleginnen und Kollegen zu sehen. Die Erfahrung zeigt aber, dass die Übernahme fremder Materialien aus dem Internet nicht immer mit dem nötigen kritischen Blick auf das große Angebot erfolgt. Viele Kolleginnen und Kollegen sind der Überzeugung, dass die Lehrerin oder der Lehrer der Zukunft eher eine Person sein wird, die der

Lerngruppe viel Material zur Verfügung stellt als eine Person, die unterrichtet. Darüber hinaus werden viele Kolleginnen und Kollegen fachfremd eingesetzt, sodass man leider befürchten muss, dass immer mehr Arbeitsblätter aus dem Internet kopiert werden und dass von solchen Angeboten mangels Kritikfähigkeit der Benutzer wegen ihrer fehlenden Fachkompetenz auch dann Gebrauch gemacht wird, wenn sie von mangelhafter Qualität sind. Dass viele dieser Materialien, insbesondere auf den Tauschseiten, zahlreiche inhaltliche Fehler enthalten, wird nach kurzer Recherche deutlich und hier an einigen Beispielen gezeigt.

Diese Materialien sind trotzdem relevant, da das Angebot an online zugänglichen Materialien, wie bereits erwähnt, in den letzten Jahren sehr stark zugenommen hat, in den nächsten Jahren weiter zunehmen wird und vor allem, da es schon jetzt reichlich genutzt wird. Bisher kann die Qualität dort gefundener Arbeitsblätter nur in jedem Einzelfall neu geprüft werden, was allerdings die dazu nötige Fachkompetenz voraussetzt.

Im Internet findet man, wenn man bei der Suchmaschine www.google.de¹² die Suchwörter *Größenvergleich von Brüchen* eingibt, 928 Einträge.

Bereits der erste der gefundenen 928 Einträge liefert das folgende abschreckende Beispiel zum Thema. Er stammt von einem Internetportal, das Materialien zum selbstständigen Lernen anbietet und sich so darstellt: „Auf diesem Internetportal finden sowohl Schülerinnen und Schüler als auch Lehrerinnen und Lehrer Materialien zum Selbstständigen Arbeiten, d. h. zum Selbstständigen Erlernen und zum Selbstständigen Üben in den Fächern Mathematik und Physik, insbesondere eine nach Themen geordnete Sammlung von zur Zeit mehr als 2000 interaktiven Materialien.“¹³

„Erklärung 7: Größenvergleich von Brüchen

Brüche lassen sich vergleichen und nach ihrer Größe ordnen:

- * Haben die Brüche den gleichen Nenner und den gleichen Zähler, dann gehören sie zur gleichen Bruchzahl.

Schreibweise mit Buchstaben: $\frac{a}{c}$; $\frac{b}{c}$ und $a = b$ dann $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

¹² Stand: 21.9.2008

¹³ <http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1ar/fs/rmb08.PDF>, Stand: 9.11.2009

- * Haben die Brüche den gleichen Nenner und verschiedene Zähler, dann gehört der Bruch mit dem größeren Zähler zur größeren Bruchzahl.

Schreibweise mit Buchstaben: $\frac{a}{c}; \frac{b}{c}$ und $a < b$ dann $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Regel 3: Größenvergleich von Brüchen

Wie vergleicht man Brüche? Wie ordnet man Brüche nach ihrer Größe?

1. Bringe die Brüche gegebenenfalls auf den Hauptnenner (vgl. Regel 2)
2. Vergleiche die Zähler: Sind die Zähler gleich, gehören die Brüche zur gleichen Bruchzahl, anderenfalls gehört der Bruch mit dem größeren Zähler zur größeren Bruchzahl (vgl. Erklärung 7)¹⁴

Ohne hier den pädagogischen Sinn von Merksätzen und Regeln zu diskutieren, sei bemerkt, dass das letzte der Beispiele auf eindrucksvolle Weise deutlich macht, wie man Mathematikunterricht auf Stumpfsinn reduzieren kann.

Natürlich ist es ohne Zweifel sinnvoll, Kinder zum selbstständigen Lernen zu motivieren. Aber genau das findet hier leider nicht statt, denn auch wenn die Schülerinnen und Schüler solche Arbeitsblätter mit diesen und noch einigen weiteren Anweisungen erhalten und diese bearbeiten, dann handelt es sich hier nur um das rezeptartige Abarbeiten vorgegebener Strategien. Hier wird die Gelegenheit verpasst, die Schülerinnen und Schüler eigene Ideen zum Größenvergleich von Brüchen entwickeln zu lassen. Es ist nicht schwierig, weitere abschreckende Beispiele für Unterrichtsmaterial in Internetportalen zu finden. Aber es ist weder das Ziel dieser Arbeit, alles Veröffentlichte auf seine Brauchbarkeit im Unterricht zu untersuchen, noch ist es das Ziel, möglichst viele Negativbeispiele aus diversen Medien aufzuführen. Diese leicht zu findenden Beispiele sollen lediglich für die Problematik sensibilisieren. Es sei noch angemerkt, dass das rein mechanische Abarbeiten von Anweisungen keine Eigenart ist, die den Schülerinnen und Schülern ausschließlich von modernen Medien abverlangt wird. Auch in Schulbüchern findet man so etwas gelegentlich. Ein Schulbuch¹⁵ für die 6. Klasse an Gymnasien treibt es dabei auf die Spitze. Beim Thema „Die andere Richtung: Umwandlung von periodischen

¹⁴ <http://www.selbstlernmaterial.de/m/m6/fs/rmb08.PDF> , Stand: 1. 9. 2008

¹⁵ Neue Wege 6 (2006: 210)

Dezimalzahlen in Brüche“ findet man dort in zwei Kästchen Beschreibungen, wie man vorzugehen hat:

$$„\frac{1}{9} = 0,\overline{1}; \frac{2}{9} = 0,\overline{2}; \dots \frac{5}{9} = 0,\overline{5}$$

Brüche mit dem Nenner 9 führen zu Dezimalzahlen, bei denen die Periode (der Länge 1) aus dem Zähler des Bruches gebildet wird.“

Im anderen Kästchen ist zu lesen:

$$„\frac{1}{99} = 0,\overline{01}; \frac{2}{99} = 0,\overline{02}; \dots \frac{12}{99} = 0,\overline{12} \dots \frac{56}{99} = 0,\overline{56}$$

Brüche mit dem Nenner 99 führen zu Dezimalzahlen, bei denen die Periode (der Länge 2) aus den Ziffern des Zählers gebildet wird.“

Abgesehen vom gewählten Vokabular, das vermuten lässt, dass zum Beispiel

$\frac{11}{99}$ und $\frac{99}{99}$ Kommadarstellungen mit zweistelliger Periodenlänge besitzen, ist

hier zu kritisieren, dass keines der im Mathematikunterricht anzustrebenden Ziele verfolgt wird, wenn man an gar keiner Stelle mehr denken, sondern nur noch die Anleitungen befolgen muss. Dass so etwas in einem Arbeitsbuch für Gymnasien zu lesen ist, ist insbesondere deswegen erstaunlich, da meine Erfahrung an der Realschule zeigt, dass man gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern Verfahren für die Umwandlung von Komma- in Bruchdarstellung erarbeiten kann. Stattdessen wird hier in dem Rezept oder der Anleitung etwas vorgemacht oder beschrieben, was man tun soll, und die Schülerinnen und Schüler sollen es dann nachahmen oder sich ausschließlich an gegebene Anleitungen halten. Da wäre auch die Nutzung einer geeigneten Maschine, die die gewünschte Darstellung bei Eingabe der anderen ausgibt, nicht schlechter. Der Reiz bei diesem Problem liegt doch mit Sicherheit nicht darin, ein Rezept abzuarbeiten, um dann irgendwann herauszufinden, dass $0,\overline{28} = \frac{28}{99}$ ist, reizvoll

dagegen könnte es sein, Schülerinnen und Schüler ein solches Problem selbst lösen zu lassen, nachdem man es vielleicht für eine einstellige Periode gemeinsam bearbeitet hat.

Ein grundsätzliches Ärgernis von Merksätzen, wenn sie zumindest inhaltlich richtig sind, ist leider, dass sie in den Büchern oft plötzlich auftauchen, ohne dass eine ausführliche, nachvollziehbare Herleitung erfolgt ist.

Wichtiger als die Fähigkeit, mithilfe eines Merksatzes rezeptartig vorzugehen, um die größere der beiden Zahlen zu ermitteln, erscheint mir die Kompetenz, sich dafür eigenständig eine geeignete unter mehreren bekannten Methoden wählen zu können.

Die Kultusministerkonferenz hat in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den mittleren Bildungsabschluss folgende mathematischen Kompetenzen festgelegt, die entwickelt werden sollen¹⁶:

- (K1) Mathematisch argumentieren
- (K2) Probleme mathematisch lösen
- (K3) Mathematisch modellieren
- (K4) Mathematische Darstellungen verwenden
- (K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- (K6) Kommunizieren

Ein stures Abarbeiten eines Rezepts entwickelt keine dieser Kompetenzen. Gibt man Schülerinnen und Schülern die Aufgabe zu entscheiden, welcher von zwei Brüchen der größere ist, dann wird gleich zur Entwicklung mehrerer dieser Kompetenzen beigetragen. Das Gleiche gilt für das andere Beispiel, denn die Entwicklung der Kommadarstellung von periodischen Brüchen kann sehr wohl von Schülerinnen und Schülern selbst geleistet werden.

Das vierte Beispiel betrifft Online-Lernprogramme. Neben Tauschbörsen für Unterrichtsmaterial, die sich an Lehrerinnen und Lehrer richten, existieren auch Portale, die Lernmaterialien für Schülerinnen und Schüler anbieten.

Grundsätzlich muss man die Idee, Übungsprogramme für Lernende kostenlos zugänglich zu machen, als positiv bewerten. Da heutzutage die Mehrheit der

¹⁶ Lankes et al. (2006: 20)

Jugendlichen die Möglichkeit hat, an Computern mit Online-Zugang zu arbeiten, wären Online-Übungs-Programme schon aus sozialen Gründen eine zu begrüßende Alternative zur Nachhilfe, die sich nicht alle Familien leisten können.

Solche Programme könnten den Lernenden eine sofortige Rückmeldung darüber zukommen lassen, welche der Aufgaben richtig bearbeitet wurden und wo fehlerhaft gearbeitet wurde. Dazu könnten zielgerichtete Hinweise Hilfestellung geben. Prinzipiell könnten solche Programme einen hohen Motivationseffekt haben. Sie sind auf unterschiedlichstem Niveau denkbar. Eines dieser Programme, das auf der Seite www.eduvinet.de (Educations via Internet in the European Union)¹⁷ angeboten wird, beschäftigt sich mit der Addition und Subtraktion von Brüchen. Es beginnt auf einer niedrigen Schwierigkeitsstufe, bei der zunächst immer vier Lösungsvorschläge angegeben werden. Der Programmnutzer liest:

„Welches ist die richtige Lösung? $\frac{6}{5} - \frac{2}{5} =$ “

Die Antwortvorschläge heißen: $\frac{8}{5}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{10}$.

Wenn man $\frac{4}{5}$ anklickt, öffnet sich ein Fenster, in dem man lesen kann: „Prima!

Deine Antwort ist richtig!“ Das motiviert und macht vielleicht Jugendlichen auch Freude, wenn es ihnen häufiger als erwartet gelingt, diese Rückmeldung zu bekommen. Aber leider hat das Programm eine äußerst unschöne Seite, denn

wenn man statt $\frac{4}{5}$ die Alternative $\frac{8}{10}$ auswählt, dann öffnet sich ebenfalls ein

Fenster, in dem man dann allerdings folgende Worte liest: „FALSCH! Wähle eine andere Alternative!“ Man möchte es kaum glauben, aber tatsächlich

erscheint bei Eingabe der richtigen Zahl $\frac{8}{10}$ eine Fehlermeldung. Es mag

vielleicht nicht besonders naheliegend sein, in diesem Zusammenhang $\frac{8}{10}$ statt

¹⁷ <http://www.mallig.eduvinet.de/mathe/6bruch/expl/6brucQT1.htm>, Stand 10. 8. 2008

$\frac{4}{5}$ anzuklicken, aber es ist nicht nachvollziehbar, warum hier diese Fehlermeldung erscheint. Es gibt nur einen Grund dafür: Der Programmierer wünscht sich, dass die Schülerinnen und Schüler hier die Lösung in gekürzter Darstellung angeben, er nennt diesen Wunsch aber nicht auf dieser Seite. Akzeptabel wäre es, wenn in dem Fenster zum Beispiel zu lesen wäre: „Prima! Aber findest Du noch eine andere/ einfachere Darstellung?“.

Bei den Übungen für die Fortgeschrittenen handelt es sich nicht mehr um Multiple-Choice-Aufgaben, sondern man muss direkt das Ergebnis eingeben. Hier steht zwar der Hinweis „Berechne und gib das gekürzte Ergebnis an“, wenn man aber auf das Kürzen verzichtet, also bei $\frac{7}{9} + \frac{11}{15} =$ nicht $\frac{68}{45}$ sondern $\frac{204}{135}$ eintippt, dann färbt sich der Bildschirm schwarz und man liest in vierfacher Ausführung mit großen weißen Buchstaben einen der beiden Hinweise „Leider falsch!“ oder „Leider nicht richtig!“.

Ebenfalls fragwürdig ist das Angebot der Zentrale für Unterrichtsmedien www.zum.de¹⁸. Es wird eine Übung zur Addition von Bruchzahlen angeboten. Dort sind acht Additionsaufgaben auf einer Seite, es ist Platz für Zwischenergebnisse gegeben, und es soll ein Endergebnis eingetragen werden.

Ich bearbeite nur eine der 8 Aufgaben, um das Programm zu testen.

Gegeben ist $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{\square + \square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ und ich fülle die leeren Felder wie folgt:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{8+12}{32} = \frac{20}{32}.$$

Ich erhalte die schon befürchtete Rückmeldung: „Dein Ergebnis ist 0%. Einige deiner Antworten sind falsch. Sie können noch verbessert werden.“

Ein Hinweis, dass die Zahlen in gekürzter Darstellung angegeben werden sollen, fehlt aber auch hier. Nebenbei bemerkt, zeigte das Programm auch nach „Korrektur“ in die gekürzte Schreibweise diesen Hinweis, stellte aber die

¹⁸ <http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmzb41.htm> , Stand: 1.9.2008

„korrigierten“ Abschnitte daraufhin als unveränderbar dar, das heißt, der Proband erhält kein Lob, sein Ergebnis bleibt trotz „Korrektur“ bei 0%.

In Schleswig-Holstein bietet das Lernnetz des IQSH die Möglichkeit, verschiedene Inhalte online zu üben. So gibt es auch ein „Trainingsprogramm Bruchrechnung“¹⁹, bei dem man sich auswählen kann, welche Rechenart man üben möchte. Anschließend folgt eine Beschreibung, wie vorzugehen ist, unter anderem muss man, falls „unechte Brüche“ vorkommen, diese „in gemischte Zahlen umwandeln“, und es wird nur der kleinstmögliche Nenner akzeptiert. Weicht man an einer Stelle von dem ab, was der Programmierer sich offensichtlich als nächsten Schritt gewünscht hat, dann erscheint sofort, von einem durchdringenden Geräusch unterlegt, die Meldung „Fehler!“.

Diese Beispiele wecken leider noch keine große Zuversicht in das im Zusammenhang mit Kampagnen wie „Schulen ans Netz“ viel gepriesene E-learning. Denn es liegt nicht an mangelnden technischen Voraussetzungen, dass die Qualität dieser Programme so miserabel ist. Wäre es so, dann könnte man auf Besserung durch weiteren technischen Fortschritt hoffen. Das Problem liegt aber allein darin, dass die Programme deswegen so schlecht sind, weil sie nicht den denkenden, sondern den „dressierten“ Benutzer erfordern und zum Teil als falsch bewerten, was richtig ist. Die Programme entsprechend zu verbessern, wäre eine Leichtigkeit. Es wäre wünschenswert, dass in diesem Bereich viele Verbesserungen vorgenommen werden, sodass Schülerinnen und Schüler diese Angebote nutzen können, um ihre Rechenfähigkeit zu verbessern und nicht bloß um bestimmte Schritte einzuüben. Außerdem sollten sie nicht durch eine Fixierung auf vollständig gekürzte Darstellungen demotiviert werden.

Ebenfalls negativ aufgefallen ist ein Nachschlagewerk²⁰ mit dem Untertitel „Arithmetik, Algebra, Geometrie, Funktionen, Vektoren und Matrizen. Alles für Schule, Studium und Beruf“. Darin liest man über die Addition von Brüchen: „Nur gleichnamige Brüche lassen sich addieren.“

¹⁹ http://mathematik.lernnetz.de/walter_fendt/m14d/bruchrechnen.htm , Stand: 1. 9. 2008

²⁰ Mathematik kompakt (2005: 23 f.)

Das bedeutet, dass sich $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ nicht addieren lassen und dass man sich mit den Brüchen neue Zahlen eingehandelt hat, die sich offenbar nur in Ausnahmefällen addieren lassen.

Zusammengefasst steht fest, dass der Bruchrechnenunterricht von folgenden durch Lernmedien hervorgerufenen Problemen begleitet wird:

Viele Schulbücher und auch Hefte oder Bücher zum Selbststudium sind mit Merksätzen überfrachtet, benutzen in die Irre führende Formulierungen, sind schlecht strukturiert oder enthalten inhaltlich falsche Regeln.

Viele Lernmaterialien, die online oder als Kopiervorlagen erhältlich sind, liefern rezeptartige Anleitungen, die zum mechanischen Nachmachen aber nicht zum Gewinn einer Einsicht taugen.

Die meisten Online-Lernprogramme akzeptieren nur eine bestimmte vom Programmierer erwünschte Eingabe und liefern bei anderen Eingaben, die ebenfalls richtig sind, Fehlermeldungen.

3.2 Weitverbreitete Fehlvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern vor Beginn des Bruchrechnenunterrichts

Zu den weitverbreiteten, zum Teil eng zusammenhängenden Fehlvorstellungen, die oft mit einem Missbrauch des Gleichheitszeichens einhergehen, zählen:

- die Vorstellung, ein Rechenzeichen zeige eine Aufgabe an,
- die Vorstellung, das Gleichheitszeichen zeige eine Aufgabe an,
- die Vorstellung, ein Problem sei erst gelöst, wenn etwas ausgerechnet wurde (der Ausrechnewahn),
- das Missverständnis zwischen Zahl und Aufgabe,
- die Vorstellung, das Gleichheitszeichen trenne die Aufgabe vom Ergebnis,
- die Verletzung der Transitivität der Gleichheitsrelation bei der Division mit Rest.

Der Umgang mit der Gleichheitsrelation in der Grundschule führt nicht immer dazu, dass Schülerinnen und Schüler die wesentlichen Eigenschaften dieser Relation erkennen.

Die „=-Relation ist eine Äquivalenzrelation. Gleichheit zwischen zwei Zahlen bedeutet nicht, dass sie in ihrer Darstellung oder Anordnung gleich sind, sondern bedeutet „gleich in Bezug auf die Anzahl“, beziehungsweise nach Erweiterung des Zahlbereichs über die natürlichen Zahlen hinaus „gleich in Bezug auf die Zahl“.

Wichtig für jedes fachdidaktische Unterrichtskonzept ist der Stand der kognitiven Entwicklung der Schülerinnen und Schüler aus der Zielgruppe, an die sich das Konzept richtet. Die grundlegende Arbeit in der Entwicklungspsychologie, auf die sich auch die Mathematikdidaktik beruft, leistete Piaget.

Nach Piaget gibt es vier Stadien der kognitiven Entwicklung:

1. Sensomotorisches Stadium von der Geburt bis zum 2. Lebensjahr
2. Präoperationales Stadium vom 2. bis zum 7. Lebensjahr
3. Konkret-operationales Stadium vom 7. bis zum 11. Lebensjahr
4. Formal-operationales Stadium ab dem 11. Lebensjahr

Laut Piaget können Kinder im präoperationalen Stadium, also im Alter von 2 bis 7 Jahren noch nicht wahrnehmen, dass Dinge ihre Masse und ihr Volumen behalten, wenn sie verformt oder anders angeordnet werden. Dieses hat er in Experimenten belegt, bei denen Saft aus einem Gefäß in ein anders geformtes Gefäß vollständig umgegossen oder eine Tonkugel zu einem Zylinder umgeformt wurde oder die gleiche Anzahl Knöpfe in zwei Reihen mit und ohne Lücke angeordnet wurden. Die Anordnung beeinflusst das Denken der Kinder. Piaget berichtet über ein Experiment, bei dem er 16 Bonbons in 4 Quadraten aus jeweils 4 Bonbons angeordnet hat, davon zwei Quadrate für den folgenden Tag. Anschließend änderte er die Anordnung. „Man verlagert also vor den Augen des Kindes 3 Bonbons des dritten Quadrats und fügt sie dem vierten hinzu, und man lässt es die Haufen $(4 + 4)$ und $(1 + 7)$ miteinander vergleichen, wobei man fragt, ob es an beiden Tagen gleich viel isst oder nicht. Hierbei

betrachtet man drei aufeinanderfolgende Typen von Antworten. Während des ersten Stadiums wird zwischen den beiden Mengen ($4 + 4$) und ($1 + 7$) keine Äquivalenz wahrgenommen. Für die Versuchspersonen des dritten Stadiums besteht Äquivalenz, und zwischen beiden Stadien stellt man Übergangsreaktionen fest (zweites Stadium), bei denen die Gleichheit nicht durch additive Komposition, sondern durch vorhergehende Nachprüfung (durch Korrespondenz oder durch Zählung) konstruiert wird.“²¹

Die Kinder beginnen also schon vor der konkret-operationalen Periode, also vor der Grundschulzeit damit, die Fähigkeit zu erwerben, eine Invarianz zu erkennen, d. h. die gleiche Anzahl von Elementen einer vorgegebenen Menge trotz unterschiedlicher Anordnung dieser Elemente zu erkennen.

Sie können also auf der konkreten Ebene sehr wohl schon nachvollziehen, dass $4 + 4 = 1 + 7$ ist. Sie wissen auch, dass $4 + 4 = 8$ ist, und natürlich ist 8 eine Zahl. $4 + 4$ ist aber das Gleiche wie 8, nur in einer anderen Anordnung beziehungsweise in einer anderen Schreibweise, je nachdem, ob wir die konkrete Ebene betrachten oder die symbolische Ebene. Mit gleicher Begründung ist auch $4 + 4$ eine Zahl, ebenso wie $7 + 1$ oder $3 + 5$ und so fort.

Neuere Studien vom Massachusetts Institute of Technology, die auf das Problem der Fehlkommunikation in Piagets Experimenten hinweisen, deuten darauf hin, dass die Fähigkeit zur Erkenntnis der Invarianz schon viel früher erreicht wird, als Piaget sagt.

Schon Zweijährige seien nach diesen Studien in der Lage, die Invarianz zu erkennen.²²

Die Erkenntnis der Invarianz ist aber auch notwendig für die Einsicht in die Tatsache, dass Zahlen verschiedene Darstellungen besitzen. Dass diese Erkenntnis möglicherweise nicht hinreichend ist, ist ein Problem, das in den ersten Schuljahren gelöst werden sollte.

²¹ Piaget/ Szeminska (1972: 243)

²² Müller-Weuthen (2006: 10)

Grundschulkindern muss demnach bereits vermittelt werden, dass Ausdrücke wie

$$3 + 5 \qquad 4 - 2 \qquad 8 : 2 \qquad 12 \cdot 3 \qquad (*)$$

Zahlen sind. In der Grundschule sehen die Schülerinnen und Schüler Ausdrücke wie (*) aber meistens gar nicht als Zahlen, sondern als „Aufgaben“ an. Das fehlende Zahlverständnis hat verschiedene Ursachen, von denen eine mit Sicherheit die Tatsache ist, dass gerade in der Grundschule überwiegend die Rechenfertigkeit trainiert wird.

Wir wissen, dass die erlaubten Verknüpfungen zweier Zahlen wieder eine Zahl liefern. Da nicht jede beliebige Verknüpfung zweier Zahlen ein Element des gerade bekannten Zahlbereichs liefert, werden in der Grundschule Ausdrücke wie $2 : 3$ oder $2 - 3$ im Allgemeinen vermieden. Und grundsätzlich nicht erlaubt ist natürlich die Division durch 0. Dass aber jede Summe zweier Zahlen wieder eine Zahl des bekannten Zahlbereichs ist und jedes Produkt zweier Zahlen wieder eine Zahl des bekannten Zahlbereichs, lernen die Schülerinnen und Schüler schon, wenn der bekannte Zahlbereich sich noch auf den Bereich der natürlichen Zahlen beschränkt.

In Klassenstufe 6 wird der bekannte Zahlbereich der natürlichen Zahlen so erweitert, dass man bei jeder Division zweier Zahlen dieses neuen Zahlbereiches wieder eine Zahl dieses Zahlbereiches erhält. Dass diese Quotienten Zahlen sind, ist uns klar, aber es ist den Schülerinnen und Schülern zunächst noch nicht klar, und es war auch historisch nicht immer klar. Die alten Griechen hatten einen „Zahlbegriff, der durch zwei Dogmen festgelegt war:

- Eine Zahl ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Vielheit.
- Die Einheit ist unteilbar.

Auf der anderen Seite konnten bereits die vorgriechischen Völker Bruchzahlen mit Ziffern darstellen, mit ihnen rechnen und messen, sie in der Geometrie verwenden, mit ihnen praktische Probleme lösen. [...] Sie [die Griechen] haben ihre Vorstellungen von einer Zahl nicht aufgegeben und ihren Zahlbegriff nicht

erweitert, sondern ihre Theorie mit Zusatzbegriffen angereichert, die die Situation retten sollten. Der zunächst herangezogene Zusatzbegriff war der Begriff ‚Verhältnis‘. [...] Man konnte zwar sagen „a : b verhält sich wie 3 : 4“, aber 3 : 4 alleine war sinnlos. Man sprach konsequenterweise auch nicht von der (!) Zahl $\frac{3}{4}$, sondern davon, dass sich zwei (!) Zahlen wie 3 : 4 verhalten.“²³

Später sprachen die Griechen vom Wert eines Verhältnisses.

„Im 13. Jahrhundert schreibt Barlaam:

Der Wert eines Verhältnisses ist die Zahl (!), welche mit dem Hinterglied multipliziert das Vorderglied ergibt.

Der Wert des Verhältnisses 3 : 4 ist also $\frac{3}{4}$, weil $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ ist. Im praktischen

Gebrauch wurde dann aber nicht mehr zwischen ‚Verhältnis‘ und ‚Wert des Verhältnisses‘ unterschieden. [...] Die endgültige Anerkennung der Bruchzahlen in der offiziellen Theorie [...] geschah erst durch Petrus Rasmus (1515-1572), der den griechischen Zahlbegriff endgültig überwand und eine Zahl anders definierte:

Numerus est secundum quem unumquodque numeratur. (Eine Zahl ist, womit wir zählen und rechnen.)“²⁴

Wieso kommen aber nun so viele Kinder mit der Vorstellung von der Grundschule, 3 + 5 sei keine Zahl, sondern eine Aufgabe?

In der Primarstufe erlernen die Schülerinnen und Schüler, nachdem sie das Zählen gelernt haben, meist enaktiv die Addition, indem sie beispielsweise 3 Plättchen auslegen, dann 5 Plättchen dazu legen und dann die Anzahl aller Plättchen auszählen. Das heißt, zunächst sind zwei Anzahlen von Objekten gegeben und durch Auszählen wird die Gesamtzahl der Objekte bestimmt. Dabei wird das „kleine 1 + 1“ gelernt und später auch das große. Es folgen in der ganzen Primarstufe immer wieder Aufgaben, bei denen es darum geht, zwei miteinander verknüpfte Zahlen einfacher zu schreiben. Dabei wird auch das Gleichheitszeichen eingeführt, beispielsweise wird notiert 3 + 5 = 8 und das Gleichheitszeichen wird meist ausgesprochen als „ergibt“ oder „ist gleich“. Es

²³ Malle (2007: 4f.)

²⁴ Malle (2007: 5)

trennt aus Sicht der Schülerinnen und Schüler die „Aufgabe“ vom „Ergebnis“. Im Grundschulunterricht besteht eben oft die Aufgabe darin, das „Ergebnis“ anzugeben. Unter dem Ergebnis wird im Allgemein eine möglichst einfache Schreibweise der Zahl verstanden. Und dass der nicht immer glückliche Begriff „Ergebnis“ im Primarstufenunterricht nicht ausbleiben kann, ist auch klar, da eines der Hauptziele gerade der Erwerb der Rechenfertigkeit ist.

Selbstverständlich sind solche Übungen nötig zum Erwerb der Rechenfähigkeit. Allerdings besteht, wenn allzu einseitig darauf bestanden wird, alles so weit wie möglich auszurechnen, die Gefahr der Etablierung des „Ausrechnewahns“.

Welche Nebenwirkungen dieser hat, wird bei Sachaufgaben deutlich, zu deren Bearbeitung oft ein Muster „Frage – Rechnung - Antwort“ abverlangt wird. Es ist auch bei diesen Aufgaben meistens unerwünscht, dass Zahlen mit Verknüpfungszeichen als Lösung eines Problems präsentiert werden. Stattdessen wird erwartet, dass in der Antwort ein ‚ausgerechnetes Ergebnis‘ angegeben wird. Möglicherweise setzt die von den Schulbüchern repräsentierte Aufgabenkultur ihren Schwerpunkt zu sehr auf das „Ausrechnen“ und auf Regeln, was ja auch schon an den zahlreichen Merksätzen erkennbar ist.

Worin das gipfelt, beschreibt Grathwohl²⁵: „Dass der Unterricht verbreitet Regel und Rechnen überbetont, zeigt sich auch überdeutlich darin, dass Kinder mit längerer Schulerfahrung so genannte Kapitänsaufgaben nicht so gut als solche identifizieren wie Kindergartenkinder oder Kinder der ersten Klassen. Kapitänsaufgaben sind von der Art: ‚Ein Schiff ist 70 m lang und 30 m breit. Wie alt ist der Kapitän?‘ oder ‚In der Kasse einer Zeitungsbude sind am Abend 750 DM. Der Zeitungshändler hat heute 150 Zeitungen weniger verkauft als gestern. (Stelle eine Frage und beantworte sie)‘ Über 70% von 50 Kindern einer 4. Klasse rechneten bei der letzten Aufgabe etwas aus. ($750 - 150$, $750 + 150$ u. ä.)“

Die Kapitänsaufgaben gehen zurück auf eine Studie, die 1980 in Grenoble durchgeführt wurde. Dabei wurden Schülerinnen und Schülern sechs Aufgaben vom Typ „Auf einem Schiff sind 36 Schafe. Davon fallen 10 ins Wasser. Wie alt ist der Kapitän?“ gestellt. Das Ergebnis war ernüchternd, denn nur ein geringer

²⁵ <http://www.math.uni-frankfurt.de/~grathwoh/Mathematikdidaktik2-VL9.pdf> , Seite 11, Stand:1.9.08

Teil der französischen Schülerinnen und Schüler sagte, man könne diese Fragen nicht beantworten.²⁶

Grathwohl beschreibt eine Untersuchung, die Radatz an 333 Kindern von der Vorschule bis zur fünften Klasse durchführte. Sie ergab, dass die Vorschulkinder viel häufiger „Kapitänsaufgaben“ als solche identifizieren als Schülerinnen und Schüler der zweiten bis vierten Klassen, denn nur 10,7 % der Vorschulkinder, aber 31,7 % der Zweitklässler und 70,7 % der Dritt- und Viertklässler fingen bei derartigen Aufgaben an, etwas zu rechnen. Natürlich gibt es für solch ein Schülerverhalten eine Erklärung. Denn kein Kind in der Grundschule, das eine Aufgabe dieser Art liest und den Text wirklich versteht, wird überzeugt sein, dass es dort etwas zu rechnen gibt.

Der Ausrechnewahn kann nicht allein als Hauptursache angeführt werden, denn letztgenannte *Aufgabe* wäre auch *unausgerechnet* als 36 - 10 nicht richtig gelöst.

Dass überhaupt gerechnet wird, lässt vermuten, dass die *Aufgaben* nur oberflächlich gelesen werden. Möglicherweise geschieht das, weil die Schülerinnen und Schüler im Grundschulunterricht die Erfahrung gemacht haben,

- dass sie auf Rechenfähigkeit dressiert werden,
- dass bei Sachaufgaben irgendein ziemlich belangloser Text die Zahlen umgibt,
- dass man alle Zahlen, die im Text stehen, irgendwie miteinander verknüpfen muss,
- dass man irgendetwas ausrechnen muss, meist mit der gerade geübten Rechenart.

In der Tat ist es oft so, dass nach der Einführung einer Rechenart oder Rechentechnik eine Übungsphase folgt, dass danach Sachaufgaben gestellt werden, die nicht aus dem Interessenbereich oder der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler stammen oder ein völlig künstliches, einen Realitätsbezug vorgaukeln wollendes Problem enthalten oder zumindest auf die Schülerinnen und Schüler so wirken. Oft machen sie dabei die Erfahrung, dass

²⁶ Baruk (1989: 32)

man das Problem genau dann löst, wenn man alle in dem Text genannten Zahlen in der richtigen Weise miteinander verknüpft und nach der vorher geübten Methode ausrechnet. Der Text dient nur als *Verschlüsselung der Aufgabe*.

Das Lösungsverhalten der Schülerinnen und Schüler ist also geprägt vom mechanischen Vorgehen einerseits und dem Einfluss des Sachrechenunterrichts andererseits. Burmester und Bönig²⁷ machen einige Charakteristika der im Unterricht behandelten Sachaufgaben dafür verantwortlich. Diese hätten eine eindeutige Lösung, die im Aufgabentext gegebenen Daten seien zur Problemlösung weder über- noch unterbestimmt. Außerdem ließen sich durch Schlüsselwörter und Satzaufbau Hinweise entnehmen. Die Schülerinnen und Schüler gewöhnten sich an diese Merkmale. Dass man in der Primarstufe solche Aufgaben auswählt, ist verständlich, denn entwicklungspsychologisch sind die Kinder in der Grundschule im Allgemeinen überfordert, wenn sie abwägen sollen, welche der gegebenen Informationen für die Lösung eines Problems benötigt werden.

Aber in der Sekundarstufe besitzen die Schülerinnen und Schüler die entwicklungspsychologischen Voraussetzungen, um auch über- oder unterbestimmte Daten zur Lösung eines Problems zu nutzen, indem sie abwägen, welche der gegebenen Daten zur Lösung des Problems nützlich sind. Auch dies bedarf natürlich der Übung.

Im Vordergrund steht fast immer das Ausrechnen, was sich auch in der weitverbreiteten Konvention zeigt, die Schülerinnen und Schülern abverlangt, Sachaufgaben nach dem Muster „Frage – Rechnung – Antwort“, beziehungsweise „Lesen – Rechnung – Antwort“ zu bearbeiten. In der Sachaufgabe „Im Affenhaus sind 5 Schimpansen und 6 Paviane. Wie viele Affen sind im Affenhaus?“ ist die Frage bereits gestellt. Nun wird im Allgemeinen von den Schülerinnen und Schülern erwartet, dass sie „Rechnung: $5 + 6 = 11$ “ und einen geeigneten Antwortsatz hinschreiben. Es wäre interessant zu sehen, auf welche unterschiedliche Weise Lehrkräfte reagieren, wenn Schülerinnen und Schüler vom Muster abweichen.

²⁷ Burmester, K./ Bönig, D. (1993: 106)

Welche Reaktionen gäbe es, wenn keine Rechnung notiert würde, sondern die Antwortsätze „Es sind 11 Affen im Affenhaus.“ und „Es sind $5 + 6$ Affen im Affenhaus.“? Interessant ist auch, wie Schülerinnen und Schüler selbst über diese Antworten urteilen, denn in beiden Fällen ist die richtige Anzahl der Affen notiert worden.

Bei einer nicht repräsentativen Umfrage in einer 5. Klasse hielten die meisten Schülerinnen und Schüler die erste Antwort für richtig und kritisierten an der zweiten aber, dass „das Ergebnis nicht zu Ende“ ausgerechnet wurde. Einige meinten, dass die Aufgabe deswegen nicht gelöst sei.

Ich will hier keineswegs dafür plädieren, den Rechenunterricht abzuschaffen, aber für die zweite Antwort spricht immerhin, dass der Leser aus der Notation erkennen kann, dass das Problem richtig mathematisiert wurde.

Ein weiterer Grund für das fehlende Verständnis solcher Ausdrücke wie $(*)$ als Zahl liegt mit Sicherheit darin, dass Lehrerinnen und Lehrer oft nicht auf ihre Sprache achten und davon reden, dass die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel „die Aufgaben ins Heft schreiben“ und dort lösen sollen.

Aber wo ist beim Ausdruck $3 + 5$ die Aufgabe? Eine Aufgabe ist ein Auftrag oder eine Pflicht, irgendeine Handlung auszuführen. Der Ausdruck $3 + 5$ enthält keinerlei Handlungsauftrag, also ist er auch keine Aufgabe. Er ist lediglich eine andere Schreibweise für die Zahl 8.

Interessanterweise haben auch die Schülerinnen und Schüler, die $3 + 5$ als Aufgabe bezeichnen, kein Problem damit, $3 + 5 - 5$ *auszurechnen*, sie reden in dem Fall zwar gerne von einer Kettenaufgabe, aber sie behandeln dann doch $3 + 5$ als eine Zahl oder $5 - 5$ als eine Zahl, mit der gerechnet wird.

Es handelt sich wohl einfach um ein antrainiertes Unbehagen, solche *nicht ausgerechneten* Ausdrücke stehen zu lassen und als Zahlen aufzufassen.

Insbesondere wenn sich hinter diesen Ausdrücken noch ein „=“-Zeichen befindet, wie bei

$$3 + 5 = \qquad 4 - 2 = \qquad 8 : 4 = \qquad 12 \cdot 3 =$$

fühlen sich die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, etwas auszurechnen.

Was dann ausgerechnet wird, nämlich 8, 2, 4, 36 wird von den Schülerinnen und Schülern als Zahl anerkannt. Obwohl nun $3 + 5$ den Status einer Aufgabe hat, dagegen 8 als Zahl angesehen wird, setzen die Schülerinnen und Schüler ohne Bedenken ein Gleichheitszeichen dazwischen. Sie sehen also das Gleichheitszeichen als ein Symbol, das die *Aufgabe* vom Ergebnis trennt. Das Bewusstsein dafür, dass links und rechts vom Gleichheitszeichen nur zwei verschiedene Schreibweisen oder verschiedene Namen für die gleiche Zahl stehen, ist wenig ausgeprägt.

Dieses Missverständnis resultiert meines Erachtens hauptsächlich aus einer sprachlichen Ungenauigkeit. Im Mathematikunterricht der Primarstufe werden natürlich die Grundrechenarten geübt. Dabei haben die Schülerinnen und Schüler oft die Aufgabe, für solche Ausdrücke wie in (*) eine einfachere Schreibweise, beziehungsweise einen einfacheren Namen zu finden. In der Schülersprache heißt das, sie sollen „es ausrechnen“ oder ein Gleichheitszeichen setzen und dahinter schreiben, „was rauskommt“. Aber nicht ein Ausdruck wie $3 + 5 =$ ist eine Aufgabe, sondern es ist die Aufgabe, $3 + 5$ möglichst einfach zu schreiben. Dieses Missverständnis wird in Büchern auch oft durch Aufgaben nach dem folgenden Muster forciert:

$$5 + 3 = \square .$$

Das Kästchen legt deutlich eine Darstellung der Summe ohne Rechenzeichen nahe, im Gegensatz zu $5 + 3 = \square + \square$, das als Aufforderung verstanden wird, eine andere Schreibweise für $5 + 3$ als Summe zweier Summanden zu suchen.

Wie der Primarstufenunterricht die Grundvorstellung schafft und etabliert, das Gleichheitszeichen sei ein Übergangszeichen, beschreibt Scharloth:

„Wenn eine Zahl als Eigenschaft einer Ansammlung von Gegenständen gedeutet wird, schreiben Operations- und Relationszeichen Handlungen vor. Sie geben an, was mit den Gegenständen zu tun ist. $5 + 4 =$ heißt in diesem ‚handfesten‘ Kontext: Man nehme 5 Plättchen und lege 4 Plättchen dazu. Den Startschuss zum Beginn der Rechnung gibt das Gleichheitszeichen: Schiebe beide Haufen zusammen. 9 ist das Ergebnis, das angibt, was 5 und 4 ‚zusammen macht‘ oder ‚ergibt‘. Das Gleichheitszeichen trennt die Aufgabe

(links) vom Ergebnis (rechts), den Handlungsbefehl vom Handlungsergebnis, das Frühere vom Späteren, den Anfang vom Ende, die Arbeit vom Erfolg. Die Worte ‚macht zusammen‘, ‚ergibt‘ sind zur Bezeichnung dieses (Befehls-) Gleichheitszeichens gut gewählt, denn beide Ausdrücke kennzeichnen das Ende eines nach fester Vorschrift durchgeführten Arbeitsganges.“²⁸

Er rechtfertigt die Ergebnisfixierung so, dass die „Aufgabe – Ergebnis – Deutung“ des Gleichheitszeichens immer dann berechtigt sei, wenn nur das Ergebnis von Interesse sei. Einzelne Bestandteile sollten dabei zu einem Ganzen werden, ohne dass man dabei von den Einzelheiten abgelenkt werde. Gegenständliche Modelle könnten solche Vorstellungen fördern, denn wer lange mit Material hantiere, könne in der letzten Anordnung das Ergebnis der Rechnung ablesen. Er beschreibt weiter, welche Konsequenzen dies hat, nämlich dass für die Kinder der berechtigte Schluss nahe liege, es sei nur wichtig, „was raus komme“, alles andere „könne man vergessen“. Letztendlich würden so Rechenfertigkeiten und Routinen aufgebaut, da Aufgaben dabei nur Reize seien, auf die man möglichst schnell mit dem Resultat zu reagieren habe. Dieses sei schließlich die Vervollkommnung des zuvor unbefriedigten Zustands der Unausgeglichenheit.

Es ist noch nicht problematisch, wenn die Schülerinnen und Schüler diese oben genannten Ausdrücke Aufgaben nennen und es ist auch nicht schlimm, wenn sie bei diesen Ausdrücken den Wunsch haben, etwas auszurechnen. Problematisch wird es erst, wenn sie nicht erkennen, dass es sich um Zahlen handelt, sondern jede nicht „ausgerechnete Zahl“ als „Aufgabe“ sehen. Interessant ist, dass „schon bei den folgenden Beispielen die Aufgabe – Ergebnis – Deutung nicht mehr *ausreichend* bzw. zumindestens *problematisch*“ ist:

- „- $18 = 12 + 6$ (generell bei Zerlegungen)
- $8 + 7 = 8 + 2 + 5 = 10 + 5 = 15$
- $4 = 4$
- $2,80 \text{ DM} = 280 \text{ Pf}$

²⁸ Scharloth (1999: 84 f.)

$$3,55\text{m} = 355\text{cm}$$

- $8 + \varpi = 15$
- $17 = 9 + \varpi$ (generell bei Benutzung von Variablen)²⁹

Zerlegungen wie $18 = 12 + 6$ zeigen den Schülerinnen und Schülern deutlich, dass nicht links die „Aufgabe“ und rechts das „Ergebnis“ stehen muss. Solche Zerlegungen sollten im großen Umfang im Primarstufenunterricht geübt werden. Sie sind auch in den meisten Schulbüchern für die erste Klasse zu finden.

In „Welt der Zahl 1“³⁰ findet man solche Zerlegungsaufgaben schon, bevor der die Symbole $<$, $=$ und $>$ eingeführt werden. Beispielsweise findet man dort eine Aufgabe namens Schüttelbox. Dazu ist auf einem Foto ein Mädchen zu sehen, das eine solche Schüttelbox in der Hand hält. Eine Schüttelbox ist eine Schachtel, deren untere Seite durch eine Trennwand halbiert wird. Gibt man nun eine bestimmte Anzahl Plättchen in diese Schüttelbox, so enthält die eine Seite der Box eine bestimmte Anzahl der Plättchen und die andere Seite Box den Rest. Im ersten Beispiel sollen 7 Plättchen in der Schüttelbox sein. Dazu sind vier Beispiele im Buch mit ikonischen Darstellungen der Plättchen zu finden. Zuerst sind links 5 Plättchen und rechts 2. Daneben findet man die symbolische Darstellung $5 + 2$. Im zweiten Beispiel sind ikonisch 3 Plättchen links und 4 rechts dargestellt und die symbolische Darstellung ist noch unfertig: $3 + \quad$. Hier sollen die Schülerinnen und Schüler die fehlende Zahl ergänzen. Es folgen weitere Beispiele, bei denen teils die symbolische, teils die ikonische Darstellung unvollständig ist und von den Schülerinnen und Schülern ergänzt werden soll. Wie das oben erwähnte Foto andeutet, ist es leicht möglich und vielleicht auch sinnvoll, dieses zuvor auf enaktiver Ebene durchzuführen. Man muss nur eine bestimmte Anzahl von Plättchen in die Box geben, die Trennwand muss eine Lücke lassen, wenn die Box geschlossen und schon kann sich beim Schütteln der Box eine neue Anordnung der Plättchen ergeben. Auf diese Weise wird schon in der ersten Klasse gelernt, dass jede Zahl sich auf verschiedene Weisen darstellen lässt.

Auch Ausdrücke wie $8 + 7 = 8 + 2 + 5 = 10 + 5 = 15$ kommen natürlich in der Primarstufe vor, als Stichwort sei hier nur der Zehnerübergang genannt. Soll man hier von drei „Aufgaben“ und einem „Ergebnis“ sprechen oder von einer

²⁹ Padberg (1996: 88f.)

³⁰ Welt der Zahl 1 (2004: 24)

„Aufgabe“ und drei „Ergebnissen“ oder vielleicht von einer „Aufgabe“, zwei „Zwischenergebnissen“ und einem „Ergebnis“? Wer mit der Schüttelbox gearbeitet hat, weiß schon, dass dies alles gleich ist, so wie es die Gleichheitszeichen auch anzeigen, denn ob 8 Plättchen links und 7 Plättchen rechts liegen oder zu den 8 Plättchen links zwei weitere gelegt werden, sodass rechts noch 5 Plättchen liegen, was nach einer neuen Zählung ergibt, dass nun links 10 Plättchen liegen und rechts 5, all diese Veränderungen der Anordnung ändern nichts an der Anzahl. Es sind in jedem Fall 15 Plättchen.

Auch ein Ausdruck wie $4 = 4$ lässt trotz des Gleichheitszeichens keine Aufgabe – Ergebnis – Deutung zu. So ein Ausdruck kommt ebenfalls in der ersten Klasse vor, beispielsweise in folgender Aufgabe. Setze das richtige der Symbole $<$, $=$ oder $>$ in das Kästchen ein: $4 \boxtimes 4$. Natürlich kommen triviale Gleichungen der Art $4 = 4$ auch später noch vor, beispielsweise in einer Folge von Äquivalenzumformungen.

Auch im Zusammenhang mit Größen liegt eine Aufgabe – Ergebnis – Deutung fern, denn wo soll bei $2,80 \text{ DM} = 280 \text{ Pf}$ oder bei $3,55 \text{ m} = 355 \text{ cm}$ die Aufgabe, wo das Ergebnis sein? Es stehen hier jeweils verschiedene Zahlen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Aber es stehen dort auch verschiedene Einheiten. Insgesamt liefern die Kombinationen aus Zahl und Einheit in beiden Fällen die gleiche Größe. Bei Ausdrücken wie $8 + \boxtimes = 15$ oder $17 = 9 + \boxtimes$ zeigt das Gleichheitszeichen an, dass die Schülerinnen und Schüler Zahlen in das Kästchen einsetzen sollen, sodass links und rechts gleich viel ist.

Es wäre schön, wenn man einen Umgang mit dem Gleichheitszeichen etablieren könnte, der mehr als die Aufgabe – Ergebnis – Deutung zulässt, denn meines Erachtens hängt unmittelbar damit auch der Zahlbegriff zusammen und die Zahl als das Objekt sollte deutlich von ihrer Schreibweise, also von der Erscheinungsform des Objekts, unterschieden werden. Wenn man bei Beginn des Rechenunterrichts davon ausgeht, dass die Kinder die Invarianz verstehen, dann ist klar, dass 3 + 5 und 8 als zwei verschiedene Schreibweisen derselben Zahl anzusehen sind.

Die verschiedenen Namen für die gleiche Zahl sind nichts anderes als verschiedene Repräsentanten für dieselbe Äquivalenzklasse bezüglich der Relation „ $=$ “. Wenn das klar ist, dann braucht man nicht in der 6. Klasse ständig

zwischen Brüchen und Bruchzahlen zu unterscheiden, weil dann sowieso klar ist, dass die Zahlen etwas anderes sind als ihre Darstellung.

Wie am Beispiel mit der Schüttelbox gezeigt, lernen Grundschulkinder schon in der ersten Klasse, Zahlen in zwei Summanden zerlegt darzustellen und sie lernen dies im Allgemeinen, bevor sie umgekehrt lernen, zwei Zahlen zu einer Summe zusammenzufassen. Die Dominanz der Aufgabe – Ergebnis – Deutung des Gleichheitszeichens lässt vermuten, dass die Zerlegungen oftmals nur eine Nebenrolle im Mathematikunterricht der Grundschule einnehmen. An fehlender Reife der Schülerinnen und Schüler liegt es nicht, denn nach Piaget³¹ können sie die Invarianz erkennen und neuere Studien zeigten sogar, dass die Kinder noch viel eher dazu reif sind.

Also könnte man doch in der Grundschule intensiv üben, die Darstellungen von Zahlen zu verändern. Was oben für die Addition an einem Beispiel aus „Welt der Zahl“ beschrieben wurde, lässt sich mühelos auf die anderen Rechenarten übertragen. Wenn alle Grundrechenarten bekannt sind, bietet es sich auch an, Schülerinnen und Schülern einmal die Aufgabe zu stellen, möglichst viele verschiedene Namen für eine Zahl zum Beispiel 8 zu finden.

Ein Problem sieht allerdings Scharloth³², der solche Zerlegungsaufgaben wie $7 = 4 + \text{?}$ als nicht umstandslos mit der handlungsgebundenen „Aufgabe – Ergebnis – Deutung“ des Gleichheitszeichens vereinbar sieht, denn links stehe keine Aufgabe und rechts kein Ergebnis. Die umständliche, aber gängige Deutung sei, dass man 7 auf der linken Seite habe und nun zu beantworten habe, wie viele man auf der rechten Seite zur 4 hinzufügen muss, um genauso viel wie auf der linken Seite zu haben. Er sieht diesen handgreiflichen Kontext als unbefriedigend an, da die „Lösungszahl“ kein „richtiges“ Ergebnis sei.

Dem muss entgegnet werden, dass die „Aufgabe – Ergebnis – Deutung“ des Gleichheitszeichens nicht naturgegeben ist, sondern erst durch den Unterricht geschaffen wird. Es ist doch offensichtlich, dass Schülerinnen und Schüler in der Primarstufe die Vorstellung annehmen, das Gleichheitszeichen trenne die

³¹ Piaget/ Szeminska (1972: 242 f.)

³² Scharloth (1999: 84 f.)

links stehende Aufgabe vom rechts stehenden oder rechts hinzuschreibenden Ergebnis, wenn sie von Beginn an nur dieses Muster kennenlernen. Es ist auch ganz natürlich, dass sie dann verwirrt sind, wenn dieses gewohnte Muster nach sehr langer Zeit zum ersten Mal verändert wird.

Also muss es das Ziel sein, möglichst früh mit einer Verwendung des Gleichheitszeichens im eigentlichen Sinne zu beginnen, um nicht diese „Aufgabe – Ergebnis – Deutung“ zu etablieren. Wichtig ist zu wissen, dass links und rechts vom Gleichheitszeichen die gleiche Zahl stehen muss. Da jede Zahl unendlich viele verschiedene Namen besitzt, haben wir auch unendlich viele verschiedene Möglichkeiten, die Schreibweisen einer Zahl in einer Gleichung zu verändern. Wenn man von Beginn an jede richtige andere Schreibweise einer Zahl hinter dem Gleichheitszeichen akzeptiert, dann kommt es gar nicht zu dieser Deutung, die eine Fehldeutung ist. Es gibt keinen Grund zur Annahme, dass deswegen die Übung der Rechenfertigkeit ausbleiben muss. Schließlich kann man ja, wenn man gezielt das „Ausrechnen“ üben möchte, die Aufgabe stellen, dass man die einfachste Schreibweise angeben soll, während man sonst vielleicht die Aufgabe stellt, drei andere Schreibweisen anzugeben oder eine gegebene Zahl mit jeder Rechenart darzustellen.

Es gilt vielmehr, den Schülerinnen und Schülern zu vermitteln, dass das Gleichheitszeichen Gleichwertigkeit anzeigt, dass man sich darauf verlassen kann, dass man den links vom Zeichen stehenden Term durch den rechts davon stehenden ersetzen darf, wenn er zum Beispiel besser geeignet ist, um weiter verrechnet oder umgeformt zu werden. Die bei Grundschülerinnen und -schülern verbreitete Ansicht, dass ein *nicht ausgerechneter Term* eine Aufforderung zum Ausrechnen sei, wird sonst erst spät überwunden.

Das Problem, das der in der Primarstufe erworbene „Ausrechnewahn“ bei Einführung der Bruchrechnung in der 6. Klassenstufe verursacht, ist die dann ungewohnte Auffassung des Zahlbegriffs bei den Brüchen, wenn man vorher nur ausgerechnete Ergebnisse als Zahlen akzeptieren konnte.

Denn es ist verständlich, dass Schülerinnen und Schüler, die jahrelang vom „Ausrechnewahn“ geprägt wurden und es folglich nicht gewohnt sind, zwei oder mehrere Zahlen, die mit Rechenzeichen verknüpft sind, als Zahl zu akzeptieren,

sondern solche Terme als Aufgaben zu bezeichnen, ein großes Problem damit haben, wenn sie in Klassenstufe 6 plötzlich so etwas wie $\frac{1}{2}$ als Zahl akzeptieren sollen, weil dies doch nur eine andere Schreibweise für 1 : 2 ist. Denn da ist ja schließlich auch nichts ausgerechnet...

Dass es sogar der Übersichtlichkeit sehr zuträglich sein kann, wenn man Terme nicht ausrechnet, sondern sie so stehen lässt, weil man dann etwas von ihrer Entstehung erkennen kann, ist eine Erfahrung, wie sie Schülerinnen und Schüler meist erst viel später machen, wenn sie Terme mit Variablen kennenlernen, zum Beispiel: $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$.

Die Eigenschaften der Gleichheitsrelation lassen sich ebenfalls in der Primarstufe einsehen. Die Reflexivität ist klar. Wenn man fragt, welches der Symbole <, = oder > zwischen beispielsweise 7 und 7 gesetzt werden muss, kommen keine Zweifel auf. Die Symmetrie der Gleichheitsrelation ist auch leicht einzusehen. Wenn Hans gleich viel Geld hat wie Lisa und man fragt nun, ob Lisa weniger oder mehr Geld als Hans hat oder gleich viel wie er, dann ist die Antwort auch für Grundschulkinder wieder leicht zu finden. Baut man einen blauen Lego-Turm und anschließend einen roten Lego-Turm aus gleich vielen Steinen, wie sie der blaue Turm besitzt und dann noch einen gelben Lego-Turm, der gleich viele Steine enthält wie der rote Turm, dann kann jedes Grundschulkind auch ohne direkten Vergleich des blauen und des gelben Lego-Turms erkennen, dass diese aus gleich vielen Steinen gebaut wurden. So lässt sich leicht die Transitivität der Gleichheitsrelation einsehen.

Die Akzeptanz *nicht ausgerechneter Terme* als Zahlen liefert die Einsicht, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, eine Zahl zu schreiben. So etwas, wie das, was im Methodik-Lehrbuch von Lietzmann³³ zu lesen ist, würde dann vielleicht niemand mehr schreiben: „Die erste Eigentümlichkeit des Bruches, die im krassen Gegensatz zu dem im Bereiche der ganzen Zahlen Gewohnten steht, ist die, daß Brüche gleichen Wertes durchaus nicht in gleicher Weise

³³ Lietzmann (1961: 92)

geschrieben zu werden brauchen. Der Mathematiker würde sagen, man muß erst ausdrücklich definieren, wann zwei der neu eingeführten Zahlen gleich sind.“

Auch in vielen Texten zur Didaktik der Bruchrechnung und in Schulbüchern (vgl. Padberg, vgl. Schnittpunkt 6) erscheint die Bemerkung, dass nach Einführung der Bruchzahlen plötzlich jede Zahl auf unendlich viele verschiedene Weisen geschrieben werden kann.

Wenn der Bruchstrich, wie im später ausführlich beschriebenen pragmatischen Konzept, die gleiche Bedeutung hat wie „geteilt durch“, dann ist sofort klar, dass $\frac{4}{2}$ und $\frac{2}{1}$ zwei Schreibweisen derselben Zahl sind, denn dass $4 : 2$ dieselbe Zahl ist wie $2 : 1$, wird schon in der Grundschule unterrichtet und per Permanenzprinzip wird verallgemeinert, wann zwei Brüche gleich sind. Überhaupt sollte die Erkenntnis, dass nicht nur jeder Bruch, sondern jede Zahl viele Namen hat, in der Grundschule vorbereitet werden. Teilweise findet man dies auch in den Schulbüchern für die erste Klasse.

Nach Einführung der Subtraktion kann den Grundschülerinnen und -schülern schon deutlich gemacht werden, dass es für jede Zahl sogar unendlich viele Schreibweisen gibt. Dieses ist leicht einzusehen. Hat man nämlich einmal zum Beispiel die Zahl 6 als Differenz $a - b$ dargestellt, dann ist für jede natürliche Zahl n auch $(a + n) - (b + n) = 6$. Hierfür lassen sich problemlos Beispiele auf der enaktiven Ebene finden, zum Beispiel wenn zuerst 5 Streichhölzer gegeben sind, von denen 3 entfernt werden. Anschließend sind es 6, von denen 4 entfernt werden etc.

Ein Grundschulkind, das 3 von 8 Bonbons an seinen Tischnachbarn weggibt, kann leicht einsehen, dass es für die übrig bleibende Anzahl der Bonbons nichts ändert, wenn es zu Beginn nicht 8 Bonbons, sondern 2 Bonbons mehr gehabt hätte und davon nicht 3, sondern 5 abgegeben hätte. Natürlich findet man derartiges auch in Schulbüchern für die Primarstufe und es lohnt sich, dieses intensiv zu bearbeiten.

Die Invarianz der Subtraktion $\forall a, b, n \in \mathbb{N}_0 : a - b = (a + n) - (b + n)$ ist nämlich ein Analogon zum Erweitern und Kürzen von Brüchen. Wenn das Verständnis für diese Invarianz frühzeitig gewonnen wird, dann ist der Weg zum Verständnis der Brüche erleichtert. Ebenso wie man jede natürliche Zahl auf unendliche

Weisen als Differenz zweier natürlicher Zahlen schreiben kann, kann man jeden Bruch auf unendlich viele Weisen als Quotienten zweier natürlicher Zahlen schreiben. Was eben schon an konkreten Beispielen beschrieben wurde, wird in der ersten Klasse sogar schon auf der symbolischen Ebene klar.

„Welt der Zahl 1“ zeigt auf der Rückseite des Einbands eine Minus-Tanne. Auf dem Hintergrund einer gezeichneten Tanne findet man 21 Zeilen mit Differenzen.

1. Zeile:			$0 - 0$		
2. Zeile:			$1 - 0$		$1 - 1$
3. Zeile:		$2 - 0$		$2 - 1$	$2 - 2$
4. Zeile:		$3 - 0$	$3 - 1$		$3 - 2$
5. Zeile:	$4 - 0$	$4 - 1$	$4 - 2$		$4 - 3$

und so fort.

Man kann natürlich verschiedene Eigenschaften dieser Minustanne untersuchen. Blickt man auf die nach rechts unten laufenden Reihen, die parallel zum rechten Rand laufen, von denen eine zur Illustration fett gedruckt wurde, so sieht man dass innerhalb einer Reihe jede Differenz gleich ist. Sie groß wie der Minuend bei ihrem obersten Vertreter.

Was hier im Zahlenraum bis 20 zu beobachten ist, das wird natürlich später mit größeren Zahlen wiederholt und weiter gefestigt. Ein Beispiel dafür ist folgende Aufgabe aus einem Schulbuch für die zweite Klasse:

„Immer das gleiche Ergebnis. Schreibe noch zwei Aufgaben dazu.

a) $9876 - 6789$ b) $8765 - 5678$ c) $7654 - 4567$ d) $6543 - 3456$ “³⁴

Diese Aufgabe erinnert an die Erkenntnis, die man bei der Minustanne erworben hat: Vergrößerung oder Verkleinerung von Minuend und Subtrahend um die gleiche Zahl verändert die Differenz nicht. Vielleicht sehen die Schülerinnen und Schüler es hier nicht sofort, aber spätestens bei der Erkenntnis, dass alle Differenzen gleich sind, fällt ihnen vielleicht auf, dass von

³⁴ Stark in Mathematik 2 (2009: 13)

links nach rechts sowohl die Minuenden als auch die Subtrahenden stets um 1111 kleiner werden.

Ich halte es für sehr wichtig im Zusammenhang mit der Einführung des Gleichheitszeichens darauf zu achten, dass es um den Vergleich zweier Zahlen geht und nicht darum zu sehen, was sich aus der linken Seite ergibt. Deutlicher wird dies sicher, wenn neben der Gleichheitsrelation und dem „=“- Zeichen auch die „>“- und „<“- Zeichen mit den dazugehörigen Relationen eingeführt werden.

Außerdem sollte auf eine saubere Notation geachtet werden. Oft finden sich in Schulbüchern Texte wie

Denke dir eine Zahl, addiere 10, verdoppele die Summe und addiere noch einmal 12, subtrahiere 32 und nimm davon die Hälfte!

Solche Aufgaben sollen die Kopfrechenfähigkeit, den Umgang mit Begriffen und die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler fördern, sowie die Fähigkeit, einen derartigen Text in einem Term zu mathematisieren.

Wenn Schülerinnen und Schüler die gleiche Aufgabe schriftlich lösen sollen, wird sich, falls 6 die gedachte Zahl ist, folgende Rechenkette in einigen Heften finden:

$$6 + 10 = 16 \cdot 2 = 32 + 12 = 44 - 32 = 12 : 2 = 6$$

Von den fünf Gleichheitszeichen steht nur eines zu Recht. Hier wurde zwar an keiner Stelle falsch gerechnet, aber diese Notation, die auch bei Kindern nach der Grundschule sehr verbreitet ist, ist natürlich völlig falsch. Jeder Leser, der von der Transitivität der Gleichheitsrelation weiß, kann hier zum Beispiel glauben, dass $6 + 10 = 6$ behauptet wird.

Schließlich sei hier noch vermerkt, dass auch in anderen Fällen mit der Transitivität der Gleich-Relation oft fehlerhaft umgegangen wird. Dass die Division ebenso wie die Subtraktion in der Menge der natürlichen Zahlen keine

innere Verknüpfung ist, lernen die Grundschulkinder schon sehr früh an Aufgaben, die sich nicht lösen können. Gerade aber im Alltag kommt es doch häufig vor, dass man trotzdem etwas teilen möchte, auch wenn es nicht ohne weiteres möglich ist. Wenn man vier Kindern 30 Bonbons gibt, dann wollen und werden die Kinder diese unter sich aufteilen, auch wenn *es nicht geht*. Sie machen dann die Erfahrung, dass ein Rest von 2 Bonbons bleibt, der noch an die vier Kinder aufgeteilt werden muss.

Der Sachverhalt $30 : 4 = 7 + 2 : 4$ wird oft als $30 : 4 = 7 \text{ R } 2$ dargestellt, was als sieben Rest zwei gesprochen wird. Diese Darstellung ist zwar weit verbreitet, aber sie ist schlecht, weil die Transitivität der „ $=$ “-Relation bei dieser Schreibweise nicht gegeben ist. Es ist nämlich ebenso $23 : 3 = 7 \text{ R } 2$, aber keineswegs ist $30 : 4 = 23 : 3$.

Anstatt hier diese neue Schreibweise einzuführen, die nicht mit den Anforderungen einer Äquivalenzrelation vereinbar ist, bietet es sich an, eine Schreibweise zu verwenden, die korrekt und mit der später eingeführten Bruchrechnung voll kompatibel ist.

So kann man statt $30 : 4$ auch $28 : 4 + 2 : 4$ schreiben, denn, wie jedes der Kinder sofort einsieht, ist 28 die größte Anzahl Bonbons, die kleiner oder gleich 30 und durch 4 teilbar ist. Und dass eben dann noch 2 Bonbons übrig bleiben, die an die 4 Kinder aufgeteilt werden müssen, ist auch klar. Also spricht nichts gegen die Einführung der Schreibweise $30 : 4 = 28 : 4 + 2 : 4$.

Sie macht auch sofort deutlich, welcher Gedanke hinter der Zerlegung steckt, während $30 : 4 = 7 \text{ R } 2$ nicht auf den ersten Blick erraten lässt, was die Schreibfigur auf der rechten Seite mit der auf der linken zu tun haben mag. Dass man im Ausdruck $30 : 4 = 28 : 4 + 2 : 4$ noch $28 : 4$ durch 7 ersetzen kann, wissen die Kinder, weil doch jedes Kind 7 Bonbons bekommt, beziehungsweise weil sie schon wissen, dass $28 : 4 = 7$ ist. Dass für $2 : 4$ momentan kein anderer Name bekannt ist, sollte nicht beunruhigen, denn dieser Ausdruck steht dafür, dass noch 2 durch 4 geteilt wird. Das entspricht ja auch der gerade gemachten Erfahrung der Kinder, dass 2 Bonbons übrig bleiben, die noch an die vier Kinder aufgeteilt werden sollen. Solange die Kinder nicht wissen, wie man $2 : 4$ auf andere Weise schreiben kann, werden sie nichts dagegen haben, $2 : 4$ zu schreiben. Also gibt es außer Bequemlichkeit keinen Grund, hier die Schreibfigur „R 2“ einzuführen.

Solange Schülerinnen und Schüler in der Grundschule die Division mit Rest auf eine Art und Weise lernen, die diese Notation mit sich bringt, ist es leider unumgänglich, sie in Klassenstufe 5 oder 6 darauf hinzuweisen, dass diese Notation durch eine andere ersetzt werden muss.

Auch wenn, die Schülerinnen und Schüler in Klassenstufe 6 meist noch keine großen Kenntnisse im Bereich der Gleichungslehre besitzen, kann man mit ihnen dabei folgendermaßen vorgehen: Aus der Gleichheit von zum Beispiel $7 \text{ R } 2$ und $30 : 4$ sowie von $7 \text{ R } 2$ und $23 : 3$ ergibt sich die Gleichheit von $30 : 4$ und $23 : 3$. Nun multipliziere man beide Zahlen nacheinander mit 4 und mit 3 und erhalte $90 = 92$. Dass $90 \neq 92$ ist, ist aber jedem klar. Da die Multiplikation mit 4 beziehungsweise mit 3 nichts an der Gleichheit der Zahlen geändert haben kann, muss die Ursache für die fehlerhafte Gleichung $90 = 92$ an anderer Stelle zu finden sein. Offensichtlich war schon die Anfangsgleichung $30 : 4 = 23 : 3$ falsch. Diese entstand aber aus der Übertragung der Restschreibweise. Also ist solch ein Ausdruck wie $7 \text{ R } 2$ keine Zahl, da die 2 in Abhängigkeit vom Divisor immer eine andere Bedeutung haben kann.

Ein einfacherer Weg, diese Ungleichheit von $30 : 4$ und $23 : 3$ nachzuvollziehen, ist der folgende:

Teilt man 30 durch 4, so bleiben 2 übrig, die noch durch 4 zu teilen sind. Teilt man dagegen 23 durch 3, so bleiben ebenfalls 2 übrig, die aber nur noch durch 3 zu teilen sind. Dieses sollte wirklich jedem klar machen, dass $30 : 4$ und $23 : 3$ zwei verschiedene Zahlen sind.

Es ist nicht immer einfach, den Schülerinnen und Schülern diese Einsicht zu vermitteln und sie dazu zu bringen, gewohnte Vorstellungen und angeeignete Schreibweisen abzulegen und durch neue, bessere zu ersetzen. Daher wird auch dann natürlich nicht von allen sofort die bessere Schreibweise übernommen, wenn sie eingesehen haben, dass die in der Grundschule gelernte Schreibweise schlecht ist.

Neben diesem Problem der Verletzung der Transitivität der „ $=$ “ – Relation ergibt sich ja noch ein weiteres Problem, dass ebenfalls bei jedem, dem es auffällt, für Unverständnis sorgen muss.

15 : 2, 30 : 4 und 45 : 6, beziehungsweise wie ich im Folgenden zugunsten einer besseren Übersichtlichkeit schreiben werde $\frac{15}{2}$, $\frac{30}{4}$ und $\frac{45}{6}$, sind nur drei verschiedene Darstellungen derselben Zahl, wie nach dem Erlernen von Kürzen und Erweitern der Darstellung klar ist.

Also kann man Gleichheitszeichen setzen: $\frac{15}{2} = \frac{30}{4} = \frac{45}{6}$.

Und natürlich sollte man auch dann noch Gleichheitszeichen setzen dürfen, wenn man die Division mit Rest durchgeführt hat. Aber nach der oben beschriebenen Schreibweise erhielte man:

$$7 \text{ R } 1 = 7 \text{ R } 2 = 7 \text{ R } 3.$$

Zusammengefasst gelten bei Verwendung dieser Schreibweise die

Gleichungen $\frac{15}{2} = 7 \text{ R } 1$, $\frac{30}{4} = 7 \text{ R } 2$ und $\frac{58}{8} = 7 \text{ R } 2$.

Vergleicht man nun die Zahlen anhand ihrer Darstellung in der Restschreibweise, dann kommt man erstens zu dem Schluss, dass

$$\frac{15}{2} \neq \frac{30}{4} \text{ gelten muss, was aber falsch ist und man kommt zweitens zu dem}$$

$$\text{Schluss, dass } \frac{30}{4} = \frac{58}{8} \text{ sein muss, was ebenfalls falsch ist.}$$

Ich denke, es bedarf keiner weiteren Argumente für die Abschaffung dieser Schreibweise.

Fazit: die wesentlichen Punkte meiner Kritik richten sich an Missverständnisse und Fehlvorstellungen, die häufig im Primarstufenunterricht erworben werden:

- das Missverständnis zwischen Zahl und Aufgabe und der „Ausrechnewahn“ der Schülerinnen und Schüler erschweren die Akzeptanz von Quotienten als Zahlen,
- die fehlerhafte Notation der Division mit Rest stellt Gleiches ungleich dar, lässt aber Ungleiches gleich erscheinen. Eine bessere Schreibweise wurde schon genannt. Grundsätzlich sollte bei allen Bezeichnungen und Schreibweisen, die im Mathematikunterricht eingeführt werden, gut überlegt werden, ob und wie man sie einführt. Gerade im Rahmen des

Bruchrechnenunterrichts werden, wie in 3. 4 dargestellt, oft viele neue Bezeichnungen eingeführt, die Klarheit schaffen sollen und oft das Gegenteil bewirken.

3.3 Falsche Vorstellungen, die durch den Bruchrechnen – unterricht entstehen können

In den Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung hat Günter Ziegler auf eine von vielen mathematisch fehlerhaften Pressemeldungen hingewiesen, in dem er einen Artikel der Bild-Zeitung zitierte, in der Bild für eine Kampagne des Deutschen Turnerbundes warb und die Nötigkeit des Anliegens folgendermaßen begründete:

„Denn mittlerweile ist jedes sechste Kind in Deutschland zu dick! Mitte der 90er Jahre war es nur jedes dritte.“³⁵

Bekannt ist auch die Anekdote über den Fußball-Spieler Szymaniak, dem man in den 60er Jahren für eine Vertragsverlängerung eine Gehaltserhöhung um ein Drittel seiner Bezüge angeboten hatte, worauf dieser sehr spontan geantwortet haben soll, dass er für ein Drittel nicht unterschreibe, es müsse mindestens ein Viertel sein.

Diese beiden Beispiele für den fehlerhaften Umgang mit Brüchen beziehen sich auf den Größenvergleich von Brüchen. Es gibt auch für die fehlerhafte Anwendung von Rechenregeln zahlreiche weitere Beispiele, die ich aber hier nicht aufführen möchte. Fehler können jedem unterlaufen, aber diese eben genannten Fehler sind möglicherweise eng verknüpft mit Fehlvorstellungen über Brüche.

Viele Fehlvorstellungen, die im Zusammenhang mit Brüchen existieren, wurden von Padberg und Wartha dargestellt. Sie werden hier deshalb bis auf ein Beispiel nicht erneut aufgeführt.

³⁵ Ziegler (2007: 176)

Padberg nennt als eine häufig genannte falsche Argumentation bei Brüchen mit gleichen Zählern, insbesondere bei Stammbrüchen, der kleinere der Brüche sei derjenige mit dem kleineren Nenner, zum Beispiel $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$, da $3 < 4$.³⁶

Jede Zahlbereichserweiterung bringt ihre eigenen Problembereiche mit sich und damit auch ihre eigenen Fehlvorstellungen und verleitet so die Schülerinnen und Schüler zu fehlerhaften Strategien. Dass es sich hierbei nicht um eine Fehlvorstellung, sondern nur um ein „voreiliges Urteil“ handelt, halte ich für möglich. Denn, wenn „<“ statt „>“ geschrieben wird, deutet dies meines Erachtens noch nicht darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler eine falsche Vorstellung vom Größenvergleich haben. Analog findet man nach Einführung der negativen Zahlen oft die Fehlvorstellung $-3 < -4$ mit der Begründung, dass $3 < 4$ sei.

In beiden Fällen resultiert der fehlerhafte Größenvergleich vermutlich aus der Tatsache, dass nicht die neuen Zahlen, also die Brüche oder die negativen Zahlen miteinander verglichen werden, sondern dass stattdessen der Vergleich auf den altbekannten Teil der Terme beschränkt wird. Ob die Ursache wirklich darin liegt, dass ein Verständnis für den Größenvergleich fehlt, kann hier nicht geklärt werden. Weitere mögliche Ursachen sind eine Verwechslung der Zeichen oder Voreiligkeit. Fordert man Schülerinnen und Schüler dagegen auf, zu entscheiden, welche der Zahlen größer ist und diese Entscheidung zu begründen, dann wird man eine Antwort erhalten, aus der man gezieltere Schlüsse ziehen kann.

Unabhängig von der Wahl des didaktischen Konzeptes wird es also immer so sein, dass Fehler gemacht werden und in den Köpfen der Lernenden Fehlvorstellungen entstehen können.

Interessant wird es aber, wenn ihre Ursachen bekannt sind. Denn dann kann man daran arbeiten, diese zu vermeiden.

Möglicherweise sind sogar einige der Fehlvorstellungen konzeptbedingt oder zumindest Folge einiger Darstellungen oder Begriffe, die in Schulbüchern auftauchen.

³⁶ Padberg (2002: 81)

Eine der häufigsten falschen Vorstellungen über die Brüche ist die, dass mit den Brüchen neue Zahlen auftauchen, die mit den natürlichen Zahlen gar nichts zu tun haben, so als handele es sich bei den natürlichen Zahlen und den Brüchen um disjunkte Mengen. Insbesondere wird die Tatsache, dass die Menge der natürlichen Zahlen eine echte Teilmenge der Menge der positiven Brüche einschließlich 0 ist, häufig nicht klargestellt oder man liest sofort danach einen Satz, der die klare Sicht auf die Dinge wieder behindert.

In einem Schulbuch heißt es zum Beispiel:

„Jede Bruchzahl kann durch beliebig viele verschiedene Brüche dargestellt werden.“³⁷

Dieses Schulbuch bezeichnet mit „Bruchzahl“ die Zahl und mit „Bruch“ eine Darstellung dieser Zahl. Was an der Aussage stört, ist, dass ein solcher eingerahmter Satz bei den meisten Schülerinnen und Schülern den Eindruck hervorruft, dass dieses eine besondere, neue Eigenschaft der Bruchzahlen sei. Manchmal wird sogar darauf hingewiesen, dass dies eine Besonderheit der Brüche sei, die sie von den natürlichen Zahlen unterscheide.

Dazu ist zu sagen, dass es schlichtweg falsch ist.

Sogar Padberg stellt fest:

„Brüche dienen zur Beschreibung des Ergebnisses von Divisionsaufgaben mit natürlichen Zahlen als Dividend und Divisor (Beispiel: $3 : 4 = \frac{3}{4}$), ...“³⁸

Später schreibt er, dass es neben vielen Gemeinsamkeiten auch deutliche Unterschiede zwischen natürlichen Zahlen und Brüchen gebe. So sei die Notation der natürlichen Zahlen im Wesentlichen eindeutig, während die Bruchzahlen viele verschiedene Darstellungen besäßen, welche die äquivalenten Brüche seien.³⁹

³⁷ Schnittpunkt 6 (2006: 60)

³⁸ Padberg (2002: 36)

³⁹ Padberg (2002: 179)

$\frac{3}{4}$ ist eine andere Schreibweise für $3 : 4$ und analog gibt es für jeden Bruch

unendlich viele verschiedene Schreibweisen, da man diese Darstellung mit jeder natürlichen Zahl erweitern darf, ohne dass dabei die Zahl verändert wird. Aber ebenso war es auch schon bei den natürlichen Zahlen, da sich jede natürliche Zahl als Differenz zweier anderer Zahlen schreiben lässt und man Minuend und Subtrahend additiv um die gleiche Zahl vergrößern kann.

Nebenbei bemerkt ist es aus rein logischen Gründen ja schon ersichtlich, dass, was für die Bruchzahlen gilt, auch für die natürlichen Zahlen gelten muss. Denn, wenn irgendeine Aussage A für alle Brüche gilt und die Menge der natürlichen Zahlen eine Teilmenge der Menge der Brüche ist, dann gilt A insbesondere auch für diese Teilmenge.

Nun ist es aber nicht zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler diesen Überblick über die logischen Zusammenhänge haben und genau deswegen ist dieser explizite Hinweis auf die unendlich vielen Darstellungsmöglichkeiten der Bruchzahlen sehr problematisch.

Eine weitere Fehlvorstellung, die häufig beim Bruchrechnenunterricht entsteht, scheint die zu sein, dass man einen Bruch daran erkennt, dass er einen Bruchstrich enthält. Wenn in einem Schulbuch⁴⁰ Mengenangaben folgendermaßen tabellarisch gegenübergestellt werden, dann ist zu erwarten, dass dadurch Fehlvorstellungen geweckt werden.

Angabe ohne Bruch	Angabe mit Bruch
6 Stück (Eier)	$\frac{1}{2}$ Dutzend (Eier)

Es ist davon auszugehen, dass auch eine solche Darstellung die Schülerinnen und Schüler glauben lässt, die natürlichen Zahlen gehörten nicht zu den Bruchzahlen.

Offenbar wird hier zwar mit dem Wort „Bruch“ nur die Schreibfigur gemeint und nicht die Zahl selbst, denn sonst wäre es ja absurd. Aber wie sollen 11- oder 12-jährige Einsteiger in das Thema diesen Sachverhalt überblicken? Es steht

⁴⁰ Neue Wege 6 (2006: 72)

nirgends der deutliche Hinweis geschrieben, dass es sich hier nur um verschiedene Schreibweisen derselben Größe handelt. Stattdessen wird der Eindruck erweckt, man erkenne die Bruchzahlen am Bruchstrich. Diese Fehlvorstellung ist vergleichbar mit der Fehlvorstellung, einen Spieler der deutschen Fußballnationalmannschaft erkenne man daran, dass er das Trikot dieser Mannschaft trage. Denn erstens trägt nicht jeder Spieler der deutschen Fußballnationalmannschaft jederzeit dieses Trikot, sondern er trägt auch mal andere Kleidung, sieht also auch mal anders aus. Ebenso trägt nicht jede Bruchzahl immer ihren Bruchstrich, sondern jede von ihnen lässt sich auch ohne diesen darstellen, zum Beispiel mit Komma, in vielen Fällen aber auch ohne Komma. Auch Bruchzahlen können ihr Aussehen wechseln. Es muss also darauf hinauslaufen, dass die natürlichen Zahlen ganz besondere Bruchzahlen sind. Zweitens ist nicht jeder Träger des genannten Trikots ein Spieler dieser Mannschaft, denn es ist für jedermann problemlos käuflich zu erwerben. Auch im Bereich der Zahlen gibt es welche, die sich mit einem Bruchstrich schmücken, ohne zur Menge der Bruchzahlen zu gehören, man denke nur an alle irrationalen Zahlen: $\frac{\pi}{4}$ ist keine Bruchzahl!

Andere Fehlvorstellungen werden durch ungenauen Sprachgebrauch gefördert. In einem Übungsbuch ⁴¹ findet man folgende Erklärung:

„Es ist also möglich, gleich große Flächen oder Mengenangaben mit unterschiedlichen Bruchzahlen anzugeben. [...] Die Brüche behalten dabei immer denselben Wert.“

In diesem Buch werden, entgegen der in den meisten Büchern üblichen Terminologie, die Zahlen als Brüche bezeichnet und die Darstellungen der Brüche als Bruchzahlen, was ja schon deswegen absurd ist, weil der *Begriff Bruchzahl* den *Zahlbegriff* in sich trägt. Was der Wert eines Bruches sein soll, wird nicht erläutert.

Auf die Problematik der Begrifflichkeit wird im folgenden Kapitel eingegangen.

⁴¹ Lerntainer 5.+ 6. Klasse Mathematik (1998: 11)

3.4 Begriffe und Pseudobegriffe im Bruchrechnenunterricht

Es erscheint mir sinnvoll, die große Anzahl von Begriffen und Pseudobegriffen vorzustellen, die im Rahmen des Bruchrechnenunterrichts immer wieder auftauchen, um anschließend festzustellen, welche dieser Begriffe nötig sind und welche nur verzichtbare Pseudobegriffe sind. Gemeint sind zum Beispiel: Bruch, Bruchzahl, Zähler, Nenner, echter Bruch, unechter Bruch, gemeiner Bruch, Stammbruch, Kehrbruch, reziproker Bruch, irreduzibler Bruch, Dezimalbruch, Dezimalzahl, gemischte Zahl, konkreter Bruch, Scheinbruch, kürzen oder erweitern. Viele dieser Begriffe oder Pseudobegriffe werden üblicherweise im Bruchrechnenunterricht eingeführt. Zumindest erscheinen sie in den meisten Schulbüchern.

Schon Zech stellt dazu fest: „Zwischen ‚Bruch‘, ‚konkretem Bruch‘, ‚Bruchoperator‘, ‚Bruchzahl‘ wird im unterrichtlichen Sprachgebrauch nicht konsequent unterschieden: Man gibt den hingeschriebenen Brüchen - je nach Situation - einen bestimmten Sinn und wechselt die Aspekte (ähnlich wie schon bei den natürlichen Zahlen).“⁴²

Auch im „Lehrplan des Landes Schleswig-Holstein für die Sekundarstufe 1 der weiterführenden allgemeinbildenden Schulen für das Fach Mathematik“ findet man einen inkonsequenten Sprachgebrauch. Auf den Seiten für die „Orientierungsstufe, Klassenstufe 6“ findet man folgende Wörter: Bruchzahl, Bruch, Dezimalbruch, Dezimalzahl, konkreter Bruch, erweitern, kürzen, gemischte Zahl.

Wenn nun solche Begriffe eingeführt, aber nicht konsequent benutzt werden, somit also Verwirrung nicht auszuschließen ist, muss hinterfragt werden, ob die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung dieser Wörter verstehen oder ob sie diese Wörter überhaupt verstehen können. Viele von ihnen tragen, auch wenn sie konsequent verwendet werden, nicht zum Verständnis bei oder fördern sogar Missverständnisse und Fehlvorstellungen.

Sowohl in der didaktischen und methodischen Literatur zur Bruchrechnung als auch in fast allen Schulbüchern stößt man auf die Begriffe „Bruch“ und

⁴² Zech (1995: 146)

„Bruchzahl“. Die dahinter steckende Idee ist die, dass zwischen der Zahl (Bruchzahl) und ihrer Darstellung (Bruch) unterschieden werden soll.

Was zunächst den Anschein von Präzision hat, stellt sich bald als Quelle zahlreicher Widersprüche dar, die sich oft schon aus dem inkonsequenten Gebrauch der Begriffe ergeben.

Beispielsweise findet man in einem Schulbuch⁴³ auf einer der ersten Seiten zum Thema die Aufgabe:

„Gib fünf verschiedene Schreibweisen als Bruchzahl für die Zahl 3 an.“

Auf der Folgeseite wird festgestellt, dass verschiedene Brüche dieselbe Bruchzahl darstellen. Kurz danach folgt in einem Merksatzkästchen die Bezeichnung „Wert eines Bruches“, mit der offensichtlich nichts anderes gemeint ist als das, was vorher als Bruchzahl bezeichnet wurde:

„Brüche werden erweitert, indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert werden. Der Wert des Bruches ändert sich dadurch nicht.“

Wie soll denn ein Schüler auseinanderhalten, was mit „Bruch“, „Bruchzahl“ und „Wert des Bruches“ gemeint ist? Auf der folgenden Seite liest man im nächsten Merksatzkästchen:

„Beim Kürzen und Erweitern von Brüchen wird der Wert eines Bruches nicht verändert, nur seine Schreibweise.“

Zu den Bezeichnungen „Bruch“, „Bruchzahl“ und „Wert des Bruches“ gesellt sich nun die „Schreibweise des Bruchs“. Es kommt noch schlimmer, denn nur vier Seiten später findet man in einem weiteren Merksatzkästchen:

„Zwischen zwei Brüchen lassen sich beliebig viele weitere Brüche finden.“

⁴³ Zahlen und Größen 6 (2002: 13 ff.)

Dieses steht im Widerspruch zu der Tatsache, dass $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ nach der in diesem Buch verwendeten Terminologie zwei verschiedene Brüche sind. Denn natürlich findet man nicht unendlich viele Brüche, sondern gar keinen Bruch, der dazwischen liegt. Überhaupt ist es nicht nachvollziehbar, wieso ein Bruch irgendwo auf der Zahlengeraden liegen soll, wenn mit „Bruch“ doch nur die Darstellung, also die Schreibweise einer Bruchzahl gemeint ist. Später wird in demselben Buch noch beschrieben, wie man Brüche addiert, subtrahiert und so weiter und dass die Rechenregeln wie zum Beispiel das Kommutativgesetz oder das Assoziativgesetz für die Addition von Bruchzahlen gelten.

Man stelle sich vor: 11- bis 12-jährige Schülerinnen und Schüler trauten den Lehrenden ebenso wie ihren Schulbuchautoren zu, dass sie sich gut überlegt hätten, warum sie einmal vom „Bruch“, einmal von der „Bruchzahl“, dann von der „Schreibweise“ und vom „Wert des Bruches“ reden. Diese Schülerinnen und Schüler werden verzweifeln beim Versuch, dieses zu ergründen.

Bevor hier ein Vorschlag gemacht wird, auf welche der bisher gebräuchlichen Bezeichnungen verzichtet werden kann, wird kurz dargestellt, welche Begriffe und Pseudobegriffe bisher üblich sind und was sie im Allgemeinen bezeichnen. Die Erklärungen beziehen sich nur auf die Menge der positiven rationalen Zahlen.

Unter „Bruchzahl“ wird meist die Äquivalenzklasse bezüglich der Relation „=“ verstanden. So auch bei Padberg.⁴⁴

Das bedeutet $\frac{1}{2}$ bezeichnet dieselbe Bruchzahl wie $\frac{2}{4}$.

Mit „Bruch“ wird nur die Darstellung einer Bruchzahl mithilfe zweier Zahlen bezeichnet, die übereinander, durch einen Bruchstrich getrennt, geschrieben werden.

Das bedeutet $\frac{1}{2}$ ist ein anderer Bruch als $\frac{2}{4}$, obwohl es sich selbstverständlich um dieselbe Zahl handelt. Das Wort „Bruch“ bezieht sich also in weitverbreiteter Verwendung nur auf die Schreibweise einer Bruchzahl.

⁴⁴ Padberg (2002: 33)

Im „Lehrplan des Landes Schleswig-Holstein für die Sekundarstufe 1 der weiterführenden allgemeinbildenden Schulen für das Fach Mathematik“⁴⁵ findet man folgende Sätze:

„Die Schülerinnen und Schüler sollen mit Brüchen rechnen können.“

„Die Schülerinnen und Schüler sollen Brüche als Zahlen und als Anteile auffassen können.“

„In der Hauptschule wird der zunehmenden Bedeutung des Rechnens mit Dezimalzahlen (schriftliches Rechnen, Taschenrechner, Computer) dadurch Rechnung getragen, daß sich das Rechnen mit Bruchzahlen nur auf einfache Fälle bezieht.“

Diese Beispiele zeigen, dass die Begriffe „Bruch“ und „Bruchzahl“ an dieser Stelle synonym eingesetzt werden. Dagegen ist nichts einzuwenden. Wenn sie allerdings so verwendet werden, wie sie bei Padberg⁴⁶ und in den meisten Schulbüchern verwendet werden, nämlich „Bruchzahl“ als Bezeichnung für die Zahl und „Bruch“ für ihre Darstellung, dann wird im ersten der drei zitierten Sätze der Eindruck erweckt, als rechne man mit den Darstellungen der Zahlen statt mit den Zahlen selbst. Dasselbe ist natürlich der Fall, wenn man von Bruchrechnung statt von Bruchzahlrechnung redet, wie hier im zweiten zitierten Satz „Brüche als Zahlen“ bezeichnet werden. Im dritten Satz ist davon die Rede, dass mit Bruchzahlen gerechnet wird. Ob der synonyme Gebrauch der Begriffe absichtlich oder versehentlich geschieht, ist nicht ersichtlich.

Nach dem Thema „Bruchzahlen“ findet man in diesem Lehrplan übrigens ein weiteres großes Thema mit dem Titel „Dezimalzahlen“, was verschleiern soll, dass mit Bruchzahlen und Dezimalzahlen in Klassenstufe 6 genau dieselben Zahlen gemeint sind.

Die Darstellung einer Bruchzahl, die aus einem Bruchstrich, sowie einer Zahl über dem Bruchstrich und einer unter dem Bruchstrich besteht, wird auch als „gemeiner Bruch“ bezeichnet.

Die Zahl, die über dem Bruchstrich steht, wird als „Zähler“, die Zahl, die unter dem Bruchstrich steht, wird als „Nenner“ bezeichnet.

⁴⁵ Lehrplan (Seite 29)

⁴⁶ Padberg (2002: 33)

Klar ist, dass man nicht vom Zähler oder Nenner einer Bruchzahl sprechen kann, da sich jede Bruchzahl auf unendlich verschiedene Weisen darstellen lässt. Diese Begriffe beziehen sich immer nur auf eine einzige Darstellung.

Die Zahl $\frac{2}{3}$ hat nicht den Zähler 2 und den Nenner 3, sondern diese Darstellung hat den Zähler 2 und den Nenner 3. Ebenso ist es unsinnig zu sagen: „Der Quotient 5 hat den Dividenden 10.“ Stattdessen wäre es sinnvoll zu sagen: „5 lässt sich als Quotient mit dem Dividenden 10 und dem Divisor 2 darstellen.“ Nach obiger Differenzierung zwischen Bruch und Bruchzahl muss also vom Zähler oder Nenner eines Bruches, nicht jedoch von einer Bruchzahl gesprochen werden.

Als „echter Bruch“ wird ein Bruch bezeichnet, dessen Zähler kleiner als sein Nenner ist. Es sind genau die Brüche echt, die kleiner als 1 sind.

Als „unechter Bruch“ wird jeder nicht echte Bruch bezeichnet also jeder, der größer oder gleich 1 ist.

Als „Kehrbruch“ oder „reziproker Bruch“ eines Bruches wird der Bruch mit vertauschtem Zähler und Nenner bezeichnet, zum Beispiel ist $\frac{2}{1}$ der Kehrbruch von $\frac{1}{2}$. Der Begriff „Kehrbruch“ bezieht sich also auch nur auf die Darstellung.

Denn wenn Zähler und Nenner vertauscht sein sollen, dann ist $\frac{10}{6}$ nicht Kehrbruch von $\frac{3}{5}$. Das ist aus Gründen, die noch folgen werden, unpraktisch. Nebenbei bemerkt ist sofort klar, dass von Bruch und seinem Kehrbruch mindestens einer auch ein unechter Bruch sein muss.

Ein „Kernbruch“ oder „irreduzibler Bruch“ oder „vollständig gekürzter Bruch“ oder die „Grunddarstellung einer Bruchzahl“ ist ein Bruch $\frac{a}{b}$, wobei a und b teilerfremd sind.

Unter einem „Dezimalbruch“ könnte man einen Bruch verstehen, der im Zehnersystem dargestellt ist, so wie man einen Bruch, der im Dualsystem dargestellt ist, als Dualbruch bezeichnen könnte: $\frac{1}{4_{10}}$ im Zehnersystem ist nur eine andere Schreibweise für die duale Schreibweise $\frac{1}{100_2}$. Diese Bedeutung ist aber mit der Bezeichnung nicht gemeint.

Was ein „Dezimalbruch“ ist, können alle Schülerinnen und Schüler mit Internetzugang, in der freien Enzyklopädie „Wikipedia“ nachlesen: Ein Dezimalbruch ist „ein Bruch, dessen Nenner zehn oder allgemeiner eine Potenz von zehn (mit natürlich-zahligem Exponenten) ist. Manchmal wird der Dezimalbruch auch Zehnerbruch genannt. Der Dezimalbruch kann im Zehnersystem direkt als Dezimalzahl geschrieben werden. Hierbei werden die Bruchstellen vom ganzzahligen Teil mit dem Dezimaltrennzeichen (in Deutschland und Österreich ein Komma, in der Schweiz und im englischsprachigen Raum ein Punkt) abgetrennt.“⁴⁷

Sind demnach $\frac{2}{10}$ und $\frac{20}{100}$ Dezimalbrüche, $\frac{1}{5}$ jedoch nicht? Immerhin sind $\frac{2}{10}$ und $\frac{20}{100}$ Brüche, deren Nenner zehn oder eine Zehnerpotenz sind. Das ist bei $\frac{1}{5}$ nicht der Fall. Man kann demnach $\frac{2}{10}$ und $\frac{20}{100}$ „direkt als Dezimalzahl“ schreiben, muss nur „die Bruchstellen vom ganzzahligen Teil mit dem Dezimaltrennzeichen“ abtrennen, was auch immer das bedeuten mag.

Es ist zu bezweifeln, dass dieser Beitrag aus „Wikipedia“ Schülerinnen und Schülern verständliche Antwort auf die Frage gibt, was ein Dezimalbruch ist.

Mit einem „Dezimalbruch“ ist also die Darstellung einer Zahl im Zehnerstellenwertsystem gemeint. Nach Einführung so vieler Bezeichnungen könnte man in Versuchung geraten, sich die Frage nach der Existenz interessanter Kombinationen und ihrer möglichen Vertreter zu stellen, zum Beispiel: Gibt es eigentlich unechte Dezimalbrüche?

⁴⁷ <http://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalbruch> (Stand: 1. 9. 2008)

Es ist etwa $\frac{3}{2}$ ein unechter gemeiner Bruch. Es ist aber auch $\frac{3}{2} = 1,5$.

Man könnte also 1,5 als unechten Dezimalbruch bezeichnen, wenn man noch weitere Pseudobegriffe einführen wollte.

Eine „gemischte Zahl“ ist eine Bezeichnung für die Darstellung nicht ganzzahliger unechter Brüche mithilfe eines ganzzahligen Teils und eines gemeinen Bruchs, wobei letztgenannter Teil hinter den ganzzahligen Teil geschrieben wird.

So wird beispielsweise $\frac{17}{3}$ als unechter Bruch bezeichnet. Die gleiche Zahl in der Schreibweise $5\frac{2}{3}$ wird dagegen als gemischte Zahl bezeichnet. Wieder handelt es sich indes nur um zwei verschiedene Darstellungen der gleichen Zahl. Man beachte aber die Inkonsequenz, dass im ersten Fall von einem „Bruch“ gesprochen wird und mit der Bezeichnung „Bruch“ die Darstellung gemeint ist, während anschließend von einer „Zahl“ gesprochen wird. Selten, so zum Beispiel in „Mathematik heute“ wird statt von einer „gemischten Zahl“ von einer „gemischten Schreibweise“ gesprochen.

Im Allgemeinen ist bei der „gemischten Schreibweise“ der Bruchteil, der hinter den ganzzahligen Teil geschrieben wird, kleiner als 1.

Es bliebe zu klären, ob sich jeder Bruch in gemischter Schreibweise darstellen lässt und nicht nur jeder unechte Bruch, der kein Scheinbruch ist. Aber

Ausdrücke wie $1\frac{1}{1}$ als andere Schreibweise für die Zahl 2 oder $0\frac{4}{7}$ statt $\frac{4}{7}$ oder $4\frac{17}{11}$ statt $5\frac{6}{11}$ sind ungewöhnlich. Man könnte bei $4\frac{17}{11}$ von einer „unechten

gemischten Zahl“ sprechen, wenn man noch mehr Begriffe einführen wollte.

Problematisch ist diese gemischte Schreibweise insbesondere deswegen, weil es sonst mathematischen Konventionen entspricht, dass nur das Multiplikationssymbol $\cdot$ zwischen Zahlsymbolen weggelassen werden darf, nicht jedoch das Additionssymbol $+$.

So steht $5\frac{2}{3}$ für $5 + \frac{2}{3}$, während $a\frac{b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$ ist. Auch darf sonst immer zwischen Zahlensymbolen nur das Multiplikationssymbol weggelassen werden, zum Beispiel: $2\pi = 2 \cdot \pi$ oder $3\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$.

Auch allen Befürwortern dieser gemischten Schreibweise, die mit einer hohen Alltagsrelevanz argumentieren, muss widersprochen werden. Denn diese Alltagsrelevanz beschränkt sich meist nur darauf, dass einige wenige Größen mit dieser gemischten Schreibweise bezeichnet werden. In Rechnungen taucht sie aber kaum auf. Zwar gibt es so etwas wie die $1\frac{1}{2}$ l - Liter-Flasche und auf

Fahrradreifen findet man manchmal Bezeichnungen wie $28 \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{5}{8}$.

Dort findet man also die „gemischte Schreibweise“. Aber man hat mit diesem Ausdruck im Üblichen nichts weiter zu tun, als ihn dem Fahrradhändler beim Kauf eines neuen Reifens oder Schlauchs vorzulegen, damit dieser ein passendes Ersatzstück aushändigen kann. Ebenso gut könnte anstelle dieses Ausdrucks ein Buchstabencode stehen.

Als „konkreter Bruch“ wird ein Anteil einer Größe, zum Beispiel $\frac{1}{4}m$, bezeichnet.

Als „Scheinbruch“ wird ein Bruch bezeichnet, dessen Zähler ein Vielfaches seines Nenners ist.

Scheinbrüche sind also beispielsweise $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{1}, \frac{42}{14}, \dots$

Unter „erweitern“ versteht man die Multiplikation des Zählers und des Nenners eines Bruches mit dem gleichen Faktor ($\neq 0$).

Haben Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinsamen Teiler, dann kann man Zähler und Nenner durch diesen gemeinsamen Teiler dividieren. Dieses nennt man „kürzen“.

Als „Stammbruch“ wird ein Bruch bezeichnet, dessen Zähler 1 ist.

Das bedeutet $\frac{1}{2}$ ist ein Stammbruch. $\frac{2}{4}$ ist zwar die gleiche Zahl, aber hiernach kein Stammbruch. Jedoch lässt sich $\frac{2}{4}$ zu einem Stammbruch kürzen.

Als „zusammengesetzter Bruch“ wird jeder Bruch bezeichnet, der kein Stammbruch ist.

Der einzige unechte Stammbruch, der zugleich auch ein Scheinbruch ist und sogar seinem Kehrbuch gleich, ist $\frac{1}{1}$. Damit ist dies unter den unechten Brüchen auch der einzige, dessen Kehrbuch ebenfalls ein unechter Stammbruch ist.

Wie schon deutlich wurde, wird in der Didaktik besonderer Wert auf die Unterscheidung zwischen Bruch und Bruchzahl gelegt. So beschreibt Padberg⁴⁸ den Weg von der Einführung von konkreten Brüchen über die Brüche zum Bruchzahlbegriff: „Eine weitere wichtige Voraussetzung für die Entwicklung des Bruchzahlbegriffes ist die Einsicht, dass man ein und dieselbe Größe durch verschiedene konkrete Brüche benennen kann. [...] Während die konkreten Brüche Namen für Größen sind, sind die Brüche Namen für Zahlen, die sogenannten Bruchzahlen. Die Frage, wann zwei Brüche dieselbe Bruchzahl bezeichnen, beantworten wir durch Rückgriff auf die konkreten Brüche.“

Um also zu prüfen, ob zwei Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ dieselbe Bruchzahl bezeichnen, braucht man sich nur einen beliebigen Repräsentanten einer beliebigen Größeneinheit zu wählen, also etwa ein Rechteck als Repräsentanten für einen Flächeninhalt F , um hieran zu überprüfen ob $\frac{m}{n} F$ und $\frac{p}{q} F$ die gleiche Größe bezeichnen.“

Es ist natürlich völlig klar, dass das Objekt etwas anderes ist als sein Name. Der Name 2 ist ja auch etwas anderes als die Zahl 2.

2 und $1 + 1$ sind nur zwei verschiedene Namen für die gleiche Zahl.

⁴⁸ Padberg (2002: 53 f.)

Ist diese große Anzahl von Begriffen und Pseudobegriffen wirklich notwendig, um den Schülerinnen und Schülern das Verständnis für die Bruchrechnung zu vermitteln? Oder ist es nicht vielmehr so, dass die Lehrbücher und der Unterricht viel zu sehr mit Begriffen und Pseudobegriffen überladen sind, sodass den Schülerinnen und Schülern dadurch der Umgang mit den Brüchen nicht erleichtert, sondern erschwert wird? Wie sollen Schülerinnen und Schüler der 6. Klassen die Sprache der Mathematik verstehen, wenn sie in einem Gestammel aus Begriffen und Pseudobegriffen vorgetragen wird?

Es mag vielleicht auf den ersten Blick haarspalterisch, kleinlich oder provokativ wirken, dass hier versucht wird, Wörter, die schon in weiter Verbreitung auf die oben genannte Weise benutzt werden, durch andere abzulösen oder sie ganz wegzulassen. Aber da diese herkömmlichen Bezeichnungen zum Teil inkonsequent verwendet werden und zum anderen Teil von vornherein falsche Vorstellungen wecken, ist es ratsam, hier im Interesse der Schülerinnen und Schüler aufzuräumen und dabei einige Pseudobegriffe wegzulassen. Denn man braucht diese sowieso nicht. Sinnvoll ist außerdem, einige Begriffe durch andere zu ersetzen, um einen konsequenten und klaren Umgang mit den gewählten Begriffen zu ermöglichen.

Es kann nämlich keinesfalls von Schülerinnen und Schülern erwartet werden, dass sie wissen, welcher Kategorie der jeweils verwendete Zahlbegriff zugeordnet werden muss.

Es gibt Begriffe wie den der *natürlichen Zahl*. Darüber hinaus gibt es Zahlbegriffe wie *gerade Zahl* oder *ungerade Zahl*, die den Lernenden lange bekannt sind und etwas über die Eigenschaft der Zahl aussagen, nämlich ob sie durch 2 teilbar ist oder nicht. Analog dazu sind Begriffe wie *Quadratzahl*, *Primzahl* und *Dreieckszahl* Begriffe, die etwas über bestimmte Eigenschaften der Zahl aussagen. Ob eine Zahl natürlich, gerade, ungerade, prim oder zusammengesetzt etc. ist, hängt nur von der Zahl selbst ab, nicht von ihrer Darstellung.

Im Gegensatz dazu sagen die oben erwähnten Pseudobegriffe nichts über Eigenschaften der Zahlen aus sondern nur über die Darstellungsweise der Zahlen. Wie sollen Schülerinnen und Schüler diesen Unterschied erkennen?

Übrigens sollte konsequent auch nicht von *Römischen Zahlen* oder *Dualzahlen*, sondern zum Beispiel von *Römischen Zahlzeichen* oder *Dualdarstellung einer Zahl* gesprochen werden. Die Auswahl der Begriffe, die im Folgenden als Grundbegriffe des späteren Konzepts erklärt werden, zielt auf Klarheit, Einfachheit und Konsequenz.

Ich schlage vor, statt von „Bruchzahlen“ ab jetzt von **Brüchen** zu reden oder beides synonym als Bezeichnung für die Zahl selbst zu verwenden.

Dagegen soll von der **Darstellung der Zahl** gesprochen werden, wenn es nur um die Darstellung geht. Da im Allgemeinen von Bruchrechnung geredet wird, passt der Begriff „Bruch“ gut für die Zahlen, denn wir rechnen mit Zahlen.

Daraus ergeben sich aber einige Konsequenzen. **Wann immer vom Zähler oder Nenner die Rede ist, geht es nur um die Darstellung eines Bruches.**

Es ist nicht sinnvoll zu sagen, ein Bruch habe den Nenner 3, da mit „Bruch“ nun eine rationale Zahl bezeichnet wird, die unendlich viele Darstellungen besitzt. Ebenso ist es nicht sinnvoll, vom Kürzen oder Erweitern eines Bruchs zu reden. Man kann nur die Darstellung kürzen oder erweitern. Was vielleicht zuerst etwas holprig und ungewohnt klingen mag, hat sich aber in meinem Unterricht als praktisch erwiesen. Dadurch, dass vermieden wurde, vom Kürzen oder Erweitern eines Bruches zu sprechen, stattdessen aber vom **Kürzen** oder **Erweitern der Darstellung**, wurde gar nicht erst der Eindruck erweckt, dass die Zahl selbst dadurch verändert wird. Schon bei Übungsaufgaben, die früher „Kürze die Brüche!“ hießen und die nun „Stelle die Brüche gekürzt dar!“ heißen, klingt es gar nicht mehr holprig, es verlangt höchstens dem Lehrpersonal ein wenig Gewöhnung ab.

Als **Stammbruch** bezeichnen wir jeden Bruch, der eine Darstellung mit dem Zähler 1 besitzt. Der Stammbruch wird somit im Gegensatz zur obigen Verwendung als Zahl behandelt. $\frac{2}{4}$ ist also ein Stammbruch, da $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ebenso wie der Stammbruch, so war auch der Kehrbruch eines Bruches nach der alten Konvention nur eine bestimmte Darstellung einer Bruchzahl. Zu $\frac{3}{7}$ war

also $\frac{7}{3}$ der Kehrbruch. Da sich die Bezeichnung „Bruch“ aber nur auf die Darstellung bezog, war beispielsweise $\frac{14}{6}$ nicht der Kehrbruch von $\frac{3}{7}$.

Nach der neuen Vereinbarung soll auch der **Kehrbruch eines Bruches** den Status einer Zahl bekommen. Zu jedem positiven Bruch existiert ein multiplikativ inverser Bruch. Das ist genau sein Kehrbruch. Anders gesagt ist zu $\frac{a}{b}$ mit $a \neq 0$ derjenige Bruch der Kehrbruch, der die Darstellung $\frac{b}{a}$ besitzt.

Die Begriffe „Scheinbruch“, „echter Bruch“ und „unechter Bruch“ sind nicht nötig. Sie hätten die Bedeutung einer *Scheinzahl*, einer *echten Zahl* und einer *unechten Zahl*.

Statt vom „Kernbruch“ muss von der *Kerndarstellung* oder von der *vollständig gekürzten Darstellung* geredet werden.

Von „gemischten Zahlen“ soll keine Rede mehr sein, sondern, wenn man überhaupt nicht auf diese Darstellung verzichten mag, dann von *gemischter Schreibweise* oder *gemischter Darstellung*.

In jedem Fall sollte man dann aus oben dargelegten Gründen eine wirklich sinnvolle Änderung vornehmen, nämlich die Einfügung des Additionssymbols, sodass zum Beispiel $3 + \frac{1}{2}$ statt wie bisher $3\frac{1}{2}$ geschrieben wird.

Dass man auf die gemischte Schreibweise ganz verzichten kann, zeigt das Beispiel Frankreich, wo man sie laut Schrage⁴⁹ nicht findet: „Brüche in Größenangaben mit Standardeinheiten finden wir [...] kaum in französischen Sekundarstufenwerken; hier wird dann die Dezimalschreibweise verwendet. Ferner sucht man vergeblich nach der gemischten Schreibweise.“

Auch in der freien Internet-Enzyklopädie Wikipedia ist zu lesen: „In manchen Ländern wie Frankreich sind gemischte Zahlen unüblich.“⁵⁰ Kritisch anzumerken ist hier wieder die Begrifflichkeit, denn wie soll man es verstehen, dass bestimmte Zahlen in einigen Ländern unüblich sind. Gibt es vielleicht auch

⁴⁹ Schrage (1988: 49)

⁵⁰ <http://de.wikipedia.org/wiki/Bruchrechnung> (Stand: 1. 9. 2008)

Länder, in denen zum Beispiel die negativen Zahlen oder die Primzahlen unüblich sind? Natürlich ist das nicht der Fall und auch in Frankreich gibt es dieselben Zahlen wie überall auf der Welt. Gemeint ist vermutlich, dass man sich in Frankreich nicht der gemischten Schreibweise bedient.

Statt vom „Dezimalbruch“ sollte auch nicht von „Dezimaldarstellung“ oder „Dezimalschreibweise“, sondern besser von **Kommadarstellung** oder „Kommасchreibweise“ geredet werden. Es ist doch im Unterricht sowieso klar, mit welchem Stellenwertsystem gerade gearbeitet wird.

Das Weglassen all dieser unnützen Bezeichnungen ist schon deswegen sinnvoll, da diese zu keinerlei Klarheit beitragen, sondern nur das Verständnis erschweren, indem sie falsche Vorstellungen wecken oder unterstützen, nämlich die, dass es, so wie es Bruchzahlen gibt, auch noch Dezimalzahlen und gemischte Zahlen gibt, als seien sie etwas anderes.

Ein Unterricht, in dem ein Zahlbereich erweitert wird, bringt außerdem so viele Neuerungen mit sich, dass es Schülerinnen und Schülern nicht zuzumuten ist, sie an dieser Stelle noch mit unnützen Vokabeln zu belasten. Sie vernebeln den Blick auf das Wesentliche.

Man bedenke nur einmal, welche wichtigen Neuerungen diese Zahlbereichserweiterung mit sich bringt außer der Tatsache, dass man nun je zwei natürliche Zahlen durcheinander dividieren kann und wieder eine Zahl erhält, zum Beispiel:

- Brüche kann man nicht zählen, da sie keinen Vorgänger oder Nachfolger haben.
- Zwischen zwei Zahlen liegen nun unendlich viele weitere.
- Es gibt keine kleinste positive Zahl.
- Zu jeder positiven Zahl a und jeder natürlichen Zahl b gibt es nun genau einen Bruch x , sodass $a \cdot x = b$. Daraus folgt sofort: Jede Zahl außer 0 hat nun eine „Partnerzahl“ (ihr multiplikatives Inverses), mit der man sie multiplizieren kann, um das Produkt 1 zu erhalten.
- Man kann zwei Brüche finden, sodass ihr Produkt kleiner ist als jede der beiden Zahlen. Ebenso kann es sein, dass wir einen Bruch durch

einen anderen dividieren und der Quotient größer ist als Dividend und Divisor.

All dies gab es in der vorher bekannten Menge der natürlichen Zahlen nicht. Es sind wichtige Neuerungen. Da erscheint es aberwitzig, wenn unnützen Vokabeln so viel Bedeutung beigemessen wird wie „echter Bruch“, „gemeiner Bruch“ oder „unechter Bruch“, die an keiner Stelle zum Verständnis beitragen und auch nirgends das Gespräch über die Objekte erleichtern. Vielleicht noch schlimmer war die Verwendung von Wörtern wie „Dezimalzahl“ und „gemischte Zahl“, da sie Schülerinnen und Schülern wirklich die Vorstellung vermittelten, diese Zahlen seien etwas anderes als die Bruchzahlen.

4 Anforderungen an ein Konzept für den Bruchrechnen – unterricht und Fragenkatalog zur Beurteilung von Konzepten

Von einem geeigneten didaktischen Konzept für die Bruchrechnung muss man erwarten, dass es folgende Kriterien erfüllt:

- Es muss entwicklungspsychologisch dem Stand der Schülerinnen und Schüler angepasst sein.
- Es muss fachlich korrekt und praktikabel sein.
- Es soll den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit geben, vergessene Regeln auf einfachem Wege selbst wieder herzuleiten.
- Innerhalb des Konzeptes muss folgender Fragenkatalog überzeugend beantwortet werden können:

1. Was ist ein Bruch?
2. Wie kann man Brüche darstellen?
3. Wie können wir erkennen, welcher Bruch größer oder kleiner ist?
4. Wie können wir Brüche addieren und subtrahieren?
5. Wie können wir Brüche multiplizieren und dividieren?
6. Welche Regeln gelten in der Menge der Brüche?

Anhand dieses Fragenkataloges werden die vorgestellten Konzepte auf ihre Tauglichkeit geprüft. Nur wenn in einem Konzept alle Fragen überzeugend geklärt werden können, dann kann es auch für den Unterricht geeignet sein.

Zu den Punkten 4 und 5 sei bemerkt, dass es natürlich sehr leicht ist, die Frage zu beantworten, wie man zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert. Beispielsweise ist $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ die Summe dieser beiden Zahlen. Mit den Fragen 4 und 5 ist im Folgenden gemeint, wie man die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten zweier Brüche möglichst einfach schreiben kann.

5 Innermathematische Konzepte

Innermathematische Konzepte sind keine didaktischen Konzepte. Sie sind nicht als Grundlage für die Unterrichtsplanung geeignet.

Aber ein Bruchrechnenunterricht kann nur dann erfolgreich stattfinden, wenn die Lehrerin oder der Lehrer den Inhalt innermathematisch verstanden hat. Es reicht nicht, ein didaktisches Konzept zu kennen. Wer nicht die innermathematischen Hintergründe kennt, wer insbesondere die Konstruktion der Brüche aus den natürlichen Zahlen nicht kennt oder nicht den Blick aus der Perspektive von den reellen Zahlen auf die Brüche werfen kann, wird niemals souverän Bruchrechnung unterrichten können. Dazu nämlich ist es, wie bei allen anderen mathematischen Themen unerlässlich, die Materie auf der fachlichen Ebene durchdrungen zu haben.

5.1 Die Konstruktion des Halbkörpers $(\mathbb{Q}_{\geq 0}, +, \cdot)$ mit der Ordnung $\leq$ aus dem geordneten kommutativen Halbring $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ oder die „Bottom-up-Methode“

Gegeben ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der 0 mit den Verknüpfungen $+$, $\cdot$, $-$, $:$ und der Ordnungsrelation $\leq$.

Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind in dieser Menge assoziative und kommutative innere Verknüpfungen. Außerdem ist $\cdot$ distributiv über $+$.

0 ist das neutrale Element bezüglich der Addition, 1 ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation.

Wir betrachten das kartesische Produkt $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$.

In dieser Menge ist natürlich $(1, 2) \neq (2, 4)$, denn für alle

$(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ gilt: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Auf dieser Menge definieren wir eine Relation $\sim$ durch:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Nun zeigen wir, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ ist:

1. Sei $(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$.

Dann gilt $ab = ba$, da die Multiplikation in $\mathbb{N}_0$ kommutativ ist.

Aus $ab = ba$ folgt sofort $(a, b) \sim (a, b)$. Also ist $\sim$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ reflexiv.

2. Seien (a, b) und $(c, d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ und es gelte $(a, b) \sim (c, d)$.

$(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da$, weil die Multiplikation in $\mathbb{N}_0$

kommutativ ist und die Relation „ $\sim$ “ symmetrisch ist.

Aus $cb = da$ folgt nun sofort $(c, d) \sim (a, b)$.

Also ist $\sim$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ symmetrisch.

3. Seien (a, b) , (c, d) und $(e, f) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ und es gelte $(a, b) \sim (c, d)$ und

$(c, d) \sim (e, f)$.

Dann gilt $ad = bc$ und $cf = de$.

$ad = bc \Rightarrow adf = bcf \Rightarrow adf = bde \Rightarrow (af - be)d = 0 \Rightarrow af - be = 0$, da

$d \in \mathbb{N}$.

$af - be = 0 \Rightarrow af = be \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$. Also ist $\sim$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ transitiv.

Die auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ definierte Relation $\sim$ ist also eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzklassen sind die Brüche: $\mathbf{K}_{(a,b)} = \{ (x, y) \mid (x, y) \sim (a, b) \}$.

Das heißt $\mathbf{K}_{(a,b)} = \mathbf{K}_{(c,d)} \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d)$.

Zum Beispiel ist $\mathbf{K}_{(1,2)} = \{ (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots \}$

Definition: $\mathbb{Q}_{\geq 0} := \{ \mathbf{K}_{(a,b)} \mid (a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \}$, statt $\mathbf{K}_{(a,b)}$ schreiben wir auch $\frac{a}{b}$.

Satz 1: Kürzungsregel / Erweiterungsregel

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \forall b, c \in \mathbb{N} : \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Beweis: Sei $a \in \mathbb{N}_0$, seien $b, c \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen der Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{N}_0$: $ac \cdot b = bc \cdot a$, das heißt, $(ac, bc) \sim (a, b)$.

Ein Bruch ändert sich also nicht, wenn man bei einer beliebigen Darstellung eines Bruches den Zähler und den Nenner mit derselben Zahl ($\neq 0$) multipliziert.

Definition: $\leq$ - Relation

Für alle $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ definieren wir $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} : \Leftrightarrow ad \leq bc$.

Diese Relation ist repräsentantenunabhängig, denn seien

$(a, b), (a', b') \in \mathbf{K}_{(a, b)}$ und $(c, d), (c', d') \in \mathbf{K}_{(c, d)}$, dann gilt:

$(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$.

O. b. d. A. gelte $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, $ad \leq bc$.

Nach Voraussetzung gilt $ab' = ba'$ und $cd' = dc'$ und $ad \leq bc$.

$ad \leq bc \Rightarrow ab'd \leq bb'c \Rightarrow ba'd \leq bb'c \Rightarrow a'd \leq b'c \Rightarrow a'd'd \leq b'cd'$

$\Rightarrow a'd'd \leq b'c'd \Rightarrow a'd' \leq b'c' \Rightarrow \frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$.

Satz 2: $\leq$ ist eine lineare Ordnung in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$

Beweis: 1. Sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gegeben, dann gilt:

$ab \leq ab$, d. h. $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$, also ist $\leq$ reflexiv in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

2. Seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gegeben, und es gelte $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, dann gilt:

$ad \leq bc$ und $cb \leq da$, also $ad = bc$ und somit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Also ist $\leq$ antisymmetrisch in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

3. Seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gegeben und es gelte $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$.

Dann gilt $ad \leq bc$ und $cf \leq de$, also auch $adcf \leq bcde$ und somit

$af \leq be$, d. h. $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$. Also ist $\leq$ transitiv in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

4. Seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und es gelte nicht $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, dann gilt $ad > bc$, also

insbesondere $ad \geq bc$. Das heißt aber gerade $cb \leq da$, also $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$.

Also ist $\leq$ linear in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Aus 1. bis 4. ergibt sich: $\leq$ ist eine lineare Ordnung in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Definition: Addition $\oplus$ in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$

Für alle $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ definieren wir $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$.

Diese Definition der Addition ist repräsentantenunabhängig, denn seien

$(a, b), (a', b') \in \mathbf{K}_{(a, b)}$ und $(c, d), (c', d') \in \mathbf{K}_{(c, d)}$, dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ und } \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Rightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{a'd'}{b'd'} \wedge \frac{bc}{bd} = \frac{b'c'}{b'd'}$$

$$\Rightarrow adb'd' = bda'd' \wedge bcb'd' = b'c'bd$$

$$\Rightarrow adb'd' + bcb'd' = bda'd' + b'c'bd$$

$$\Rightarrow (ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd$$

$$\Rightarrow \frac{ad + bc}{bd} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \oplus \frac{c'}{d'}$$

Die so definierte Addition ist eine innere Verknüpfung in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$, denn

seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, dann gilt für $\frac{ad+bc}{bd}$:

$ad+bc \in \mathbb{N}_0$ und $bd \in \mathbb{N}$, da $b, d \neq 0$.

Definition: Subtraktion (-) in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$

In $\mathbb{N}_0$ ist die Subtraktion keine innere Verknüpfung. Für $a, c \in \mathbb{N}_0$ hat aber die Gleichung $a + d = c$ genau dann eine Lösung, wenn $a \leq c$ ist. Diese wird mit $c - a$ bezeichnet.

Die Subtraktion ist in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ ebenfalls keine innere Verknüpfung, aber für

alle $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ist $\frac{bc-ad}{bd}$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} = \frac{c}{d}.$$

Wegen $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ gilt $ad \leq bc$ und somit ist $bc - ad \in \mathbb{N}_0$.

Weiter gilt $\frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \oplus \frac{bc-ad}{bd} = \frac{ad}{bd} \oplus \frac{bc-ad}{bd} = \frac{ad+bc-ad}{bd} = \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$.

Diese Lösung ist eindeutig, denn es gilt die

Monotonieregel der Addition:

Für alle $a, x, u \in \mathbb{N}_0$ und alle $b, y, v \in \mathbb{N}$ gilt:

Ist $\frac{x}{y} < \frac{u}{v}$, dann ist auch $\frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \oplus \frac{u}{v}$.

Beweis: Seien $a, x, u \in \mathbb{N}_0$ und alle $b, y, v \in \mathbb{N}$ und es gelte o. B. d. A. $\frac{x}{y} < \frac{u}{v}$,

dann gilt $xv < uy$.

$$xv < uy \Rightarrow bxv < buy \Rightarrow ayv + bxv < avy + buy$$

$$\Rightarrow (ay + bx)v + (av + bu)y \Rightarrow (ay + bx)bv < (av + bu)by$$

$$\Rightarrow \frac{ay+bx}{by} < \frac{av+bu}{bv} \Rightarrow \frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \oplus \frac{u}{v}.$$

Für alle $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ lässt sich also eine Subtraktion als

$$\text{Umkehrung der Addition erklären durch } \frac{c}{d} (-) \frac{a}{b} := \frac{bc-ad}{bd}.$$

Die Repräsentantenunabhängigkeit lässt sich analog zur Repräsentantenunabhängigkeit der Addition in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ zeigen.

Definition: Multiplikation $\otimes$ in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$

$$\text{Für alle } \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \text{ definieren wir } \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Diese Definition der Multiplikation ist repräsentantenunabhängig, denn

seien $(a, b), (a', b') \in \mathbf{K}_{(a, b)}$ und $(c, d), (c', d') \in \mathbf{K}_{(c, d)}$, dann gilt $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

$$\text{und } \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$$

$$\Rightarrow ab' = a'b \wedge cd' = c'd$$

$$\Rightarrow ab'cd' = a'bc'd$$

$$\Rightarrow acb'd' = bda'c'$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \otimes \frac{c'}{d'}$$

Die Division ist in $\mathbb{N}$ keine innere Verknüpfung, sondern nur in dem Fall, in dem a ein Vielfaches von b ist, ist $a : b$ die eindeutige Lösung der Gleichung $b \cdot x = a$.

In $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ ist nun jede Gleichung $\frac{a}{b} \otimes \frac{x}{y} = \frac{c}{d}$ eindeutig lösbar, falls $a \neq 0$.

Dann definieren wir die Division $\div$ als Umkehrung der Multiplikation in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ folgendermaßen:

Für alle $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $a \neq 0$ ist $\frac{c}{d} \div \frac{a}{b} := \frac{bc}{ad}$.

Dann ist $\frac{c}{d} \div \frac{a}{b}$ die eindeutige Lösung der Gleichung $\frac{a}{b} \otimes \frac{x}{y} = \frac{c}{d}$.

Beweis: Seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gegeben, dann wähle $\frac{x}{y} = \frac{bc}{ad}$ und es ist

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \otimes \frac{bc}{ad} = \frac{abc}{abd} = \frac{c}{d}.$$

Wegen des folgenden Monotoniegesetzes ist diese Lösung auch eindeutig:

Für alle $\frac{a}{b}, \frac{x}{y}, \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ gilt: $\frac{x}{y} < \frac{u}{v}$ gilt: $\Rightarrow \frac{a}{b} \otimes \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \otimes \frac{u}{v}$.

Beweis: Seien $\frac{a}{b}, \frac{x}{y}, \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ und es gelte $\frac{x}{y} < \frac{u}{v}$.

Dann gilt $xv < uy$.

$$xv < uy \Rightarrow axbv < auby \Rightarrow \frac{ax}{by} < \frac{au}{bv} \Rightarrow \frac{a}{b} \otimes \frac{x}{y} < \frac{a}{b} \otimes \frac{u}{v}$$

Nun definieren wir die Division als Umkehrung der Multiplikation in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ folgendermaßen:

Für alle $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $a \neq 0$ ist $\frac{c}{d} \div \frac{a}{b} := \frac{bc}{ad}$.

Dann ist $\frac{c}{d} \div \frac{a}{b}$ die eindeutige Lösung der Gleichung $\frac{a}{b} \otimes \frac{x}{y} = \frac{c}{d}$.

Diese Definition der Division ist repräsentantenunabhängig, denn seien

$(a, b), (a', b') \in \mathbf{K}_{(a,b)}$ und $(c, d), (c', d') \in \mathbf{K}_{(c,d)}$, dann gilt $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \wedge \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$$

$$\Rightarrow ab' = a'b \wedge cd' = c'd$$

$$\Rightarrow ab'c'd = a'bcd'$$

$$\Rightarrow adb'c' = bca'd'$$

$$\Rightarrow \frac{ad}{bc} = \frac{a'd'}{b'c'}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \div \frac{c'}{d'}$$

Bevor nun die Struktur der Menge $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit diesen Verknüpfungen und der $\leq$ - Relation weiter untersucht wird, stellen wir noch Folgendes fest:

Satz 3: $\frac{0}{1} = \{ (0, x) \mid x \in \mathbb{N} \}$ ist natürlich auch eine Klasse, also ein Bruch.

Beweis: Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{N}$: $0 \cdot y = x \cdot 0$, also $(0, x) = (0, y)$.

Satz 4: Für alle $a, b \neq 0$ gibt es in $\frac{a}{b}$ genau einen Repräsentanten $\frac{c}{d}$ mit $\text{ggT}(c, d) = 1$.

Beweis: zur Existenz: Seien $a, b \neq 0$ gegeben. Dann findet man $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a = a_0 \text{ggT}(a, b) \text{ und } b = b_0 \text{ggT}(a, b) \text{ und } \text{ggT}(a_0, b_0) = 1.$$

$$\text{Nun gilt } \frac{a}{b} = \frac{a_0 \text{ggT}(a, b)}{b_0 \text{ggT}(a, b)} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Zur Eindeutigkeit: seien nun $\frac{c}{d}$ und $\frac{e}{f}$ Repräsentanten von $\frac{a}{b}$ mit

$\text{ggT}(c, d) = 1$ und $\text{ggT}(e, f) = 1$.

Mit $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ folgt $cf = de$.

$cf = de \Rightarrow c \mid de \Rightarrow c \mid e$, da $\text{ggT}(c, d) = 1$.

Mit derselben Überlegung folgt $e \mid cf \Rightarrow e \mid c$

Aus $c \mid e$ und $e \mid c$ folgt $e = c$. Daraus ergibt sich sofort $d = f$.

Hieraus ergibt sich sofort

Satz 5: Die Klassen $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots$ sind paarweise verschieden.

Weiter gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{m}{1} + \frac{n}{1} = \frac{m \cdot 1 + 1 \cdot n}{1 \cdot 1} = \frac{m+n}{1}$$

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{m \cdot n}{1 \cdot 1} = \frac{m \cdot n}{1}$$

$$\frac{m}{1} < \frac{n}{1} \Leftrightarrow m < n$$

Auffällig ist, dass die Rechenregeln für diese Klassen sehr stark an die Rechenregeln für die natürlichen Zahlen erinnern.

In der Tat gilt

Satz 6: Die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\{\frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ sind mit den erklärten

Verknüpfungen zueinander isomorph.

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass ein Isomorphismus von

$\mathbb{N}_0$ nach $\{\frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ existiert.

Wir definieren die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \left\{ \frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

$$n \rightarrow \frac{n}{1}$$

Sei nun $\frac{x}{1} \in \left\{ \frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ gegeben, dann wähle $x \in \mathbb{N}_0$ und

$\varphi(x) = \frac{x}{1}$, das heißt, φ ist surjektiv.

Seien $\frac{x}{1}, \frac{y}{1} \in \left\{ \frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ gegeben und es gelte $\frac{x}{1} = \frac{y}{1}$,

dann gilt $x \cdot 1 = 1 \cdot y$, also $x = y$, das heißt φ ist injektiv.

Seien nun $x, y \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$1. \varphi(x) \oplus \varphi(y) = \frac{x}{1} \oplus \frac{y}{1} = \frac{x+y}{1} = \varphi(x+y), \text{ also ist } \varphi \text{ additionstreu.}$$

$$2. \varphi(x) \otimes \varphi(y) = \frac{x}{1} \otimes \frac{y}{1} = \frac{x \cdot y}{1} = \varphi(x \cdot y), \text{ also ist } \varphi \text{ auch}$$

multiplikationstreu.

$$3. x < y \Leftrightarrow x \cdot 1 < 1 \cdot y \Leftrightarrow \frac{x}{1} < \frac{y}{1} \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(y), \text{ also ist } \varphi$$

ordnungstreu.

Man kann nun sagen, dass $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ eingebettet ist. Für jede Zahl

$n \in \mathbb{N}_0$ lässt sich nun $\frac{n}{1}$ schreiben. Statt $\oplus, \otimes, (-), \div$ schreiben wir wie gewohnt $+, \cdot, -, \div$.

Im Folgenden soll untersucht werden, welche Regeln für $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit den Verknüpfungen $+, \cdot, -, \div$ und die Relation $\leq$ gelten.

Satz 7: Die Addition ist in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ kommutativ und assoziativ.

Der Beweis erfolgt über Rückführung auf die Kommutativität und Assoziativität der Addition in $\mathbb{N}_0$.

Satz 8: Die Multiplikation ist in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ kommutativ und assoziativ.

Der Beweis erfolgt über Rückführung auf die Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{N}_0$.

Satz 9: 0 ist neutrales Element bezüglich der Addition in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Beweis: Sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gegeben, dann gilt:

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$$

Satz 10: 1 ist neutrales Element der Multiplikation in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Beweis: Sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gegeben, dann gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$$

Satz 11: Zu jedem Element aus $\mathbb{Q}_{> 0}$ existiert ein multiplikativ inverses Element.

Beweis: Sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_{> 0}$ gegeben, dann findet man auch $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}_{> 0}$ und es gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

Zusammenfassend ist zu sagen, dass die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{Q}_{> 0}$ innere Verknüpfungen sind, dass beide Verknüpfungen assoziativ und kommutativ sind, dass 0 neutrales Element bezüglich der Addition und 1 neutrales Element bezüglich der Multiplikation ist. Die Multiplikation ist distributiv über der Addition. Außerdem ist bezüglich der Multiplikation jedes von 0 verschiedene Element invertierbar. $(\mathbb{Q}_{> 0}, +, \cdot)$ ist also ein Halbkörper.

Weiter gilt

Satz 12: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 0 \vee \frac{c}{d} = 0$

Beweis: „ $\Leftarrow$ “ klar

„ $\Rightarrow$ “ Seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 0$ gegeben, dann gilt $\frac{ac}{bd} = 0$, also

$ac = 0$. Somit muss auch $a = 0$ oder $c = 0$ gelten.

Dann ist aber insbesondere $\frac{a}{b} = 0 \vee \frac{c}{d} = 0$.

Satz 13: $\cdot$ ist distributiv über $+$

Der Beweis erfolgt leicht über die Distributivität der Multiplikation über der Addition in $\mathbb{N}_0$.

Satz 14: Für alle $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gilt $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Beweis: Seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gegeben, dann gilt $ad < bc$.

$$ad < bc \Rightarrow ab + ad < ab + bc \wedge ad + cd < bc + cd$$

$$\Rightarrow a(b+d) < b(a+c) \wedge (a+c)b < (b+d)c \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Abschließend lässt sich festhalten dass der Gewinn dieser

Zahlbereichserweiterung darin liegt, dass in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ jede Gleichung der Form

$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{c}{d}$ für $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ mit $a \neq 0$ eindeutig lösbar ist.

Um die Körperaxiome zu erfüllen, fehlt nur noch die Invertierbarkeit bezüglich der Addition.

Geht man vom Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ aus statt vom Halbring $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ lässt sich auf die beschriebene Weise sofort der Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ konstruieren.

Um den Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ aus $(\mathbb{Q}_{\geq 0}, +, \cdot)$ zu konstruieren, ist eine weitere Zahlbereichserweiterung nötig, die die negativen Zahlen liefert.

Man definiere dazu eine Relation auf $\mathbb{Q}_{\geq 0} \times \mathbb{Q}_{>0}$:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \times \mathbb{Q}_{>0} : (a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c$$

Dass es sich bei dieser Relation um eine Äquivalenzrelation handelt, ist fast analog zu zeigen wie bei obiger Relation, die zur Konstruktion der rationalen Zahlen aus der Menge der natürlichen Zahlen geführt hat. Diese neue Relation führt auf ähnliche Weise zur Menge der negativen Zahlen.

Ich werde kurz aufzeigen, dass in diesem Konzept auf jede Frage aus obigem Fragenkatalog eine positive Antwort gegeben werden kann:

1. Was ist ein Bruch?

Hier ist ein Bruch als eine Äquivalenzklasse zu verstehen.

2. Wie kann man Brüche darstellen?

Jeder Bruch besitzt unendlich viele Darstellungen, da jede Klasse unendlich viele Repräsentanten enthält.

Sei $a \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\mathbf{K}_{(a,b)} = \frac{a}{b} = a : b, \text{ aber auch } \mathbf{K}_{(a,b)} = \mathbf{K}_{(n \cdot a, n \cdot b)} = \frac{na}{nb} = na : nb$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, da für alle $n \in \mathbb{N} : anb = bna$, also $(a, b) \sim (na, nb)$.

3. Wie können wir erkennen, welcher Bruch größer oder kleiner ist?

Für alle $a, c \in \mathbb{N}_0, b, d \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbf{K}_{(a,b)} \leq \mathbf{K}_{(c,d)} \Leftrightarrow ad \leq bc$.

4. Wie können wir Brüche addieren und subtrahieren?

Für alle $a, c \in \mathbb{N}_0, b, d \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbf{K}_{(a,b)} + \mathbf{K}_{(c,d)} = \mathbf{K}_{(ad+bc,bd)} \text{ und}$$

$$\mathbf{K}_{(a,b)} - \mathbf{K}_{(c,d)} = \mathbf{K}_{(ad-bc,bd)}, \text{ falls } \mathbf{K}_{(a,b)} \geq \mathbf{K}_{(c,d)}.$$

5. Wie können wir Brüche multiplizieren und dividieren?

Für alle $a, c \in \mathbb{N}_0$, $b, d \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbf{K}_{(a,b)} \cdot \mathbf{K}_{(c,d)} = \mathbf{K}_{(ac,bd)} \text{ und falls } c \neq 0, \text{ dann gilt außerdem}$$

$$\mathbf{K}_{(a,b)} : \mathbf{K}_{(c,d)} = \mathbf{K}_{(ad,bc)}.$$

6. Welche Regeln gelten in der Menge der Brüche?

In der Menge der Brüche gelten das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Addition und der Multiplikation sowie die Distributivität der Multiplikation über der Addition.

Dieses Konzept ist zwar der exakte Weg, die Brüche aus der Menge der natürlichen Zahlen mit den in dieser Menge geltenden Rechenregeln zu konstruieren, aber dieses Konzept ist natürlich nicht geeignet, in dieser Form in den Unterricht der Sekundarstufe 1 übertragen zu werden.

Es würde die Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 6 wegen des hohen Abstraktionsniveaus hoffnungslos überfordern.

Es zeigt nur innermathematisch, wie der Zahlbereich erweitert werden kann.

5.2 Die Brüche aus der Perspektive der reellen Zahlen oder die „Top-down-Methode“

Wenn wir den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Addition und der Multiplikation und der $\leq$ - Ordnungsrelation als gegeben sehen, dann können wir eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ definieren, die gerade die Menge der Brüche $\mathbb{Q}$ ist. Wenn wir uns auf die nicht negativen Brüche beschränken, dann definieren wir

$$\mathbf{B} = \{ a \cdot b^{-1} \mid a \in \mathbb{N}_0 \wedge b \in \mathbb{N} \}.$$

Diese Menge ist wohldefiniert, zu jedem $b \in \mathbb{N}$ existiert ein eindeutig bestimmtes multiplikativ inverses Element $b^{-1} \in \mathbb{R}$.

Wir erlauben uns, statt $a \cdot b^{-1}$ auch $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ zu schreiben.

Da $\mathbf{B}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, folgt sofort, dass alle Rechenregeln, die in $\mathbb{R}$ gelten, auch in $\mathbf{B}$ gelten. Insbesondere gilt die Assoziativität und Kommutativität der Addition und der Multiplikation und die Distributivität der Multiplikation über der Addition. Diese Regeln werden im Folgenden mehrfach benutzt, ohne dass explizit auf sie hingewiesen wird.

Klar ist wieder, dass jeder Bruch verschiedene Schreibweisen besitzt, denn seien $a, c \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = a \cdot n \cdot n^{-1} \cdot b^{-1} = a \cdot n \cdot (b \cdot n)^{-1} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}.$$

Seien im Folgenden $p, q \in \mathbf{B}$ gegeben, dann findet man $a, c \in \mathbb{N}_0$, $b, d \in \mathbb{N}$

mit $p := \frac{a}{b}$ und $q := \frac{c}{d}$.

Es lässt sich leicht erkennen, wann zwei Brüche gleich sind, denn $p = q \Leftrightarrow ad = cb$.

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} p = q &\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ab^{-1} = cd^{-1} \Leftrightarrow ab^{-1}b = cd^{-1}b \Leftrightarrow a = cd^{-1}b \Leftrightarrow a = cbd^{-1} \\ &\Leftrightarrow ad = cbd^{-1}d \Leftrightarrow ad = cb \end{aligned}$$

Ebenso leicht ist zu sehen, ob $p \leq q$ ist, denn $p \leq q \Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$.

Die Addition zweier Brüche ist klar: $p + q = \frac{ad + bc}{bd}$, denn

$$\begin{aligned} p + q &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1} = (ab^{-1} + cd^{-1})(bdd^{-1}b^{-1}) = ((ab^{-1} + cd^{-1})bd)d^{-1}b^{-1} \\ &= (ab^{-1}bd + cd^{-1}db)(bd)^{-1} = (ad + bc)(bd)^{-1} = \frac{ad + bc}{bd} \end{aligned}$$

Analog ist auch klar, wie zu subtrahieren ist.

Es folgt sofort, dass $\mathbf{B}$ bezüglich der Addition abgeschlossen ist, dass also die Summe zweier Elemente aus $\mathbf{B}$ wieder in $\mathbf{B}$ liegt.

Denn es ist $ad + bc \in \mathbb{N}_0$ und $bd \in \mathbb{N}$, also $p + q = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbf{B}$.

Für die Multiplikation zweier Brüche gilt $p \cdot q = \frac{ac}{bd}$, denn

$$p \cdot q = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = ab^{-1}cd^{-1} = ac(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}.$$

Da $ac \in \mathbb{N}_0$ und $bd \in \mathbb{N}$, ist auch $\frac{ac}{bd} \in \mathbf{B}$, also $p \cdot q \in \mathbf{B}$.

Für die Division gilt falls $q \neq 0$:

$$p : q = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1} = ab^{-1}(cd^{-1})^{-1} = ab^{-1}c^{-1}d = ad(bc)^{-1} = \frac{ad}{bc}.$$

Die Menge $\mathbf{B}$ ist also bezüglich der Multiplikation abgeschlossen und die Menge der positiven Brüche ist auch bezüglich der Division abgeschlossen.

Der obige Fragenkatalog kann auch hier vollständig und positiv beantwortet werden. Allerdings ist auch dieses Konzept nicht zur Einführung der Bruchrechnung in der 6. Klasse geeignet, weil es davon ausgeht, dass die reellen Zahlen schon bekannt sind. Es ist also eher dafür gut, von einer höheren Ebene auf eine niedrigere Ebene herabzuschauen („top-down“).

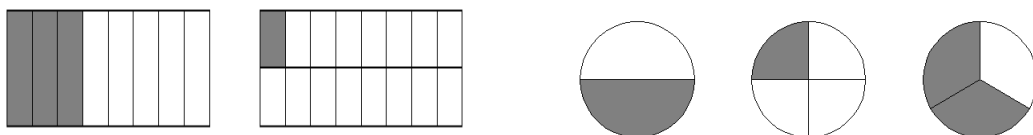
Im Mathematikunterricht der Klassenstufe 6 wurde in den letzten Jahrzehnten mithilfe verschiedener Konzepte versucht, die Bruchrechnung zu lehren. Diese Konzepte, von denen drei auch die Schulbücher dominierten, werde ich nun kurz vorstellen.

6 Bisherige didaktische Konzepte für den Bruchrechnen – unterricht in der Sekundarstufe 1

Im Unterricht der Sekundarstufe 1 können die in Abschnitt 5 besprochenen innermathematischen Konzepte nicht eingesetzt werden, da sie die Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 6 aufgrund ihres Abstraktionsniveaus völlig überfordern würden.

Bevor die bisher etablierten Konzepte vorgestellt werden, weise ich auf eine ihrer Gemeinsamkeiten hin. Sie alle beginnen im Konkreten, und die Abstraktion findet erst später statt. Dieses fällt auch sofort auf, wenn man sich Mathematik-Schulbücher der letzten Jahrzehnte ansieht. Denn fast immer wird der Einstieg in das Kapitel Bruchrechnung mit Aufgaben vorbereitet, bei denen markierte Bruchteile von Figuren erkannt werden sollen. Meistens handelt es sich um Kreise oder Rechtecke. Diese Aufgaben sehen zum Beispiel folgendermaßen aus:

„Bestimme den Teil der Fläche, der gefärbt ist!“ oder „Welcher Teil der Fläche ist grau gefärbt?“



Oder sie beginnen sofort damit, dass Anteile von Größen zu bestimmen sind, die dann als Bruchteile bezeichnet werden. Dieses geschieht sowohl bei der Arbeit mit dem Größenkonzept als auch bei der Arbeit mit dem Operatorkonzept und bei der Mischform der beiden Konzepte. Nach dieser anschaulichen Einführung wird mit den Brüchen gerechnet.

Eine Durchsicht der weitverbreiteten Mathematikschulbücher für die 6. Klasse liefert einen Überblick über die Konzepte, derer sich die Bücher bedienen. Die inspizierten Lehrbücher sind im Anhang aufgelistet, ebenso wie die meist

ähnlich anschaulich beginnenden weiteren Publikationen, die von Schulbuchverlagen als „Lerntrainer“ oder Materialsammlungen veröffentlicht wurden.

Allen diesen Büchern, die nur eine kleine, aber repräsentative Auswahl der Mathematiklehrbücher für Schulen seit 1968 darstellt, ist gemein, dass sie mit dem Größenkonzept, dem Operatorkonzept oder einer Mischung aus beiden arbeiten. In der Literatur zur Mathematikdidaktik wird ein viertes didaktisches Konzept genannt, das als das Gleichungskonzept bezeichnet wird. Dieses dient aber keinem der Schulbücher als Grundlage und wird hier nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt. Im Folgenden werden diese vier Konzepte vorgestellt.

6.1 Das Größenkonzept

Das Größenkonzept arbeitet mit Größen wie Länge, Flächeninhalt, Volumen, Gewicht, Geldbetrag, Zeitspanne. Die meisten dieser Größen lassen sich mit Messgeräten wie Lineal, Zollstock, Waage oder Uhr messen. Für den Flächeninhalt gibt es kein Messgerät, aber er lässt sich durch Rückführung auf Längen und Festlegung einer Einheit für den Flächeninhalt bestimmen.

Die Arbeit mit Größen ist keineswegs trivial.

Zunächst muss eine Menge G mit einer Verknüpfung $\oplus$ und einer Relation „ $<$ “ definiert sein, sodass $\oplus$ auf der Menge G assoziativ und kommutativ ist.

Außerdem soll die Trichotomie der Ordnung gelten.

Des Weiteren soll für alle $a, b \in G$ die Gleichung $b + x = a$ genau dann eine Lösung haben, wenn $b < a$.

Für jedes $g \in G$ kann nun die Multiplikation mit einer natürlichen Zahl als abkürzende Schreibweise für die wiederholte Addition eingeführt:

$$n \cdot g := g + g + \dots + g \quad (n \text{ Summanden})$$

Ein Größenbereich G heißt Größenbereich mit Teilbarkeitseigenschaft, wenn es zu jedem $g \in G$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein $g' \in G$ gibt mit $ng' = g$.

In diesem Fall darf auch $g' = g : n$ geschrieben werden.

Falls G nun ein Größenbereich mit Teilbarkeitseigenschaft ist, so existiert zu jeder positiven Zahl $\frac{a}{b}$ und zu jedem $g \in G$ auch $\frac{a}{b} g := (ag) : b = a (g : b)$.

G heißt kommensurabel $:\Leftrightarrow \forall a, b \in G \exists e \in G \exists m, n \in \mathbb{N} : a = me \wedge b = ne$

In einem kommensurablen Größenbereich lässt sich jede Größe g mithilfe einer gegebenen Einheit e und geeigneten natürlichen Zahlen a, b in der Form

$g = \frac{a}{b} e$ darstellen.

Zur Angabe einer Größe ist also eine Kombination aus einer Zahl und einer Standardgröße, einer Einheit nötig. Das Rechnen mit Größen ist den Schülerinnen und Schülern zum Teil aus der Grundschule, zum Teil aus dem Alltag, aber auch aus der Klassenstufe 5 bekannt. Im Zusammenhang mit den Brüchen kann das Rechnen mit Größen nur dann uneingeschränkt sinnvoll sein, wenn es sich um kommensurable Größen handelt.

In Klassenstufe 5 wird meistens mit den Größen Länge, Flächeninhalt, Volumen, Zeit, Gewicht und Geld gearbeitet.

Es ist sinnvoll, sich auf die Größenbereiche zu beschränken, die kommensurabel und divisibel sind, da man sonst riskiert, dass Widersprüche entstehen.

Die ersten fünf dieser genannten Größen sind kommensurabel und alle von ihnen außer dem Geldbetrag sind auch divisibel. So kann man beispielsweise eine beliebige gegebene Strecke oder die Fläche eines beliebigen gegebenen Rechtecks in 7 gleich große Teile teilen, auch wenn man vor Einführung der Brüche nicht genau die Länge eines Streckenteils oder den Flächeninhalt eines Rechteckteils angeben kann, weil nicht jede Zahl in $\mathbb{N}$ ohne Rest durch 7 teilbar ist.

Wenn eingesehen wurde, wie man Strecken unterteilen kann, dann ist es auch kein Problem mehr, Rechteckflächen oder Quadvolumina zu unterteilen.

Bei der Zeitspanne ist es etwas schwieriger, eine solche Unterteilung vorzunehmen, da dies zwar rechnerisch möglich ist aber $\frac{1}{7} h$ nicht als solche

exakt wahrnehmbar und deshalb für die Anschauung ungeeignet ist. Es sollte aber klar sein, was gemeint ist, wenn eine Stunde in sieben gleiche Teile zu teilen ist, auch wenn es schwer vorstellbar ist, wie lange solch eine Zeitspanne dauert. Bei Zeitspannen handelt es sich also um einen Größenbereich, der zwar divisibel ist, aber äußerst ungeeignet ist.

Zur Veranschaulichung, welchen Teil eines vollen Kreises der Minutenzeiger einer Uhr während $\frac{1}{7} h$ zurücklegen muss, könnte man auf die Idee kommen, eine Folie auf eine Uhr zu legen, bei der ein Kreis in Siebtel geteilt ist. Dann wird anschaulich, dass der siebte Teil einer Stunde zwischen 8 und 9 Minuten dauert. Dabei zeigt sich aber gleich das nächste Problem, nämlich einen Kreis in sieben gleich große Teile zu teilen. Denn dazu muss der 360° -Winkel in sieben gleich große Winkel geteilt werden. Trotz der aus dem Alltag gut bekannten Größe Zeit ist dies unpraktisch und nicht schülernah.

Flächeninhalte sind divisibel und kommensurabel, allerdings sind nicht alle Flächen gleich gut geeignet. Es ist zwar immer leicht möglich, eine Rechteckfläche in beliebig viele gleich große Teile zu zerlegen, aber schon bei den in Schulbüchern oft so beliebten Kreisflächen wird es, wie gerade erwähnt, schwierig. Dies zeigt nicht nur, dass manche Größen unpraktisch sind, sondern zeigt auch Grenzen der Praktikabilität der Kreis- oder Tortenstücke in der Bruchrechnung auf. Außerdem ist eine Gewöhnung an Kreis- oder Tortenstücke schon deswegen ungünstig, weil diese ungeeignet sind, um Antworten auf die späteren Fragen zu finden.

Noch schlimmer ist es allerdings, wenn man die Temperatur wie eine Größe behandelt.

Im Zusammenhang mit der Einführung der negativen Zahlen in Klassenstufe 7 findet man in den Schulbüchern Aufgaben, in denen mit der Temperatur gerechnet werden soll, wie zum Beispiel folgende:

Gib die neuen Temperaturen in $^\circ\text{C}$ an⁵¹:

$$+4^\circ\text{C} \xrightarrow{-7^\circ\text{C}} \alpha$$

⁵¹ Schnittpunkt 7 (2004: 51)

Eines der Probleme besteht darin, dass die physikalische Größe Temperatur in Kelvin gemessen wird. Es soll hier berechnet werden, wie die Temperatur sich verändert, wenn ein 4 °C warmer Gegenstand sich um 7 Celsius-Einheiten abkühlt. Erwartet wird, dass der Gegenstand auf - 3 °C abkühlt. Schreibt man aber jede der angegebenen Temperaturen in der Einheit Kelvin, dann sieht es so aus:

$$277,15 \text{ K} \xrightarrow{+266,15 \text{ K}} 543,15 \text{ K}$$

543,15 K sind aber 270,15 °C.

Auch bei einer Übertragung in andere Temperatureinheiten tritt dieses Problem auf. Schreibt man beispielsweise jede der angegebenen Temperaturen in Fahrenheit, dann erhält man:

$$39,2^\circ \text{ F} \xrightarrow{+19,4^\circ \text{ F}} 58,6^\circ \text{ F}$$

58,6 °F sind aber ungefähr 14,8 °C.

Dieses Problem ergibt sich daraus, dass der Ausdruck „- 7 °C“ nicht die Spanne von 7 absoluten Temperatur-Einheiten, also 7 K, beschreibt sondern den Zustand von 266,15 K, also 266,15 Temperatur-Einheiten.

So erhalten wir also bei dieser Rechnung schon durch Wahl anderer Einheiten verschiedene Werte. Dieses Beispiel sollte genügen, um die Problematik mit der Temperatur zu veranschaulichen. Temperatur ist keine Größe.

Bei den genannten Größen sind die Addition und die Subtraktion leicht zu verstehen. Die Summe zweier Streckenlängen ist die Länge der Strecke, die man erhält, wenn man sie „aneinanderhängt“. Die Summe der Flächeninhalte zweier Figuren ist der Gesamtflächeninhalt beider Figuren. Die Summe zweier Volumina ist das Gesamtvolumen der beiden Körper. Hier kann viel auf enaktiver Ebene gearbeitet werden, zum Beispiel können einzelne Streckenlängen irgendwelcher Gegenstände gemessen werden. Die Gegenstände können anschließend aneinandergehängt oder geschoben

werden. Die dann gemessene Gesamtlänge ist so groß wie die Summe der beiden vorher gemessenen Längen.

Bei Rechteckflächen kommt man mit dem Messen nicht aus. Es muss von vornherein schon zur Bestimmung des Flächeninhaltes gerechnet werden. Wenn man sich auf speziell gewählte Rechtecke beschränkt, ist es noch möglich, die Flächenhalte durch „Parkettierungen“ mit geeigneten Figuren oder mithilfe des Kästchengitters zu bestimmen. Bei Volumina kann beispielsweise mit Messzylindern gearbeitet werden. Die Summe zweier Volumina erhält man so durch Zusammengießen von Flüssigkeiten.

Auch bei der Zeit und beim Gewicht ist die Addition noch leicht nachvollziehbar, wenn auch nicht mehr ganz so gut zu besichtigen. Ein anderes Problem ergibt sich bei der Größe Geld, denn diese Größe ist nicht divisibel. 1 € ist beispielsweise nicht in drei gleiche Teile teilbar. Allerdings könnte es sein, dass 3 Personen sich einen Euro teilen müssen, dann hat natürlich jede dieser 3 Personen Anspruch auf $\frac{1}{3}$ €. Was hier mathematisch als Anspruch errechnet wird, ist in der Realität nicht existent. Wer dieses Konzept wegen seiner Alltagsnähe bevorzugt, sollte sich vor der ersten Unterrichtsstunde also gut mit der Fragestellung beschäftigen, wie mit solchen Größen umgegangen werden soll.

Es gibt durchaus einige positive Seiten des Größenkonzepts, wenn die Wahl geeigneter Größen gelingt. Oft wird als günstig bewertet, dass es bei den Schülerinnen und Schülern auf Vorerfahrungen trifft. So kann man an das Rechnen mit Größen, das im 5. Schuljahr ausführlich behandelt wird, anknüpfen und es zur Einführung der Brüche wiederholen. Außerdem, so führen die Befürworter des Alltagsbezuges an, kennen sie im Zusammenhang mit Größen auch ein paar Brüche aus dem Alltag, wie $\frac{1}{4} h$, $\frac{1}{2} h$, $\frac{3}{4} h$, $\frac{1}{2} l$ oder $\frac{1}{2}$ Pfund .

Die Liste der alltagsrelevanten Brüche ist aber kurz und, auch wenn es *im Alltag* noch so etwas wie die $1\frac{1}{2}$ l-Liter-Flasche oder $\frac{3}{4}$ Pfund Hackfleisch gibt, haben solche Vorerfahrungen sicherlich keinen das Verständnis erleichternden Effekt. Ein Vorteil ist aber, dass aus dem Rechnen mit Größen die Kommadarstellung bekannt ist.

Für 4,75 km wird auch 4 km 750 m oder besser 4750 m geschrieben. Die Schreibweise 4 km 750 m hat außerhalb der Schulbücher keine Relevanz. Es ist nicht auszuschließen, dass sie Fehlvorstellungen erzeugt, auf die später im Abschnitt Kommadarstellung von Brüchen eingegangen wird. Größen mithilfe zweier Einheiten anzugeben hat höchstens Alltagsrelevanz im Zusammenhang mit Geld und aus gut nachvollziehbaren Gründen bei Zeitspannen.

Beim Rechnen mit Größen, in denen eine Kommazahl vorkommt, haben die Schülerinnen und Schüler bereits gelernt, dass sie diese Größe ohne Kommazahl darstellen können, wenn sie die Einheit verändern.

Dass 4 km + 7 m nicht 11 km oder 11 m sind, ist ihnen schon klar, da sie gelernt haben, dass m und km verschiedene Einheiten sind.

Dies hat in Klassenstufe 5 schon das Kürzen und Erweitern der Darstellung vorweggenommen, denn es ist zum Beispiel

$$250 \text{ m} = 250 \cdot \frac{1}{1000} \text{ km} = \frac{250}{1000} \text{ km} = 0,250 \text{ km}.$$

Um die Tauglichkeit des Größenkonzepts zu untersuchen, wird nun obiger Fragenkatalog herangezogen.

1. Was ist ein Bruch?

Die Schulbücher, die im Zusammenhang mit Brüchen Größen verwenden, gehen oft so vor, dass zunächst Brüche als Maßzahlen von Größen gegeben werden, die durch Wahl einer anderen Einheit in Kombination mit einer natürlichen Maßzahl angegeben werden sollen. Im Größenkonzept werden Brüche als Bruchteile von Größen eingeführt.

Man nutzt die Größen, um mit Hilfe von Brüchen Anteile einer Standardgröße zu beschreiben, beispielsweise: $\frac{1}{4}l$, $\frac{3}{4}h$, $\frac{1}{2}m$. Brüche werden als *Teil eines Ganzen* gesehen.

Bei $\frac{1}{4}l$ ist der Liter *das Ganze* und $\frac{1}{4}l$ bezeichnet den vierten Teil dieses Ganzen.

Das Verständnis von Bruchteilen einer Größe geschieht auf anschauliche Weise an Bruchteilen von Strecken und Flächen, aber auch an Beispielen mit den Größen Geld, Volumen, Gewicht. Das Erkennen von Brüchen als Anteile von Standardgrößen trifft auf die Vorerfahrung der Schülerinnen und Schüler. Die oben genannten Beispiele sind ihnen schon lange aus dem Alltag bekannt. Insofern ist eine Einführung der Brüche als Bruchteile von Größen auf diese Weise zunächst einfach.

Dass Anteile von Standardgrößen nur dann gut vorstellbar sind, wenn sie geeignet ausgesucht werden und dass nicht jeder Bruchteil einer Größe, der noch anschaulich sein mag, auch dafür geeignet ist, später mit ihm zu rechnen, wurde bereits angesprochen. Leider sind die in den Büchern gewählten Flächen ebenso wie die gewählten Größen, wie schon gezeigt, nicht immer bestens geeignet. Dies spricht aber noch nicht zwingend gegen dieses Konzept, sondern möglicherweise nur gegen die in den Büchern vorgenommene Auswahl.

Wenn Brüche als Bruchteile von Größen angesehen werden, dann ist auch klar, was $\frac{5}{12}$ einer gegebenen Größe sein soll. Es soll natürlich der Bruchteil sein, den man erhält, wenn man die Größe in 12 Teile teilt und 5 davon nimmt.

Allgemein: für eine Größe g und $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$ bedeutet $\frac{a}{b}g$:

„Teile die Größe g in b gleich große Teile und nimm a davon!“

Gleichberechtigt mit dieser Interpretation ist die folgende:

„Nimm a mal die Größe g und teile das Produkt in b gleich große Teile!“

Die Beschreibung „teile in b Teile, nimm a davon“ stützt sich klar auf das Operator-Konzept, denn hier werden der „geteilt durch 12“-Operator und der

„mal 5“-Operator hintereinander geschaltet. Dies passiert in vielen Schulbüchern auch genauso. Oft werden dazu noch Pfeilbilder abgebildet, die dieses „teile in b Teile, nimm a davon“ - Prinzip veranschaulichen sollen.

Schwierig wird es aber anschließend zu abstrahieren, also von den konkreten Brüchen zu den reinen Zahlen zu kommen. Ein Bruch soll ja schließlich als Zahl betrachtet werden, da irgendwann nur noch mit den Brüchen gearbeitet werden soll.

Leichter ist es dagegen zu klären, wo sich diese Zahlen auf dem Zahlenstrahl befinden. Dass der Ort eines Bruches, an dem er sich auf dem Zahlenstrahl befindet, leicht zu konstruieren ist, folgt aus der Leichtigkeit der Konstruktion eines Bruchteiles einer Strecke mithilfe einer Parallelprojektion.

Nachdem die Brüche als Bruchteile von Größen eingeführt worden sind, folgen in den meisten Büchern Sachaufgaben dazu, bei denen teilweise auch schon Additionen und Subtraktionen durchgeführt werden, indem einzelne Bruchteile der gegebenen Größen addiert oder subtrahiert werden, ohne dass allerdings schon eine Regel für die Addition oder die Subtraktion hergeleitet wurde.

2. Wie kann man Brüche darstellen?

Brüche können in einer Schreibfigur $\frac{a}{b}$ mit natürlichen Zahlen dargestellt werden. Sie bedeutet nichts anderes als $a : b$. Konkret wird der Bruch als Bruchteil einer Größe so dargestellt, dass das von der Einheit vorgegebene *Ganze* in b Teile geteilt wird, von denen a *genommen* werden.

Somit ist klar, dass sich manche Bruchteile von Größen, deren Maßzahl keine natürliche Zahl ist, auch mit einer natürlichen Maßzahl angegeben werden können, wenn es eine geeignete andere Einheit gibt. Ob dies möglich ist, hängt dabei nicht nur von der Maßzahl oder der Einheit sondern von einer Kombination aus beiden ab. So gibt es keine übliche Einheit, um zum Beispiel

$\frac{1}{3} \text{ kg}$ mithilfe einer natürlichen Maßzahl darstellen. Dagegen lässt sich $\frac{1}{3} \text{ h}$

durch Wahl einer geeigneten Einheit mit einer natürlichen Maßzahl als 20 Minuten darstellen. Es wird auch auf die Größen zurückgegriffen, wenn man einsehen möchte, dass Brüche unendlich viele Darstellungen besitzen. Dass zu

jedem Bruch $\frac{a}{b}$ unendlich viele weitere Schreibweisen der Form $\frac{ka}{kb}$ existieren mit $k \in \mathbb{N}$, ist allerdings mit dem Größenkonzept nur bei Wahl geeigneter Größen leicht zu veranschaulichen. Niemand redet von $\frac{3}{6}$ Stunden oder $\frac{40}{80}$ Meter. Der oft erwähnte Alltagsbezug der Größen wirkt hier schon sehr gekünstelt.

Anhand von Rechteckflächen oder geeigneten Strecken kann man das Erweitern und das Kürzen einer Darstellung als das Verfeinern oder Vergrößern der Einheit aber anschaulich einführen. Zum Beispiel können $\frac{3}{4}$ einer Rechteckfläche gefärbt sein. Bei weiterer Verfeinerung der Einteilung in halb so große Teilrechtecke sind $\frac{6}{8}$ dieser Fläche gefärbt.

Die Einsicht, dass man jeden Bruch auf unendliche viele verschiedene Weisen darstellen kann, lässt sich also mit dem Größenkonzept vorbereiten.

Am Zahlenstrahl findet man so für jeden Bruch verschiedene Darstellungen. Außerdem soll natürlich eingesehen werden, dass auch die natürlichen Zahlen zu den Brüchen gehören. Das lässt sich mit dem Größenkonzept noch erledigen. Es ist schließlich klar, dass $\frac{4}{2}l = 2l$ ist.

Es fällt den Schülerinnen und Schülern nach erfolgreichem Unterricht in Klassenstufe 5 nicht schwer $\frac{1}{2}m$ als 0,5 m, 5 dm, 50 cm oder 500 mm zu identifizieren. Die Einführung der Kommaschreibweise wird so erleichtert.

Außerdem lässt sich durch eine Fortsetzung der Verfeinerungen leicht zeigen, dass die Bruchzahlen nicht mehr wie Perlen auf einer Kette angeordnet sind, so wie es noch bei den natürlichen Zahlen der Fall war. Ebenso lässt sich zeigen, dass keine Bruchzahl einen Vorgänger oder einen Nachfolger hat und dass zwischen je zwei Bruchzahlen unendlich viele weitere Bruchzahlen liegen.

3. Wie können wir erkennen, welcher Bruch größer oder kleiner ist?

Der Größenvergleich ist anschaulich und begrifflich einfach, denn natürlich ist anschaulich und begrifflich klar, welcher zweier Bruchteile einer Größe der größere ist. Um allgemein zu entscheiden, welcher von zwei Brüchen der größere ist, konkretisiere man, das heißt, man wähle sich einen geeigneten Größenbereich und vergleiche die zugehörigen Bruchteile.

Für zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gilt: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ genau dann, wenn für jede Größe g der Bruchteil $\frac{a}{b}$ von g kleiner als der Bruchteil $\frac{c}{d}$ von g ist, also wenn gilt:

$$\frac{a}{b}g < \frac{c}{d}g.$$

Dazu ist es wieder nötig auf eine geeignete Größe zurückzugreifen und es reicht sogar, auf nur eine geeignete Größe zurückzugreifen. Es aber nicht jede Größe gleich gut dafür geeignet. So wird anhand der Größe Zeit nicht leicht möglich sein zu entscheiden, welcher der Brüche $\frac{1}{7}$ oder $\frac{3}{20}$ der größere der beiden ist. Wählt man aber wieder Rechteckflächen und markiert in einem Rechteck geschickt die beiden Bruchteile, so ist leicht zu sehen, welcher Bruchteil der größere ist, denn wenn man entlang einer Richtung in Siebtel und senkrecht zu dieser Richtung in Zwanzigstel zerlegt, dann erhält man eine Verfeinerung in Hundertvierzigstel, bei der man sofort sieht, dass $\frac{1}{7} = \frac{20}{140}$ ist und $\frac{3}{20} = \frac{21}{140}$, also $\frac{1}{7} < \frac{3}{20}$ ist.

4. Wie können wir Brüche addieren und subtrahieren?

Die Addition ist besonders gut vorstellbar als eine Aneinanderreihung oder ein Zusammenpacken der Größen.

Um eine Additionsregel für Brüche herzuleiten, werden Bruchteile von Größen addiert. Das ist solange problemlos, wie die Brüche mit dem gleichen Nenner dargestellt sind. Denn, dass $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ ist, lässt sich mit jeder Größe gut

veranschaulichen. Die gegebene Größe wird in b gleich große Teile zerlegt, von denen a Teile und c Teile, also $a + c$ Teile genommen werden.

Interessanter wird es, wenn die Brüche nicht mit gleichem Nenner dargestellt sind.

In einem Mathematikbuch erscheint hier nach einem einzigen Sachproblem sofort folgender Hinweis:

„Wenn du Brüche mit verschiedenen Nennern addieren oder subtrahieren willst, musst du sie zunächst gleichnamig machen. Dazu suchst du das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner und erweiterst dann die Brüche entsprechend. Der kleinste gemeinsame Nenner heißt Hauptnenner (HN).“⁵²

Nach nur einem Beispiel das Rezept zu verkünden, man müsse beide Brüche mit dem „Hauptnenner“, also dem kgV der beiden Nenner, darstellen, ist ein Weg, der leider in mehreren Schulbüchern gegangen wird.

Dies ist nur ein weiteres Beispiel dafür, wie Schulbücher manchmal in abschreckender Weise kurz nach der Problemstellung einen Merksatz liefern, der weder inhaltlich qualitativ gut ist, noch dafür geeignet ist, etwas zum Verständnis beizutragen.

Denn erstens ist ein verkündetes Rezept für Schülerinnen und Schüler nicht so gut nachvollziehbar wie eine Möglichkeit, die selbst hergeleitet wurde.

Zweitens wird ein falsches Bild von der Mathematik vermittelt, denn es ist ja nicht so, dass hier Regeln von irgendwem vorgegeben werden, die man einfach glauben muss, sondern die Herleitung einer Regel ist überhaupt kein Problem.

Drittens ist es falsch, dass man zur Addition zweier Brüche ihren „Hauptnenner“ wählen muss. Es ist ja nicht einmal so, dass man die Summe zweier Brüche stets in vollständig gekürzter Darstellung erhält, wenn man den „Hauptnenner“

für ihre Darstellung wählt. Bei der Addition $\frac{1}{15} + \frac{7}{12} = \frac{4}{60} + \frac{35}{60} = \frac{39}{60}$ wurde zunächst das kgV von 12 und 15, nämlich 60 bestimmt, aber die Summe

erscheint keineswegs in gekürzter Darstellung, denn $\frac{39}{60} = \frac{13}{20}$. Eine ungekürzte

Darstellung hätte man auch ohne Suche des kgV gefunden. Zum Beispiel könnte man doch auch das Produkt von 12 und 15 als gemeinsamen Nenner

⁵² Schnittpunkt 6 (2004: 80)

wählen und erhielte dann $\frac{117}{180}$ als nur unwesentlich kompliziertere Darstellung von $\frac{13}{20}$. Klar ist, dass man immer, wenn man einen kleineren Nenner als das Produkt der beiden Nenner wählt, auch kleinere Zahlen im Zähler und im Nenner hat. Das kann zwar vorteilhaft sein, wenn es die Rechnung erleichtert, aber es ist nicht einzusehen, dass man es so machen muss.

Ebenso gut könnte man als Merksatz für die Multiplikation natürlicher Zahlen notieren, dass die Faktoren zunächst im Dualsystem dargestellt werden müssen, dann multipliziert werden und das Produkt wieder im Zehnersystem dargestellt wird. Das ist nämlich insofern sinnvoll, da die Multiplikation im Dualsystem ein viel einfacheres „Einmaleins“ besitzt als im Zehnersystem, denn als Produkt zweier einstelliger Zahlen kommt ja nur 0 oder 1 vor. Trotzdem wäre es nicht sinnvoll, diese Vorgehensweise zu verlangen, denn man muss es nicht so machen.

Die Additionsregel für Brüche erscheint aber wie oben zitiert in einem Schulbuch und leicht modifiziert in anderen Schulbüchern.

Besser ist es doch, einen Weg zu wählen, auf dem die Schülerinnen und Schüler die Additionsregel sehen und nachvollziehen können. Dafür sind natürlich nicht alle Größen gleichermaßen gut geeignet.

Bruchteile von Kreisflächen beispielsweise erlauben nur in wenigen Fällen, die Summe zweier Bruchteile vereinfacht abzulesen. Eine Additionsregel lässt sich mit Kreisflächen nicht gewinnen. Sehr gut geeignet sind dagegen Bruchteile von Rechteckflächen.

Um $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ an einem Rechteck zu veranschaulichen, teile man die Fläche entlang einer Richtung in 3 gleich große Rechteckflächen und markiere eine davon. Anschließend teile man die Fläche entlang der um 90° gedrehten Richtung in 4 gleich große Rechteckflächen und markiere eine davon. Es ist nun zu sehen, dass die ursprüngliche Rechteckfläche in 12 gleich große Rechteckflächen zerlegt wurde, von denen 6 markiert sind, davon eine doppelt, die hier dunkel dargestellt ist. Es sind also 7 der 12 Rechteckflächen markiert.

Also ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

5. Wie können wir Brüche multiplizieren und dividieren?

Eine Herleitung der Multiplikationsregel von Brüchen ist mit dem Größenkonzept nicht möglich, da Größen nicht miteinander multipliziert werden können. An dieser Stelle muss das Konzept verlassen werden. Dieses ist das größte Manko des Größenkonzepts. An dieser Stelle weichen die meisten Bücher auf das Operatorkonzept aus, ohne explizit von Operatoren zu sprechen.

Aber wenn zum Beispiel $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ h als die Hälfte von einer Dreiviertelstunde

angesehen wird, dann wirkt hier $\frac{1}{2}$ wie ein Operator. Die Multiplikation von Brüchen wird im Allgemeinen so erklärt, dass ein Bruch einen Bruchteil einer Größe repräsentiert und ein zweiter Bruch einen Operator repräsentiert, der angibt, welcher Bruchteil von dem genannten Bruchteil der Größe genommen werden soll.

Eine Herleitung der Divisionsregel ist mit Hilfe von Sachproblemen möglich. Besonders leicht kann der Weg dahin vorbereitet und auch nachvollzogen werden, wenn die Quotienten Anzahlen sind. Wenn zum Beispiel 40 Liter Saft in

$\frac{1}{2}$ l -Flaschen abgefüllt werden sollen, ist für die Schülerinnen und Schüler leicht nachvollziehbar, dass 80 Flaschen benötigt werden, dass also die Division durch $\frac{1}{2}$ das gleich ist wie die Multiplikation mit 2.

6. Welche Regeln gelten in der Menge der Brüche?

Dass die Rechengesetze wie das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz bezüglich der Addition auch in der Menge der Brüche gelten, lässt sich an geeigneten Größen veranschaulichen, wie zum Beispiel an Längen von Strecken oder Volumina von Flüssigkeiten, wenn man die Addition als ein Aneinanderhängen der Strecken beziehungsweise als ein Zusammengießen der Flüssigkeiten begreift.

Dass das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz bezüglich der Multiplikation auch in der Menge der Brüche gelten, lässt sich nicht allein mit Hilfe von Größen einsehen. Denn Größen können nicht miteinander multipliziert werden. Also müssen diese Rechenregeln formal auf die entsprechenden Regeln in der Menge der natürlichen Zahlen zurückgeführt werden oder es muss der operative Ansatz gewählt werden. In jedem Fall wird dafür das Größenkonzept verlassen. Das gilt ebenso für die Distributivität der Multiplikation über der Addition.

Zusammenfassung der Vor- und Nachteile des Größenkonzepts

Das Größenkonzept bietet einige positive Aspekte:

- Die Schülerinnen und Schüler wiederholen das in Klassenstufe 5 erlernte Arbeiten mit Größen.
- Das Erkennen von Brüchen als Anteile von Standardgrößen trifft auf die Vorerfahrung der Schülerinnen und Schüler. Die oben genannten Beispiele sind ihnen schon lange aus dem Alltag bekannt. Insofern ist eine Einführung der Brüche auf diese Weise einfach.
- Die Anteile von Standardgrößen sind gut vorstellbar, wenn sie geeignet ausgesucht werden.

- Spätere Darstellungen von Brüchen werden auf diese Weise vorbereitet.

Es fällt den Schülerinnen und Schülern nicht schwer $\frac{1}{2}m$ als 0,5 m,

5 dm, 50 cm oder 500 mm zu identifizieren. Die Einführung der Kommaschreibweise wird mit den Größen in der 5. Klasse eingeführt. Die Abstraktion wird so erleichtert.

- Die Addition ist besonders gut vorstellbar als eine Aneinanderreihung oder ein Zusammenpacken der Größen.
- Das Erweitern und Kürzen ist ebenfalls leicht nachvollziehbar.
- Der Größenvergleich ist anschaulich und begrifflich einfach.

Nicht zu übersehen sind allerdings auch schwerwiegende negative Aspekte:

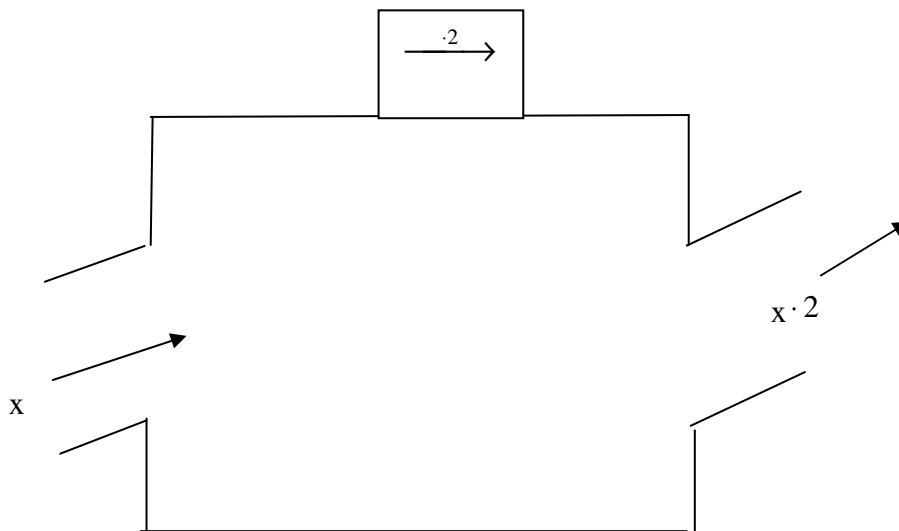
- Irgendwann soll nur noch mit Brüchen gearbeitet werden, von den Größen muss man sich dann trennen. An der Stelle fällt die Abstraktion schwer.
- Schwierigkeiten können sich überlagern, wenn Schülerinnen oder Schüler nicht gut mit Größen umgehen können.
- Aktivitäten von Schülerinnen und Schülern sind nur schlecht möglich. Sie sind noch bedingt möglich, wenn Größen addiert oder subtrahiert werden. Auf die Multiplikation trifft das aber nicht mehr zu.
- Beliebiges Kürzen und Erweitern der Darstellung ist schwer nachvollziehbar.
- Der schwerstwiegende negative Aspekt ist aber der folgende: Die Multiplikation von Brüchen ist mithilfe des Größenkonzepts nicht möglich. Zur Erklärung der Multiplikation ist also eine Abweichung von diesem Konzept nötig.

6.2 Das Operatorkonzept

Das Operatorkonzept wurde meist in den 70er Jahren zur Einführung der Bruchrechnung eingesetzt. Im Gegensatz zu den Größen, die Unterrichtsgegenstand der 5. Klasse sind, sind Operatoren vor der 6. Klasse kein Unterrichtsinhalt.

Operatoren sind Funktionen. Sie werden für die Schülerinnen und Schüler als Maschinen konkretisiert, die jedem sinnvollen Eingabewert einen Ausgabewert zuordnen.

Beispielsweise ist der Multiplikationsoperator $\xrightarrow{\cdot 2}$ als Anweisung zu verstehen, den Eingabewert mit 2 zu multiplizieren.



Der Operator $\xrightarrow{\cdot 2}$ gibt also für jede eingegebene Zahl x die Zahl $x \cdot 2$ aus. Operatoren sind also als Funktionen zu verstehen.

Analog werden Divisionsoperatoren eingeführt. Nun ist es leicht einzusehen, dass die Hintereinanderschaltung zweier Multiplikationsoperatoren durch einen Multiplikationsoperator ersetzt werden können. Das ist trivial, da die nacheinander ausgeführte Multiplikation mit zwei Faktoren durch die Multiplikation mit dem Produkt der beiden Faktoren ersetzt werden kann.

Ebenso findet man leicht einen Ersatzoperator für die Hintereinanderschaltung zweier Divisionsoperatoren. Statt nacheinander durch zwei Zahlen zu dividieren, kann man durch das Produkt der Divisoren dividieren.

Man kann leicht einsehen, dass die Reihenfolge der Multiplikationsbeziehungsweise Divisionsoperatoren vertauschbar ist. Das gilt auch noch dann, wenn ein Multiplikationsoperator mit einem Divisionsoperator verkettet wird.

Interessant wird es, wenn es darum geht, einen Ersatzoperator für die Hintereinanderschaltung eines Multiplikationsoperators und eines Divisionsoperators zu finden.

Hier gibt es Fälle, in denen es sehr einfach ist, einen Ersatzoperator zu finden, nämlich dann, wenn der Faktor des Multiplikationsoperators ein Vielfaches oder ein Teiler des Divisors des Divisionsoperators ist.

Wenn dies aber nicht der Fall ist, ist es nötig, die Brüche einzuführen.

Für die Hintereinanderschaltung der Operatoren $\xrightarrow{\cdot x}$ und $\xrightarrow{:y}$ wobei

x und y zunächst natürliche Zahlen seien mit $y \neq 0$, wird $\xrightarrow{\cdot \frac{x}{y}}$ als Bezeichnung für den Ersatzoperator eingeführt.

So ist der Operator $\cdot \frac{2}{5}$ als Anweisung zu verstehen, den Eingabewert zu verdoppeln und den dann erhaltenen Wert durch 5 zu dividieren oder, da die Vertauschbarkeit schon eingesehen wurde, den Eingabewert durch 5 zu dividieren und den erhaltenen Wert mit 2 zu multiplizieren.

Der Operator $\cdot \frac{2}{5}$ gibt zu jeder eingegebenen Größe $\frac{2}{5}$ von dieser Größe wieder aus.

Die Operatoren werden also nicht als Bruchoperatoren eingeführt, sondern die Bruchoperatoren werden als verkürzter oder vereinfachter Ersatzoperator einer Hintereinanderschaltung mehrerer Operatoren entwickelt, im obigen Beispiel können es zum Beispiel die Operatoren $\xrightarrow{\cdot 2}$ und $\xrightarrow{:5}$ sein.

Die Verwendung von Operatoren lässt sich gut schon vor der Zahlbereichserweiterung im Bereich der natürlichen Zahlen vorbereiten,

insbesondere auch mit natürlichen Zahlen als Maßzahlen von Größen. Das Modell, dass eine Zahl eingegeben wird, vom Operator „bearbeitet“ wird und eine Ausgabe erfolgt, ist für die Schülerinnen und Schüler gut nachvollziehbar und attraktiv.

Dabei muss natürlich der Umgang mit Operatoren ausführlich geübt werden, weil die Schülerinnen und Schüler meist keine Vorerfahrungen im Umgang mit Operatoren haben. Bei der Einführung von Operatoren wird meist mit Multiplikationsoperatoren (beziehungsweise Streckoperatoren oder Maloperatoren) gearbeitet. Es werden der Eingabewert und der Operator gegeben, und die Aufgabe ist, den Ausgabewert zu bestimmen. Es können Ein- und Ausgabewert gegeben und ein geeigneter Operator gesucht sein. Es können aber auch der Operator und der Ausgabewert gegeben und der Eingabewert gesucht sein. Auf diese Weise findet man schnell, dass es zu jedem Multiplikationsoperator $\xrightarrow{\cdot n}$ mit $n \neq 0$ einen Divisionsoperator (beziehungsweise Stauchoperator oder Durchoperator) als Umkehroperator $\xrightarrow{:n}$ gibt, der die ursprünglichen Eingabewerte wieder herstellt.

Wie schon erwähnt ist auch die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Multiplikations- und Divisionsoperatoren leicht nachvollziehbar.

Es gibt auch kein Verständnisproblem, was Operatoren wie $\frac{5}{7}, \frac{2}{5}$ bei einer Strecke oder einer Rechteckfläche bedeuten. Eine Visualisierung ist in diesem Fall sehr einfach.

Die Hintereinanderschaltung von $\xrightarrow{\cdot n}$ und $\xrightarrow{:m}$ bewirkt dasselbe wie die Hintereinanderschaltung von $\xrightarrow{:m}$ und $\xrightarrow{\cdot n}$.

Die Hintereinanderschaltung von $\xrightarrow{\cdot n}$ und $\xrightarrow{:m}$ kann durch den Operator $\cdot \frac{n}{m}$ ersetzt werden und heißt Bruchoperator.

Um das Operatorkonzept beurteilen zu können, wird wieder der Fragenkatalog herangezogen.

1. Was ist ein Bruch?

Im Operatorkonzept werden die Brüche als Bruchoperatoren eingeführt.

Bruchoperatoren sind Funktionen, die jeder natürlichen Zahl (und später jedem Bruch) einen Bruch zuordnen. Wie oben in 6. 2 dargestellt, kann man sich den Operator als eine Maschine darstellen, die Eingabewerte bearbeitet und die bearbeiteten Werte ausgibt.

Multiplikationsoperatoren werden im Bereich der natürlichen Zahlen mit Divisionsoperatoren verkettet und umgekehrt. Es wird festgestellt, dass nicht jede Verkettung durch einen einzelnen Multiplikationsoperator oder Divisionsoperator ersetzt werden kann.

Jede Verkettung eines Multiplikationsoperators mit einem Divisionsoperator hat als Ersatzoperator einen Bruchoperator. Bruchoperatoren ersetzen also die gemischte Operatorkette.

$\xrightarrow{\cdot \frac{n}{m}}$ ist die Verkettung, beziehungsweise die Hintereinanderausführung der beiden Operatoren $\xrightarrow{\cdot n}$ und $\xrightarrow{: m}$.

Die Verkettung $\xrightarrow{\cdot n}$ und $\xrightarrow{: m}$ kann verstanden werden als „nimm n mal den Eingabewert und teile das Produkt durch m“. Da die Operatoren vertauschbar sind, kann die Verkettung $\xrightarrow{: m}$ und $\xrightarrow{\cdot n}$ auch als „teile in m Teile und nimm n von diesen Teilen“ verstanden werden.

Die Schüler lernen übrigens schon bei der Verkettung der kommutativen Operatoren, dass der Rechenweg nicht immer gleich schwierig ist, dass man also die Kommutativität zur Erleichterung der Rechnung nutzen kann.

Übrigens sind durch obige Definition alle natürlichen Zahlen auch Brüche, denn die Verkettung von $\xrightarrow{\cdot 10}$ und $\xrightarrow{: 2}$ kann einerseits durch den Operator $\xrightarrow{\cdot 5}$ ersetzt werden. Da jeder Ersatzoperator einer Verkettung eines Multiplikationsoperators mit einem Divisionsoperator ein Bruchoperator ist, ist auch $\xrightarrow{\cdot 5}$ ein Bruchoperator.

Andererseits kann die Verkettung von $\xrightarrow{\cdot 10}$ und $\xrightarrow{: 2}$ durch den Bruchoperator $\xrightarrow{\cdot \frac{10}{2}}$ ersetzt werden. So lässt sich die Einsicht gewinnen, dass es sich immer dann um zwei Darstellungen des gleichen Bruchs handelt, wenn die zugehörigen Operatoren dasselbe bewirken.

2. Wie kann man Brüche darstellen?

Brüche werden als Operatoren in der Form $\frac{n}{m} \rightarrow$ geschrieben.

Jeder Bruchoperator kann die Verkettung von einem Multiplikationsoperator mit einem Divisionsoperator ersetzen.

$\frac{n}{m} \rightarrow$ ist zum Beispiel die Verkettung von $\cdot n \rightarrow$ und $: m \rightarrow$. Wenn man in diese Operator-kette einen weiteren Operator mit seinem Umkehroperator einfügt, zum Beispiel $\cdot n \rightarrow \cdot 2 \rightarrow : 2 \rightarrow : m \rightarrow$, dann erhält man eine Operator-kette, die genau das Gleiche bewirkt, also für jeden Eingabewert den gleichen Ausgabewert liefert wie die Operator-kette $\cdot n \rightarrow : m \rightarrow$. Zwei Operatoren sind gleich, wenn sie für jeden Eingabewert denselben Ausgabewert liefern. Wenn man sich die Ersatzoperatoren dieser Ketten ansieht, dann sieht man, dass die zu den Bruchoperatoren gehörigen Brüche gleich sind, denn die Ersatzoperatoren sind $\frac{n}{m} \rightarrow$ und $\frac{2n}{2m} \rightarrow$.

Das Kürzen und Erweitern der Darstellung lässt sich so gut erklären.

Dass man auf diese Weise unendlich viele Darstellungen für jeden Bruchoperator finden kann, ist trivial. Ebenso kann man, falls m und n einen gemeinsamen Teiler k besitzen, das Kürzen erklären. Die Operator-kette

$\cdot n \rightarrow : m \rightarrow$ ersetzen wir dann durch $\cdot \frac{n}{k} \rightarrow : \frac{m}{k} \rightarrow$, beziehungsweise

den Ersatzoperator $\frac{n}{m} \rightarrow$ durch $\frac{\left(\frac{n}{k}\right)}{\left(\frac{m}{k}\right)} \rightarrow$.

Das Kürzen und Erweitern lässt sich also gut verdeutlichen. Zwei Operatoren sind gleich, wenn sie für jeden Eingabewert den gleichen Wert ausgeben. Es ist klar, dass sich an der Ausgabe nichts ändert, wenn wir k mal so viele Teile machen, aber auch k mal so viele Teile nehmen. Dann sind natürlich auch die dazu gehörigen Brüche gleich.

3. Wie können wir erkennen, welcher Bruch größer oder kleiner ist?

Der Größenvergleich ist in diesem Konzept problematisch, da Operatoren Funktionen sind.

Man könnte höchstens für zwei Operatoren O_A und O_B definieren:

$$O_A > O_B :\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} : O_A(x) > O_B(x)$$

$O_A(x)$ ist dabei der Ausgabewert des Operators A beim Eingabewert x, analog für $O_B(x)$.

Der Bruch $\frac{n}{m}$ ist größer als $\frac{a}{b}$, wenn für jeden Eingabewert x, der

Bruchoperator $\xrightarrow{\frac{n}{m}}$ einen größeren Ausgabewert liefert als der Bruchoperator $\xrightarrow{\frac{a}{b}}$.

Wegen der Proportionalität reicht es, dieses an einem Eingabewert zu untersuchen. Diese Einsicht gilt es aber noch den Schülerinnen und Schülern zu vermitteln, da proportionale Zuordnungen üblicherweise erst in Klassenstufe 7 unterrichtet werden.

Zum Größenvergleich von $\frac{n}{m}$ und $\frac{a}{b}$, wähle man sich dann einfach einen geeigneten Eingabewert. Besonders geeignet für eine einfache Rechnung sind natürlich solche Eingabewerte, die sowohl Vielfache von m als auch von b sind.

4. Wie können wir Brüche addieren und subtrahieren?

Die Addition und die Subtraktion sind das große Manko des Operatorkonzepts.

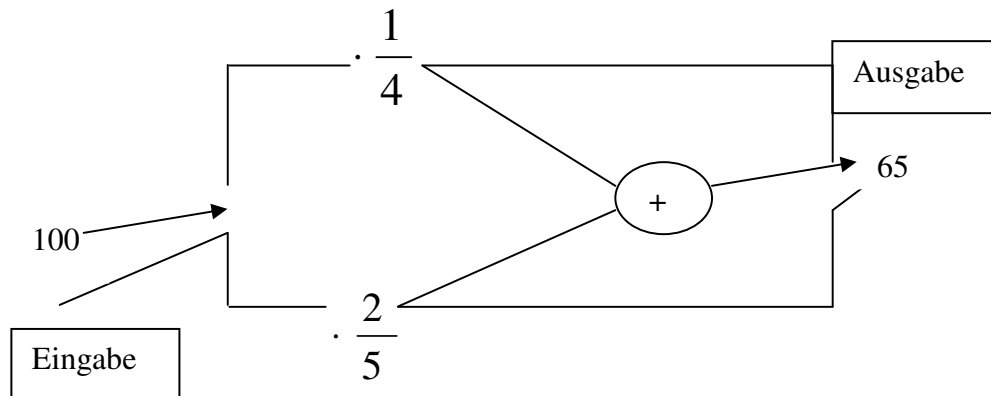
Eine Addition $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ im Operatorkonzept ist nicht leicht zu vereinfachen.

Operatoren sind Funktionen und man hat nun eine Addition von Funktionen zu erklären.

Im Konkreten lässt man auf einen Eingabewert x die beiden Operatoren wirken, in dem Sinne, dass $\frac{a}{b}$ von x und $\frac{c}{d}$ von x gebildet werden. Diese Bilder der Operatoren werden anschließend addiert. Das ist noch nicht schwierig. Das

Problem besteht darin, auf einfache Weise einen geeigneten Ersatzoperator zu finden.

Im Beispiel:



Es ist keineswegs trivial, dass die Maschine aus Sicht der Schülerinnen und Schüler so aussehen muss. Aber das Distributivgesetz liefert die Einsicht, dass

der Operator $\xrightarrow{\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)}$ dasselbe bewirkt, wie das getrennte Einwirken der Operatoren $\xrightarrow{\cdot\frac{1}{4}}$ und $\xrightarrow{\cdot\frac{2}{5}}$ auf einen gegebenen Eingabewert bei anschließender Addition der Ausgabewerte. So erhält man hier

$100 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) = 100 \cdot \frac{1}{4} + 100 \cdot \frac{2}{5} = 25 + 40 = 65$ und es wird klar, dass $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ durch

$\frac{65}{100}$ ersetzt werden kann.

Problematisch ist, dass wir uns hier vom bisherigen Operatorkonzept gelöst haben, denn auf den beliebig ($\neq 0$) wählbaren Eingabewert wirken ja zunächst zwei Bruchoperatoren ein, ehe deren Bilder addiert werden.

Was bei der Erklärung der Multiplikation noch hervorragend durch die Hintereinanderschaltung und geeignete Vertauschung der Multiplikations- und Divisionsoperatoren möglich war, ist hier nur schwierig nachvollziehbar.

Die Multiplikation $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ kann durch Hintereinanderschaltung von

$\xrightarrow{\cdot\frac{2}{5}} \xrightarrow{\cdot\frac{1}{4}}$, Aufspaltung in $\xrightarrow{\cdot 2} \xrightarrow{:5} \xrightarrow{\cdot 1} \xrightarrow{:4}$,

Vertauschung zu $\xrightarrow{\cdot 2} \xrightarrow{\cdot 1} \xrightarrow{:5} \xrightarrow{:4}$ und Zusammenfassung zu $\xrightarrow{\cdot 2} \xrightarrow{:20}$ und schließlich zu $\xrightarrow{\cdot \frac{2}{20}}$ erklärt werden.

Bei der Addition kann so nicht vorgegangen werden.

Denn es steht $\frac{2}{5}$ für die Funktion $f : n \rightarrow n \cdot \frac{2}{5}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\frac{1}{4}$ steht für die Funktion $g : n \rightarrow n \cdot \frac{1}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Auf der Menge der Funktionen ist für alle $\varphi, \psi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Q}$ definiert:

$$\varphi + \psi : n \rightarrow (\varphi + \psi)(n) := \varphi(n) + \psi(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

$\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ steht also für die Funktion $f + g : n \rightarrow n \cdot \frac{2}{5} + n \cdot \frac{1}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Wenn wir den oben mit dem Eingabewert 100 gefundenen Ersatzoperator ε nennen, dann ist $\varepsilon : n \rightarrow n \cdot \frac{65}{100}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und es ist $f + g = \varepsilon$.

Mit dieser Methode, beide Multiplikationsoperatoren auf den Eingabewert wirken zu lassen und anschließend die Bilder zu addieren, findet man immer einen Ersatzoperator und kann so die Summe zweier Brüche erklären. Aber es ist keineswegs einfach, eine einfache Additionsregel herzuleiten.

Das muss für die Schule unbefriedigend sein.

Die Problematik der Addition und Subtraktion im Operatorkonzept führte dazu, dass in den meisten Büchern, die auf diesem Konzept aufbauen, die Addition und Subtraktion erst nach den leichter nachvollziehbaren Punktrechenarten eingeführt wird. Diese Reihenfolge ist unnatürlich.

5. Wie können wir Brüche multiplizieren und dividieren?

Die Herleitung der Multiplikationsregel wird in den Büchern, die mit dem Operatorkonzept arbeiten, auf zwei verschiedene Weisen erklärt.

Es gibt Bücher, die nun einen Bruchoperator auf einen Bruch wirken lassen, der Maßzahl einer Größe ist. Hierbei haben also die Brüche verschiedene Rollen. Der eine Bruch ist Eingabewert, der andere Bruchoperator. Der Ausgabewert ist das Produkt der Brüche.

Andere Bücher leiten die Multiplikationsregel her, indem sie zwei Bruchoperatoren nacheinander wirken lassen. Es soll ein Ersatzoperator gefunden werden. Das ist aber kein Problem, denn man muss sich nur der Definition eines Bruchoperators bedienen.

Seien also Bruchoperatoren $\xrightarrow{\cdot \frac{n}{m}}$ und $\xrightarrow{\cdot \frac{a}{b}}$ gegeben, dann ist ihre

Verkettung $\xrightarrow{\cdot \frac{n}{m}} \xrightarrow{\cdot \frac{a}{b}}$ der Ersatz für die Operatorkette $(\xrightarrow{\cdot n} \xrightarrow{:m})(\xrightarrow{\cdot a} \xrightarrow{:b})$.

Wegen der Assoziativität ist $(\xrightarrow{\cdot n} \xrightarrow{:m})(\xrightarrow{\cdot a} \xrightarrow{:b})$ durch die Operatorkette $\xrightarrow{\cdot n} (\xrightarrow{:m} \xrightarrow{\cdot a}) \xrightarrow{:b}$ ersetzbar, diese wiederum kann wegen der Kommutativität durch $\xrightarrow{\cdot n} \xrightarrow{\cdot a} \xrightarrow{:m} \xrightarrow{:b}$ ersetzt werden. Diese Operatorkette kann durch die Verkettung der einfachen Mal- und Divisionsoperatoren $\xrightarrow{\cdot na}$ und $\xrightarrow{:mb}$ ersetzt werden. Nach Definition lässt sich diese Verkettung aber durch den Bruchoperator $\xrightarrow{\cdot \frac{na}{mb}}$ ersetzen. So kann durch striktes Befolgen der Regeln auf sehr einfache Weise die Regel für die Multiplikation von Brüchen hergeleitet werden.

Zur Division überlege man sich, dass jeder Divisionsoperator der

Umkehroperator eines Multiplikationsoperators ist. So ist $\xrightarrow{: \frac{a}{b}}$

Umkehroperator von $\xrightarrow{\cdot \frac{a}{b}}$. Andererseits ist auch $\xrightarrow{\cdot \frac{b}{a}}$ Umkehroperator

von $\xrightarrow{\cdot \frac{a}{b}}$. Da die Operatoren $\xrightarrow{: \frac{a}{b}}$ und $\xrightarrow{\cdot \frac{b}{a}}$ das Gleiche bewirken, sind sie gleich.

6. Welche Regeln gelten in der Menge der Brüche?

Mit dem Operatorkonzept lassen sich die Assoziativität und die Kommutativität der Multiplikation einsehen. Analoge Einsichten für die Addition lassen sich mittels Operatoren schwierig herstellen. Leicht einzusehen ist, dass 1 das neutrale Element der Multiplikation in der Menge der Brüche ist und dass jedes Element außer 0 ein multiplikativ inverses Element besitzt.

Zusammenfassung der Vor- und Nachteile des Operatorkonzepts:

Positiv am Operatorkonzept ist Folgendes:

- Die Verwendung von Operatoren lässt sich gut schon vorher mit natürlichen Zahlen vorbereiten. Das Modell, dass eine Zahl eingegeben wird, vom Operator „bearbeitet“ wird und eine Ausgabe erfolgt, ist für die Schülerinnen und Schüler gut nachvollziehbar.
- Es gibt kein Problem zu verstehen, was die Wirkung eines Multiplikations- oder Divisions- oder eines Bruchoperators auf eine Strecke oder einer Rechteckfläche bedeutet.
Eine Visualisierung ist in diesem Fall sehr einfach.
- Kürzen und Erweitern lässt sich gut verdeutlichen. Zwei Operatoren sind gleich, wenn sie für jeden Eingabewert den gleichen Wert ausgeben. Es ist klar, dass sich an der Ausgabe nichts ändert, wenn wir x mal so viele Teile machen, aber auch x mal so viele nehmen. Insbesondere, wenn man den Bruchoperator durch einen Multiplikations- und einen Divisionsoperator ersetzt, wird dieses sofort deutlich.
So ist leicht verständlich, dass die Hintereinanderschaltung der Operatoren $\xrightarrow{\cdot 2}$ und $\xrightarrow{:5}$ das gleiche bewirkt wie die Hintereinanderschaltung der Operatoren $\xrightarrow{\cdot 4}$ und $\xrightarrow{:10}$ oder $\xrightarrow{\cdot 6}$ und $\xrightarrow{:15}$ und so fort.
- Die Multiplikation lässt sich leicht einführen, in dem man mehrere Operatoren hintereinander wirken lässt.

- Die Einführung der Division wird einfach, wenn man einen „Umkehroperator“ einführt.
- Der Größenvergleich ist einfach. Der Bruch ist größer, dessen zugehöriger Operator bei einer Eingabe mehr ausgibt.

Negativ am Operatorkonzept ist Folgendes:

- Beim Operatorkonzept wird meist die Multiplikation vor der Addition eingeführt. Das ist unnatürlich, weil die Multiplikation bei den natürlichen Zahlen als verkürzte Schreibweise einer wiederholten Addition eingeführt wird.

Schlimmer ist jedoch, dass die Addition sich nicht gut mit diesem

Konzept erklären lässt. Statt zum Beispiel $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ ist nun ein

„einfacherer“ Ersatzoperator gesucht, der dieselbe Wirkung hat. Ein Wechsel des Konzepts wird an dieser Stelle nötig.

6.3 Das gemischte Konzept

Die Vor- und Nachteile des Größen- sowie des Operatorkonzeptes wurden in 6. 1 und 6. 2 beschrieben. Dabei fällt auf, dass dort, wo das Größenkonzept schwach ist, insbesondere bei der Multiplikation, eine Stärke des Operatorkonzeptes liegt. Ebenso kann dort, wo das Operatorkonzept schwach ist, gut mit dem Größenkonzept gearbeitet werden. Somit liegt es nahe, beide Konzepte zu mischen, um sich der Stärken beider Konzepte zu bedienen.

Das gemischte Konzept wird unter anderen von Zech vorgeschlagen, der zunächst die Einführung „konkreter Brüche“ befürwortet. Aber kurz danach sollen Brüche auch als Operatoren eingeführt werden: „Bezeichnet man $\frac{m}{n}(E)$ als „konkreten Bruch“, so kann man den Operator, der die Größe E in die Größe $\frac{m}{n}(E)$ überführt, als „Bruchoperator“ oder auch als „Bruchzahl“

bezeichnen. Die bloße Schreibfigur „ $\frac{m}{n}$ “ wird hingegen als „Bruch“ bezeichnet.

Der Bruch $\frac{m}{n}$ ist deshalb sehr wohl zu unterscheiden von der Bruchzahl, die durch $\frac{m}{n}$ bezeichnet wird.⁵³

Abgesehen von der schon besprochenen Problematik, die im Zusammenhang mit der Einführung der Wörter „Bruchzahl“ für die Zahl und „Bruch“ für die Schreibfigur entsteht, ist zu bedenken, dass es für die Schülerinnen und Schüler schwierig sein muss, wenn sie Brüche je nach gerader brauchbarer Interpretation als Größen oder als Operatoren kennenlernen.

Bei Beantwortung des Fragenkatalogs lohnt es nicht, noch einmal detailliert die Vor- und Nachteile zu beschreiben. Es sollte der Verweis auf die beiden genannten Konzepte ausreichen.

1. Was ist ein Bruch?

Ein Bruch ist sowohl Größe als auch Operator.

2. Wie kann man Brüche darstellen?

Bruchdarstellungen sind hier analog der Konzepte 6. 1 und 6. 2 möglich.

3. Wie können wir erkennen, welcher Bruch größer oder kleiner ist?

Für den Größenvergleich sind die Ansätze beider Konzepte geeignet.

4. Wie können wir Brüche addieren und subtrahieren?

Für die Einführung der Addition und der Subtraktion ist das Größenkonzept viel besser geeignet als das Operatorkonzept.

⁵³ Zech (1995: 142)

5. Wie können wir Brüche multiplizieren und dividieren?

Bei der Einführung der Multiplikation und der Division wird meist nur mit dem Operatorkonzept gearbeitet. Wenn doch mit Größen gearbeitet wird, dann darf nur eine vorkommen, d. h. nur einer von zwei Faktoren darf eine Größe sein. Die Verknüpfung „ $\cdot$ “ wird dann als „von“ interpretiert. Solche Interpretationen sind bei Sachaufgaben immer wieder nötig. Beispiel: wenn $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} h$ vergangen ist, dann ist die Hälfte *von* einer Dreiviertelstunde vergangen. Sinnlos dagegen ist es, wie schon besprochen, zwei Größen miteinander zu multiplizieren.

6. Welche Regeln gelten in der Menge der Brüche?

Regeln können analog 6. 1 und 6. 2 hergeleitet werden.

Der größte Nachteil dieses Konzepts ist der ständige Wechsel zwischen Größen - und Operatorkonzept. Außer den Schwierigkeiten, die sich dadurch während der Lernphase ergeben, schafft man sich das Problem, dass Schülerinnen und Schüler bei der Rekonstruktion einer vergessenen Rechenregel sich zuerst einmal des benutzten Konzeptes erinnern müssen. Wenn ein Schüler die Multiplikationsregel vergessen hat und sie rekonstruieren möchte, dabei aber Brüche als Größen auffasst, weil er sich nicht mehr daran erinnern kann, ob *damals*, als die Multiplikation eingeführt wurde, die Brüche gerade als Größen oder als Operatoren betrachtet wurden, wird er nicht imstande sein, eine Regel zu rekonstruieren.

6.4 Das Gleichungskonzept

Das Gleichungskonzept mag naheliegend sein, da die Tatsache, dass jede Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$ in der Menge der Brüche eindeutig lösbar ist, der große Gewinn der Zahlbereichserweiterung ist. Dennoch hat es in den Schulbüchern keine große Relevanz, was leicht eingesehen werden kann.

Die Brüche werden eingeführt als Lösungen der Gleichungen oben genannter Form.

Die Menge der Brüche ist also die Vereinigung der Lösungsmengen aller Gleichungen vom Typ $a \cdot x = b$ mit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$.

An der Stelle wird schon deutlich, warum dieses Konzept ungeeignet sein muss. Es setzt nämlich eine Behandlung der Gleichungslehre vor Einführung der Brüche voraus, wie auch Freudenthal selbst einräumt: „Die, an und für sich zweifelhafte, Anschaulichkeit des Bruchrechnens ist zwar verloren gegangen, aber dafür verlaufen die Rechnungen nach einem allgemeinen Schema, das man erst nach beträchtlicher algebraischer Übung versteht.“⁵⁴

Ich werde sofort den Fragenkatalog durchgehen, um anschließend zu zeigen, dass dieses Konzept nicht gut geeignet ist für den Unterricht in Klassenstufe 6.

1. Was ist ein Bruch?

Ein Bruch ist in diesem Konzept eine Lösung einer Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$.

Es ist sofort klar, dass jede natürliche Zahl ein Bruch ist, denn man betrachte die Gleichung $a \cdot x = n \cdot a$ mit $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, um zu sehen, dass $x = n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ Lösung einer solchen Gleichung sein kann.

Was ist aber die Lösung von $5 \cdot x = 2$? Die Lösung wird definiert als $\frac{2}{5}$, was $2 : 5$ bedeutet.

2. Wie kann man Brüche darstellen?

Sei ein Bruch $\frac{b}{a}$ gegeben. Er ist die Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ gegeben, dann hat die Gleichung $na \cdot x = nb$ die gleiche

Lösungsmenge wie $a \cdot x = b$. Da $\frac{nb}{na}$ Lösung von $na \cdot x = nb$ ist, gilt $\frac{b}{a} = \frac{nb}{na}$.

In der Gleichungslehre muss also schon klar sein, wann Gleichungen äquivalent sind, beziehungsweise wann sie die gleiche Lösungsmenge haben,

⁵⁴ Freudenthal (1973: 206 f.)

um das Erweitern der Bruchdarstellung zu erklären. Analoges ist für das Kürzen zu leisten.

3. Wie können wir erkennen, welcher Bruch größer ist?

Seien zwei Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{d}{c}$ gegeben.

$\frac{b}{a}$ ist Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$.

Ebenso ist $\frac{b}{a}$ Lösung der Gleichung $ca \cdot x = cb$.

Man setze nun $\frac{d}{c}$ für x ein und prüfe, ob $ca \cdot x > cb$ oder $ca \cdot x < cb$ ist. Im

ersten Fall ist $\frac{d}{c} > \frac{b}{a}$; im zweiten Fall ist $\frac{d}{c} < \frac{b}{a}$.

Wenn $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ ist, dann waren schon die Gleichungen $a \cdot x = b$ und $c \cdot x = d$ äquivalent.

Auch der Größenvergleich verlangt den Schülerinnen und Schülern der 6. Klasse ein hohes Abstraktionsniveau ab.

4. Wie können wir Brüche addieren oder subtrahieren?

Seien zwei Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{d}{c}$ gegeben.

$\frac{b}{a}$ ist Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$.

$\frac{d}{c}$ ist Lösung der Gleichung $c \cdot x = d$.

$\frac{b}{a} + \frac{d}{c}$ ist aber nicht Lösung der Gleichung (*) $a \cdot x + c \cdot x = b + d$, wie man zunächst unbefangen vermuten könnte. Denn es ist in (*) der Fehler begangen worden, dass die Lösungen der beiden Gleichungen gleich benannt wurden und die Gleichungen dann addiert wurden. Die Berechtigung dazu ist nicht gegeben, was natürlich für die Schülerinnen und Schüler der 6. Klassen nur schwierig einzusehen ist.

Man betrachte die Gleichungen

$$(I) \quad a \cdot x = b \text{ und}$$

$$(II) \quad c \cdot y = d$$

und versuche nun eine lineare Gleichung zu konstruieren, deren Lösung $x + y$ ist. Dazu betrachte man die Gleichungen

$$(c \cdot I) \quad ca \cdot x = cb \text{ und}$$

$$(a \cdot II) \quad ac \cdot y = ad, \text{ sowie die Gleichung}$$

$$(c \cdot I + a \cdot II) \quad ca \cdot x + ac \cdot y = cb + ad, \text{ die äquivalent ist zu}$$
$$ca \cdot (x + y) = cb + ad$$

Die Lösung der letzten Gleichung ist $x + y = \frac{cb + ad}{ca}$.

Für die Subtraktion gehe man analog vor.

5. Wie können wir Brüche miteinander multiplizieren und dividieren?

Seien zwei Brüche $\frac{b}{a}$ und $\frac{d}{c}$ gegeben.

$\frac{b}{a}$ ist Lösung der Gleichung (*) $a \cdot x = b$.

$\frac{d}{c}$ ist Lösung der Gleichung (**) $c \cdot y = d$.

Es ist $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$ die Lösung der Gleichung $ac \cdot xy = bd$.

Zur Division:

Die Herleitung einer Rechenregel für die Division ist hier erschwert, wenn Brüche stur als Lösungen von linearen Gleichungen angesehen werden und nicht als Quotienten. Denn in Analogie zur Herleitung der Multiplikationsregel könnte man wieder von (*) und (**) ausgehen und daraus folgende neue Gleichung bilden:

$$(a \cdot x) : (c \cdot y) = b : d$$

Diese lässt sich leicht umformen zur Gleichung $(a : c) \cdot (x : y) = b : d$, aus der wir sofort die Lösung $x : y = (b : d) : (a : c)$ ablesen können.

Wenn schon bekannt ist, dass ein Bruchstrich dasselbe bedeutet wie „geteilt durch“,

dann können wir an dieser Stelle einsehen, dass $\frac{b:d}{a:c}$ die $\frac{(\frac{b}{d})}{(\frac{a}{c})}$ die Lösung der

Gleichung $(a : c) \cdot (x : y) = b : d$ ist.

Es ist schon deutlich geworden, dass dieses Konzept stark algebraisch motiviert ist und für einen Bruchrechnenunterricht in der Klassenstufe 6 ungeeignet ist. Somit wird der Ausflug in dieses Konzept hiermit beendet und auch auf eine weitere Untersuchung des Fragenkatalogs verzichtet.

Es geht zurück auf Hans Freudenthal, der es folgendermaßen rechtfertigt:

„So sollte das Bruchrechnen, soweit es unanschaulich ist, dann auch motiviert werden – das gebietet schon die Ehrlichkeit – man verlangt die unbeschränkte Ausführbarkeit der vier Operationen. Das ist eine abstrakte, von der Praxis kaum beeinflusste Motivation, und mit ihr befindet man sich mitten in der Algebra. [...] Es werden heute sehr viel Anstrengungen gemacht, das Bruchrechnen im Rahmen des elementaren Rechnens zu verbessern. [...] Wenn sie didaktisch gut sind, sind sie besonders gefährlich, weil sie die wirkliche Lösung hinausschieben – ein endloser Aufschub. Die wirkliche heißt für mich: von der Algebra her.“⁵⁵

Dass dieses Konzept für den Unterricht in Klassenstufe 6 nicht geeignet ist, wird klar, wenn wir seine Vor- und Nachteile beleuchten.

Wenn man diesem Konzept etwas Positives zugestehen kann, dann nur:

⁵⁵ Freudenthal (1973: 248)

- Der Gewinn der Zahlbereichserweiterung wird sofort offensichtlich, denn nun ist jede Gleichung $a \cdot x = b$ mit $a \neq 0$ eindeutig lösbar mit $x = \frac{b}{a}$.
- Erweitern und kürzen macht keine Probleme, wenn eingesehen wurde, dass die Gleichungen $a \cdot x = b$ und $(a \cdot c) \cdot x = b \cdot c$ mit $a, c \neq 0$ dieselbe Lösungsmenge haben. Mit mindestens ebenso großer Berechtigung könnte das „problemlose Erweitern und Kürzen“ aber auch auf der Negativ-Seite genannt werden, da eben die nötige Voraussetzung für die Einsicht im Rahmen dieses Konzepts, nämlich die Gleichungslehre im Allgemeinen erst nach der Bruchrechnung ausführlich unterrichtet wird.

Negativ an diesem Konzept ist:

- Die Gleichungslehre muss nun vor der Bruchrechnung eingeführt und ausführlich behandelt werden.
- Die Einführung der Addition ist sehr formal.
Sie ist für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 6 nicht nachvollziehbar.
- Die Einführung der Multiplikation und der Division ist ebenfalls sehr formal. Sie werden ähnlich wie die Addition eingeführt.
- Ein Größenvergleich ist auch nicht einfach.
- Die meisten Schülerinnen und Schüler sind vom hohen Abstraktionsniveau, das für dieses Konzept nötig ist, völlig überfordert.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass hier zwei innermathematische Konzepte vorgestellt wurden, die zwar für den Lehrenden hervorragend geeignet sind, um sich alles klar zu machen, was im Bereich der Brüche wichtig ist, die aber keine Relevanz für den Unterricht haben.

Außerdem wurden vier didaktische Konzepte mit ihren Vor- und Nachteilen vorgestellt. Beim zuletzt präsentierten Gleichungskonzept sagt sogar sein

Befürworter Freudenthal, dass es nicht zu den didaktisch guten Konzepten zählt.

Aber auch das „Größenkonzept“ und das „Operatorkonzept“ haben große Schwächen, sodass es ausgeschlossen ist, sich auf eines dieser Konzepte zu beschränken.

Allerdings ist es so, dass gerade dort, wo das Größenkonzept seine Schwächen hat, Stärken des Operatorkonzepts liegen und dass dort, wo Schwächen des Operatorkonzepts liegen, Stärken des Größenkonzepts liegen.

Es ist daher naheliegend, beide Konzepte zu verschmelzen und in Abhängigkeit davon, was gerade behandelt wird, einen Bruch als Operator oder als Größe zu betrachten.

Die Kombination ermöglicht zumindest eine vollständige gute Beantwortung des zur Bewertung aufgestellten Fragenkatalogs.

Dass die Kombination andere schwerwiegende Nachteile hat, ist offensichtlich.

Ein Wechsel zwischen Konzepten muss Schülerinnen und Schüler verwirren.

Wenn sie Regeln rekonstruieren wollen, müssen sie stets in der Lage sein, sich an das richtige Konzept zu erinnern.

7 Das pragmatische Konzept

7.1 Vorbemerkung

Ein wünschenswertes Konzept für die Einführung der Bruchrechnung, das den Anforderungen aus Abschnitt 4 genügt, zeichnet sich unter anderem durch Reinheit und Klarheit aus. Wenn erst einmal deutlich ist, was unter einem Bruch zu verstehen sein soll, dann soll dies auch Bestand haben. Anders als beim Mischen von Größen- und Operatorkonzept, wo die Brüche einmal als Größen, ein anderes Mal als Operatoren angesehen werden, soll in diesem Konzept nicht mehr der Aspekt gewechselt werden, unter dem ein Bruch zu sehen ist. Der Wunsch nach Klarheit verlangt außerdem, dass man auf Ballast wie überflüssige oder verwirrende Wortschöpfungen verzichtet. Darüber hinaus sollen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, mithilfe des Konzeptes für sich selbst die Frage zu beantworten, ob eine Rechnung richtig oder falsch ist. Außerdem soll ihnen die Möglichkeit gegeben sein, Regeln selbst herzuleiten oder zu rekonstruieren.

Leider ist es in Schulbüchern oft so, dass eine Rechenregel an einem einzigen Beispiel vorgeführt wird und dann schon Verallgemeinerung formuliert wird. Es kann nicht Ziel des Mathematikunterrichts sein, dass Schülerinnen und Schüler stumpfsinnig Regeln auswendig lernen und danach zeigen müssen, dass sie sie anwenden können. Das stumpfsinnige Anwenden von Regeln ist eine Perversion des Mathematikunterrichts. Sie ist leider weit verbreitet und hat sogar dazu geführt, dass Schülerinnen und Schüler, die es offenbar gewohnt waren, dass sie immer sofort, wenn ein neuartiges Problem auftauchte, mit einem neuen *Rezept* versorgt wurden, nicht mehr in der Lage sind, sich mit einem Problem auseinanderzusetzen oder gar einen Lösungsweg herzuleiten. Sie lernten die Mathematik als nicht nachvollziehbares Mysterium kennen, in dem einfach nach Bedarf neue Regeln oder Algorithmen quasi *vom Himmel herab fallen*, anstatt nachvollziehbar hergeleitet zu werden. Die Folge dessen ist, dass sie fortan schon sofort bei einer Problemstellung nach einer Regel oder der Lösung eines Problems fragen und sich überhaupt nicht mit dem gestellten Problem auseinandersetzen. Ihre Erfahrungen mit ihrem bisherigen Mathematikunterricht haben nämlich zu der Selbsteinschätzung geführt, dass

sie zwar mit dem stumpfen, formalen Anwenden der Regel gut zurechtkommen, darüber hinaus aber sowieso nichts verstehen.

Ohne wirkliches Verständnis wird es aber nur schwer möglich sein, sich alle Regeln zu merken.

Es ist gerade eines der Hauptprobleme des Mathematikunterrichts, dass Schülerinnen und Schüler oft mit unverständenen Regeln umgehen. Wenn sie aber gar nicht verstehen, warum die Regeln so sind und so sein müssen, erscheinen ihnen diese Regeln als von jemandem ausgedacht. Es ist klar, dass dies auch eine der Ursachen für die große Unzufriedenheit und fehlende Motivation vieler Jugendlicher im Mathematikunterricht ist. Unverständene Regeln müssen wie sinnentleerte Anhäufungen von fremden Zeichen wirken. Dass die Schülerinnen und Schüler daran wenig Interesse haben, ist klar. Nebenbei führt dies oft zu der Frage: „Warum müssen wir das lernen?“ oder „Wofür brauchen wir das?“

Selbstverständlich ist die Akzeptanz solcher Regeln, die nicht verstanden werden, bei den Jugendlichen viel geringer als die der Regeln, die sie verstehen oder sogar selbst herleiten können. Aus diesem Grunde ist es wichtig Regeln anders zu behandeln als Konventionen. Bei Konventionen wie *Punkt vor Strich-Rechnung* oder der allgemein üblichen Syntax gibt es nichts einzusehen. Es ist auch nicht möglich, sie herzuleiten. Diese Konventionen hat man sich ausgedacht und verabredet, um mit ihrer Hilfe eine Normierung zur Verbesserung der Kommunikation zu schaffen.

Das Rechnen würde natürlich einerseits ganz anders, andererseits aber ebenso gut funktionieren, wenn man sich für die Konvention *Strich vor Punkt* entschieden hätte oder wenn man eine andere Syntax wählte. Es ist aber zwingend eine der beiden Regeln *Punkt vor Strich* oder *Strich vor Punkt* notwendig, um syntaktische Eindeutigkeit zu erhalten. Anderenfalls müsste man nämlich jedem mathematischen Text die gewählte Syntax vorausschicken, was sowohl für die Verfasser als auch für die Leser dieser Texte sehr lästig wäre. Ein weiteres gutes Beispiel für syntaktische Konventionen bilden Taschenrechner. Während die meisten Schülerinnen und Schüler mit Taschenrechnern arbeiten, die über eine algebraische Eingabelogik zu bedienen sind, wobei zu unterscheiden ist, ob ein Argument vor einer Funktion eingegeben wird oder umgekehrt, folgten die ersten Taschenrechner wie der

HP-35 der umgekehrt polnischen Notation (UPN), die eine völlig andere Eingabe erfordert. Während die algebraische Eingabelogik eine Eingabe erfordert, die im Wesentlichen dem gleicht, was man auch notiert, so müssen bei der UPN in einer Rechnung zunächst die zu verarbeitenden Zahlen notiert werden und anschließend die Rechensymbole. Letztere zeigen an, in welcher Weise die Zahlen verarbeitet werden sollen.

Ein Term, der nach Punkt vor Strich $(2 + 3) \cdot (4 + 5)$ geschrieben wird, kann nach Strich vor Punkt durch $2 + 3 \cdot 4 + 5$ ersetzt werden oder, wenn es nach der UPN geht, als $2 \square 3 + 4 \square 5 + \cdot$, wobei $\square$ ein Leerzeichen darstellen soll beziehungsweise das Betätigen der Eingabe- oder Enter-Taste, wenn der Term in den Taschenrechner eingetippt werden soll. Hier wird gut deutlich, dass jede dieser Konventionen möglich ist. Man muss sich allerdings für eine von ihnen entscheiden.

Im Gegensatz zu solchen Konventionen kann man Rechenregeln herleiten. Dies sollte im Mathematikunterricht der Schule unbedingt geschehen. Denn was man einmal herleiten konnte, das kann man im Allgemeinen auch, wenn man es wieder vergessen haben sollte, ein zweites Mal herleiten. Wer dagegen eine Regel vergessen hat, die er nur stumpfsinnig auswendig gelernt hat, hat natürlich nicht die Möglichkeit, auf einen Herleitungsweg zurückzugreifen, wenn er nie einen kennengelernt hat.

Zusammengefasst gibt es also mindestens vier gute Gründe für einen solchen bewussten Umgang mit Regeln:

1. Regeln sind nicht ausgedacht, sondern können hergeleitet werden.
Deswegen sollte dies auch im Unterricht stattfinden. Alles andere vermittelt ein falsches Bild von der Mathematik.
2. Regeln, die hergeleitet werden, vermitteln ein besseres Verständnis für deren Inhalt als Regeln, die den Schülerinnen und Schülern gegeben werden.
3. Regeln, die selbst hergeleitet wurden, liefern eine viel höhere Akzeptanz des Faches Mathematik als Regeln, die gegeben und vielleicht nicht einmal verstanden wurden.
4. Selbst hergeleitete Regeln oder zumindest eingesehene Regeln

haben den großen Vorteil, dass sie sich besser einprägen. Sollten sie doch einmal vergessen werden, so haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, sie eigenständig zu rekonstruieren.

Was die Bruchrechnung betrifft, so ist es sogar auf einfache Weise möglich, die Regeln herzuleiten. Sie sollten dann, nach der Herleitung, der letzte Schritt im Lernprozess sein.

Ein solches Konzept, bei dem Schülerinnen und Schüler sich von Beginn an sehr viel selbst erarbeiten können und in dem sie auch selbst die Qualität von Rechnungen beurteilen können, ist möglich, weil alles Neue, das gelernt wird, im Bekannten abgeholt werden kann und per Permanenzprinzip fortgesetzt werden kann.

Ein solches Konzept möchte ich jetzt vorstellen. Es bedarf aber einiger Vorkenntnisse, auf die ich zunächst eingehe.

7.2 Notwendige Vorkenntnisse

Neben den offensichtlich notwendigen Vorkenntnissen wie Kenntnis der Grundrechenarten im Bereich der natürlichen Zahlen, der Rechenregeln, der Teilbarkeitslehre, der $<$ -Relation erscheinen mir für das folgende Konzept einige weitere Voraussetzungen dringend notwendig. Es sollte nämlich dafür gesorgt werden, dass die Schülerinnen und Schüler nicht die oben ausgeführten Fehlvorstellungen erwerben.

Es sollte also schon in der Grundschule ein Verständnis für die Gleichrelation als Äquivalenzrelation geschaffen werden. Ein Gleichheitszeichen darf nicht mit einem Handlungsauftrag gleich gesetzt werden. Außerdem sollten miteinander verknüpfte Zahlen wieder als Zahlen angesehen werden und nicht als Aufgabe. Weiter sollte schon vor dem Bruchrechnenunterricht klar gemacht werden, dass jede Zahl auf unendlich viele verschiedene Weisen dargestellt werden kann. Es kommt sonst zu dem Eindruck, dies sei eine neue Eigenschaft der Brüche, was erstens falsch ist, zweitens als eine dann gleichzeitig mit den Brüchen auftauchende zusätzliche Erschwernis verstörend wirkt. Wie sollen Schülerinnen und Schüler das verstehen, wenn sie für sich selbst schon lange

vor Einführung der Brüche die Einsicht gewonnen haben, dass jede Zahl unendlich viele Darstellungen besitzt?

Schließlich muss die Division mit Rest korrekt eingeführt werden.

Die Problematik der Restschreibweise nach dem Muster $20 : 3 = 6 \text{ R } 2$ wurde in 3.2 ausführlich beschrieben.

7.3 Begründung der Vorgehensweise „vom Abstrakten zum Konkreten“

Die seit den 70er Jahren die Schulbücher dominierenden Konzepte hatten immer die Bruchschreibweise und die Veranschaulichung der Bruchteile von Flächen als Ausgangspunkt.

Meistens waren dies Kreisflächen oder Rechteckflächen, die in mehrere gleich große Teile zerlegt wurden, von denen einige schraffiert oder gefärbt waren.

Auf diese Weise sollte zunächst geübt werden, Bruchteile einer gegebenen Einheit auf der anschaulichen Ebene zu erkennen und in der Bruchschreibweise anzugeben. Anschließend sollten umgekehrt auch Bruchteile gegebener Kreis- oder Rechteckflächen markiert werden.

Ebenfalls im Anfangsunterricht der Bruchrechnung sollten die Schülerinnen und Schüler Bruchteile von Größen angeben können oder Bruchoperatoren auf Größen wirken lassen können.

Es wurde also zuerst immer auf der konkreten Ebene gearbeitet und erst später der Schritt der Abstraktion vollzogen.

Dieser Weg wird auch in der Fachliteratur zur Methodik und Didaktik des Mathematikunterrichts befürwortet. So schlägt Zech vor, man gehe am besten von solchen konkreten Brüchen aus, die im Alltag oft vorkommen oder die den Schülerinnen und Schülern schon aus der Grundschule bekannt seien wie „ein halber Kuchen, zwei Drittel einer Klasse, drei Viertel Kilogramm Zucker, zweieinhalb Runden,...“⁵⁶ Auch er beschreibt also die Einführung der Schreibweise der Brüche und die Veranschaulichung von Brüchen als wichtige Grundlagen. Er führt zur Veranschaulichung noch aus, es empfehle sich am Anfang besonders das „Tortenmodell“, denn Drittel, Viertel, Sechstel, Achtel

⁵⁶ Zech (1995: 150)

seien einfache Brüche und kämen mit Ausnahme der Sechstel auch häufiger vor. Sie seien leicht als Kreissegmente zu zeichnen. Als Vorteil führt Zech deren immer gleiches Aussehen an, wodurch sie sich gut als Standardformen in ihrer relativen Größe zur ganzen Kreisfläche und zueinander einprägen. Er rät aber dazu, den Kreis nicht lange eine Torte symbolisieren zu lassen. Vielmehr solle man ihn zunehmend als Prototyp eines Ganzen erscheinen lassen, wobei er wechselnde Größen oder Dinge symbolisieren könne: „z. B. als Geldmenge, eine Klasse, eine Stunde,...“⁵⁷ Anschließend solle man auf Bruchteile von irgendwelchen Größen wie Längen, Massen, Volumina und so weiter verallgemeinern.

Inwieweit die Vorkenntnisse aus dem Alltag sich als hilfreich erweisen, ist fraglich. Schon oben wurde angeführt, dass die Menge der *echten Brüche*, mit denen man im Alltag konfrontiert wird, relativ klein ist. Über die bloße Konfrontation hinaus findet im Alltag kaum eine Berührung mit ihnen statt.

Padberg jedenfalls analysiert eine Pilotstudie zu Vorkenntnissen über Brüche und kommt zu dem Schluss, man könne bei der überwiegenden Zahl der Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Klassenstufe 6 nicht davon ausgehen, dass bei ihnen schon eine mehr oder weniger vollständige Entwicklung verschiedener wichtiger Aspekte des Bruchzahlbegriffs auf anschaulicher Grundlage stattgefunden habe. Dass schon in breitem Umfang die Fertigkeit vorhanden sei, Bruchsymbole lesen zu können, könne man „keineswegs als Indiz dafür deuten, dass anschauliche Bruchvorstellungen schon in breitem Umfang vorhanden sind.“⁵⁸

Er befürwortet also auch den Einstieg auf der anschaulichen Ebene, warnt aber davor, die Vorerfahrungen der Schüler zum Bruchzahlbegriff zu überschätzen, und plädiert aus diesem Grund sogar dafür, noch längere Zeit auf einer anschaulichen Ebene zu arbeiten.

Es gibt zahlreiche Begründungen für diesen Einstieg auf der anschaulichen Ebene: „Die Wirksamkeit der Veranschaulichungen für den Lernprozeß gehört zu den lange unbezweifelten Grundannahmen der Pädagogik, Psychologie und Mathematikdidaktik. Ihre Sinnhaftigkeit sah man auch in neuerer Zeit gut begründet durch verschiedene miteinander ‚verwandte‘ kognitive Theorien:

⁵⁷ Zech (1995: 151)

⁵⁸ Padberg (2002: 33 f.)

Veranschaulichungen wurden vor allem als wesentliche ‚Verinnerlichungsstufe‘ zwischen konkreter Handlung und abstraktem Begriff gesehen:

- als übliche Darstellung konkret-handelnder Erfahrung (Aebli 1963),
- als „ikonische Darstellung“, verstanden als eine Weise bildhafter Welterfahrung (Bruner 1974),
- als modellhafte Verkleidung eines abstrakten Kerns (Dienes 1970),
- als unmittelbare und mittelbare Anschauung (Lompscher 1972).⁵⁹

Es gibt also Gründe dafür, dass der Beginn im Konkreten allseits favorisiert wird, wenn er tatsächlich zu einem besseren Verständnis beiträgt.

In jedem Fall ist klar, dass jedes didaktische Konzept die Erkenntnisse der Entwicklungspsychologie berücksichtigen muss. Wegweisend für die Theorie der Stadien der kognitiven Entwicklung ist die Arbeit Piagets. Piaget geht davon aus, dass Kinder vier Stadien der kognitiven Entwicklung durchlaufen. Bis zum zweiten Lebensjahr befindet sich das Kind im sensomotorischen Stadium, danach bis zum siebten Lebensjahr im präoperationalen Stadium. Vom siebten bis zum elften oder zwölften Lebensjahr durchläuft es das konkret–operationale Stadium und gelangt dann in das formal-operative Stadium. Ungeachtet aller neuen Erkenntnisse haben die Schülerinnen und Schüler bei Eintritt in Klassenstufe 6 das 11. Lebensjahr vollendet. Sie sind auch nach Piaget schon bereit für formal–operative Prozesse.

Da die Schülerinnen und Schüler sich erst kurz in diesem Stadium befinden oder noch in einer Phase des Übergangs, scheint es sinnvoll, sie zunächst auf der konkreten Ebene lernen zu lassen anstatt das Risiko einzugehen, dass einige noch nicht die Reife zu formalen Operationen besitzen. Diese Schülerinnen und Schüler würde man dann bei einem formalen Zugang überfordern.

Wenn nun ein didaktisches Konzept für die Bruchrechnung in Klassenstufe 6 vorgestellt wird, das nicht auf der konkreten, sondern der formalen Ebene beginnt und erst später den Schritt zum Konkreten vollzieht, müssen dafür gute Gründe angeführt werden.

⁵⁹ Zech (1995: 54)

Insbesondere ist zu klären, ob die Jugendlichen heute eher bereit sind für formale Operationen, als es zu Piagets Zeiten der Fall war. Es gibt zahlreiche Indizien dafür. Die heutige Generation der Jugendlichen lebt in einer anderen Lebensumwelt und hat damit eine andere Grundvoraussetzung als die Generation der Jugendlichen, die noch vor wenigen Jahrzehnten gelebt hat. Die Jugendlichen leben heutzutage in einer hochgradig technologisierten Gesellschaft, in der die Innovationen und damit auch neue Geräte in viel kürzeren Abständen veröffentlicht und auch zugänglich gemacht werden, als es jemals zuvor der Fall war. Es ist bei jungen Jugendlichen und auch schon bei Kindern sehr viel Interesse an neuesten technischen Geräten und eine unbefangene Auseinandersetzung mit ihnen zu beobachten. Dadurch haben viele von ihnen schon große Erfahrung im Umgang mit zum Teil sehr komplexen Zusammenhängen. Es fällt auf, dass sie technische Geräte oftmals viel schneller als Erwachsene fehlerfrei bedienen können und oft auch schneller all ihre Funktionen kennenlernen. Der Umgang mit modernen Geräten wie Computern, Mobiltelefonen mit zahlreichen Funktionen, DVD-Recordern und Videoabspielgeräten oder MP 3-Playern. und deren Programmierung ist für die meisten Jugendlichen eine Leichtigkeit. Sie wissen ganz genau, was sie tun müssen, damit bei diesen Geräten eine gewünschte Funktion eintritt, auch wenn sie meist natürlich nicht wissen, was im Gerät passiert, damit die gewünschte Funktion stattfindet.

Aus diesen Beobachtungen entstand die naheliegende Vermutung, dass die Jugendlichen in unserer heutigen Informationsgesellschaft schon eher die Fähigkeit zu formalen Operationen erlangen, als es zu Piagets Zeiten der Fall war.

Wenn diese Vermutung sich als richtig erweist, dann können die Befürworter eines Einstiegs im Konkreten sich nicht mehr auf die fehlenden entwicklungspsychologischen Voraussetzungen für einen formalen Beginn berufen. Im Folgenden werden zahlreiche Indizien aufgeführt, die das Zutreffen dieser Vermutung stützen.

Darüber hinaus wird an einigen Beispielen gezeigt, dass der Ausgangspunkt im Konkreten einige unumgängliche Nachteile mit sich bringt, so dass das Argument, die Anschauung trage zu einem besseren Verständnis bei, entkräftet wird. Der Einstieg im Konkreten bereitet nämlich Fehlvorstellungen vor. Man

könnte so weit gehen, eine der Fehlvorstellungen sogar als durch das Konzept bedingt zu bezeichnen.

Schließlich ist noch darauf hinzuweisen, dass im darauf folgenden Schuljahr bei Einführung der negativen Zahlen sowieso auf der formalen Ebene gearbeitet werden muss und dass bei allen bisherigen didaktischen Konzepten mit ihren Zugängen zur Bruchrechnung auf der konkreten Ebene keinesfalls von Erfolgsmodellen gesprochen werden kann.

Somit gibt es vier gute Gründe, die einen Beginn auf der formalen Ebene rechtfertigen:

1. Die von Piaget festgesetzten Altersgrenzen für die Stadien der kognitiven Entwicklung müssen abhängig von der sozio-kulturellen Umgebung korrigiert werden. Die Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 6 sind heutzutage schon bereit für formale Operationen.
2. Der Einstieg auf der konkreten Ebene erleichtert nicht das Verständnis, sondern er bereitet Fehlvorstellungen vor.
3. Im Folgeschuljahr können die negativen Zahlen auch nicht auf der konkreten Ebene eingeführt werden.
4. Alle bisherigen didaktischen Konzepte sind gescheitert.

7.3.1 Ist Piagets Modell der entwicklungspsychologischen Stadien noch zeitgemäß?

7.3.1.1 Fehler in Piagets Methodik

Es wird hier keineswegs beabsichtigt, Piagets Modell der kognitiven Entwicklungsstadien zu widerlegen. Im Gegenteil ist Piagets Modell auch für dieses Konzept grundlegend, wenn es um die Berücksichtigung der kognitiven Entwicklung der Schülerinnen und Schüler der Zielgruppe geht. Das bedeutet aber nicht, dass jedes Detail seines Modells in die heutige Zeit übertragbar ist. Es gibt zahlreiche Kritikpunkte an seiner Arbeit, die die Gültigkeit einzelner Aussagen infrage stellen oder gar widerlegen. Einerseits beziehen sich die Kritikpunkte auf die Methodik seiner Experimente, andererseits gibt es gute

Gründe für die Annahme, dass die von Piaget genannten Altersgrenzen nicht unabhängig von sozialen Faktoren sind und in Abhängigkeit von ihnen korrigiert werden müssen.

Dass die vier oben genannten Entwicklungsstadien nur in dieser Reihenfolge durchlaufen werden können, wird auch von Piaget-Kritikern nicht angezweifelt. In fast siebzig Jahren transkultureller Piaget-Forschung sei man, so Oesterdiekhoff⁶⁰, zu dem Ergebnis gekommen, dass sich Menschen aller Kulturen stadientheoretisch erfassen lassen. Seine Stadientheorie der psychisch-kognitiven Entwicklung sei nicht nur auf Menschen aus Industriegesellschaften anwendbar, sondern die geistige Entwicklung aller Menschen verlaufe entlang der von Piaget beschriebenen Stadien. Es gebe zwar in einigen Bereichen im Zusammenhang mit Umweltanregungen Verzögerungen oder Vorgriffe auf höhere Stufen, aber nicht alle Menschen erreichten das formal-operative Stadium. Die Forschung zeige, dass die Menschen, die nicht das formal-logische Denken entwickeln, in präoperationalen oder in konkret-operationalen Stufen denken. Das Denken finde also immer entlang der von Piaget beschriebenen kognitiven Strukturen statt, auch wenn nicht alle Erwachsenen das höchste Stadium erreichten.

An Piagets Forschung wird aber nach neueren Untersuchungen kritisiert, ihm seien manche methodische Fehler unterlaufen, aufgrund derer er zu falschen Altersgrenzen für seine Stadien oder auch nur für einzelne Bereiche der Stadien gekommen sei. So zeigten neuere Experimente auf Grundlage anderer Methoden, dass Kinder schon viel eher bestimmte Fähigkeiten besitzen, als Piaget behauptete. Beispielsweise konnten die Forscher Mehler und Bever vom Massachusetts Institute of Technology schon 1967 zeigen, dass Piaget sich in seiner These bezüglich der Invarianz irrte. Bei den Experimenten zur Invarianz ging Piaget beispielsweise so vor, dass er eine unterschiedliche Anzahl von farbigen Spielmarken⁶¹ in zwei Reihen anordnete und dann die Testperson aufforderte, die Reihe zu nennen, in der sich mehr Plättchen befanden. Anschließend veränderte er die Reihen, indem er die Plättchen dichter zusammen oder weiter auseinander schob und fragte erneut die Testperson. Oftmals bekam er dann andere Antworten als vorher. Daraus schloss er, dass die Kinder zur Erkenntnis der Invarianz noch nicht fähig seien. Die genannten

⁶⁰ Oesterdiekhoff, Oesterdiekhoff/ Rindermann (2008: 32)

⁶¹ Piaget/ Szeminska (1972: 95 ff.)

Forscher gingen ähnlich vor wie Piaget, allerdings hielten sie es für möglich, dass die Kinder überhaupt nicht verstehen, was man bei der zweiten Aufforderung, also nach dem Zusammen- oder Auseinanderschieben der Plättchen, überhaupt von ihnen wolle. Insbesondere dann, wenn den Kindern klar ist, dass die Anzahl durch das Verschieben nicht verändert wird, ist es nämlich möglich, dass ein sprachliches Missverständnis als Ursache für die veränderte Antwort zu sehen ist. Die Forscher bedienten sich eines Tricks. Sie benutzten keine farbigen Plättchen, sondern nahmen Schokolinsen. „Sie legten eine kurze Reihe mit sechs Linsen neben eine lange mit vier. Dann forderten sie das Kind auf, sich eine Reihe auszusuchen - und erlaubten ihm, die Süßigkeiten aufzuessen. Mit diesem Trick wählten wesentlich mehr Kinder die Reihe mit den sechs Linsen, und das obwohl sie viel kürzer war. Offenbar verfügten die Kinder entgegen der Theorie Piagets doch über einen Begriff der Mengeninvarianz.“⁶²

Man könnte nun Manipulation unterstellen, da den Kindern nun Süßigkeiten statt Plättchen vorgesetzt wurden, aber entscheidend ist, dass es den Kindern gelungen ist, die Reihe mit mehr Schokolinsen zu erkennen. Vielleicht mag es nicht sehr erstaunen, dass drei- und vierjährige Kinder die Reihe mit mehr Schokolinsen finden, widerspricht aber Piaget insofern, dass dieser den Erwerb des Verständnisses der Invarianz erst in die konkret-operationale Phase einordnete.⁶³ Schon, wenn nicht die Plättchen durch Schokolinsen ersetzt werden, kann man zu ganz anderen Ergebnissen als Piaget gelangen.

„James McGarrigle und Margaret Donaldson, Entwicklungspsychologen an der Universität Edinburgh, überprüften die Hypothese, wonach die Kinder deshalb bei Piagets Versuchen zur Mengeninvarianz versagen, weil sie die Absichten des Versuchsleiters mißverstehen.“⁶⁴ Sie zeigten auf, dass die Kinder die exakt gleiche Frage je nach dem Zusammenhang auf zwei Weisen auffassen und die im Sinne der Mengeninvarianz richtige Antwort geben, wenn die Frage in einem sinnvollen Zusammenhang gestellt wird. Schneider berichtet von dieser Wiederholung des oben genannten Experiments. Sie hätten gleichviele Perlen in eine Reihe gelegt, sich erkundigt, in welcher Reihe sich mehr befinden, anschließend die Perlen einer der Reihen dichter zusammen geschoben und

⁶² Müller-Weuthen (2005: 10)

⁶³ vgl. Piaget/ Szeminska (1972: 95 ff.)

⁶⁴ Dehaene (1999: 53)

erneut gefragt. Dieses Experiment hätten sie nun in einem zweiten Versuch so abgewandelt, dass nicht der Tester selbst, sondern ein Teddybär die Perlen zusammenzuschieben schien, als der Tester gerade weggeschaut hätte.

Der Tester habe sich dann beklagt, der Bär hätte leider alles durcheinandergebracht, und habe gefragt, wo nun mehr Perlen seien. In diesem Fall hätten die Kinder sich meistens nicht durch die unterschiedlichen Kettenlängen beeinflussen lassen und meist richtig geantwortet. Nach Vermutung der Forscher würden die Kinder im letzten Fall die erneute Frage für ehrlich halten, während es ihnen im ersten Fall rätselhaft erscheine, warum man sie überhaupt ein zweites Mal befrage.⁶⁵

In Mehlers und Bevers Experiment bewältigen die jüngsten, etwa zweijährigen Kinder den Test sowohl mit Murmeln als auch mit Bonbons.⁶⁶

Die Altersgrenze für das Erkennen der Invarianz muss also nach unten korrigiert werden. Es gibt weitere Beispiele dafür, dass Kinder schon viel früher bestimmte kognitive Fähigkeiten besitzen, als von Piaget vermutet. So zeigten neue Untersuchungen, dass sogar schon Säuglinge über einen Zahlensinn verfügen: „Anfangs wurden diese Versuche mit Kindern im Alter von sechs und sieben Monaten durchgeführt, aber wenige Jahre später wiesen Sue Ellen Antell und Daniel Keating von der Universität Maryland mit einem ähnlichen Verfahren nach, daß selbst Neugeborene drei bis vier Tage nach ihrer Geburt zwischen 2 und 3 unterscheiden können.“⁶⁷

Dehaene beschreibt ein Multimediaexperiment der amerikanischen Psychologen Starkey, Spelke und Gelman, bei dem ein sechs bis acht Monate altes Baby vor zwei Leinwänden sitze, auf denen Dias gezeigt würden. Das rechte der Dias zeige zwei alltägliche Dinge in beliebiger Anordnung, das linke zeige drei Dinge. Gleichzeitig höre das Kind eine Folge von entweder zwei oder drei Trommelschlägen aus einem Lautsprecher, der sich in der Mitte zwischen den Leinwänden befinde. Das Baby werde dabei von einer versteckten Videokamera beobachtet, sodass man messen könne, wie viel Zeit es mit der Betrachtung jedes der Dias verbringe. Es sei zu beobachten, dass das Baby zuerst aufmerksam zu den Bildern schaue und dabei den Bildern mit drei Gegenständen mehr Aufmerksamkeit als denen mit zwei Gegenständen

⁶⁵ Schneider (in NZZ Folio 11/2005)

⁶⁶ Dehaene (1999: 58)

⁶⁷ Dehaene (1999: 63)

schenke, was nach Dehaene der größeren Komplexität zugeschrieben werden könne. Nach wenigen Versuchen lasse aber das Interesse nach und es ergebe sich ein faszinierendes Muster. Das Baby betrachte nämlich das Dia länger, das genau so viele Dinge zeige, wie Töne zu hören seien: „Es schaut unverwandt auf das Bild mit drei Objekten, wenn es drei Trommelschläge hört, aber sein Blick verweilt auf dem mit zwei Dingen, wenn es zwei Trommelschläge hört.“⁶⁸

Piaget beschreibt, dass Kinder im Alter von 4 bis 5 Jahren sehr häufig Fehler beim Vergleich von Anzahlen durch Eins-zu-Eins-Zuordnungen machen.⁶⁹ Bei kleinen Mengen, zumindest bei der Unterscheidung zwischen 2 und 3 ist diese Zuordnung schon deutlich eher möglich.

In weiteren Beispielen beschreibt Dehaene, dass schon bei 5 Monate alten Kindern auch der Test auf Objektpermanenz positiv verläuft.⁷⁰

Nun stammen die Versuche Piagets aus den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts und waren Pionierarbeit auf diesem Forschungsgebiet. Diese neuen Erkenntnisse sind vielleicht erst durch moderne und verbesserte Forschungsmethoden möglich geworden. Sie zeigen aber deutlich, dass eine kritische Auseinandersetzung mit Piagets Methodik einerseits sowie die technische Weiterentwicklung der Forschungsmethoden andererseits in einigen Fällen zu einer Korrektur der von Piaget festgesetzten Altersgrenzen für die verschiedenen Phasen der kognitiven Entwicklung geführt hat. Ob davon auch die formal-operative Phase betroffen ist, geht aus den zitierten Studien nicht hervor, ausgeschlossen werden kann es nicht. Für die Annahme spricht aber möglicherweise eine Veränderung der sozio-kulturellen Umwelt. So lohnt es sich, den Einflüssen einer veränderten Umwelt auf die kognitive Entwicklung nachzugehen.

7.3.1.2 Sozio-kulturelle Einflüsse auf die kognitive Entwicklung

Auch wenn eine verbesserte Forschungsmethodik neue Ergebnisse geliefert hat, die deutlich zeigen, dass Kinder schon viel eher zu manchen Dingen fähig

⁶⁸ Dehaene (1999: 65)

⁶⁹ Piaget / Szeminska (1972: 61ff.)

⁷⁰ Dehaene (1999: 67)

sind, als Piaget behauptete, herrscht dennoch Konsens darüber, dass kognitive Entwicklung nicht anders ablaufen kann als in der Reihenfolge der vier genannten Stadien, auch wenn nicht alle Menschen das vierte Piagetsche Stadium erreichen. Auf die sozio-kulturellen Bedingungen, die dieses erfordert, wird später noch eingegangen, ebenso wie auf weitere Folgen der sozio-kulturellen Bedingungen auf die kognitive Entwicklung.

In der heutigen entwicklungspsychologischen Forschung steht außer Zweifel, dass Piaget den Beitrag der sozialen Welt zur kognitiven Entwicklung zu gering schätzt. So wird oft kritisiert, Piagets Theorie konzentriere sich vorrangig darauf, wie es Kindern gelinge, die Welt durch ihre eigenen Anstrengungen zu verstehen. Kinder seien aber vom Tag ihrer Geburt an von einer sozialen Umwelt umgeben, die ihre Entwicklung auf vielfältige Weise forme.

Die kognitive Entwicklung eines Kindes spiegele die Beiträge anderer Menschen und der Kultur im weitesten Sinne viel umfangreicher wider, als Piaget diesen Einflüssen zugestehe.⁷¹

Bei der Herausbildung der Intelligenz des Kindes müsse man demgemäß sehen, dass die Tätigkeit des Kindes von Anfang an gesellschaftlich vermittelt sei, dass sich seine Aktivität auf gesellschaftlich produzierte Gegenstände richte, die Mittel seiner Tätigkeit gesellschaftlichen Charakter trügen, und dass die Ausbildung der sprachlichen Fähigkeiten genauso unter diesem Entwicklungsgesetz stünden wie die Ausbildung motorischer Fähigkeiten. Das Kind erwerbe sich die gesellschaftlichen Tätigkeitsformen nach und nach als immer neue Aktionsmöglichkeiten.⁷²

Es ist also zu klären, welche Bedeutung die sozio-kulturellen Einflüsse auf die kognitive Entwicklung haben und ob diese nicht sogar für eine Verschiebung der Altersgrenzen verantwortlich sein können. Die Vermutung, dass das formal-operative Stadium in unserer Informationsgesellschaft schon früher erreicht werden kann als noch zu Zeiten Piagets, wird durch zahlreiche Indizien gestützt.

Bevor ich konkret auf die möglichen Einflüsse der Informationsgesellschaft auf die kognitive Entwicklung eingehe, werde ich allgemein auf neue Erkenntnisse

⁷¹ Siegler/ DeLoache/ Eisenberg (2005: 199)

⁷² Jahnke/ Mies/ Otte/ Schubring (1985: 117)

zur Entwicklungspsychologie eingehen, die man unter Berücksichtigung der sozio-kulturellen Einflüsse gewonnen hat.

Seit den dreißiger Jahren des Zwanzigsten Jahrhunderts beschäftigen sich Forscher mit der Frage, ob Piagets Theorie universell gilt. Dazu waren Untersuchungen in unterschiedlichen sozialen Schichten und kulturellen Umwelten nötig. Oesterdiekhoff berichtet von der Entwicklung einer „Hochkonjunktur transkultureller Piaget-Psychologie“⁷³, es lägen inzwischen über tausend Untersuchungen aus fast allen Ländern und Ethnien des Planeten vor. Diese zeigten, dass alle gesunden Menschen aus allen Kulturen und Umwelten die ersten beiden Stadien der kognitiven Entwicklung – das sensomotorische und das präoperationale Stadium des symbolischen und anschaulichen Denkens – entwickelten, mit weitgehend identischen Charakteristika, wie Piaget sie ermittelt habe. Dann aber stellten sich, im Gegensatz zu ursprünglichen Annahmen Piagets hinsichtlich der Universalität seiner Theorie, verschiedene kulturbedingte Abweichungen der kognitiven Entwicklung ein. Das Stadium der konkreten Operationen werde nicht von allen Menschen auf allen inhaltlichen Gebieten erreicht, ferner gebe es große Unterschiede hinsichtlich des Lebensalters, in dem dieses Stadium elaboriert werde. Soziale, technische und andere Umwelthanforderungen müssten vorhanden sein, um die Etablierung der konkreten Operationen zu provozieren. Auch die IQ-Forschung bestätigt diese These. Ohne hier den Begriff Intelligenzquotient zu definieren und auf die Problematik seiner Bestimmung einzugehen, kann von einem Zusammenhang zwischen kognitiver Entwicklung und Intelligenz ausgegangen werden, sodass auch die IQ-Forschung interessante Indizien liefert. Es seien bei voralphabetischen Ethnien, die jagend, sammelnd, bäuerlich oder viehzüchterisch tätig seien, unabhängig von ihrer Ethnie, Religion oder kontinentalen Abstammung rund um den Globus empirisch IQ-Mittelwerte ungefähr zwischen 50 und 75 festzustellen.⁷⁴

In demselben Bereich finde man die Werte bei vor 100 Jahren an analphabetischen Europäern durchgeführten und dokumentierten Intelligenztestungen. Es spreche stark für eine Kulturtheorie der Intelligenz, wenn vormoderne, nicht alphabetische Ethnien unabhängig von Rasse, Kultur oder Religion IQ-Werte in diesem niedrigen Bereich hätten.

⁷³ Oesterdiekhoff (1997: 36 f.)

⁷⁴ Oesterdiekhoff in Oesterdiekhoff/ Rindermann (2008: 10)

Bei Bevölkerungsgruppen, die in Gesellschaften lebten, die unter Modernisierungsdruck stünden, sei im ganzen 20. Jahrhundert ein Anstieg der Intelligenz festzustellen. So hätten sich die Mittelwerte der Intelligenz von Nationen, die sich industriell entwickelt haben, in den letzten Jahrzehnten auch in Entwicklungsländern, drastisch nach oben bewegt.

Das bedeutet nicht, dass es in traditionellen Gesellschaften am biologischen Potenzial mangelt, sondern deutet darauf hin, dass die Anregung aus der kulturellen Umgebung fehlt, die nötig ist, um dieses Potenzial auszuschöpfen.

Zwar könne man davon ausgehen, dass der Wildbeuter, wenn auch vielleicht nicht vor 200.000 Jahren, doch mindestens seit den letzten 50.000 Jahren, das biologische Potenzial zum formal-logischen Denken hatte.⁷⁵ Dieses biologische Potenzial habe aber infolge der Sozialisationsbedingungen nicht aktualisiert werden können, sodass das Denken der Jäger und Sammler – wie das aller vormodernen Menschen – im präoperational-erkenntnisrealistischen Denken stecken geblieben sei. Der menschliche Geist entwickle sich nämlich in der Auseinandersetzung mit seiner Umwelt, vor allem mit seiner kulturellen Umwelt. Wenn diese sich in einem primitiven Zustand befinde, dann seien ihre Reize zu schwach, um die kindliche kognitive Entwicklung in einem Maße anzuregen und zu fördern, um das formal-operative Denken auslösen und entwickeln zu können. Durch die Sozialisationsforschung der letzten 100 Jahre sei belegt, dass sich das genetische Entwicklungspotenzial nur dann entfalte, wenn die kindliche Entwicklung in einem anregenden, fördernden und fordernden Milieu statffinde. Nur das moderne Kulturmilieu entfalte die sozialisierende Kraft, um eine Evokation formal-logischer Operationen auslösen zu können. Vormoderne Kulturmilieus seien hingegen nicht in der Lage, das abstrakte, diskursive, reflektierende und formal-logische Denken zu provozieren.

Der sozio-kulturelle Einfluss spiegelt sich auch im Umgang mit Zahlen wider: „In den meisten primitiven Eingeborenengesellschaften gibt es nur die Zahlwörter Eins, Zwei und seltener die Drei. Das nicht mehr Gezählte bekommt die Bezeichnung ‚viele‘ oder ‚eine Menge‘. [...] Über die Zahlworte hinaus wird der eigene Körper als Zahlschema gebraucht. An der korrekten Abfolge von Bewegungen wird ein Abzählen vollzogen. [...] Die Zählung hat nur Erfolg, wenn

⁷⁵ Oesterdiekhoff in Oesterdiekhoff/ Rindermann (2008: 36)

sie mit eins beginnt und die Reihe der Gliedmaßen durchläuft. Dies beweist ganz eindeutig, dass das sinnliche Abzählen präoperational ist.“⁷⁶

Ein typisches Zeichen für fehlendes Abstraktionsvermögen in traditionellen Gesellschaften auf unteren Stufen der kognitiven Entwicklung ist auch die Verknüpfung von Zahlwörtern mit konkreten Dingen. „Einige Naturvölker haben die Zahl vollständig mit den Dingen zur Einheit zusammengeschmolzen. 10 Kähne nennen die Fidschi-Insulaner *bola*, 10 Kokosnüsse *koro*, 1000 Kokosnüsse *saloro*.“⁷⁷ Diese Verschmelzung von Zahlwort und konkretem Ding oder Wesen zu einem neuen Begriff hat sich auch in der deutschen Sprache bis heute erhalten. Besonders fällt dies beim Dual auf, der die Zweierheit ausdrückt, wenn von einem Joch Ochsen, einem Paar Schuhe, von Zwillingsschwwestern oder von einem Duett die Rede ist. Ähnlich haben sich solche Begriffe auch für unbestimmt große Mengen erhalten. Jäger reden auch heute noch von einem Rudel Hirschen, einer Kette Rebhühner und einer Herde Schafe. Auch im Zusammenhang mit Größen waren die Begriffe lange an konkrete Größen gebunden. So wurde die Länge des Tuchs in Ellen abgemessen, die Länge einer Höhe dagegen in Fuß und wenn eine die Länge einer Tiefe gemessen werden sollte, dann geschah dies in Klafter oder Faden.

Auch bei Mietzel⁷⁸ lässt sich über sozio-kulturelle Einflussfaktoren auf die kognitive Entwicklung nachlesen. Er berichtet über die Oksapmin, die in einer auf Agrarwirtschaft spezialisierten Gesellschaft auf Papua-Neuguinea leben und mit Hilfe von Körperstellen bis 29 zählen können. Weiter berichtet er über Kinder, die in Recife, Brasilien, Kokosnüsse verkaufen und keine Probleme bei der Berechnung der Preise für mehrere Kokosnüsse haben, allerdings losgelöst vom Kontext Kokosnuss - Preis große Schwierigkeiten haben, einfache Multiplikationen mit denselben Zahlen fehlerfrei zu bewältigen. Und er sagt, es scheine, dass chinesische Kinder beim Erlernen der Mathematik gegenüber deutschen oder amerikanischen Kindern im Vorteil seien. Bereits im Alter von vier Jahren könnten die asiatischen Jungen und Mädchen verhältnismäßig „viele Ziffern“ im Kopf behalten. Die Erklärung liege offenbar darin, dass die chinesische Sprache eine ziemlich schnelle Aussprache der kurz gesprochenen Ziffern ermögliche; dadurch sei der Arbeitsspeicher des Gedächtnisses nicht so

⁷⁶ Oesterdiekhoff (2006: 114 f.)

⁷⁷ Menninger (1979: 22)

⁷⁸ Mietzel (2002: 26 f.)

schnell überlastet. Wenn man amerikanischen und chinesischen Kindern auftrage, sich Namen von Gegenständen zu merken, die in beiden Sprachen gleich lang sind, zeigten junge Chinesen und Amerikaner dagegen keine unterschiedlichen Gedächtnisleistungen mehr.

Nach Oesterdiekhoff liegen mittlerweile Hunderte von empirischen Studien zur Entwicklung der konkreten Operationen im Kulturvergleich vor, aus denen hervorgehe, dass die Fähigkeit zu konkreten Operationen in unterentwickelten Regionen entweder zeitverzögert ausgebildet werde, nur bei einem Teil der Bevölkerung oder gar nicht in Erscheinung trete. Die Kulturvergleichsforschung habe gezeigt, dass ökologische, technische, soziale und schulische Anforderungen die Bedingung für die Evokation der konkreten Operationen seien.⁷⁹

Weiter sei die Beherrschung hypothetisch-deduktiver und syllogistischer Schlussfolgerungen ein klassischer Indikator für das Vorliegen formal-logischen Denkens. Die Kinder entwickelten solche logischen Deduktionen ab dem 10. Lebensjahr. Ein Fehlen solcher Fähigkeiten gelte als Indiz für mangelnde Etablierung formaler Operationen und Kinder unterhalb von zehn Jahren beherrschten nur empirische Deduktionen. Aus Untersuchungen unter analphabetischen Erwachsenen in Entwicklungsregionen gehe zudem hervor, dass auch sie nicht zu diesen Formen des logischen Schließens fähig seien.⁸⁰ Schon in den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts war aus Studien bekannt, dass viele oder alle Individuen aller Kulturen das Stadium der konkreten Operationen erreichen, wenn auch gewöhnlich in einem späteren Alter als Mittelschicht-Europäer. Die Tatsache, dass manche Individuen, auch im Erwachsenenalter eine präoperationale Art der Argumentation fortsetzen und dass viele qualitative Unterschiede berichtet wurden, zeige, dass Umweltfaktoren wichtiger sein könnten, als von Piaget in seinen früheren Studien angenommen.⁸¹

Schon gegen Ende der 70er Jahre ging die Mehrzahl der Forscher davon aus, dass die Entwicklung der Fähigkeit zum formal-logischen Denken sich erst in den modernen Gesellschaften entwickle. Ohne die Anforderungen in der

⁷⁹ Oesterdiekhoff (2005: 10 f.)

⁸⁰ Oesterdiekhoff in Oesterdiekhoff/ Rindermann (2008: 31)

⁸¹ Dasen (1974: 421)

modernen Kultur werde die Entwicklung des formal-logischen Denkens nicht hervorgerufen. Entsprechend reiche für einfache Gesellschaften das präformale Denken. Offenbar bedürfe es einer Umgebung, die hohe kognitive Anforderungen an die Individuen stelle, damit sich gewisse kognitive Strukturen überhaupt erst ausbildeten. Nach Oesterdiekhoff⁸² entwickelt sich das Stadium der formalen Operationen nur unter dem Einfluss spezifischer, insbesondere moderner Kultureinrichtungen wie der mehrjährigen Schulbildung, dann auch nur partiell und hochspezifisch und nicht bei allen Individuen. Selbst in modernen Populationen entwickle nur ein kleiner Prozentsatz der Individuen über bescheidene Grundlagen hinaus systematisch formal-logisches Denken.

Es sei das eindeutige Resultat vieler empirischer Untersuchungen, dass das formale Stadium von Menschen vorindustrieller Gesellschaften gar nicht entwickelt werde. Alle bedeutenden Forscher seien sich in dem Punkte einig, dass das Denken von Menschen vorindustrieller, wildbeuterischer und agrarischer Gesellschaften im präformalen Bereich verbleibe.

Diese Beispiele zeigen, dass der sozio-kulturelle Hintergrund einen enormen Einfluss auf die kognitive Entwicklung hat und dass bestimmte sozio-kulturelle Bedingungen notwendig sind, wenn das formal-operative Stadium ausgeprägt werden soll. Es lohnt sich also, den Blick auf die Entwicklung des formal-operativen Denkens in höher entwickelten Gesellschaften zu richten. Was Industriegesellschaften betrifft, so ist nach Forschungsergebnissen das reflektierte Training abstrakter Gedankengebilde und logischer Schlussfolgerungen der wesentliche Schrittmacher des formal-logischen Denkens und die Schulbildung der wichtigste allgemeine Entwicklungsfaktor.⁸³

Es wurde nun mehrfach aufgezeigt, was Kritiker Piaget vorwerfen und weshalb an der uneingeschränkten Gültigkeit seiner Theorie gezweifelt werden muss: Piagets Theorie lässt die soziale und kulturelle Umgebung außer Acht, an deren Einfluss auf die kognitive Entwicklung heute nicht mehr gezweifelt wird.

Zumindest beim Erlangen des konkret-operationalen Stadiums wie auch des formal-operationalen Stadiums steht heute fest, dass der Zeitpunkt des Erreichens dieser Stadien von sozio-kulturellen Faktoren abhängt.

⁸² Oesterdiekhoff (2000: 105 f.)

⁸³ Oesterdiekhoff (2000: 114)

In den letzten Jahrzehnten ist eine deutliche Beschleunigung insbesondere der informationstechnischen Entwicklung zu beobachten. Wie groß aber der Einfluss unserer von moderner Informationstechnik geprägten Gesellschaft auf den Zeitpunkt ist, an dem Individuen in das formal-operationale Stadium eintreten, bleibt noch zu klären. In Abhängigkeit von der Geschwindigkeit, mit der neue Information produziert und rezipiert wird, sieht Margaret Mead drei verschiedene Kategorien von Kulturen, nämlich postfigurative, kofigurative und präfigurative Kulturen.⁸⁴ Die Geschwindigkeit, mit der neue Information produziert und rezipiert werde, hänge von der Kategorie der Kultur ab. Präfigurative Kulturen entsprächen zeitgenössischen westlichen Kulturen, zum Beispiel in Europa und in den USA. Sie seien geprägt durch sehr rasche technologisch-wissenschaftliche Veränderungen, etwa durch Computertechnik, Weltraumtechnik, sich rasch ändernde ökologische Situationen, weltumfassende Verkehrs- und Kommunikationssysteme und ähnliche Einflüsse. In solchen Kulturen komme gemäß Mead ein großer Teil der Elterngeneration kaum noch mit oder doch langsamer als ihre Kindergeneration, deren Slogan heißt: „Die Zukunft ist jetzt.“ Die präfigurative Kultur entspreche der Idee, dass die Jugend Künstlerin oder Vorkämpferin der Zukunft sei. Nach Meads theoretischem Ansatz könne der Grund darin liegen, dass dank weltweiter Kommunikation Fortschritte, besonders technologische, sehr rasch Allgemeingut und bereits wieder Voraussetzung für weitere Fortschritte seien.

Bei Intelligenztests, die mit Schweizer Jugendlichen im 20. Jahrhundert durchgeführt wurden, stellte man fest, dass sinkenden Schulleistungen und konstanten oder verschlechterten Leistungen im Bereich der traditionellen Bildungsinhalte bessere Leistungen im Bereich der bildungsfreien Inhalte erzielt wurden. Stoll und Schallberger nennen als eine Erklärung dafür die Verbesserung der alltäglichen, außerschulischen Lebens- und Entwicklungsbedingungen, insbesondere durch ein größeres Informationsangebot und höhere Ansprüche im Alltag.⁸⁵

Neuere Forschungen über formal-operationales Denken sorgten dafür, dass das formal-operative Stadium feiner in mehrere Stadien zerteilt wurde. Denn

⁸⁴ Flammer/ Alsaker (2001:45 f.)

⁸⁵ Stoll/ Schallberger (1992: 194 - 205)

Untersuchungen zeigten, dass auch die älteren Schulkinder und auch Erwachsene zum Teil nur eingeschränkte Fähigkeit zur Aussagenlogik besitzen. Kutzner⁸⁶ berichtet über Untersuchungen, die Aleksandr Lurija 1930/31 mit erwachsenen Analphabeten in Usbekistan durchführte, die keine Schulbildung hatten, mit dem Ziel herauszufinden, wie der Prozess des Schließens bei Syllogismen verläuft. Er habe ihnen den Syllogismus präsentiert: „Im hohen Norden, wo es Schnee gibt, sind alle Bären weiß. Nowaja Semlja ist im hohen Norden, und dort ist immer Schnee. Welche Farben haben dort die Bären?“

Die Antworten hätten die Unfähigkeit der Befragten zu formal-logischen Schlüssen gezeigt. Zum Beispiel hätten sie geantwortet, es gebe verschiedene Tiere oder man habe mal einen schwarzen Bären gesehen oder wer sie noch nicht gesehen habe, der könne auch nichts dazu sagen.

Die Erklärung dafür sei, dass ich die Antworten des analphabetischen Probanden nicht auf logische Implikationen bezögen, sondern auf persönliche Erfahrungen. Urteilen und Schließen gelingen aufgrund der eigenen Erfahrung. Der Proband antworte klug über praktische Dinge und benutze seinen gesunden Menschenverstand. Er akzeptiere allerdings nicht die vom Versuchsleiter gegebenen Prämissen, fasse sie vielmehr als Einzelsätze auf und verweigere das Schlussfolgern aus dem Syllogismus.

Wenn es um solche logischen Schlussfolgerungen geht, dann lassen sich ähnliche Schwierigkeiten teilweise auch in modernen Gesellschaften beobachten. Bei Kindern, die noch nicht das formal-operative Stadium erreicht haben, ist dies klar. Sie haben Schwierigkeiten, die richtigen Schlüsse aus Aussagen zu ziehen, insbesondere dann, wenn Voraussetzungen der Wirklichkeit oder ihren eigenen Annahmen widersprechen. Ein Beispiel für eine Kombination solcher Aussagen von Moshman und Franks belegt dieses: „Wenn Hunde größer sind als Elefanten und Elefanten größer als Mäuse, sind Hunde größer als Mäuse.“⁸⁷ Kindern fällt hier das logische Schließen besonders schwer, weil sie die Voraussetzung nicht akzeptieren können, dass Hunde größer sind als Elefanten. Während es sich hier um Kinder handelt, die noch nicht das formal-operative Stadium erreicht haben, sind es in vorindustriellen Gesellschaften oft Erwachsene.

⁸⁶ Kutzner, Oesterdiekhoff/ Rindermann (2008: 89)

⁸⁷ Berk (2005: 504)

Dass auch in modernen Gesellschaften nicht alle Jugendlichen und Erwachsenen das formal-operative Stadium erreichen, muss nicht ausgeschlossen werden, denn dass Menschen sich individuell unterschiedlich entwickeln, steht nicht im Widerspruch zu der Möglichkeit der früheren Ausprägung des formal-operativen Stadiums durch die Gegebenheiten einer modernen Gesellschaft. Dass das Erreichen des formal-operativen Stadiums nicht gleichbedeutend ist mit der uneingeschränkten Fähigkeit, formal-logisch zu denken, ist klar. Es gibt zahlreiche Experimente, die zeigen, dass auch Jugendliche oder Erwachsene manchmal Schwierigkeiten haben, formal-logische Schlüsse zu ziehen. Dabei gab es zum Teil verblüffende Ergebnisse. Ein Beispiel dafür ist ein Experiment, das Hoppe-Graff und Schröder an Erstsemestern der Universität Leipzig im Wintersemester 1997/98 durchführten. Sie legten den Studierenden eine Aufgabe zum formal-logischen Schließen vor. Dabei war die Prämisse gegeben: „Wenn es Sommer ist, dann schneit es in Leipzig.“ Weiter waren vier Aussagen mit jeweils einer Frage gegeben: 1. Es ist Sommer. Schneit es in Leipzig? 2. Es ist nicht Sommer. Schneit es in Leipzig? 3. Es schneit in Leipzig. Ist es Sommer? 4. Es schneit nicht in Leipzig. Ist es Sommer?

Bei jeder der vier Fragen sollten sich die Erstsemester für eine der Antworten „ja“, „nein“ oder „vielleicht“ entscheiden. Bei der dritten Frage konnten nur 56% der teilnehmenden Erstsemester die richtige Antwort liefern, bei der ersten Frage antworteten 82% richtig, bei den anderen Fragen waren es jeweils 65% der Probanden.⁸⁸

Ein anderes sehr populäres Experiment, das ebenfalls die Grenzen der Fähigkeit zum logischen Schließen aufzeigen soll, ist Wasons Vier-Karten-Problem⁸⁹. Dabei liegen 4 Karten auf dem Tisch, von denen jede eine Zahl auf der einen Seite und einen Buchstaben auf der anderen Seite hat. Auf zwei der Karten sind die Buchstaben E und T sichtbar, auf zwei anderen die Zahlen 4 und 7. Es wird den Probanden gesagt, dass folgende Regel gilt: Wenn auf der einen Seite einer Karte ein Vokal steht, steht auf der anderen Seite eine gerade Zahl.

⁸⁸ http://www.uni-leipzig.de/~erzwiss/mitarbeiter/hoppe_graff/material/ma-VEntw+LernenI_ws04-05_Kapitel06.pdf (Stand 10.11.09)

⁸⁹ Wason (1968: 273 ff.)

Die Prüflinge sollen nun entscheiden, welche Karten umgedreht werden müssen, um herauszufinden, ob die Regel tatsächlich gilt. Bei dieser Untersuchung wählten nur 5 von 128 Probanden die richtige Antwort. Am beliebtesten war die Antwort, man müsse die Karten mit E und 4 umdrehen.

Sollte eines dieser zuletzt genannten Beispiele als Argument gegen die These angeführt werden, dass das formal-operative in modernen Gesellschaften früher und auch weiter verbreitet ausgeprägt wird als in vorindustriellen Gesellschaften, so ist zu aus mehreren Gründen zu widersprechen.

Denn in diesen Beispielen werden schon mehr als einfache formale Operationen verlangt. Beim ersten Beispiel wird der Schluss dadurch erschwert, dass der dargestellte Sachverhalt den Tatsachen widerspricht. Beim zweiten Beispiel ist zu bedenken, dass die logische Struktur der Implikation mathematisch ausgebildeten Menschen klar ist, dass aber Lernende oft noch die Implikation mit der Äquivalenz verwechseln oder zumindest keine klare Vorstellung von der logischen Struktur einer Implikation haben.

Erschwert wird der Schluss durch den eher abstrakten Sachverhalt. Es wurde schon gezeigt (vgl. Griggs/ Cox), dass ein gleich strukturiertes Problem in einem anderen, der Lebenswelt der Probanden näheren Kontext, zu viel mehr richtigen Schlüssen führt.

Weiter ist zu entgegnen, dass Piaget sich vorwiegend mit der Kompetenz und nicht mit der Performanz beschäftigt hat.

Allerdings kann von der fehlenden Performanz nicht auf die fehlende Kompetenz geschlossen werden. Dass also in einem Bereich des Stadiums ein Verhalten nicht beobachtet wird, heißt nicht, dass die potenzielle Fähigkeit dazu nicht vorhanden ist und dass das Stadium nicht ausgeprägt ist.

Zusammengefasst herrscht in der Entwicklungspsychologie Einigkeit darüber, dass diese vier Piagetschen Entwicklungsstadien nur in dieser Reihenfolge durchlaufen werden können. Es kann also keines der Stadien übersprungen werden. Es herrscht ebenso Konsens darüber, dass die Ausprägung des letzten Stadiums stark von sozio-kulturellen Bedingungen beeinflusst wird. In welcher Weise diese Bedingungen aber wirken, muss noch besprochen werden.

Man geht heute davon aus, dass auch die physischen Umweltanforderungen die Entwicklung der konkreten Operationen beeinflussen. Diese sind in fast allen Kulturen unterschiedlich entwickelt.⁹⁰ Und die formal-logischen Operationen seien in Industrieländern bereichsspezifisch und in höherer Bildung stärker ausgeprägt. Diese Unterschiede seien Hinweise darauf, dass sich die Kognition kulturabhängig vollziehe. Die Anforderungen der vormodernen Gesellschaften verlangten kein hypothetisch-deduktives Denken, keine Syllogismen, formale Verallgemeinerungen oder generalisierende Begriffsbestimmungen. Die Lebensbewältigung in modernen Gesellschaften verlange grundlegende kognitive Veränderungen.

Nach Oesterdiekhoff erzwingen die ermittelten Korrelationen von Traditionalität und präformalem Denken einerseits und Modernität und formalem Denken andererseits die Konstruktion einer allgemeinen ökologischen Theorie, die die Interdependenzen materieller institutioneller Prozesse und kognitiver Strukturen im Einzelnen untersucht und aus ihrem Zusammenhang begreift.

Die Evolution der formalen Operationen sei „als ein Erfordernis an kognitive Kapazitäten zu beurteilen, angesichts differenzierter sozialer Prozesse adäquate Problemlösungsmechanismen auszubilden. Nun weisen die neuzeitlichen und modernen sozialen und institutionellen Prozesse Strukturen auf, die in den übrigen und bisherigen Gesellschaftsformen hinsichtlich ihrer sozialen und technischen Qualitäten nichts Gleichwertiges finden. Neuzeitliche Natur- und Ingenieurwissenschaften, mithin die Industriewirtschaft, kapitalistische Unternehmungen, formalisiertes Recht und Verwaltung, das Berufsausbildungssystem und das alphabetisierte und technische Berufswissen sowie die sozial-kognitiven Anforderungen angesichts sich überschneidender sozialer Kreise erfordern unmittelbar formal-logisches Denken. So stellen die Institutionen und technischen Verfahren der industriellen Gesellschaft Anforderungen an die kognitiven Kompetenzen der Populationen, die ersichtlich über das Niveau der Arbeitstechniken und der institutionellen Zurüstung traditionaler Gesellschaften hinausgehen. Damit lässt sich zumindest eine allgemeine Antwort und Erklärung angeben, weshalb Populationen entwickelter, modernisierter Regionen in besonderer Weise formales Denken ausgebildet

⁹⁰ Kutzner in Oesterdiekhoff/ Rindermann (2008: 90 f.)

haben: Nur in ihnen finden sich Institutionen und Verfahren, die entsprechende kognitive Anforderungen stellen. Komplementär ergibt sich die Erklärung für das präformale Denken in traditionellen Milieus von selbst: In Gesellschaften, in denen ungefähr 90 % der Bevölkerung von Jagd und Agrarwirtschaft leben, genügt repräsentationales Denken zur Bewältigung der hergebrachten Arbeitstechniken in Landwirtschaft, Handel und Handwerk sowie der kommunikativen Abläufe.“⁹¹

Das bedeutet, dass sich die kognitive Entwicklung an die Anforderungen der Umwelt anpassen kann. Dort wo präformales Denken ausreicht, wird die Fähigkeit zu formalen Operationen nicht ausgebildet, jedenfalls nicht von selbst, und die unteren Entwicklungsstadien bleiben wirksam.

Als wesentliche Bedingungen für die Entwicklung der formalen Operationen gelten Alphabetisierung sowie Stadt-, Schul-, Berufs- und Mittelschichtkultur.⁹²

All diese Forschungsergebnisse zeigen den Einfluss der sozio-kulturellen Bedingungen auf die kognitive Entwicklung. Sie zeigen, unter welchen Bedingungen das konkret-operationale oder formal-operative Stadium erreicht werden kann. Sie zeigen außerdem deutlich, dass die Altersgrenzen für die Wechsel der Entwicklungsstadien, die Piaget angegeben hat, nicht starr sind.

Somit ist davon auszugehen, dass die Altersgrenzen in unserer technologisierten Welt nach unten korrigiert werden müssen. Denn ebenso wie die industrielle Gesellschaft durch veränderte Anforderungen an die Individuen anders auf die kognitive Entwicklung wirkt als die vorindustrielle Gesellschaft, hat die informationstechnische Gesellschaft mit wieder veränderten Anforderungen an die Individuen eine Auswirkung auf die kognitive Entwicklung.

So sieht auch Dittmann⁹³, dass „in Anbetracht dessen, dass der Gebrauch von Medien bisher offenbar immer einen direkten Einfluss auf das menschliche Bewusstsein hatte“, sich die Frage aufwerfe, ob und inwieweit die Nutzung des Internets und insbesondere der Online-Kommunikation die kognitive Entwicklung und den Sprachgebrauch präge oder prägen werde.

⁹¹ Oesterdiekhoff (1997: 125 f.)

⁹² Oesterdiekhoff (1997: 61)

⁹³ Dittmann (2002: 14)

Möglicherweise verursacht schon die Nutzung einzelner moderner Medien Effekte. Diese Wirkungsmöglichkeiten werden im Folgenden aufgezeigt.

7.3.1.3 Mögliche Effekte der informationstechnischen Gesellschaft

Bevor überhaupt auf mögliche Effekte der informationstechnischen Gesellschaft auf die kognitive Entwicklung von Kindern und Jugendlichen eingegangen werden kann, ist zu klären, inwieweit sie Berührung mit modernen Medien haben.

Unübersehbar ist die Verbreitung der Mobiltelefone oder Handys unter den Jugendlichen und Kindern, da viele von ihnen ihr Handy auch dann in der Hand halten, wenn sie nicht telefonieren. Das lässt sich leicht dadurch erklären, dass für die Kinder und Jugendlichen nicht das Telefonieren, sondern die SMS-Kommunikation, die oft als ‚sim sen‘, ‚texten‘, ‚tickern‘ oder ‚mailen‘ bezeichnet wird, für Kinder und Jugendliche die allerwichtigste Funktion des Handys ist.⁹⁴

Wenn man sich die Lebenswelt der heutigen Kinder und Jugendlichen in der informationstechnischen Gesellschaft ansieht, findet man ein hohes Maß an modernen technischen Geräten, die sich in ihrem Besitz befinden oder zu denen sie zumindest Zugang haben.

Besonders zugenommen haben in den letzten Jahrzehnten der Ausbau und die Technologisierung im Bereich der Medien. Dies betrifft sowohl klassische elektronische Massenmedien wie Fernsehen als auch moderne Medien wie Handy und Computer. Während es bis in die 1980er Jahre in Deutschland zwei bis drei Fernsehprogramme gab, die während der meisten Stunden ein sogenanntes Testbild zeigten und erst im Laufe des Nachmittags die Ausstrahlung eines Programms begannen, gibt es im Gegensatz dazu heute über dreißig Sender, die sich problemlos empfangen lassen und von denen die meisten ohne Unterbrechung senden.

⁹⁴ Döring, Dittler/ Hoyer (Hrsg.) (2006: 48)

Mit der Zunahme des Programmangebots hat auch die Ausstattung mit Fernsehgeräten zugenommen. „In 98% aller deutschen Haushalte findet sich heute (mindestens) ein Fernsehgerät. Hinzu kommt ein Trend zu Fernsehgeräten in Kinderzimmern, der seit etwa einem guten Jahrzehnt immer deutlicher wird. In den USA haben 24% der Zwei- bis Fünfjährigen, 48% der Sechs- bis Elfjährigen und 60% der 12- bis 17- Jährigen einen Fernsehapparat in ihrem Zimmer. [...] In Deutschland standen im Jahr 2000 in 49% aller Haushalte zwei und mehr Fernsehapparate. Einen PC gab es im Jahr 2000 in 54% der Haushalte, wobei diese Zahl noch 1995 nur 23% betrug. Im Jahr 2002 hatten bereits über 80% der Jugendlichen von zuhause aus die Möglichkeit des Internetzugangs.“⁹⁵

Im Statistischen Jahrbuch 2007 ist über das erste Quartal 2006 nachzulesen, dass unter den 10- bis 15- jährigen Jugendlichen 40,4 % täglich oder fast jeden Tag und weitere 33,1 % mindestens einmal pro Woche das Internet genutzt haben.⁹⁶

Eine weitere Veröffentlichung des Statistischen Bundesamtes gibt Aufschluss über die Ausstattung von Informations- und Kommunikationstechnologien in privaten Haushalten 2006⁹⁷:

	Anteile der Haushalte in Deutschland
Telefon-Festnetzanschluss	93,8%
Mobiltelefon (Handy)	80,6%
Spielkonsole	14,5 %
Computer (stationär)	63,8%
Tragbarer Computer	24,8%
Handheld Computer	4,9%
Internetzugang	61,4%

Die Deutsche Presse Agentur lieferte am 9. November 2007 Zahlen über die tägliche Mediennutzung von Jugendlichen, wobei nur dargestellt wurde, wie groß geschlechtsspezifisch der Anteil der Jugendlichen ist, der sich ca. 1 bis 2

⁹⁵ Spitzer (2006: 1f.)

⁹⁶ Statistisches Jahrbuch 2007 für die Bundesrepublik Deutschland (2007: 114)

⁹⁷ Statistisches Jahrbuch 2007 für die Bundesrepublik Deutschland (2007: 113)

Stunden täglich oder mindestens 3 Stunden mit einem bestimmten Medium befasst.⁹⁸

	Jungen		Mädchen	
	ca. 1 bis 2 Stunden	3 Stunden und mehr	ca. 1 bis 2 Stunden	3 Stunden und mehr
Fernsehen/ Video	53,2 %	22,1%	50,2%	23,6%
Musik hören	28,4%	24,2%	33,4%	36,7%
Computer/ Internet	34,4%	16,9%	23,1%	6,4%
Spielkonsole	21,4%	6,1%	4,3%	1,1%
Handy	9,1%	5,6%	13,4%	12,7%

Eine andere Veröffentlichung der Deutschen Presse Agentur vom 1.6.2007 mit dem Titel „Kinderleicht“ stellt die Medienkompetenz der 6- bis 13-Jährigen dar. Von je 100 Jungen und Mädchen gaben an, besonders gut zu können:⁹⁹

	Jungen	Mädchen
DVD abspielen	58	44
Videotext im Fernsehen einstellen	47	36
Programme auf dem Computer spielen	46	31
SMS mit Handy verschicken	44	43
MP3-Player benutzen	41	30
Uhrzeit am Handy einstellen	40	37
Videorekorder programmieren	32	21
Dateiverzeichnisse anlegen	20	12
CD-ROMs brennen	19	12
Dateien aus dem Internet runterladen	16	11
im Chatroom anmelden	15	13
eine Homepage erstellen	4	4

⁹⁸ www.db.globus.pictures.de, 1733glo, (Stand: 13.09.08)

⁹⁹ www.db.globus.pictures.de, 1407glo, (stand: 13.09.08)

Nach diesen Zahlen muss keine Diskussion darüber geführt werden, wie sehr diese modernen Medien in der Lebensumwelt der Kinder und Jugendlichen vorhanden sind, sondern es ist offensichtlich, dass Kinder und Jugendliche heute in komplexen Medienwelten aufwachsen. Nach Vollbrecht umschreibt der Begriff „Medienwelten“ einerseits die Tatsache, dass Medien in vielfältigen Formen in den Alltagswelten von Kindern und Jugendlichen vorfindbar sind und andererseits auch deren Welterfahrung nachhaltig strukturieren. Medien wirkten heute an der Konstruktion von sozialer Welt entscheidend mit und ihr Mitwirken werde auch so erfahren.

Medien aller Art seien Sozialisationsagenturen, die symbolisch über Zeichen und Zeichensysteme allgegenwärtig seien und die heute vorzufindenden gesellschaftlichen Ausprägungen von Kindheit und Jugend prägten.¹⁰⁰

Es lohnt sich also der Frage nachzugehen, in welcher Weise der Umgang mit diesen technischen Geräten sich auf die kognitive Entwicklung der Jugendlichen auswirkt.

Der Frage nach dieser Wirkung nachzugehen darf nicht missverstanden werden als Versuch, diese Geräte zu glorifizieren. Mögliche negative Folgen eines Missbrauchs sind offensichtlich. Sie wurden auch schon und werden wohl auch in Zukunft vielfach in verschiedenen Publikationen beschrieben, werden hier aber nicht thematisiert.

Der Computer ist ein Medium, das sich in den letzten Jahrzehnten bis in fast alle Haushalte verbreitet hat. Auch in Schulen und sogar Kindergärten findet man Computer. Dass der Einsatz von Computern in Schulen und insbesondere in Kindergärten ambivalent zu sehen ist, beschreibt Neuß, der „möglichst unvoreingenommen“ in mehreren Computerprojekten die Frage untersuchte, welchen Aktivitäten Vorschulkinder bei der Computernutzung nachgehen. Den Kindern werden meistens Passivität, Sprachlosigkeit und Kommunikationsarmut unterstellt, dagegen sei es wichtig die zum Lernen motivierende Funktion des Computers und entsprechender Software zur Kenntnis zu nehmen. Die bei den Kindern beobachteten Aktivitäten sagten auch etwas über positive Lerneffekte bei gemeinsamer Beschäftigung an Computern aus. Diese lägen zum Beispiel im Bereich der kognitiv-koordinativen Aktivitäten, das Bedienen der Maus

¹⁰⁰ Vollbrecht, Dittler/ Hoyer (Hrsg.) (2006: 33)

fördere die Hand-Auge-Koordination. Weiter lernten die Kinder, sich Lösungswege zu merken, was sich darin zeige, dass sie anderen Kindern Hinweise über mehrere Spielschritte gäben. Da sie bei vielen Spielen genau zuhören müssten, was der Sprecher erzähle, um den nächsten Spielschritt gehen zu können, lernten sie das Zuhören, Kombinieren und Umsetzen. Schließlich gebe es noch einen positiven Effekt auf die Konzentration. So sprächen einige Kinder die sich wiederholenden Texte mit oder erinnerten sich an die Funktionen der unterschiedlichen Schaltflächen.¹⁰¹

Natürlich spielen Computer im Alltag von Kindern und Jugendlichen nicht nur als Lernmedium eine Rolle, sondern sie werden von vielen vorwiegend zum Spielen genutzt.

Die Einflussmöglichkeit, die klassische Spiele oder auch klassisches Spielzeug wie Schach, Mühle oder Dame, Lego, Rubiks Cube oder Baukästen auf die kognitive Entwicklung haben können, wird niemand bestreiten.

Somit ist es interessant, welche positiven Auswirkungen die Computerspiele auf die kognitive Entwicklung haben. So einseitig negativ wie alle Horrormeldungen über Auswirkungen von Computerspielen sind, so einseitig positiv klingt auch der Text auf einem Plakat mit dem Titel „Gerade Pisa“ der Unterhaltungssoftware Selbstkontrolle USK aus dem Jahr 2003: „Wer am Computer spielt, lernt aus Fehlern, kontrolliert sich selbst, findet eigene Lösungen, denkt komplex, unterbietet vorgegebene Zeiten, vergisst das Ende der Stunde, recherchiert zu Hause, arbeitet im Team - sogar am Wochenende. Man könnte auch sagen: Er lernt das Lernen.“ Einer solchen Aussage von einem Werbeplakat darf natürlich nicht unkritisch Glauben geschenkt werden, schließlich kommt sie von einem nicht neutralen Interessenverband. Deshalb gilt es, Belege für die beschriebenen positiven Effekte von Computerspielen zu finden.

Flynn beruft sich bei der Erklärung der massiven Zunahme des durchschnittlichen Intelligenzquotienten während des letzten Jahrhunderts auf Greenfield und Johnson. Greenfield habe schon 1988 behauptet, dass Videospiele, elektronische Spiele und Computeranwendungen eine verstärkte Problemlösungsfähigkeit in visuellen und symbolischen Kontexten verursachten. Wenn dies zutrefte, dann sei eine solche verstärkte

¹⁰¹ Neuß, Dittler/ Hoyer (Hrsg.) (2006:91 f.)

Problemlösungsfähigkeit wiederum Voraussetzung dafür, unsere Freizeit zu genießen. Johnson weist auf die kognitiven Anforderungen von Videospielen hin, etwa der räumlichen Geometrie in *Tetris*, den Steuerungsrätseln in *Myst* und den kognitiven Abbildungsanforderungen in *Grand Auto Theft*.¹⁰²

Greenfield zeigte in empirischen Studien ebenfalls, dass das Spiel *Marble Madness* die räumliche Wahrnehmung von Schulkindern verbessert und dass *Tetris* ebenfalls diese Verbesserung bewirkt. Allerdings führte sie letzteres Experiment an jungen Erwachsenen durch.¹⁰³

Klar ist, dass es schwierig ist, brauchbare verallgemeinernde Aussagen über den kognitiven Nutzen von Computerspielen zu machen, da sie sich zu sehr voneinander unterscheiden. Computerspiele lassen sich in viele Genres unterteilen, wie Action-Adventure, Adventure, Arcade, Denkspiele, Gesellschaftsspiele, Jump & Run-Spiele, Management, Rollenspiele, Shooter, Simulationen, Sportspiele, Strategie, Edutainment.¹⁰⁴ Diese Unterteilung ist keine Klasseneinteilung, sondern es gibt Überschneidungsbereiche. Während man im Genre der Denk- und Gesellschaftsspiele auch altbekannte Brettspiele wie Schach, Mühle, Dame oder Backgammon in digitalisierter Form wieder finden kann, so liefern die anderen Genres überwiegend Arten von Spielen, wie sie früher nicht bekannt waren. Pohlmann¹⁰⁵ beschreibt typische Merkmale der einzelnen Genres. Bei Action-Adventure- und Adventure-Spielen befindet sich der Spieler in einer Abenteuerwelt, habe dabei verschiedene Aufgaben zu bearbeiten oder Rätsel zu lösen. Ihm würden Geschicklichkeit, Phantasie und Kreativität abverlangt. Bei Arcade- und bei Jump & Run-Spielen gehe es um Geschicklichkeit und Reaktionsschnelligkeit. Denkspiele seien nicht nur die oben genannten klassischen Denkspiele, sondern auch solche, bei denen man schnell denken und handeln müsse. In Management-Spielen habe man die Aufgabe eine Stadt, einen Staat, ein Unternehmen oder einen Fußballverein zu leiten. Sie seien den Simulationsspielen ähnlich, wo man zum Beispiel die Rolle eines Piloten übernehme und ein Flugzeug lenken solle. In diesen Spielen finde man sich in einem mehr oder weniger wirklichkeitsnahen Szenario und müsse auf gegebene Umstände reagieren. Rollenspiele versetzten die Spieler in eine

¹⁰² Flynn, Oesterdiekhoff/ Rindermann (Hrsg.) (2008: 129)

¹⁰³ Greenfield (1999: 18 f.)

¹⁰⁴ Pohlmann, Kaminski/ Witting (Hrsg.) (2007: 9 ff.)

¹⁰⁵ Pohlmann, Kaminski/ Witting (Hrsg.) (2007: 9 ff.)

Phantasie-Welt, in der sie mit Schwertkämpfen, aber auch mit Magie bestimmte Ziele erreichen sollten. Shooter-Spiele seien die am meisten in Verruf geratenen Spiele.

In diesen Spielen müsse der Akteur versuchen, mit Schusswaffen Gegenspieler, die beispielsweise Terroristen darstellten, zu besiegen. Sportspiele seien Spiele, bei denen ein Sportwettkampf am Bildschirm gezeigt werde, den der Spieler durch Tastatur- oder Maus-Bedienung beeinflussen könne. Strategiespiele bedürfen keiner Erläuterung, unter Edutainment-Spielen verstehe man eine Software, die schulbezogene oder andere Lerninhalte auf spielerische Weise vermitteln möchte. Diese Übersicht zeigt schon, wie vielfältig die Anforderungen an die Spieler je nach Abhängigkeit vom Genre sein können. Dementsprechend unterschiedlich sind auch die Wirkungen der Spiele auf die Spieler.

Pfeifer beschreibt als typisches Merkmal der meisten Computerspiele, dass sie dem Spieler am Anfang nur genau so viele Mittel und Methoden zur Problemlösung anböten, wie jeder Anfänger begreifen könne. Alles Weitere werde dann im Spielverlauf durch Versuch, Scheitern, Analyse, Lernen und Neuplanung erworben.¹⁰⁶

Auch Johnson ist sich bewusst, dass viele Computerspiele einen stupiden Inhalt haben, stellt aber fest, dass es Computerspiele gibt, die positive Effekte auf die Denkweise oder für die Entwicklung von bestimmten Haltungen haben. Er vertritt die zwei Thesen, dass erstens gemessen an fast allen Maßstäben, mit denen man den kognitiven Nutzen des Lesens beurteile, die nichtliterarische Populärkultur der letzten dreißig Jahre immer größer werdende Herausforderungen biete. Als solche Maßstäbe führt er Aufmerksamkeit, Gedächtnis oder die Fähigkeit an, Zusammenhänge zu erkennen. Zweitens fördere diese Kultur zunehmend auch andere kognitive Fähigkeiten, die genauso wichtig seien wie diejenigen, die durch das Lesen von Büchern angeregt würden.¹⁰⁷

So forderten Spiele auf, Entscheidungen zu treffen und sorgten auf diese Weise für nebenbei ablaufende Lernprozesse, die er als *collateral learning* bezeichnet. Von außen betrachtet, wirke die Hauptaktivität eines Computerspielers wie eine Klick-und-Tipp-Orgie. Ein Blick ins Spielergehirn fördere jedoch zutage, dass

¹⁰⁶ Pfeifer (2007: 66)

¹⁰⁷ Johnson (2006: 37)

die primäre Aktivität sich auf einer völlig anderen Ebene abspiele, und zwar beim Treffen von Entscheidungen. Manche erfolgen blitzschnell und spontan, andere strategisch und langfristig geplant. Diese Entscheidungen selbst gründeten auf zwei Arten kognitiver Verarbeitung, die der Schlüssel zum *collateral learning* seien, das sich beim Computerspielen vollziehe.

Diese bezeichnet er als „erkunden“ (*probing*) und „hierarchisch ordnen“ (*telescoping*).¹⁰⁸

Er beschreibt weiter, dass bei traditionellen Spielen wie Schach die grundlegenden Regeln klar seien, während viele Computerspiele Informationen zurückhielten. Als Beispiel dafür führt er Simulationsspiele an, bei denen zwar ein Ziel vorgegeben sei, bei denen aber unklar sei, wie man dieses erreichen könne. So sei man gezwungen, durch Veränderungen bestimmter Parameter herauszufinden, welche Auswirkungen sie auf das simulierte Geschehen haben. Das sei spielerisches Lernen im wahrsten Sinne des Wortes. Konkret sieht das zum Beispiel so aus, dass man als Manager eines Fußball-Vereins in einem Simulationsspiel das Ziel hat, wirtschaftlichen und sportlichen Erfolg für sein Team zu erreichen. Somit ist das Ziel zwar klar, aber man weiß nicht genau, wie man es erreichen kann. Man kann zwischen vielen Optionen wählen, zum Beispiel neue, stärkere Spieler für seine Mannschaft erwerben, von deren Aufstellung man erfolgreichere Ergebnisse erwartet. Man kann Einfluss auf den Trainingsplan oder auf die Mannschaftsaufstellung nehmen oder man vergrößert in Erwartung höherer Einnahmen das Stadion und ähnliches mehr. In welcher Weise eine vom Spieler vorgenommene Veränderung einzelner Parameter sich auf den Spielerfolg auswirkt, weiß man vorher nicht. Als reizvoll dabei kann gesehen werden, dass jede Aktion eine Reaktion erzeugt, deren Details man erst herausfinden möchte.

Genau wie bei den meisten empirischen Forschungen erziele man Ergebnisse dadurch, dass man Dinge ausprobieren, zufällig über Lösungen stolperen oder seinem Instinkt folgen.¹⁰⁹ Der Spieler erfahre zeitnah die Auswirkungen seines Handelns, könne daraus Schlüsse ziehen, seine Aktionen anpassen. Dies versetze ihn in eine „machtvolle“ Position.¹¹⁰

¹⁰⁸ Johnson (2006: 54)

¹⁰⁹ Johnson (2006: 55)

¹¹⁰ Slegers, Kaminski/ Witting (2007: 18)

Gee beschreibt einen vierphasigen Prozess, den er als *The Probe, Hypothesize, Reprobe, Rethink Cycle* bezeichnet, mit dem sich die Spieler guter Videospiele beschäftigen müssen. In der *Probe*-Phase müsse der Spieler die virtuelle Welt untersuchen, was das Umsehen in der aktuellen Umgebung, das Anklicken irgendwelcher Dinge oder die Beschäftigung mit einer bestimmten Handlung einschließe. Die folgende *Hypothesize*-Phase basiere auf Reflektionen während des Untersuchens und danach. Der Spieler müsse eine Hypothese darüber aufstellen, in welcher Weise die Dinge, zum Beispiel ein Text, ein Objekt, ein Artefakt, ein Ereignis oder eine Handlung nützlich sein könnten. In der *Reprobe*-Phase müsse der Spieler die Welt mit seiner Hypothese im Gedächtnis erneut untersuchen, um zu sehen, welchen Effekt es gebe. Die *Rethink*-Phase beende den Zyklus. Dabei behandle der Spieler den Effekt als Rückmeldung der Welt und akzeptiere oder überdenke seine ursprüngliche Hypothese.¹¹¹

Ähnlich beschreibt auch Slegers die Faszination der Spiele. Ein Spieler müsse sich die seiner Spielwelt zugrunde liegenden Regeln aneignen. Viele Spieler würden bewusst keine Spielanleitungen mehr lesen, für sie stelle das Ausprobieren und Erforschen der Spielwelt gleichermaßen Reiz und Herausforderung dar. Unabhängig davon schafften Regelverständnis und Steuerungskontrolle erst die Voraussetzungen, um in einem Computer- oder Videospiel handlungsmächtig agieren zu können.¹¹²

Als einen besonderen Reiz gerade bei wirklichkeitsnah wirkenden Simulationsspielen nennt Johnson die Suche nach unrealistischen Details, die eine spezielle Form des Erkundens darstelle.

Das hierarchische Ordnen ist nach Johnson eine Fähigkeit, die zum großen Teil darin bestehe, sich auf Ziele zu konzentrieren, die unmittelbar vor einem lägen, ohne dabei die langfristigen, weiter entfernten Ziele aus den Augen zu verlieren.¹¹³

Auch *Der Spiegel* ging der Fragestellung nach der Wirkung der Medienwelt auf die kindliche Psyche nach: „Strategie- und Simulationsspiele wie *Die Sims* oder *Civilization*, bei denen der Spieler Familien im Alltag begleitet oder Völker durch die Geschichte führt, haben unbestritten positive Wirkungen. *Die Sims*, selbst

¹¹¹ Gee (2007: 87, f.)

¹¹² Slegers, Kaminski/ Witting (2007: 18)

¹¹³ Johnson (2006: 66)

bei Mädchen beliebt, gilt als erfolgreichstes Spiel aller Zeiten. Es sei sehr wohl zu vermuten, dass ein Spiel wie *Die Sims* ‚Kinderhirne positiv verändert‘, sagt Henning Scheich, der am Magdeburger Leibniz-Institut für Neurobiologie die Grundlagen des Lernens erforscht. Neuronennetze für strategisches Denken könnten besser verknüpft werden, Teile des limbischen Systems, die Schaltstellen zwischen Fähigkeiten und Lernmotivation trainiert werden.“¹¹⁴

Im selben Artikel widerspricht der Leipziger Medienpädagogik-Professor Hartmut Warkus der unter Eltern verbreiteten Ansicht, bei Computerspielen lerne man nichts, denn Kinder verbesserten ihre Fähigkeiten, etwa die Auge-Hand-Koordination, oder eigneten sich clevere Problemlösungsstrategien an.

Die schon erwähnten *Sims* und Fußball-Manager-Spiele sind sehr populär.

Im Jahr 2006 verkaufte sich aber ein anderes Spiel noch häufiger, nämlich *Anno 1701*.

Anno 1701 sei ein komplexes „Echtzeitstrategiespiel“, das sowohl alleine gegen den Computer als auch vernetzt gegen andere gespielt werden könne. Der Spieler agiere in der Rolle eines mächtigen Herrschers, dessen Aufgabe es sei, eine neue Zivilisation aufzubauen. Das Spiel fordere neben geschickter Ressourcenverwaltung die Fähigkeit, strategische Entscheidungen zur Entwicklung der „Pixelvölker“ zu treffen. Das spielerische Anforderungsprofil und der Spielreiz beständen daraus, dass der Spieler aufwendige Planungsaufgaben zu bewältigen habe, angemessen auf unvorhergesehene Ereignisse reagieren müsse und Wechselwirkungsprozesse durchschauen müsse.¹¹⁵

Einen weiteren positiven Effekt beschreibt Pfeifer, der in seiner Jugend viel Zeit mit seinem ersten Computer, einem Commodore 64, kurz C 64, verbracht hat: Er sieht einen großen Nutzen seiner Beschäftigung mit dem C 64 darin, dass er sein Englisch verbessert und ein bisschen Computersprache gelernt habe. Noch interessanter aber scheint der von ihm genannte Effekt auf die Problemlösefähigkeit zu sein. Denn vor allem habe er vor dem C 64 zum ersten Mal in seinem Leben die Energie entwickelt, sich mit einem Problem so lange auseinanderzusetzen, bis er eine Lösung gefunden habe. Er habe

¹¹⁴ Gatterburg in Der Spiegel (20/2007: 51 f.)

¹¹⁵ Witting (2007: 38)

Fachmagazine durchstöbert, Freunde gefragt, sich immer wieder neue Ideen einfallen lassen, wie etwas funktionieren könnte.¹¹⁶

Weiter stellt er positiv dar, dadurch gelernt zu haben, die Lösung von einem Problem auf ein anderes zu übertragen, und sich eine Denkweise angewöhnt zu haben, die darauf beruhe, herumzuprobieren, solange man nichts kaputt machen könne, und sich auf diese Weise langsam, Stück für Stück, Wissen anzueignen.

Ähnlich beschreibt auch Gerstenberger, dass es beim Spielen am Computer immer um Problemlösungen gehe. Digitales Spiel ermögliche insofern vor allem eines, nämlich Methodentraining. Computerspielende Kinder lösten gern Probleme, genossen den Erfolg, ärgerten sich über den Misserfolg und lernten zugleich, mit Misserfolg umzugehen. Sie lernten in individueller Zeit Probleme zu lösen, kontrollierten sich dabei selbst und entwickelten Ausdauer. Kinder eigneten sich beim Spielen am Computer wichtige methodische Fähigkeiten an, sie trainierten auch die Lesefähigkeit und logisches Denken.¹¹⁷ Er sieht die einzelnen Genres nur als unterschiedliche Formen der Problemstellung.

Möglicherweise fällt es Jugendlichen gerade wegen dieser nötigen Vorgehensweise bei Computerspielen so leicht, mit anderen modernen technischen Geräten umzugehen.

Zusammengefasst können Computerspiele neben dem sensomotorischen, dem emotionalen und dem sozialen Bereich insbesondere den kognitiven Bereich in den folgenden Punkten fördern: „räumliches Orientierungsvermögen, Gedächtnisfähigkeit, Kombinationsfähigkeit, Kompetenz in konvergenter Kreativität, Lernfähigkeit, Experimentierfreudigkeit, Zeitmanagement, Ressourcenmanagement, Planungskompetenz, Problemlösungskompetenz, Sachkompetenz. Je nach Genre (Shooter, Strategiespiel, Adventure), können die kognitiven Forderungen der Spiele unterschiedlich sein.“¹¹⁸

Auch Kraam-Aulenbach kommt zu dem Fazit, „dass sich erfolgreiche Spieler durch kognitive Leistung wie Abstraktionsfähigkeit, Verfügbarkeit eines breiten Spektrums an Problemlösungsstrategien, metakognitive Fähigkeiten,

¹¹⁶ Pfeifer (2007: 35 f.)

¹¹⁷ Gerstenberger, Dittler/ Hoyer (2006: 176 f.)

¹¹⁸ Witting, Kaminski/ Witting (2007: 25)

strukturierte Organisation von Wissen und kognitive Flexibilität (die Fähigkeit, ein Problem aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten) auszeichnen.“¹¹⁹

Ein weiteres Beispiel für unterschätzte positive Wirkungen moderner Medien auf die kognitive Entwicklung liefert möglicherweise das Fernsehen. Johnson spricht von einer anderen, immer erfolgreicher werdenden Form der Fernseh-Intelligenz und nennt Beispiele für US-Fernsehserien, die zwar nicht inhaltlich anspruchsvoll seien, aber strukturell. Das Fernsehen dominiere seit einem halben Jahrhundert die Massenkultur und sein Programm habe die Anforderungen an genau diejenigen kognitiven Fähigkeiten im Laufe der Jahre stetig gesteigert, die auch durch das Lesen von Büchern gefördert würden, nämlich Aufmerksamkeit, Geduld, Beharrlichkeit und das Analysieren von Erzählstrukturen.¹²⁰ Denn oft seien es zehn parallel laufende Erzählstränge, die vom Zuschauer verfolgt werden müssten. Dieses Phänomen nennt er *multithreading*. Es sei in den 80er Jahren des letzten Jahrhunderts noch nicht verbreitet gewesen, sondern ein neues Phänomen. Multithreading werde als wichtigste strukturelle Eigenschaft des modernen Fernsehens eingestuft und von den Kritikern in den Himmel gelobt. Wenn man fernsehe, dann biete die Zahl der verschiedenen Handlungsstränge intuitiv einen Anhaltspunkt dafür, wie anspruchsvoll und komplex eine Fernsehserie wirklich sei. Alle Indizien sprächen dafür, dass sich dieser Standard in den letzten zwei Jahrzehnten deutlich vergrößert habe.

Mikos beschreibt, dass sich aufgrund visueller Wahrnehmungsformen auch andere kognitive Fähigkeiten entwickeln können, die nicht den linearen, an Sprachstrukturen orientierten Denkprozessen entsprechen. 5- bis 8-jährige seien dank narrativer Film- und Fernseherzählungen erheblich früher als bisher angenommen reif zur Koordination räumlicher Perspektiven. Sie könnten schon im Grundschulalter zwischen verschiedenen Wirklichkeitsbereichen unterscheiden.¹²¹

Ein weiterer Bereich, in dem ein Einfluss auf die kognitive Entwicklung angenommen werden kann, ist die Online-Kommunikation. Der Meinung ist

¹¹⁹ Kraam - Aulenbach (2002: 237)

¹²⁰ Johnson (2006: 76 ff.)

¹²¹ Mikos in MedienPädagogik (1/ 2000: 10 f.)

zumindest Dittmann¹²², der bei der Untersuchung der Online-Kommunikation im Internet festgestellt hat, dass diese sich weit entfernt von konventionellen Sprachnormen abspielt. Menschen und Medien ständen offenbar in einem zirkulären Verhältnis zueinander. Die gestaltende Kraft des Menschen bringe, oft auf Erfahrungen mit Medien aufbauend, immer neue Medien und Technologien hervor, die dann wiederum die sprachliche und kognitive Entwicklung des Individuums prägten. Ein gut nachvollziehbares Beispiel für die sprachliche Entwicklung des Individuums, die durch neue Medien und Technologien initiiert wurde, ist die umfangreiche Verwendung von Symbolen und Abkürzungen in SMS-Kurznachrichten. Die Ursache dafür liegt vermutlich darin, dass die meisten SMS-Kurznachrichten auf eine Länge von 160 Zeichen beschränkt sind. In der Vergangenheit gab es schon ähnliches in der Telegramm-Sprache zu beobachten, wo die Veränderung der Sprache aber auf finanzielle Gründe zurückzuführen war und nicht so sehr durch die vielfache Verwendung von Abkürzungen und Symbolen gekennzeichnet war. Es ist offensichtlich, dass die Verwendung von Symbolen eine formale, kognitive Fähigkeit ist.

Zusammenfassung:

Es wurde gezeigt, dass die kognitive Entwicklung abhängig ist von sozio-kulturellen Bedingungen und dass Jugendliche in der Informationsgesellschaft Bedingungen vorfinden, welche die Vermutung stark erhärten, dass sie für formal-operatives Denken möglicherweise schon früher reif sind, als es Jugendliche anderer Gesellschaften waren.

Das bedeutet aber, dass sie nicht zwingend darauf angewiesen sind, Neues auf der Ebene der Veranschaulichung zu erlernen, sondern dass sie über die notwendigen Voraussetzungen für einen Einstieg im Formalen verfügen. Die Tatsache, dass der sozio-kulturelle Hintergrund in der heutigen Informationsgesellschaft annehmen lässt, dass sie sogar noch früher in dieses Stadium eintreten, als Piaget behauptet, sollte nur ermutigen, die Umsetzung eines didaktischen Konzeptes zu wagen, das im Formalen statt im Konkreten beginnt. Doch es gibt noch weitere gute Gründe, einen Einstieg im Formalen vorzuziehen.

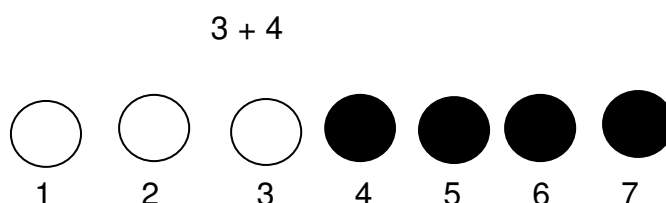
¹²² Dittmann (2002: 13)

7.3.2 Entstehen von Fehlvorstellungen durch einen Einstieg auf der konkreten Ebene

Dass der Einstieg in die konkrete Ebene zunächst einfach ist, wird hier gar nicht bezweifelt. Es wurde nachgewiesen, dass sogar Schimpansen auf der konkreten Ebene Brüche erkennen können. So hat man mit ihnen Experimente angestellt, in denen man ihnen zum Beispiel ein Glas gegeben hat, das halb voll mit einer blauen Flüssigkeit gefüllt war. Dann wurden ihnen zwei weitere Gläser gezeigt, von denen eines ebenso halb voll, das andere zu drei Vierteln gefüllt war. Die Aufgabe bestand nun darin, den Bruchteil richtig zuzuordnen und wurde sofort beherrscht. Als nächstes sollte von einem halb vollen Glas zugeordnet werden, wobei ein halber Apfel und drei Viertel eines Apfels gezeigt wurden. Wieder konnten die Schimpansen fehlerlos den halben Apfel zuordnen. „In ihrem letzten Experiment zeigten Woodruff und Premack, daß Schimpansen zwei solche Brüche sogar im Kopf kombinieren konnten: Wenn der als Auslöser gegebene Reiz aus einem Viertel Apfel und einem halb vollen Glas Milch bestand und die Tiere zwischen einem ganzen Kreis und drei Vierteln eines Kreises wählen sollten, entschieden sich die Schimpansen häufig für die drei Viertel. Sie führten offensichtlich eine innere Rechnung durch, die der Addition von zwei Brüchen ähnelt:

von zwei Brüchen ähnelt: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ¹²³

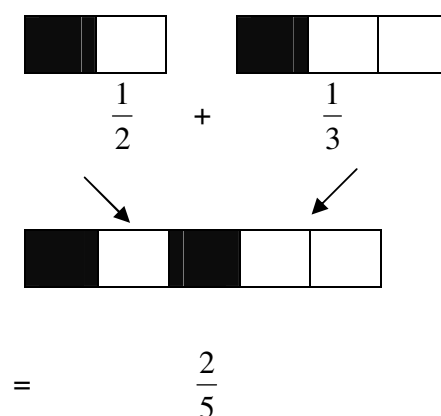
Dass also die einfachen Aufgaben, die im Allgemeinen am Beginn der Bruchrechnung stehen, zu schwierig sind, wird hier gar nicht behauptet. Vielmehr entsteht ein Problem dadurch, dass dieser Ansatz im Konkreten zu Fehlvorstellungen führt. Dies möchte ich an einem sehr deutlichen Beispiel zeigen. Schülerinnen und Schüler sind aus dem Bereich der natürlichen Zahlen folgende Vorstellung gewohnt:



¹²³ Dehaene (1999: 36)

„Hierbei werden zunächst 3 Plättchen und danach 4 Plättchen hingelegt und die Summe durch vollständiges Auszählen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) der Gesamtmenge bestimmt.“¹²⁴ Diese Vorgehensweise ist die grundlegende Strategie von Schulanfängern für Additionen, insbesondere wenn mit Material wie Klötzchen oder Plättchen gearbeitet wird. Andere Strategien sind Vereinfachungen, bei denen die Gesamtmenge nicht komplett neu ausgezählt wird, sondern beim 4. Plättchen angefangen wird. Manche Schülerinnen und Schüler verändern diese Strategie derart, dass sie nicht vom ersten Summanden aus weiterzählen, sondern vom größeren Summanden oder dass sie nicht in Einerschritten sondern, so lange es möglich ist, in Zweier- oder Dreierschritten weiterzählen. Eine Gemeinsamkeit aller dieser Strategien ist aber, dass in der Grundschule also addieren als „zusammenzählen“ gesehen wird. Auf der anschaulichen Ebene passiert das, in dem Objekte zusammengepackt werden.

Nach einer Einführung der Bruchzahlen auf der anschaulichen Ebene wissen die Kinder, dass sich $\frac{1}{2}$, beziehungsweise $\frac{1}{3}$ darstellen lässt, indem man ein Rechteck in 2, beziehungsweise 3 gleich große Teile teilt und jeweils einen davon markiert. Die Anschauung und die erworbene Vorstellung der Addition liefern die folgende Fehlvorstellung:



Diese Fehlvorstellung ist sehr weit verbreitet und es ist offensichtlich, dass sie durch die Anschauung unterstützt wird. Schließlich lassen sich auch leicht

¹²⁴ Padberg (1996: 76f.)

konkrete Modelle mit einem Alltagsbezug finden, die diese naheliegende Fehlvorstellung gut unterstützen.

Wenn beispielsweise ein Stürmer einer Fußballmannschaft in einem Spiel eines von 2 Toren seiner Mannschaft erzielt, dann hat er die Hälfte der Tore seiner Mannschaft geschossen. Wenn seine Mannschaft im nächsten Spiel 3 Tore erzielt und dieser Stürmer dabei wieder ein Mal erfolgreich war, dann hat er in diesem Spiel ein Drittel der Tore seiner Mannschaft erzielt. Man kann das auch so formulieren, dass der Bruchteil der Tore dieser Mannschaft, die von diesem Stürmer erzielt wurden, im ersten Spiel die Hälfte, im zweiten Spiel ein Drittel ist. Fragt man sich nun, welcher Bruchteil der Tore aus beiden Spielen dieser Mannschaft von diesem Stürmer erzielt wurde, so ist klar, dass er 2 von insgesamt 5 Toren erzielt hat, sodass sein Anteil an den in beiden Spielen erzielten Toren seiner Mannschaft bei zwei Fünftel liegt.

Auf diesen Anteil ist man durch getrennte Addition der Anzahl der von diesem Stürmer erzielten Tore einerseits und der Anzahl der von der Mannschaft insgesamt erzielten Tore gekommen. Tatsächlich erhält man auf diese Weise auch den Anteil der Tore dieser Mannschaft, die von diesem Stürmer erzielt wurden.

Ein dazu analoges Beispiel kennen alle Schülerinnen und Schüler schon lange vor der Bruchrechnung. Man denke sich eine Klassenarbeit. Bei der ersten Aufgabe kann man 2 Punkte erzielen, bei der zweiten Aufgabe kann man 3 Punkte erzielen. Ein Schüler, der nun bei jeder der beiden Aufgaben einen Punkt erhalten hat, hat bei der ersten Aufgabe die Hälfte der möglichen Punkte erzielt und bei der zweiten Aufgabe ein Drittel der möglichen Punkte. Insgesamt hat er aber zwei Fünftel der möglichen Punkte erzielt. Oft werden die erzielten und die möglichen Punkte auch mit als $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ notiert und als Gesamtpunktzahl wird dann $\frac{2}{5}$ angegeben. Der Schrägstrich wird im Alltag in sehr vielen Fällen als Bruchstrich gesehen, sodass die Vermutung, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ sei eine korrekte Addition von Brüchen, für Schülerinnen und Schüler nahe liegen muss.

Natürlich ist $\frac{2}{5}$ nicht die Summe von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, aber an drei Beispielen wurde gerade illustriert, warum diese Fehlvorstellung bei einer Einführung der Bruchrechnung im Konkreten sehr nahe liegt.

Sowohl Padberg¹²⁵ als auch Wartha¹²⁶ schildern diese Fehlvorstellung von der komponentenweisen Addition zweier Brüche als weit verbreitet.

7.3.3 Unmöglichkeit einer Einführung der negativen Zahlen auf der konkreten Ebene im Folgeschuljahr

Wenn argumentiert wird, ein Einstieg in die Bruchrechnung in Klassenstufe 6 müsse im Konkreten stattfinden, weil die kognitive Entwicklung der Schülerinnen und Schüler noch keinen Einstieg im Formalen zulasse, dann wird ignoriert, dass im darauf folgenden 7. Schuljahr bei der Einführung der negativen Zahlen gar keine Konkretisierung möglich ist. Es ist widersprüchlich, wenn einerseits behauptet wird, man müsse die Brüche, die sich formal sehr gut aus den natürlichen Zahlen erarbeiten lassen, unbedingt auf der konkreten Ebene einführen und andererseits nur ein Jahr später hingenommen werden muss, dass eine Zahlbereichserweiterung zwingend auf der formalen Ebene erfolgen muss, weil sie im Konkreten gar nicht möglich ist. Es gibt jedenfalls keinen Grund anzunehmen, warum Schülerinnen und Schüler innerhalb eines Jahres einen so großen Fortschritt in ihrer kognitiven Entwicklung machen sollten, dass sie von der Unfähigkeit, einfache formale Operationen durchzuführen, die sich auf die natürlichen Zahlen zurückführen lassen, zu der Fähigkeit gelangen, mit abstrakten Konstrukten wie den negativen Zahlen umzugehen.

7.3.4 Alle bisherigen didaktischen Konzepte sind gescheitert.

Ein weiteres Argument für ein neues Konzept ist die Tatsache, dass alle bisherigen didaktischen Konzepte gescheitert sind. Bei der obigen Vorstellung der Konzepte wurde ihre Tauglichkeit anhand eines Fragenkatalogs überprüft. Es zeigte sich, dass alle didaktischen Konzepte in einigen Punkten gravierende

¹²⁵ Padberg (2002: 102)

¹²⁶ Wartha (2007: 187)

Mängel aufweisen. Hier ist das im Folgenden vorgestellte Konzept, wie sich zeigen wird, allen anderen überlegen.

7.4 Beschreibung und Auswertung des Konzeptes anhand des Fragenkatalogs

In diesem Konzept werden Brüche pragmatisch als Quotienten zweier natürlicher Zahlen gesehen. Also wann immer wir zwei natürliche Zahlen als Dividend und Divisor wählen, so ist deren Quotient ein Bruch und ebenso ist jede Zahl, die sich als Quotient zweier natürlicher Zahlen darstellen lässt, ein Bruch.

Bei der Beschreibung des Konzeptes wird im Gegensatz zur Vorstellung der anderen didaktischen Konzepte sofort der Fragenkatalog herangezogen und beantwortet.

Frage 1: Was ist ein Bruch?

Antwort: Ein Bruch ist eine Zahl, eine „stehen gelassene Division“.

Das folgende Konzept geht, anders als es bei den in den letzten Jahrzehnten die Schulbücher bestimmenden Konzepten üblich war, nicht von der konkreten Ebene aus, sondern führt die Brüche als „stehen gelassene Division“ ein.

Es ist nicht neu, dass Brüche mit Divisionen gleichgesetzt werden. Schon in einer Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra aus dem Jahr 1894 findet man die Aufgabe

„Folgende Quotienten zu vereinfachen: 2) a) $36 : 63$ “¹²⁷

Eine Vereinfachung des Quotienten kann hier nur durch Division des Dividenden und des Divisors durch einen ihrer gemeinsamen Teiler erfolgen, das heißt, der Quotient kann nur vereinfacht werden, indem die Darstellung gekürzt wird.

¹²⁷ Heis (1894: 30)

Bemerkenswert ist, dass im Buch aus dem Jahr 1894 vom Vereinfachen gesprochen wurde und heutzutage üblicherweise vom „Kürzen“ gesprochen wird, was leider von manchen Schülerinnen und Schülern mit einer Division oder zumindest mit einer Veränderung der Zahl assoziiert wird, während beim Auftrag, den Quotienten zu vereinfachen, klar ist, dass es sich nur um eine Veränderung der Darstellung handeln kann.

Ähnlich wird die Auffassung von Brüchen als Quotienten auch in einer anderen alten Veröffentlichung vertreten. Sie stammt aus dem Jahr 1918:

„Der fünfte Teil von 4 Einheiten, also das Resultat der Teilung $4 : 5$ ergibt sich dann als viermal so groß wie der fünfte Teil einer Einheit, als $\frac{4}{5}$, was wir der

Wichtigkeit wegen noch in die Form einer Gleichung bringen: $4 : 5 = \frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5}$.“¹²⁸

Ebenso ist es in diesem Konzept. Es sieht also davon ab, den Bruchbegriff über Brüche als Anteile von Flächen oder von Größen einzuführen. Ausgangspunkt des neuen Konzeptes ist stattdessen, dass jede Division zweier natürlicher Zahlen, außer durch 0, möglich sein soll. $14 : 2$ ist ein Bruch, aber auch $10 : 11$ ist ein Bruch. Zwei Dinge werden hiermit sofort klar, nämlich erstens, dass nach dieser Definition jede Zahl ein Bruch ist, die sich als Quotient zweier natürlicher Zahlen schreiben lässt und dass zweitens auch jede natürliche Zahl ein Bruch ist.

Man findet also in der Menge der Brüche auch alle Zahlen wieder, die man zuvor schon kannte. Aber nicht immer ist der Quotient zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl. Für solche nichtnatürlichen Brüche muss nun die Akzeptanz als Zahl vorbereitet werden, was nicht schwierig ist. Erstens haben die Schülerinnen und Schüler im Alltag die Erfahrung gemacht, dass Divisionen auch dann möglich sind, wenn der Divisor kein Teiler des Dividenden ist, also wenn der Quotient nicht im Bereich der natürlichen Zahlen liegt. Im Gegensatz dazu fehlt natürlich bei der Subtraktion eine solche Alltagserfahrung, denn es ist nicht möglich konkret zu subtrahieren, wenn der Subtrahend größer ist als der Minuend. Dies ist ein guter Grund, auch weiterhin die Brüche vor den negativen

¹²⁸ Wieleitner (1918: 14)

Zahlen einzuführen. Zweitens wissen sie schon, dass jede Division außer durch 0 möglich ist, wenn vorher die Division mit Rest eingeführt worden ist. Auf die Problematik der Notation wurde bereits in Abschnitt 3. 2 hingewiesen.

Was aber in Klassenstufe 5 meist nicht erfolgt, ist eine weitere Beschäftigung mit den „Ergebnissen“ solcher Divisionen mit Rest. Zum Beispiel wird üblicherweise nicht mit ihnen gerechnet. Auch wird oft nicht thematisiert, was der Ausdruck

$3 + 2 : 6$ oder auch $20 : 6$ eigentlich ist. Wie man letzteren mechanisch in den ersten überführen kann, ist klar. Aber dass jedem Schüler in Klassenstufe 5 klar ist, dass $20 : 6$ eine Zahl ist, muss bezweifelt werden, schließlich „geht die Rechnung nicht auf“, es bleibt ja ein Rest. So bietet es sich an, die Division mit Rest zu wiederholen und unbedingt klarzustellen, dass wir von nun an auch jeden Quotienten als Zahl ansehen wollen.

Den Schülerinnen und Schülern ist schon seit dem Besuch der Grundschule bekannt, dass jede additive und jede multiplikative Verknüpfung zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl liefert. Sie wissen auch, dass man jede natürliche Zahl durch jede von 0 verschiedene natürliche Zahl dividieren kann. Manchmal ist der Quotient wieder eine natürliche Zahl, manchmal nicht. Dann sagen sie zum Beispiel: „geht nicht auf“, weil sie den Quotienten noch nicht benennen können oder sie erkennen, dass ein von 0 verschiedener Rest bleibt. Mit dem Ziel vor Augen, dass von nun an jeder Quotient zweier natürlicher Zahlen als Zahl angesehen werden soll, ist also an der Akzeptanz nichtnatürlicher Quotienten zu arbeiten. Das ist einfacher als es zunächst klingen mag.

Zum Beispiel können 4 Schülerinnen und Schüler problemlos 28 Bonbons unter sich aufteilen, weil $28 : 4 = 7$ ist. Gibt man ihnen jedoch nicht 28, sondern 30 Bonbons, so können sie diese nicht ohne Rest unter sich aufteilen, da

$30 : 4 = 7 + 2 : 4$. Obwohl aber der Quotient $30 : 4$ nichtnatürlich ist, kann man sich darauf verlassen, dass die Schülerinnen und Schüler in diesem Kontext eine Lösung für das Problem finden, um 30 durch vier zu teilen, da die Bonbons locken. Die Lösungsstrategien können unterschiedlich sein. Möglicherweise werden sie antworten, dass jeder 7 Bonbons bekommt und 2 übrig bleiben, vielleicht werden sie auch formulieren, dass jeder 7 bekommt und die 2 übrigen

noch in 4 Portionen oder an die 4 beteiligten Personen geteilt werden müssen, aber selbstverständlich werden sie einsehen, dass sie einen größeren Anspruch haben, als wenn sie nur 28 Bonbons gehabt hätten und einen geringeren Anspruch, als wenn sie 32 gehabt hätten. Dass sie einen Anspruch auf $30 : 4$ Bonbons haben, ist klar. Dass dieser der gleiche wie der Anspruch auf $7 + 2 : 4$ ist, können sie durch eine Division mit Rest erfahren. Dass also auch $30 : 4$, beziehungsweise $7 + 2 : 4$ Zahlen sind, sollte ihnen nun klar werden, auch wenn sie noch nicht genau wissen, wie sie mit $2 : 4$ verfahren sollen.

Es muss unbedingt die Bereitschaft der Schülerinnen und Schüler dafür geschaffen werden, von nun an alle Quotienten zweier natürlicher Zahlen als Zahl anzusehen.

Alle diese Zahlen, die wir als Quotienten zweier natürlicher Zahlen darstellen können, wollen wir von nun an Brüche nennen.

Im selben Moment ist das Augenmerk der Schülerinnen und Schüler darauf zu legen, dass sie den bisher bekannten Bereich der natürlichen Zahlen verlassen, denn nicht immer ist ein solcher Quotient wieder eine natürliche Zahl. Wir haben also auf einfache Weise neue Zahlen konstruiert.

Gleichzeitig damit wird aber eine der am weitesten verbreiteten Fehlvorstellungen ausgeschlossen. Die Einbettung der natürlichen Zahlen in die Brüche sowie das Kürzen und Erweitern geschieht nämlich auf diese Weise ganz natürlich, denn die Lernenden können nicht nur selbst einsehen, dass jede natürliche Zahl ein Bruch ist, indem sie zu gegebenen natürlichen Zahlen geeignete Dividenden und Divisoren suchen, sondern es ergibt sich aus der Auffassung, dass jeder Quotient zweier natürlicher Zahlen ein Bruch ist, von selbst, dass auch diejenigen Quotienten, die selber natürliche Zahlen sind, zu den Brüchen gehören. Es stellt sich also gar nicht die Frage, ob die altbekannten natürlichen Zahlen in der Menge der Brüche wiederzufinden sind, sondern es ist von vornherein klar, dass die Menge der Brüche eine Erweiterung der Menge der natürlichen Zahlen darstellt. Die natürlichen Zahlen erscheinen als besondere Brüche, die sich besonders einfach schreiben lassen. Was das Kürzen und Erweitern angeht, so ergibt sich ebenfalls ganz natürlich, dass jeder Bruch auf mehrere, ja sogar unendlich viele Möglichkeiten

darstellbar ist. Dieses lässt sich leicht an den besonderen Brüchen besichtigen, den natürlichen Zahlen, zum Beispiel ist $5 = 5 : 1 = 10 : 2 = 15 : 3 = \dots$

Das sollte auf keinen Fall verwirren, sondern an das Analogon der Invarianz der Subtraktion erinnern. Schon in der Grundschule sollten die Schülerinnen und Schüler gelernt haben, dass

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a - b = (a + c) - (b + c)$$

gilt, also dass zum Beispiel

$$4 - 2 = (4 + 1) - (2 + 1) = (4 + 2) - (2 + 2) = \dots,$$

beziehungsweise dass $4 - 2 = 5 - 3 = 6 - 4 = \dots$

Diese aus der Grundschule bekannte Invarianz wird in Klassenstufe 7 bei der Einführung der negativen Zahlen eine Rolle spielen. Dann wird jede Differenz zweier natürlicher und später auch rationaler Zahlen wieder eine rationale Zahl sein, während nun schon jeder Quotient zweier natürlicher Zahlen als rationale Zahl akzeptiert wird.

Auf eine derart formale Darstellung ist natürlich in der Schule zu verzichten. Sie ist hier aber für die präzise Beschreibung des Inhalts nötig. Das gilt auch für die folgenden formalen Darstellungen.

Wenn man also Minuend und Subtrahend um die gleiche Zahl vergrößert oder, falls möglich, verkleinert, dann ändert sich die Differenz nicht.

Übertragen auf die Division heißt es: wenn man Dividend und Divisor mit demselben Faktor $\neq 0$ multipliziert oder, falls möglich, durch dieselbe Zahl, dividiert, ändert sich der Quotient nicht. Dieses ist vielen Schülerinnen und Schülern nur eingeschränkt bekannt. Meistens wissen sie zwar, dass man bei Divisionen gleich viele Nullen bei Dividend und Divisor „streichen“ darf, wenn sie Vielfache von 10 sind, zum Beispiel dass sie $720 : 80$ durch $72 : 8$ ersetzen dürfen, weil beide Quotienten gleich sind. Dieses ist natürlich nichts anderes als ein Kürzen mit 10. Weniger bekannt ist ihnen meistens, dass ein analoges Verfahren mit jeder geeigneten Zahl durchgeführt werden kann, zum Beispiel dass $35 : 25$ durch $7 : 5$ ersetzt werden kann. Diese Erkenntnis kann auf den

Bereich der natürlichen Zahlen beschränkt natürlich schon vor Klassenstufe 6 gewonnen werden, zum Beispiel $75 : 25 = 15 : 5$. Hier muss nur die Leistung erbracht werden, dieses fortzusetzen und auf beliebige Quotienten zu übertragen. Auf diese Weise sieht man, dass Quotienten verschiedene Darstellungen besitzen und dass man sich durch schrittweise Veränderung der Darstellung Rechnungen sehr gut vereinfachen kann.

Und schon wurde auf einfachste Weise die Kürzungsregel beziehungsweise die Erweiterungsregel hergeleitet. Allgemein gilt:

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \forall b, k \in \mathbb{N} : a : b = ka : kb.$$

Die Gefahr, dass die in 3.2 beschriebene Fehlvorstellung entsteht, die Vielzahl an Darstellungsmöglichkeiten sei eine neue Eigenschaft der Brüche, besteht hier nicht, wenn schon bei den natürlichen Zahlen geübt wurde, nach anderen Darstellungen zu suchen. Dann nämlich ist das „Kürzen“ und „Erweitern“ nichts prinzipiell Neues. Abgesehen davon wäre es doch widersprüchlich, einerseits die natürlichen Zahlen als Brüche zu sehen und andererseits die Vielzahl der Darstellungsmöglichkeiten als eine Eigenschaft der Brüche zu sehen, die sie von den natürlichen Zahlen unterscheidet.

Wenn nun der Begriff des Bruchs eingeführt wurde, ist es auch sinnvoll, die Bruchschreibweise einzuführen.

Die Schülerinnen und Schüler müssen diese sowieso kennenlernen, da sie etabliert ist und, was ein noch besserer Grund ist, sie den Überblick erleichtert. Es bringt keine Vorteile, die Einführung der neuen Schreibweise aufzuschieben. Es ist eher ein Vorteil, sie möglichst früh einzuführen, denn sie macht Rechnungen nicht nur übersichtlich, sondern sie erspart auch Klammern und insbesondere ist sie beruhigend. Denn nachdem die Brüche als neue Zahlen eingeführt wurden, finden die Schülerinnen und Schüler in der Bruchschreibweise von $1 : 4$ als $\frac{1}{4}$ eine Schreibweise, die sie davon abhält, etwas ausrechnen zu wollen. Denn gerade, wenn sie im Grundschulunterricht nicht gelernt haben, zwei Zahlen, die miteinander verknüpft werden, stehen zu lassen, sondern auf das Ausrechnen dressiert wurden, liefert die neue

Schreibweise die beruhigende Nebenwirkung, dass sie ohne eines der vier aus der Grundschule bekannten Symbole für die Grundrechenarten auskommt, sodass kein Handlungsauftrag gelesen wird, ähnlich wie die Schülerinnen und Schüler sich nicht zu einer Handlung aufgefordert sehen, wenn sie die Zahl 2 in ebendieser Schreibweise vorfinden. Sehen sie aber die 2 in der Schreibweise $11 - 9$, dann fühlen sie sich oft aufgefordert, noch etwas auszurechnen.

Im Zusammenhang mit der neuen Schreibweise werden die Begriffe „Zähler“ und „Nenner“ eingeführt. Sie sind gleichbedeutend mit den Begriffen Dividend und Divisor. Damit ist klar, dass ein Bruch nicht einen Zähler oder Nenner besitzt, sondern dass nur die Darstellung eines Bruches, beziehungsweise seine Schreibfigur einen bestimmten Zähler oder Nenner besitzt. Schließlich ist schon die Invarianz der Division bekannt, d. h., dass die Zahl, also der Bruch gleich bleibt, wenn Zähler und Nenner einer Darstellung mit derselben Zahl $\neq 0$ multipliziert oder, falls möglich, durch dieselbe Zahl dividiert werden. Es gilt:

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \forall b, k \in \mathbb{N} : \frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Das muss natürlich auch in Bruchschreibweise geübt werden. Dabei sollte im Bekannten begonnen werden, da es im Bekannten die Möglichkeit der Selbstkontrolle gibt.

Zum Beispiel: $\frac{4}{1} = \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \dots$ oder $\frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \dots$

Auch wenn nur eine Ersetzung des Symbols „:“ durch den Bruchstrich stattfindet, sollte nicht unterschätzt werden, dass die Schülerinnen und Schüler Übungen benötigen, um sich daran zu gewöhnen.

Es ergibt sich sofort die Antwort auf

Frage 2: Wie kann man Brüche darstellen?

Antwort: Es gibt, wie es auch schon unendlich viele Möglichkeiten für die Darstellungen der natürlichen Zahlen gibt, unendlich viele

Möglichkeiten, einen Bruch darzustellen. Wenn man schon eine Darstellung $\frac{a}{b}$ gefunden hat, dann kann man diese erweitern, indem man den Zähler und den Nenner dieser Darstellung mit derselben Zahl $\neq 0$ multipliziert oder, falls möglich, kürzen, indem man Zähler und Nenner der Darstellung durch einen gemeinsamen Teiler dividiert. Durch Kürzen oder Erweitern erhält man wieder eine Darstellung desselben Bruchs.

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \forall b, k \in \mathbb{N} : \frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Wir haben nun gesehen, dass es wie für jede natürliche Zahl, so auch für jeden Bruch unendlich viele Darstellungen gibt. Hierbei kann es natürlich vorkommen, dass man verschiedene Darstellungen desselben Bruches sieht, wie zum Beispiel $\frac{114}{438}$ und $\frac{171}{657}$ ohne auf den ersten Blick zu bemerken, dass es sich um denselben Bruch handelt. Aber erstens ist dies nicht konzeptbedingt und zweitens sind $945 - 726$ und $1753 - 1534$ auch nur zwei verschiedene Darstellungen derselben Zahl 219, denen man es nicht sofort ansieht. Dieses Phänomen ist also keineswegs neu.

Wie kann man aber nun erkennen, ob zwei verschiedene Brüche vorliegen oder ob man es nur mit zwei Darstellungen desselben Bruchs zu tun hat? Und wenn es sich um zwei verschiedene Brüche handelt, ergibt sich sofort die nächste spannende Frage: welcher ist größer und woran können wir das erkennen?

Es gibt natürlich viele Fälle, in denen es sofort klar ist, welcher von zwei gegebenen Brüchen größer ist. Für die anderen Fälle liefern Schulbücher oft sehr früh Merksätze oder Anleitungen, die leider in vielen Fällen nicht gut sind. Schon oben wurde auf einige Beispiele aus Schulbüchern hingewiesen, bei denen Schülerinnen und Schülern fälschlicherweise erklärt wurde, sie müssten die Brüche zuerst gleichnamig machen oder gar den Hauptnenner suchen.

Es ist meines Erachtens sinnvoll, Schülerinnen und Schüler mit dem Problem des Größenvergleichs zu konfrontieren und sie selbst nach Lösungsstrategien

suchen zu lassen, anstatt ein „Rezept zum Größenvergleich“ zu präsentieren. Es ist ihnen leicht zu zeigen, dass es nicht so leicht wie in der Menge der natürlichen Zahlen ist, die größere von zwei Zahlen zu erkennen. Leicht sind Beispiele zu finden, die diese Problematik zeigen. Allerdings sollte man darauf vorbereitet sein, auf voreilige Lösungsstrategien angemessen zu reagieren. Es geht zunächst also darum, die Schülerinnen und Schüler dafür zu sensibilisieren, dass der Größenvergleich erschwert ist. Übrigens ist es ja auch nicht sofort zu sehen, welche der folgenden Differenzen $345 - 219$ oder $623 - 502$ kleiner ist. Man kann die Differenz aber leicht bestimmen und dann entscheiden. Wenn aber $983 - 426$ und $845 - 426$ verglichen werden sollen, wird hoffentlich jeder eine bessere Strategie als die Bestimmung der Differenz finden. Dasselbe gilt für $745 - 342$ und $745 - 432$. Hat man also zwei verschiedene Differenzen von je zwei Zahlen gegeben, so ist man für den Größenvergleich nicht unbedingt auf das Bestimmen der Differenz angewiesen. Sind nämlich beide Minuenden gleich oder sind beide Subtrahenden gleich, dann ist es einfach. Wenn man $546 - 237$ und $409 - 307$ vergleicht, ist die größere Zahl auch leicht zu finden. Bei der ersten Differenz ist der Minuend größer und der Subtrahend kleiner als bei der zweiten. Diese Untersuchungen von Differenzen sollte natürlich schon lange vor dem Bruchrechnenunterricht stattfinden. Sie bereiten den Größenvergleich von Brüchen vor, denn analog ist es hier sehr einfach den Größeren von zwei Brüchen zu finden, wenn beide mit gleichem Zähler oder beide mit gleichem Nenner dargestellt sind oder wenn einer der Brüche gleichzeitig mit größerem Zähler und kleinerem Nenner dargestellt ist als der andere. Doch dieses können die Schülerinnen und Schüler selbst herausfinden. Hierzu ist es sicher gut, eine Stärke des Konzepts zu nutzen, die auch später bei der Klärung der noch folgenden Fragen genutzt werden kann.

Man richte den Blick auf einige besondere Brüche, die schon lange bekannt sind, nämlich auf die natürlichen Zahlen.

Man wähle sich 2 natürliche Zahlen, zum Beispiel 2 und 5, schreibe sie nun auf verschiedene Weisen als Quotienten in Bruchdarstellung.

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \dots \text{ und } 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \frac{25}{5} = \dots$$

Es gilt:

$$\frac{2}{1} < \frac{5}{1} \quad \frac{4}{2} < \frac{5}{1} \quad \frac{6}{3} < \frac{5}{1} \quad \frac{8}{4} < \frac{5}{1} \quad \frac{10}{5} < \frac{5}{1} \dots \text{ und}$$

$$\frac{2}{1} < \frac{10}{2} \quad \frac{4}{2} < \frac{10}{2} \quad \frac{6}{3} < \frac{10}{2} \quad \frac{8}{4} < \frac{10}{2} \quad \frac{10}{5} < \frac{10}{2} \dots \text{ und so weiter.}$$

Nun sind die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, solche Bruchdarstellungen zu suchen, bei denen sie direkt ablesen können, welche Zahl größer ist.

Es wird sich leicht finden lassen, dass von zwei Brüchen, die mit dem gleichen Nenner dargestellt sind, stets derjenige größer ist, der den größeren Zähler besitzt.

Dies ist leicht einzusehen, denn der Dividend ist größer, doch der Divisor ist gleich, es ist also nur mehr zu verteilen, die Anzahl der Teile bleibt gleich. Eine Übertragung auf alle Brüche nach dem Permanenzprinzip liegt nahe, die Argumentation ist die gleiche, denn dass beispielsweise $\frac{16}{5} > \frac{11}{5}$ ist, ist klar, weil einmal 16 und einmal 11 geteilt werden, aber beide Male in 5 Portionen.

Ebenso wird sich schnell finden lassen, wo bei Darstellungen mit gleichem Zähler der größere Bruch zu finden ist. Auch dieses lässt sich auf nichtnatürliche Quotienten übertragen, denn es ist klar, dass $\frac{1}{10} > \frac{1}{20}$ ist, da

$1 : 10 > 1 : 20$ ist. In beiden Fällen wird 1 geteilt, einmal in 10 Teile, einmal in 20. Es ist damit zu rechnen, dass weitere Vermutungen geäußert werden. Möglich ist, dass die Schülerinnen und Schüler sehen, dass beim Vergleich zweier Brüche, die so dargestellt sind, dass Zähler und Nenner die gleiche Summe haben, derjenige größer ist, der den größeren Zähler hat, wie es konkret an den Beispielen $\frac{4}{2} < \frac{5}{1}$ und $\frac{8}{4} < \frac{10}{2}$ zu sehen ist. Auch wenn ein Bruch eine Darstellung besitzt, bei der gleichzeitig der Zähler größer und der Nenner kleiner ist als bei einer Darstellung eines anderen Bruchs kann entschieden werden, dass er größer ist als der andere Bruch.

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass der Größenvergleich immer dann besonders gleich ist, wenn beide Brüche mit gleichem Zähler oder mit gleichem Nenner dargestellt sind.

Nun muss aber auch eine Strategie für den Größenvergleich gefunden werden, die zum Ziel führt, wenn die Brüche weder mit gleichem Zähler noch mit gleichem Nenner dargestellt sind. Da schon bekannt ist, dass jeder Bruch auf unendlich viele Weisen darstellbar ist, mache man sich auf die Suche nach Darstellungen mit gleichen Zählern oder mit gleichen Nennern. Die Frage, ob es solche immer gibt, kann leicht beantwortet werden, denn es ist auch schon bekannt, dass je zwei Zahlen auch unendlich viele gemeinsame Vielfache besitzen. Vergleicht man beispielsweise $\frac{4}{7}$ und $\frac{5}{9}$, dann stelle man beide

Brüche mit einem gemeinsamen Vielfachen von 4 und 5 im Nenner dar oder man stelle beide Brüche mit einem gemeinsamen Vielfachen von 7 und 9 im Nenner dar. Schon hat man das neue Problem auf ein bekanntes zurückgeführt.

$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5}$ und $\frac{5}{9} = \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 9}$. Hier sind beide Brüche mit dem gleichen Zähler $4 \cdot 5$ dargestellt und das Problem reduziert auf den Vergleich der Nenner.

Es ist $7 \cdot 5 < 4 \cdot 9$, also $\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$

$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 9}{7 \cdot 9}$ und $\frac{5}{9} = \frac{7 \cdot 5}{7 \cdot 9}$, beide Brüche sind nun mit dem Nenner $7 \cdot 9$ dargestellt und das Problem reduziert sich auf den Vergleich der Zähler.

Es ist $4 \cdot 9 > 7 \cdot 5$, also ist $\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$.

Man kann in einigen Beispielen auch die Division mit Rest für den Größenvergleich nutzen.

So ist $\frac{21}{4} > \frac{31}{6}$, da $\frac{21}{4} = 21 : 4 = 5 + 1 : 4$ und $\frac{31}{6} = 31 : 6 = 5 + 1 : 6$.

Das Problem lässt sich so auf den Vergleich von $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ reduzieren.

Natürlich gibt es weitere Strategien für den Größenvergleich. Beispielsweise ist ebenfalls sofort klar, dass $\frac{2}{5} < \frac{7}{3}$ ist, wenn man schon eingesehen hat, dass

$$\frac{2}{5} < 1 \text{ und } 1 < \frac{7}{3} \text{ ist.}$$

Diese Strategie, die Transitivität der „<“-Relation für den Größenvergleich auszunutzen, ist manchmal die einfachste aller Möglichkeiten und sollte nicht vernachlässigt werden. Es sollte diese Strategie nicht nur auf dazwischen liegende natürliche Zahlen beschränkt sein.

Es ist auch immer möglich, den Größenvergleich über den Vergleich mit einem geeigneten dritten Bruch durchzuführen. Allerdings ist ein solcher hier für Schülerinnen und Schüler noch nicht so leicht zu finden wie im eben betrachteten Beispiel.

Zwar ist ein Schluss wie der folgende korrekt:

$\frac{4}{7} > \frac{71}{126}$ und $\frac{71}{126} > \frac{5}{9}$, also auch $\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$, aber diese Lösungsstrategie ist hier nicht die einfachste. Überhaupt ist es zwar kein Problem, eine Zahl zu finden, die zwischen zwei gegebenen Brüchen liegt. Es ist sogar sehr einfach, denn für zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegt immer $\frac{a+c}{b+d}$ zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. So liegt $\frac{9}{16}$ zwischen $\frac{4}{7}$ und $\frac{5}{9}$, ebenso wie zwischen $\frac{3}{5}$ und $\frac{6}{11}$. Der Größenvergleich zweier Zahlen ist aber durch die Konstruktion einer dazwischenliegenden Zahl noch nicht erledigt.

Die oben genannten Beispiele sollten nur zeigen, dass es nicht sinnvoll ist, ein merksatzartiges Verfahren für den Größenvergleich von Brüchen anzugeben. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler mehrere Möglichkeiten kennenlernen und in jedem Einzelfall das Problem des Größenvergleichs mithilfe irgendeiner günstigen Strategie lösen können, anstatt stumpsinnig ein auswendig gelerntes Verfahren anzuwenden.

Wenn die Schülerinnen und Schüler ein wenig Erfahrung im Umgang mit Brüchen haben, werden sie weitere Strategien zum Größenvergleich finden.

Zum Beispiel wird klar, dass $\frac{17}{18} < \frac{18}{19}$, da $\frac{1}{18} > \frac{1}{19}$ und folglich $1 - \frac{1}{18} < 1 - \frac{1}{19}$, also auch $\frac{17}{18} < \frac{18}{19}$.

Sehr gut geeignet und für die Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar sind mindestens diese drei Verfahren.

1. Man stelle die Brüche mit einem gemeinsamen Nenner dar.
In dieser Darstellung besitzt der größere Bruch den größeren Zähler.
2. Man stelle die Brüche mit dem gleichen Zähler dar.
In dieser Darstellung besitzt der größere Bruch den kleineren Nenner.
3. Man suche eine Zahl, die zwischen den beiden Brüchen liegt und vergleiche die Brüche mit dieser Zahl.

Ob man es nur mit zwei verschiedenen Darstellungen desselben Bruches zu tun hat, merkt man in jedem Fall, also unabhängig davon, nach welchem Verfahren man den Größenvergleich durchführt.

Frage 3: Wie können wir erkennen, welcher Bruch größer oder kleiner ist?

Antwort: Es gibt mehrere einfache Methoden für den Größenvergleich von Brüchen. Besonders einfach ist es, wenn beide Brüche mit gleichem Zähler oder mit gleichem Nenner dargestellt sind. Manchmal erleichtert ein Bruch, der zwischen den beiden gegebenen liegt, den Vergleich.

Nun wollen wir natürlich auch mit diesen Zahlen rechnen. Dabei ist es schön, wenn Schülerinnen und Schüler die Rechenregeln selbstständig herausfinden können.

Dieses kann sehr leicht motiviert werden, wenn man kleine Anstöße gibt. Einerseits könnte man die Schüler auffordern, im Bekannten zu suchen.

Das bedeutet, sie schreiben wieder natürliche Zahlen mit Bruchstrich, was überhaupt kein Problem ist und addieren diese dann. Sie können die Summe zweier natürlicher Zahlen seit der ersten Klasse berechnen, also können sie auch vermutete Rechenregeln für die Addition von Brüchen am Beispiel von natürlichen Zahlen überprüfen.

Man gehe zum Beispiel aus von: $2 + 3 = 5$. Nun bietet es sich an, diese Zahlen in Bruchschreibweise zu übertragen und auf diese Weise eine Rechenregel für die Addition herzuleiten.

Das kann so aussehen:

$$\begin{array}{ll} \frac{6}{3} + \frac{6}{2} = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \dots & \frac{4}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10}{2} \\ \frac{30}{15} + \frac{30}{10} = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \dots = \frac{30}{6} = \dots & \frac{10}{5} + \frac{15}{5} = \frac{25}{5} \end{array}$$

Man sollte Schülerinnen und Schüler dringend animieren, hier viele beliebige Darstellungen auszuprobieren. Es ist ja in jedem Fall klar, dass die Summe 5 ist und man hat alle Freiheit, die Zahl 5 als Bruch darzustellen.

Man sieht aber, dass im ersten Beispiel und im dritten Beispiel keine Bruchdarstellung der 5 günstig ist, um eine Regel herzuleiten. Man sieht außerdem, dass im ersten wie auch im letzten Beispiel schon die 2 und die 3 so ungünstig dargestellt sind, dass eine Regelherleitung schwierig ist. Man wird keine Regel finden, wenn man die beiden Summanden, also hier 2 und 3 mit verschiedenen Nennern darstellt. Man wird aber auch in diesen Fällen auf sehr einprägsame Weise sofort sehen, dass die sehr weit verbreitete Fehlvorstellung von einer getrennten Addition der Zähler und der Nenner auf keinen Fall zu einer Regel für die Addition führen kann, denn dann würde man im ersten Fall die Summe $\frac{12}{5}$ und im dritten Fall $\frac{60}{25}$ erhalten. Natürlich erkennt man auch bei

Darstellung mit gleichen Nennern, dass diese Strategie scheitert. So würde man im zweiten Fall die Summe $\frac{10}{4}$ und im vierten Fall $\frac{25}{10}$ erhalten.

Wenn Schülerinnen und Schüler aber erst einmal beide Summanden mit dem gleichen Nenner darstellen, dann werden sie auch eine Regel für die Addition finden. Man suche einfach die Darstellung der Summe mit dem gleichen

Nenner und schon kann man die Regel ablesen. Diese Regel ist natürlich nichts anderes als das Distributivgesetz, an das man erinnern möge, wenn es den Schülerinnen und Schülern tatsächlich nicht gelingen sollte, hier selbstständig eine Regel herzuleiten. Denn dieses bietet eine gute Hilfestellung.

Man erinnere nur an oben beschriebenes Bonbon-Problem. Es sollten 28 Bonbons an 4 Personen verteilt werden. Jede Person bekommt also 7 Bonbons. Um im Bereich der natürlichen Zahlen zu bleiben, wähle man sich eine weitere Anzahl, die ohne Rest durch 4 geteilt werden kann, zum Beispiel 12. Wenn nun weitere 12 Bonbons an diese 4 Personen verteilt werden sollen, dann sind es insgesamt 40 Bonbons, die jede Person bekommt. Das wird jeder verstehen und übertragen können zu:

$$\frac{28}{4} + \frac{12}{4} = \frac{40}{4}, \text{ Kontrolle im Bekannten: } 7 + 3 = 10.$$

Für die nichtnatürlichen Brüche kann per Permanenzprinzip übertragen werden. Dieses ist auch sofort nachvollziehbar. Wenn man nämlich zunächst 30 Bonbons hat, die an 4 Personen aufgeteilt werden sollen und es kommen 6 Bonbons dazu, die an diese 4 Personen aufgeteilt werden sollen, dann ist doch klar, dass die 4 Personen insgesamt $30 + 6$, also 36 Bonbons unter sich aufteilen. Also ergibt sich $\frac{30}{4} + \frac{6}{4} = \frac{36}{4}$.

Das Distributivgesetz für die Division wird den Schülerinnen und Schülern in folgender Schreibweise besser erkennbar: $30 : 4 + 6 : 4 = (30 + 6) : 4$, nur wurde es natürlich auf diese Weise in der Grundschule noch nicht angewendet, da der Ausdruck $30 : 4$ noch gar nicht verstanden werden konnte. Das Ziel ist an dieser Stelle folgende Einsicht:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}_0 \quad \forall c \in \mathbb{N} : \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Wie ist aber zu verfahren, wenn die Brüche nicht mit demselben Nenner dargestellt sind? Wir haben schon auf der Suche nach einer Regel an den

Beispielen $\frac{6}{3} + \frac{6}{2} = \frac{5}{1}$ und $\frac{30}{15} + \frac{30}{10} = \frac{30}{6}$ gesehen, dass es schwierig ist, mithilfe einer ungeschickten Darstellung eine Regel zu finden.

Naheliegender ist jedenfalls nach dem, was schon herausgefunden wurde, die zu addierenden Brüche mit demselben Nenner darzustellen, denn in dem Fall ist doch schon bekannt, wie man weiter verfahren kann.

Man sieht also zuerst, wie man verfahren kann, wenn die Brüche mit dem gleichen Nenner dargestellt sind. Hieraus entwickelt man das Verfahren für den Fall, dass die Brüche mit ungleichen Nennern dargestellt sind. Das Verfahren besteht einfach darin, dass man dafür sorgt, dass sie mit dem gleichen Nenner dargestellt werden. Dies ist schon lange kein Problem mehr, denn das Kürzen und Erweitern ist schon bekannt.

Um also die Summe $\frac{10}{3} + \frac{15}{4}$ vereinfacht darzustellen, stelle man zuerst beide Brüche mit einem gemeinsamen Nenner dar und gehe dann nach dem dafür hergeleiteten Verfahren vor.

$$\frac{10}{3} + \frac{15}{4} = \frac{10 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 15}{3 \cdot 4} = \frac{10 \cdot 4 + 3 \cdot 15}{3 \cdot 4}$$

Jedes gemeinsame Vielfache der Nenner ist ein geeigneter gemeinsamer Nenner. Schlecht ist, wenn Schulbücher, Lehrerinnen oder Lehrer darauf bestehen, das kgV der Nenner als gemeinsamen Nenner zu wählen, da die Rechnung auch mit jedem beliebigen anderen gemeinsamen Nenner richtig durchgeführt werden kann. Eine geschickte Wahl eines gemeinsamen Nenners kann Rechenfehler vermeiden helfen. Aber auch diese Tatsache können die Schülerinnen und Schüler leicht selbst herausfinden.

Wir gelangen zu der Rechenregel für die Addition:

$$\forall a, c \in \mathbb{N}_0 \quad \forall b, d \in \mathbb{N} : \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{bd}.$$

Es lohnt sich an dieser Stelle nicht, ausführlich auf die Subtraktion einzugehen.

Es reicht der Hinweis, dass sie völlig analog eingeführt werden kann.

Wir können nun eine weitere Frage aus obigem Fragenkatalog positiv beantworten:

Frage 4: Wie können wir Brüche addieren beziehungsweise subtrahieren?

Antwort: Ausgehend von natürlichen Zahlen in Bruchdarstellung finden wir heraus, dass es günstig ist, die Brüche mit dem gleichen Nenner darzustellen und gelangen zu der Regel:

$$\forall a, c \in \mathbb{N}_0 \quad \forall b, d \in \mathbb{N} : \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{bd}$$

Die Regel für die Subtraktion lässt völlig analog formulieren.

Bei der Herleitung der Multiplikationsregel kann wieder ein Blick auf die natürlichen Zahlen nützlich sein. Man weiß dann wieder, was „herauskommen soll“ und kann fehlerhafte Vorstellungen schnell entdecken.

Die Schülerinnen und Schüler können sich selbst einfache Beispiele wählen, zum Beispiel $2 \cdot 2 = 4$ und in Bruchschreibweise übertragen:

$$2 \cdot 2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{2} = \frac{6}{3} \cdot \frac{6}{3} = \dots, \text{ aber auch } 2 \cdot 2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{10}{5} = \frac{18}{9} \cdot \frac{8}{4} = \dots$$

Es wird nicht viel Zeit vergehen, bis man die Regel findet:

$$\forall a, c \in \mathbb{N}_0 \quad \forall b, d \in \mathbb{N} : \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Auch für die Division lässt sich eine Regel aus dem Bekannten abholen.

Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, ist klar, dass eine Regel für die Division folgendermaßen aussieht:

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \quad \forall c, b, d \in \mathbb{N} : \frac{a \cdot c}{b \cdot d} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Es ist nicht realistisch zu erwarten, dass diese Regel von den Schülerinnen und Schülern sofort selbst gefunden wird. Auch mag es auf den ersten Blick befremdlich wirken, dass hier sowohl der Zähler als auch der Nenner des Dividenden mit zusammengesetzten Zahlen dargestellt sind, sodass es hier gut passt. Denn natürlich ist zu einem gegebenen Divisor in der Darstellung $\frac{c}{d}$ nicht immer ein Dividend gegeben, dessen Zähler mit einem Vielfachen von c und dessen Nenner mit einem Vielfachen von d dargestellt ist.

Aber gerade das ist doch so besonders schön, dass wir alles so herrichten können, wie es besonders gut passt.

Die Schülerinnen und Schüler sollten sich wieder im Bereich der natürlichen Zahlen geeignete eigene Beispiele suchen, weil sie bei denen das „Ergebnis“ schon kennen, zum Beispiel $18 : 6 = 3$, und dieses in Bruchschreibweise übertragen.

Hier sollte wieder mit vielen Darstellungen gearbeitet werden, zum Beispiel:

$$\frac{18}{1} : \frac{6}{1} = \frac{3}{1}, \quad \frac{36}{2} : \frac{6}{1} = \frac{6}{2}, \quad \frac{36}{2} : \frac{12}{2} = \frac{3}{1}, \quad \frac{54}{9} : \frac{6}{3} = \frac{9}{3}, \text{ etc.}$$

Zuerst mag noch unklar sein, wie die Regel aussieht, aber unabhängig davon, mit welchem Zähler und Nenner die Schülerinnen und Schüler die Brüche darstellen, wissen sie wieder, was „herauskommt“. Wie schnell sie die Regel finden, hängt nur davon ab, wie geschickt sie Dividend und Divisor darstellen.

Eine Stärke des Konzeptes liegt wieder darin, dass sie selbst Vermutungen überprüfen können. Durchschnittlich leistungsstarke Schülerinnen und Schüler werden nicht sehr lange brauchen, um zur Vermutung zu gelangen, dass man, wenn es möglich ist, die Zähler und die Nenner getrennt voneinander dividieren kann.

Also zum Beispiel: $\frac{54}{9} : \frac{6}{3} = \frac{54 : 6}{9 : 3} = \frac{9}{3}.$

Wenn also der Dividend schon im Zähler und im Nenner mit einem Vielfachen des Zählers, beziehungsweise Nenners des Divisors dargestellt ist, dann ist die Regel sofort klar.

Aber was machen wir, wenn es nicht so ist?

Dann richten wir es wieder so her, wie wir es haben wollen. Der Dividend wird so erweitert, dass die gewünschte Voraussetzung vorhanden ist.

Am Beispiel wird es sofort klar:

Wie lässt sich $\frac{3}{5} : \frac{4}{7}$ vereinfachen?

Es ist problemlos, wenn der Dividend im Zähler mit einem Vielfachen von 4 dargestellt ist und im Nenner mit einem Vielfachen von 7. Und genau dies lässt sich leicht erreichen, indem man die Darstellung des Dividenten $\frac{3}{5}$ nacheinander mit 7 und 4 erweitert, denn dann stehen im Zähler und im Nenner Produkte, die in jedem Fall durch 7 und durch 4 teilbar sind.

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 4} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4 : 4}{5 \cdot 7 \cdot 4 : 7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4}.$$

Insbesondere, wenn nicht jeder Zwischenschritt sofort „ausgerechnet“ wird, sondern Produkte und Quotienten stehen gelassen werden, kann man schnell etwas erkennen und gelangt auf diese Weise zu der folgenden Divisionsregel:

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \quad \forall c, b, d \in \mathbb{N} : \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Es fällt nun nicht nur auf, dass das Dividieren erleichtert wird, indem man den Dividenten so darstellt, dass sein Zähler und sein Nenner jeweils ein Vielfaches des Zählers, beziehungsweise des Nenners aus der Darstellung des Divisors ist und dass wir diesen Zustand auf sehr einfache Weise erreichen können, indem wir die Darstellung des Dividenten mit dem Produkt aus Zähler und Nenner des Divisors erweitern. Es fällt außerdem auf, dass der Quotient das Produkt aus

Dividend und Kehrrbruch des Divisors ist. Der Begriff Kehrrbruch eines Bruches sollte an dieser Stelle eingeführt werden für den multiplikativ inversen Bruch eines Bruches.

Somit lässt sich ebenfalls eine positive Antwort finden auf

Frage 5: Wie können wir Brüche multiplizieren beziehungsweise dividieren?

Antwort: Das Produkt zweier Brüche erhalten wir, indem wir ihre Zähler und Nenner getrennt voneinander multiplizieren:

$$\forall a, c \in \mathbb{N}_0 \quad \forall b, d \in \mathbb{N} : \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Wenn wir einen Bruch durch einen zweiten dividieren, dann erhalten wir das Produkt aus dem ersten Bruch und dem Kehrrbruch des zweiten Bruches:

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \quad \forall c, b, d \in \mathbb{N} : \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Nun ist natürlich klar, dass wir statt natürlicher Zahlen im Zähler und im Nenner auch Brüche schreiben dürfen, denn wir wissen, dass der Quotient zweier Brüche wieder ein Bruch ist, wobei selbstverständlich im Nenner keine 0 stehen darf.

Also ist $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{\overset{(\frac{3}{5})}{5}}{\underset{(\frac{4}{7})}{4}}$. Da jeder Bruchstrich als „geteilt durch“ gelesen werden

kann, muss aus dem Ausdruck eine Hierarchie der Bruchstriche ersichtlich sein. Diese geht im Allgemeinen aus Klammern oder der Länge der Bruchstriche hervor.

Nun ist es noch wichtig zu untersuchen, welche Rechenregeln in der Menge der Brüche gelten und eine Antwort auf die Frage zu finden, was wir durch diese Zahlbereichserweiterung gewonnen und verloren haben.

Frage 6: Welche Regeln gelten in der Menge der Brüche?

Antwort: Es gelten folgende Regeln:

- Die Kommutativgesetze bezüglich der Addition und der Multiplikation gelten weiterhin.
- Die Assoziativgesetze bezüglich der Addition und der Multiplikation gelten weiterhin.
- Die Distributivgesetze gelten weiter.
(Die Nachweise hierfür sowie für die Assoziativgesetze und Kommutativgesetze sind sehr einfach und lassen sich auf deren Gültigkeit im Bereich der natürlichen Zahlen zurückführen.)
- Die Trichotomie gilt weiterhin.
- 0 ist neutrales Element bezüglich der Addition.
- 1 ist neutrales Element bezüglich der Multiplikation.
- Die Menge B ist bezüglich der Addition, der Multiplikation und der Division abgeschlossen.
- Jeder Bruch $\neq 0$ besitzt ein multiplikatives Inverses.
- Wir können nun uneingeschränkt dividieren.

Jede Gleichung der Form $a \cdot x = b$ mit $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$ besitzt nun die eindeutige Lösung $x = \frac{b}{a}$.

Wir haben außerdem einige Eigenschaften gewonnen, die in der Menge aller Brüche gelten und andere Eigenschaften verloren, die in der Teilmenge der natürlichen Zahlen gelten, aber nicht auf die Menge aller Brüche übertragbar sind :

- Im Bereich der natürlichen Zahlen hatte jede Zahl einen Nachfolger und jede Zahl > 1 einen Vorgänger. Kein Bruch hat einen Vorgänger oder

einen Nachfolger. Die Zahlen sind nicht wie Perlen auf einer Schnur aneinandergereiht, sondern zwischen je zwei Zahlen liegen unendlich viele weitere, während zwischen zwei natürlichen nur endlich viele weitere natürliche Zahlen liegen.

- Der kardinale Aspekt einer Zahl geht verloren. Man kann im Bereich der Brüche also nicht zählen. Bisher war eine Zahl auch immer eine Antwort auf die Frage „wie viele?“. Man konnte mit den natürlichen Zahlen zählen. Im Bereich der Brüche kann der kardinale Aspekt nur hergestellt werden, wenn man gegebene Brüche mit dem gleichen Nenner darstellt.

Wenn man zum Beispiel $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ als 1 Fünftel + 3 Fünftel betrachtet, dann

kann man die 1 und die 3 zusammenzählen, so wie man es auch bei 1 Apfel + 3 Äpfel machen kann.

Der kardinale Aspekt ist also genauso wie die Praktikabilität von der Darstellung abhängig. 1 Fünftel + 6 Zehntel lassen sich ohne vorherige Veränderung der Darstellung nicht zu einem vereinfachten Ausdruck zusammenfassen.

Es dürfen weiterhin nur die natürlichen Zahlen auch als Anzahl interpretiert werden.

- Es gibt keinen kleinsten positiven Bruch. Während in der Menge der natürlichen Zahlen jede nicht leere beschränkte Teilmenge ein Minimum und ein Maximum in $\mathbb{N}$ besitzt, trifft dies in der Menge der Brüche nicht mehr zu. Sie muss nicht einmal ein Infimum oder Supremum in $\mathbf{B}$ besitzen, zum Beispiel hat die Menge $M := \{x \in \mathbf{B} \mid x^2 < 2\}$ kein Supremum in $\mathbf{B}$, während natürlich die Menge $M' := \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 2\}$ ein Maximum in $\mathbb{N}$ besitzt und die Menge $M'' := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ mit $\sqrt{2}$ ein Supremum in $\mathbb{R}$, der später einzuführenden Menge der reellen Zahlen, besitzt.

- In der Grundschulmathematik bedeutete eine Multiplikation, außer mit 0 oder 1, immer eine Vergrößerung. Von dieser Vorstellung müssen wir

uns verabschieden. Es kann sein, dass das Produkt zweier Faktoren kleiner ist als jeder der beiden Faktoren. Man wähle beide Faktoren positiv aber kleiner als 1. Es kann auch sein, dass das Produkt zweier Faktoren zwischen diesen beiden Faktoren liegt. Man wähle dazu einen Faktor positiv aber kleiner als 1 und den anderen größer als 1. Weiterhin kann ein Produkt natürlich auch größer als beide oder gleich einem der beiden Faktoren sein.

- In der Grundschulmathematik bedeutete eine Division, außer durch 1, immer eine Verkleinerung. Auch von dieser Vorstellung müssen wir uns verabschieden. Es kann sein, dass ein Quotient zweier Zahlen größer ist als Dividend und Divisor. Man wähle den Divisor so, dass er positiv aber kleiner als 1 und sein Quadrat kleiner als der Dividend ist. Weiterhin kann ein Quotient natürlich auch kleiner als Dividend und Divisor oder gleich Dividend oder Divisor sein oder zwischen Dividend und Divisor liegen.
- Jeder Bruch kann auch als ein Verhältnis interpretiert werden. Der Bruch $\frac{a}{b}$ kann als das Verhältnis $a : b$ interpretiert werden. Allerdings darf daraus nicht der Umkehrschluss abgeleitet werden, jedes Verhältnis ließe sich als Quotient zweier natürlicher Zahlen darstellen, da es natürlich auch irrationale Verhältnisse wie zum Beispiel den Goldenen Schnitt gibt oder, für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 6 leichter nachvollziehbar, das Verhältnis der Diagonalenlänge eines Quadrats zu seiner Seitenlänge.

Noch einmal: Die Tatsache, dass jeder Bruch sich auf unendlich viele Weisen darstellen lässt, ist nicht neu! Er sollte deswegen auch nicht als eine neue Eigenschaft der Brüche herausgestellt werden.

Wenn man sich mit Texten zur Didaktik der Bruchrechnung beschäftigt, dann findet man auch Auflistungen zahlreicher typischer Fehler und etablierter Fehlvorstellungen, die ich hier zunächst nennen möchte. Anschließend werde ich darauf eingehen, wie diese vermieden werden können.

Padberg und Wartha haben viele Fehlerstrategien beschrieben. Es ist davon auszugehen, dass die Häufigkeit, mit der sich jeder dieser Fehlerstrategien bedient wird, nicht völlig unabhängig von dem Unterricht ist, der erteilt wurde. So stellen beispielsweise Herden und Pallack bei Fehlerstrategien zur Multiplikation erhebliche Abweichungen von Padberg fest.¹²⁹ Hier werden nun nicht erneut alle Fehlerstrategien aufgeführt, die schon bei den eben genannten beschrieben wurden. Ich beschränke mich auf die Probleme und Fehlvorstellungen, die besonders häufig bei der Bruchrechnung auftreten:

1. Zahlen in Bruchdarstellung werden, anders als in Kommadarstellung, kaum mit normalen Zahlvorstellungen verbunden.

Wenn $\frac{a}{b}$ mit $a : b$ identifiziert wird, dann erscheint es als eine

„unausgerechnete Divisionsaufgabe“.

In Kommadarstellung werden sie viel eher als „Zahlen“ akzeptiert.

2. Die Schülerinnen und Schüler sehen ständig zwei oder mehr natürliche Zahlen, die miteinander verknüpft sind. Dadurch wird ihnen viel Übersicht abverlangt.

3. Falsche Addition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

4. Falsche Multiplikation: $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

5. Falsche Darstellung der natürlichen Zahlen: $n = \frac{n}{n}$

6. Falscher Größenvergleich: zum Beispiel: $\frac{17}{92} > \frac{1}{2}$, mit der Begründung, dass $17 > 1$ und $92 > 2$ ist.

7. Operieren mit falschen Grundvorstellungen bei Sachaufgaben

¹²⁹ Herden/ Pallack in: Journal für Mathematik – Didaktik (Heft 3/ 4, 2000: 269)

8. Einbettungsfehler

Zu 1.: Der Irrglaube $a : b$ sei etwas anderes als eine Zahl, wird durch den in der Grundschule antrainierten Ausrechnenwahn gefördert. Dieses Thema wurde bereits ausführlich in 3.2 abgehandelt. Es ist dringend vor dem Bruchrechnenunterricht für das schon besprochene Zahlverständnis zu sorgen. Wenn zwei Zahlen miteinander verknüpft werden, erhält man wieder eine Zahl. Für die Summe und das Produkt zweier Zahlen ist dieses sowieso klar. Für die Differenz und den Quotienten zweier Zahlen galt bisher die Einschränkung, dass der Minuend nicht kleiner als der Subtrahend sein durfte und dass der Dividend ein Vielfaches des Divisors sein musste. Unter diesen Voraussetzungen konnten zwei miteinander verknüpfte Zahlen stets wieder als Zahlen verstanden werden.

Wenn es nicht gelingt, für gegebene natürliche Zahlen stets auch solche Ausdrücke wie $a + b$, $a \cdot b$, $a - b$ für $a \geq b$ und $a : b$ für $b \mid a$ als Zahlen anzusehen, dann ist auch $\frac{a}{b}$ nicht als Zahl anzusehen, denn es bedeutet ja das gleiche wie $a : b$.

Wenn also $a : b$ nur dann als Zahl angesehen wird, wenn der Quotient „ausgerechnet“ wurde, was noch $b \mid a$ erfordert, dann kann $\frac{a}{b}$ nicht als Zahl angesehen werden, wenn a kein Vielfaches von b ist.

Aber genau das ist das ist das Grundanliegen der Zahlbereichserweiterung, dass solche Quotienten als Zahlen angesehen werden sollen.

Zu 2.: Dieses Problem ist insofern neu, da die meisten Brüche, wenn man von der Kommadarstellung absieht, sich am einfachsten als Quotienten zweier natürlicher Zahlen darstellen lassen. Wenn im Vorfeld ausführlich geübt wird, kompliziertere Terme zusammenzufassen, in denen mehr als zwei natürliche Zahlen auf irgendeine Weise miteinander verknüpft sind, dann sollte die Bruchschreibweise den Schülerinnen und Schülern eine

Erleichterung sein, denn der Ausdruck $\frac{12}{4} + \frac{18}{3}$ ist doch viel übersichtlicher als $12 : 4 + 18 : 3$, bei dem man sich zunächst einmal Übersicht über die Priorität der Verknüpfungen verschaffen muss. Dennoch darf der Umgang mit dieser Darstellung keinesfalls unterschätzt werden und muss eingeübt werden.

Zu 3., 4., 5.: Das Problem der falschen Addition $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ entsteht, wenn die Verknüpfungsweise der Multiplikation auf die Addition übertragen wird.

Schülerinnen und Schüler, die auf diese Weise addieren, haben nicht verstanden, wie man Brüche addiert, sondern addieren auf naive Weise beziehungsweise scheiterten beim Versuch, sich an eine Regel zu erinnern. Diese falsche Addition hat möglicherweise ihre Grundlage in der Einführung der Bruchrechnung im Konkreten. Sie wird zumindest durch die in 7. 3 geschilderte Anschauung unterstützt. Wenn man einen Schwerpunkt der Arbeit darauf richtet, dass Regeln im Bekannten abgeholt werden und im Permanenzprinzip fortgesetzt werden, wenn man also die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt, das Additionsverfahren im Bereich der natürlichen Zahlen abzuholen, sollten sie in der Lage sein, obige falsche Addition als solche zu erkennen.

Im Übrigen ist ja auch von anderen Termen, in denen Zahlen mit zwei verschiedenen Rechenzeichen verknüpft sind, bekannt, dass nicht immer beliebig umsortiert werden darf.

So ist doch zum Beispiel auch $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \neq (3 + 2) \cdot (4 + 3)$, wovon sich jede Schülerin oder Schüler leicht überzeugen kann. Ein Bewusstsein dafür, dass ein Zusammenfassen nicht immer auf einfachste Weise möglich ist, wenn sowohl Punkt- als auch Strichrechnung vorkommt, kann ebenfalls in der Grundschule vorbereitet werden.

Es ist nicht davon auszugehen, dass Schülerinnen und Schüler, die auf der formalen Ebene die Bruchrechnung beginnen, in all diesen Punkten fehlerlos rechnen. So kann auch ihnen der Fehler der

komponentenweisen Addition unterlaufen. Aber es ist erstens leicht zu zeigen, dass es sich um eine fehlerhafte Strategie handeln muss. Man lasse sie dann nur mal auf diese Weise einfache, leicht überzeugende Beispiele wie $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ „ausrechnen“ und schon sollten sie deutliche Widersprüche zu dieser Fehlerstrategie erkennen. Zweitens wird das Distributivgesetz hier stärker in den Vordergrund gestellt als bei den anderen Konzepten.

Dasselbe gilt für das falsche Multiplikationsverfahren in $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$ mit dem Unterschied, dass das Additionsverfahren hier auf die Multiplikation übertragen wurde.

In 5. wird auf falsche Weise eine natürliche Zahl in Bruchschreibweise dargestellt. Wer den Bruchstrich als andere Schreibweise für „geteilt durch“ kennengelernt hat, sollte sofort erkennen, dass $n = \frac{n}{n}$ im Allgemeinen nicht gilt.

Zu 6.: Eine Fehlvorstellung nach $\frac{17}{92} > \frac{1}{2}$ kann ebenfalls nicht entstehen, wenn ein Grundverständnis über die Bruchschreibweise vorhanden ist. Schon oben habe ich darauf hingewiesen, dass im analogen Fall bei der Subtraktion ebenfalls nicht geschlossen werden kann, dass zum Beispiel $132 - 109 > 25 - 1$, denn es kommt nicht auf die Größe der Minuenden oder der Subtrahenden an, sondern auf die Größe der Differenz. Das ist Schülerinnen und Schülern schon lange vor Einführung der Bruchrechnung vermittelbar.

Zu 7.: Dieses Problem ist nicht spezifisch für die Bruchrechnung. Das Operieren mit falschen Grundvorstellungen kann immer ein grundlegender Fehler beim Lösen von Sachaufgaben sein. Auf das Problem der Mathematisierung von Sachproblemen bin ich oben schon eingegangen. Aber der folgende Fall, über den Wartha¹³⁰ berichtet, ist besonders erschreckend. Er berichtet in seinem Artikel ohne exakte

¹³⁰ Wartha in mathematik lehren (142, 2007)

Beschreibung der Vorgehensweise über eine Untersuchung, die im Rahmen der DFG-geförderten Längsschnittstudie PALMA (Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik) durchgeführt wurde. Es geht zwar aus dem Bericht nicht hervor, ob es sich um dieselben Schülerinnen und Schüler bei zwei Befragungen im Abstand von zwei Jahren handelt oder ob es verschiedene Gruppen waren.

Das Ergebnis ist dennoch interessant.

Er berichtet von einer Aufgabe, die in zwei leicht unterschiedlichen Formulierungen gestellt worden sei.

Formulierung A: „Herr Brinkmeier hat bei einer Fernsehlotterie gewonnen. Er möchte den sechsten Teil seines Gewinnes einem Kinderheim spenden. Sein Gewinn beträgt 2400 €. Wie viel Geld spendet er? Schreibe auf, wie du gerechnet hast.“

So habe man diese Aufgabe in Klassenstufe 5 gestellt und sie sei von 75,7% der Kinder gelöst worden. (Gym: 88,6%, RS: 81,1%, HS: 59,4%)

Am Ende der Klassenstufe 7 hätten die Kinder Formulierung B bekommen, die sich nur an einer Stelle von Formulierung A unterscheide. Statt „den sechsten Teil“ stehe dort nun „ein Sechstel“. Das erschreckende Ergebnis sei, dass nun nur noch 58,6% der Schülerinnen und Schüler die Aufgabe richtig gelöst hätten. (Gym: 76,1%, RS: 53,3%, HS: 44,6%)

Eine Auswertung der Fehlerursachen für Klassenstufe 7 ergab, dass es sich bei 22% der falschen Lösungen um Rechen- oder Flüchtigkeitsfehler bei sonst richtiger Strategie gehandelt habe. Hierbei seien Unsicherheiten beim technischen Ausführen der richtig gewählten Rechenoperationen die Ursache gewesen. Bei 23% seien Ausweichstrategien über die Prozentrechnung die Fehlerursache gewesen und bei 35% seien falsche Rechenoperationen gewählt worden. (27% Division, 8% Subtraktion).

Die Wahl von Ausweichstrategien diene den Schülerinnen und Schülern als Strategie, Brüche zu vermeiden. Warum die Subtraktion oder die Division als Rechenart gewählt wurden, wird in dem Artikel nicht begründet. Es wird vermutet, dass die Schülerinnen und Schüler eine Verkleinerung der Ausgangsgröße anstrebten.

Dieses Beispiel zeigt in erschreckender Weise, dass zwei Jahre Mathematikunterricht die zwischen den fast identischen Aufgaben A und B liegen, nicht etwa zur verbesserten Problemlösungskompetenz beigetragen haben, sondern diese sogar verschlechtert haben.

Diese Verschlechterung der Problemlösekompetenz nach Jahren des Unterrichts, der doch eigentlich zu einem besseren Verständnis führen sollte, erinnert an einen Aphorismus von Lec: „Ich hätte viele Dinge begriffen, hätte man sie mir nicht erklärt“¹³¹.

Aber ist es wirklich so, dass die Schülerinnen und Schüler durch den Bruchrechnenunterricht etwas verlernt haben, was sie vorher konnten?

Auszuschließen ist es nicht, dass der Unterricht selbst erst diese Fehlvorstellungen erzeugt. Wir haben schon gesehen, dass er meist überladen ist von Vokabeln, die weniger Ordnung stiften als falsche Vorstellungen erzeugen und dass oftmals ein Vorgehen nach unsinnigen Rezepten gemäß dem Prinzip „vormachen – nachmachen“ verlangt wird, was ebenfalls nicht geeignet ist, Klarheit in die Köpfe der Jugendlichen zu bringen.

Zu 8.: Die Aufgaben, Ausdrücke zu vereinfachen, in denen natürliche Zahlen, die nicht in Bruchschreibweise dargestellt sind und mit anderen Brüchen verknüpft sind, bereiten Schülerinnen und Schülern oft große Schwierigkeiten, zum Beispiel:

$$2 + \frac{3}{5} \qquad 3 - \frac{2}{7} \qquad \frac{3}{4} \cdot 6 \qquad 10 \cdot \frac{2}{5}$$

was sicherlich Erstaunen hervorruft. Winter erklärt dazu in einer Fehleranalyse, die Blockierung der Schülerinnen und Schüler und einer Großzahl Erwachsener komme offenbar dadurch zustande, dass sie in ihrer Regelverhaftung, die ja auch von ihnen gefordert werde, ins Stolpern geraten. In der ersten Aufgabe verlangte die Additionsregel als erstes „gleichnamig machen“, es sei aber doch nur ein Nenner vorhanden. Selbst wenn man Schülerinnen und Schüler wiederholt und

¹³¹ Lec, S. J.: Sämtliche unfrierte Gedanken, München, Wien: Hanser Verlag, 1996, S. 99

eindringlich darüber informiere, dass ganze Zahlen als spezielle Bruchzahlen anzusehen seien und man also 2 als $\frac{2}{1}$ oder $\frac{10}{5}$ usw. schreiben könne und hier auch solle, so müsse dieses zeichenorientierte Wissen keineswegs verinnerlicht worden sein. Es hänge in der dünnen Luft des Regelhafte, des Syntaktischen, und es werde weitere Fehler dieses Typs nicht ausschließen.¹³²

Weiter stellt Winter fest, dass die Schülerinnen und Schüler durch die jahrelange Ersterfahrung mit der Arithmetik der natürlichen Zahlen so geprägt sein, dass der Anfang „2 +“ signalisiere, dass von der 2 aus irgendwie weiter gezählt werden müsse. „Prägungen (besonders die eher unbewussten) sind, wie auch die Verhaltensbiologie lehrt, zählebig und modifikationsresistent. Insbesondere in Stresssituationen drängen sie sich - unter Umständen wider besseres Wissen - vor: Rückgang zu Gewohnheiten, die jahrelang erfolgreich waren.“

Es ist klar, dass die Einbettung der natürlichen Zahlen im pragmatischen Konzept unproblematisch ist, da von den natürlichen Zahlen ausgegangen wird und alle Rechenregeln im Bereich der natürlichen Zahlen abgeholt werden. Die natürlichen Zahlen tragen hier auch nicht die böse klingende Bezeichnung „Scheinbrüche“, sondern sie sind sogar ganz besonders gerne gesehene Vertreter der Brüche, weil man an ihnen so vieles besichtigen kann.

Die Schülerinnen und Schüler sollen darüber hinaus ständig im Kopf haben, dass der Bruchstrich nichts anderes bedeutet als „geteilt durch“. Es ist gerade bei Einführung der Brüche darauf zu achten, dass sie dieses verinnerlichen und sofort in der Lage sind, zu jeder natürlichen Zahl viele verschiedene Bruchdarstellungen anzugeben.

Da die natürlichen Zahlen im pragmatischen Konzept eine viel größere Rolle spielen, darf man davon ausgehen, dass ihre Behandlung weniger problematisch ist als bei Winter beschrieben.

Selbstverständlich werden durch ein neues Konzept nicht sämtliche Fehler dieser Art verschwinden. Aber häufig entstehen diese Fehler erst

¹³² Winter in: mathematik lehren (123, 2004)

deswegen, weil Schülerinnen und Schüler nicht verstanden haben, wie mit Brüchen gerechnet wird, und sich dann fehlerhaft an Verknüpfungsmuster erinnern oder auch schnell und oberflächlich eigene Strategien entwerfen. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn stumpfsinnig Regeln gelernt wurden.

Das pragmatische Konzept bietet nicht nur die Gelegenheit, die Bruchrechenregeln zu verstehen, sondern es liefert durch den Ansatz, die Rechenregeln im Bekannten abzuholen, eine gute Möglichkeit, Vergessenes zurückzuholen und Ansätze kritisch zu hinterfragen.

7.5 Konkretisierung

Nach einer Einführung der Brüche im Formalen muss natürlich eine Konkretisierung erfolgen, denn die Schülerinnen und Schüler sollen in die Lage versetzt werden, mit Brüchen in Sachzusammenhängen zu arbeiten. Sie sollen wissen, was unter dem Bruchteil einer Größe zu verstehen ist und sie sollen auch mit Brüchen als Maßzahlen von Größen arbeiten können. Sie sollen Zahlen miteinander ins Verhältnis setzen können und mit diesen Quotienten umgehen können. All dieses wird nach einer formalen Einführung nur schwierig ohne Übung allein von den Schülerinnen und Schüler einer 6. Klasse zu bewältigen sein. Schließlich haben sie zum ersten Mal ein Konzept im Formalen kennengelernt und so kann man nicht von ihnen erwarten, dass sie selbst in der Lage sind, in Sachzusammenhängen mit konkretisierten Brüchen zu arbeiten, wenn dieses nicht intensiv mit ihnen geübt wurde.

Die Konkretisierung sollte sich nicht darauf beschränken, für das, was zuvor formal erarbeitet wurde, konkrete Beispiele zu liefern, sondern im Vordergrund stehen soll die Befähigung der Schülerinnen und Schüler, in konkreten Sachzusammenhängen auf die formal erworbenen Fähigkeiten zurückzugreifen, um dort Problemlösungen zu finden, die anschließend wieder auf die Sachsituation übertragen werden. Dazu muss natürlich erst einmal ein Verständnis für die Brüche im Konkreten geschaffen werden. Zwar kann man sich darauf verlassen, dass alles, was im Formalen für die Brüche erarbeitet wurde, auch im Konkreten Gültigkeit besitzt. Aber hier ist eine andere

Kompetenz gefordert als das rein formale Rechnen mit Brüchen. Denn es geht nun darum, die Schülerinnen und Schüler zum Lösen von Problemen zu befähigen, die sich im Konkreten stellen. Darüber hinaus sind Konkretisierungen und Veranschaulichungen besonders wichtig für das Verständnis und die Verinnerlichung des Gelernten. Denn frei nach Kant gilt: „Begriffe ohne Anschauung sind leer“¹³³ und so ist auch der Bruchzahlbegriff ohne Konkretisierung leer. Unsere Brüche sind zunächst nur formale Gebilde. Erst durch Anschauung werden sie gegenständlich und begreifbar.

Man muss den Zeitpunkt für diese spätere Konkretisierung sorgfältig wählen. Die Tatsache, dass bei der Behandlung des Themas Größen in Klassenstufe 5 auch solche Größen behandelt wurden, die Brüche in Kommadarstellung als Maßzahlen besitzen, mag einerseits dafür sprechen, vor der Konkretisierung die Kommadarstellung ausführlich zu behandeln. Aber eine ausführliche Behandlung der Kommadarstellung würde andererseits die Konkretisierung stark verzögern. Bei einer Einführung der Brüche im Formalen, die mehrere Wochen in Anspruch nimmt und den Schülerinnen und Schülern viel Anstrengung und Konzentration abverlangt, ist es normal, dass ständig der Wunsch nach einer Konkretisierung vorhanden ist. Diesem Wunsch sollte meines Erachtens schon vor der ausführlichen Behandlung der Kommadarstellung nachgegangen werden.

Es ist klar, dass die Konkretisierung hier keiner sehr ausführlichen Darstellung bedarf, da alle bisherigen Konzepte im Konkreten beginnen und daher ausreichend Material vorhanden ist.

Als ein Leitfaden für die Konkretisierung kann der obige Fragenkatalog herangezogen werden, denn auch im Konkreten soll jede dieser Fragen beantwortet werden können.

Aus alltäglichen Zusammenhängen haben die Schülerinnen und Schüler bereits teils klare, teils aber auch diffuse Vorstellungen von konkreten Brüchen. So

haben sie eine Vorstellung davon, was unter $\frac{1}{2}$ l oder $\frac{3}{4}$ h zu verstehen ist. Aus dem Erdkundeunterricht ist ihnen der Maßstab bekannt. Wenn eine Karte ein

¹³³ Kant, I.: Kritik der reinen Vernunft, Transzendente Elementarlehre, 2. Teil, I. Von der Logik überhaupt. Originalzitat: „Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind.“

Gebiet im Maßstab 1 : 10000 zeigt, dann bedeutet das, dass jede Streckenlänge in der Karte in $\frac{1}{10000}$ ihrer originalen Größe dargestellt ist. Da den Schülerinnen und Schülern Brüche noch nicht bekannt sind, wird ihnen das so erklärt, dass jede Länge durch 10000 geteilt wurde, beziehungsweise dass jede Strecke in der Wirklichkeit 10000 Mal so lang ist. Weit darüber hinaus werden die Kenntnisse über konkrete Brüche bei den meisten Schülerinnen und Schülern jedoch noch nicht reichen. Es muss also zuerst einmal geklärt werden, wie ein Bruch in einem konkreten Zusammenhang zu verstehen ist.

1. Was ist ein Bruch?

Es ist klar, dass man dazu Bruchteile von Größen oder den operativen Aspekt der Brüche betrachten kann. Dass die Trennung zwischen einem Zugang mit Größen und einem mit Operatoren wie im oben dargestellten gemischten Konzept oft unscharf ist, muss hierbei nicht mehr störend sein, da es nun nicht mehr um eine Einführung der Brüche geht.

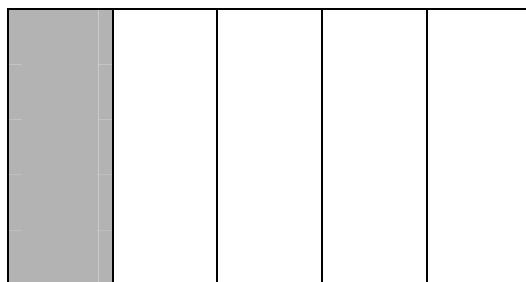
Es gibt hier zwei Aspekte zu bearbeiten. Einerseits sollen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, zu verstehen, was mit einem Bruchteil einer Größe gemeint ist. Andererseits sollen sie auch die Fähigkeit erlangen, Anteile von Größen mit Hilfe von Brüchen zu beschreiben.

Eine Konkretisierung kann mit einer Visualisierung beginnen. Dabei kann man sich geeigneter Größen bedienen und Bruchteile von ihnen sichtbar machen. So kann man sehr gut Bruchteile von Streckenlängen veranschaulichen. Ohne in methodische Überlegungen abschweifen zu wollen, sei darauf hingewiesen, dass in diesem Zusammenhang Streifen mit äquidistanten Parallelen, die auf Folien oder transparentes Papier kopiert werden, gut geeignet sind.

Die Fähigkeit zur Konstruktion beliebiger Bruchteile von Streckenlängen sollte genutzt werden, um Brüche auf dem Zahlenstrahl zu markieren und auch dort zu zeigen, dass man zwischen zwei Brüchen immer einen weiteren findet und somit sogar unendlich viele weitere und dass die Brüche nicht mehr wie die

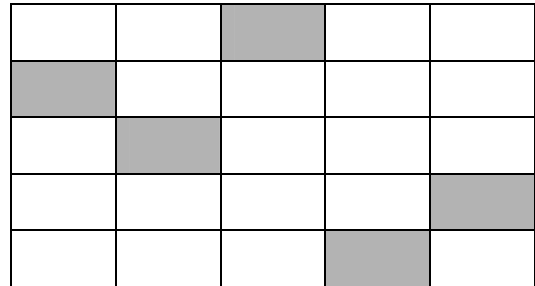
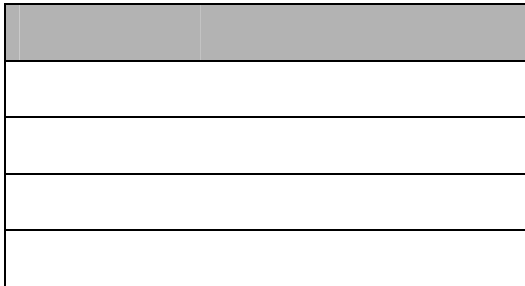
natürlichen Zahlen so wie Perlen auf einer Kette angeordnet sind. Es gibt hier keinen Vorgänger oder Nachfolger einer Zahl. Für viele Schülerinnen und Schüler ist in Grundschulzeiten die Fragestellung nach einer größten Zahl interessant. Sie lernen, dass es keine größte natürliche Zahl gibt, weil „man ja immer noch 1 mehr nehmen kann“, das heißt, die Tatsache, dass jede natürliche Zahl einen Nachfolger besitzt, schließt die Existenz einer größten natürlichen Zahl aus. Zwar gibt es mit der Null eine kleinste natürliche Zahl, aber jede andere natürliche Zahl besitzt einen Vorgänger. Auch wenn schon geklärt wurde, dass zwischen zwei Brüchen immer noch unendlich viele weitere Brüche liegen, ist es für viele Schülerinnen und Schüler eine spannende Frage, ob es eine kleinste positive Zahl gibt. In der Menge der natürlichen Zahlen war diese Frage leicht zu bejahen, weil man sie vorzeigen konnte. Hier ist Möglichkeit zur Diskussion gegeben. Sie läuft auf eine Argumentation hinaus, die sich in einem Bereich des Zahlenstrahls „nahe der Null“ abspielt, in der man eine kleinste positive Zahl finden müsste, wenn es sie denn gäbe. Wie klein man sie auch annehmen mag, man erkennt bei Verfeinerung der Einteilung des Zahlenstrahls, dass es natürlich immer noch eine Zahl gibt, die zwischen der Null und dieser Zahl liegt, die man als die kleinste positive angenommen hat und man ist auch immer in der Lage, solch eine Zahl anzugeben, beziehungsweise auf dem Zahlenstrahl zu konstruieren.

Wenn man nun in der Lage ist, beliebige Bruchteile von Streckenlängen zu konstruieren, dann kann man auch beliebige Bruchteile von Rechteckflächen konstruieren. In der Praxis wird man aber auch dazu übergehen, sich die Arbeit durch die geschickte Wahl von Seitenlängen zu erleichtern, die sich gut wie gewünscht teilen lassen.



Dieses Rechteck ist in 5 gleich große Teile unterteilt. Die grau gefärbte Teilfläche veranschaulicht also $\frac{1}{5}$ des Rechteckflächeninhalts.

Eine Teilung hätte auch auf viele andere Weisen anders erfolgen können, zum Beispiel:

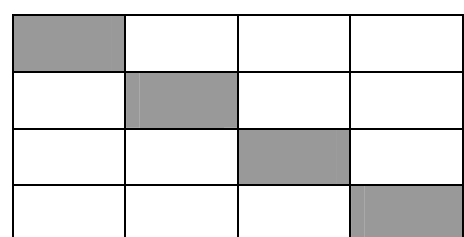
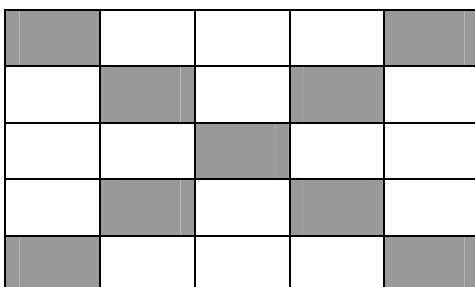


Die Streckenlänge und der Rechteckflächeninhalt haben hier eine besondere Bedeutung, weil sie auch später nützlich sind, wenn das Rechnen mit Brüchen konkretisiert wird.

Kreisflächen sind da weniger gut geeignet, denn, während sich an Streckenlängen und Rechteckflächen alle beliebigen Brüche darstellen lassen, so kann an einer Kreisfläche schon $\frac{1}{7}$ nicht mühelos gezeichnet werden.

Außerdem sind Kreismodelle für die Konkretisierung des Rechnens nicht gut brauchbar. Dennoch wird man nicht vollständig darauf verzichten, Bruchteile von Kreisen zu markieren, insbesondere wenn diese Bruchteile sich mit dem Nenner 360 darstellen lassen. Denn Schülerinnen und Schüler sollen auch lernen Bruchteile im Kreisdiagramm darzustellen.

Figuren, in denen Symmetrien erkennbar sind oder die mehrere Wege zulassen, sind dabei besonders reizvoll, wie zum Beispiel:



Im rechten Bild könnte man wie im linken die Anzahl n der kleinen Teilrechtecke bestimmen und anschließend die Anzahl z der grau gefärbten abzählen. Durch

$\frac{z}{n}$ wird dann der Anteil des grau markierten Teils am ganzen Rechteck

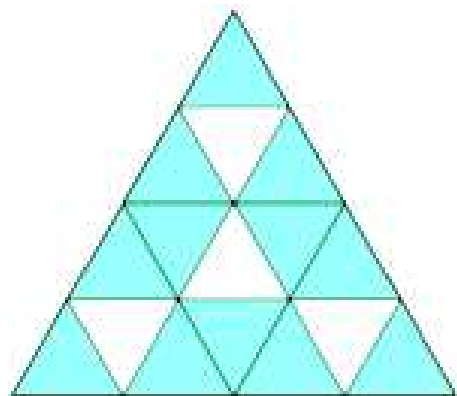
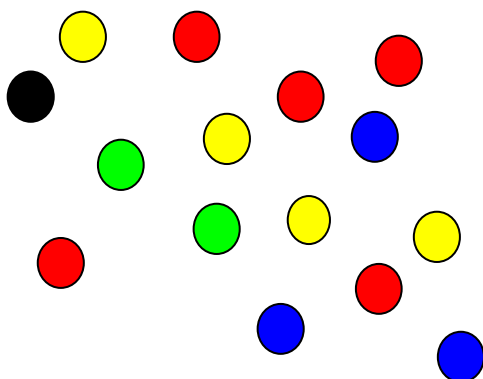
beschrieben also $\frac{9}{25}$ beziehungsweise $\frac{4}{16}$. Beim rechten Bild kann man auch

so argumentieren, dass in jeder Zeile ein Viertel der Kästchen markiert ist, beziehungsweise in jeder Spalte und das deswegen die grau markierte Fläche $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche ausmacht. Aus dem Formalen ist natürlich schon bekannt,

dass $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ ist.

Ähnliche Übungen können auch am Geobrett durchgeführt werden. Dabei wird ein Gummiband über ein Nagelbrett gespannt, der einen Bruchteil einer gegebenen Fläche umfasst. Dieser ist zu bestimmen.

Im linken der folgenden Bilder ist der Bruchteil zu bestimmen, den die Kreise einer bestimmten Farbe an der Gesamtheit der Kreise einnehmen. Im rechten Bild ist der Anteil der grau gefärbten Fläche an der gesamten Dreiecksfläche gesucht.



Es gibt viele weitere Möglichkeiten, den Schülerinnen und Schülern eine Konkretisierung der Brüche zu ermöglichen. Man kann Bruchteile von Volumina einer Flüssigkeit in verschiedene Messzylinder abfüllen oder Bruchteile eines

Gewichtes wiegen oder fühlen lassen. Dass nicht jeder Ansatz die gleiche Wirkung haben kann, ist klar. So hat zwar ein Zitronensaft-Wasser-Gemisch, das zu einem Drittel Zitronensaft enthält, einen anderen Geschmack als ein solches Gemisch, das zu einem Zehntel Zitronensaft enthält. Dennoch ist das Schmecken von Brüchen eine völlig ungeeignete Spielerei und keine geeignete Konkretisierung, die zum Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen beiträgt.

Auch mit anderen Größen sollte gearbeitet werden, so sollte beispielsweise geklärt werden, was unter $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{3}$ m, $\frac{1}{4}$ m etc. zu verstehen ist. Eine Masse von $\frac{1}{2}$ kg, beziehungsweise $\frac{1}{3}$ kg oder $\frac{1}{4}$ kg erhält man, indem man eine Masse von 1 kg in 2, beziehungsweise 3 oder 4 gleich große Portionen teilt. Dass es in der Praxis technische Probleme bei der Durchführung einer exakten Teilung ebenso wie bei der exakten Messung einer Größe geben kann, entspricht den Erfahrungen, die schon in Klassenstufe 5 bei der Behandlung des Themas Größen gesammelt wurden.

In den bisherigen Beispielen kamen nur Stammbrüche als Maßzahlen vor. Es ist aber nicht schwierig, eine Erweiterung auf alle Brüche vorzunehmen.

Betrachtet man zum Beispiel $\frac{3}{5}$ m, so ergeben sich sofort zwei Zugänge zum Verständnis. Einerseits kann man sich mit der gleichen Überlegung wie bei den Stammbrüchen klar machen, dass $\frac{3}{5}$ die Zahl ist, die mit 5 multipliziert 3 ergibt, dass also 5 Strecken der Länge $\frac{3}{5}$ m aneinandergereiht so lang sind wie eine Strecke der Länge 3 m. Daraus ergibt sich, dass ein Stück der Länge $\frac{3}{5}$ m so lang ist wie eine Strecke, die man erhält, wenn man eine Strecke der Länge 3 m in 5 gleich große Abschnitte unterteilt. Man kann also die Größe immer mit in den Zähler einer Bruchdarstellung übernehmen. Ein zweiter Zugang nutzt das im Formalen erworbene Wissen aus, dass $\frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{1}{5}$ ist und führt zu der Einsicht, dass $\frac{3}{5}$ m also 3 mal so lang sind wie $\frac{1}{5}$ m.

Es zeigt sich deutlich, dass ein Bruchteil von $\frac{z}{n}$ einer Größe immer auf zwei

Weisen interpretiert werden kann:

1. Zerteile die Größe in n gleich große Teile. Dann sind z von diesen n Teilen zusammen genommen genau $\frac{z}{n}$ der gegebenen Größe.
2. Nimm das z -fache dieser Größe und zerteile diese in n Teile. Dann ist jeder dieser Teile genau $\frac{z}{n}$ der gegebenen Größe.

Diese Vorgehensweisen sind nicht wesentlich verschieden. Sie haben eine Vervielfachung und eine Teilung gemeinsam, unterscheiden sich dabei nur in der Reihenfolge. In der Sprache des Operatorkonzepts wendet man einen Multiplikationsoperator $\xrightarrow{\cdot z}$ und einen Divisionsoperator $\xrightarrow{:n}$ in verschiedenen Reihenfolgen auf eine gegebene Größe an. In dieser Darstellung nennt die Zahl n , in wie viele Teile die Größe zerteilt werden soll und die Zahl z zählt, wie viele dieser Teile genommen werden sollen. Die Hintereinanderausführung dieser beiden Operatoren wirkt genau so wie der Bruchoperator $\xrightarrow{\frac{z}{n}}$.

Bisher wurden nur Größen angesprochen, die aus einer Einheit und einem Bruch als Maßzahl zusammengesetzt sind. Oft kommt es in Sachzusammenhängen aber vor, dass von einem Bruchteil einer Größe die Rede ist, die selbst schon aus einer Maßzahl und einer Einheit zusammengesetzt ist. Dabei ist besonders darauf zu achten, wie das Wort „von“ interpretiert wird.

Diese Interpretation ist vielen Schülerinnen und Schülern nicht immer von vornherein klar und daher muss daran gearbeitet werden, dass unterschieden wird, ob im multiplikativen Sinne ein Bruchteil von einer Größe bezeichnet wird oder ob nur ein ausgewählter Teil einer gegebenen Größe bezeichnet wird. Diese multiplikative Interpretation des Wortes „von“ liegt in dem ersten Fall

nahe, so wie im zweiten Fall die Bruchstrich-Interpretation nahe liegt, da hier das „von“ so wie der Bruchstrich den Zähler vom Nenner trennt.

Die multiplikative Interpretation ist von den natürlichen Zahlen bekannt. Wenn eine Kiste Mineralwasser 12 Flaschen enthält und wir 4 von diesen Kisten kaufen, dann haben wir $4 \cdot 12$ Flaschen. Wenn Eier in Sechserpacks verkauft werden und man 3 von diesen Sechserpacks kauft, dann hat man $3 \cdot 6$ Eier gekauft. In diesen Fällen beschreibt das Wort „von“ immer, wie viel Mal eine Größe vorhanden ist.

Wenn aber beispielsweise ein Schüler 4 € von 12 € ausgegeben hat, dann beschreibt der Bruch $\frac{4}{12}$ den Bruchteil der 12 €, die er ausgegeben hat. In diesem Fall ist die Bruch-Interpretation nötig.

Allgemein lässt sich sagen, dass das Wort „von“ in der Struktur Anzahl – von – Größe immer multiplikativ zu interpretieren ist, während es im Schema Größe – von – Größe immer den Bruchteil $\frac{\text{erstgenannte Größe}}{\text{zweitgenannte Größe}}$ bezeichnet. Leider ist

dies nicht immer leicht erkennbar, da in der Umgangssprache oft die erste Größe nicht als solche erkennbar ist, denn oft wird die Einheit weggelassen. Im obigen Beispiel wird also gesagt, der Schüler habe 4 von 12 € ausgegeben, obwohl 4 € von seinen 12 € gemeint sind.

Betrachtet man also Bruchteile von Größen, insbesondere von Größen, deren Maßzahl selbst gebrochen ist, dann führt dies schon zur Frage 5, nämlich dazu, wie Brüche miteinander multipliziert werden können. Dieses fällt aber nicht so auf, wenn man sich zunächst auf Bruchteile von Einheiten beschränkt. Bei der Konkretisierung sollte auch auf die im Alltag häufig vorkommenden Bezeichnungen wie „jeder Dritte“ oder „zwei von fünf“ eingegangen werden und geklärt werden, dass diese nicht wörtlich zu nehmen sind.

Zu einer Konkretisierung gehört auch die Fähigkeit, Anteile einer Gesamtheit mit einem Bruch zu bezeichnen, wie es oben schon für Bruchteile von Streckenlängen und Rechteckflächen beschrieben wurde. Dies erweist sich als einfach. Bei Strecken, Rechteckflächen oder auch anderen Flächen, die in gleich große Teile zerlegt sind, zähle man die insgesamt markierten Teile, ihre

Anzahl sei n . Wenn es dann z markierte Teile gibt, dann ist der Bruchteil der markierten Fläche $\frac{z}{n}$.

Um bei einer beliebigen Größe anzugeben, welcher Bruch einen gegebenen Teil bezeichnet, kann man genau so verfahren.

Zum Beispiel erhält jemand 235 € von 940 € eines Lotteriegewinns. Will man nun den Bruchteil am Gesamtgewinn bestimmen, kann man so vorgehen, dass man den Gesamtgewinn in 940 gleich große Teile teilt, von denen dann jeder aus 1 € besteht. Dann enthält der Teilgewinn genau 235 dieser 940 Teile, also hat die Person $\frac{235}{940}$ des Gesamtgewinns erhalten.

Natürlich kann man den Gewinn auch in 5 €-Scheinen auszahlen. Dann ist klar, dass der Gewinn 188 Scheine beschert und der Teilgewinn von 235 € mit 47 solchen Scheinen ausgezahlt wird. Auf diesen Teilgewinn entfallen also $\frac{47}{188}$ aller gewonnenen 5 €-Scheine.

Aus der Behandlung der Brüche im Formalen wissen wir, dass hier wir nicht in Abhängigkeit von der Wahl der Zerlegung verschiedene Anteile bestimmt haben, sondern dass wir nur verschiedene Darstellungen derselben Zahl gefunden haben.

Dieses führt aber unmittelbar zu der zweiten Frage.

2. Wie kann man Brüche darstellen?

An Rechteckflächen und an Strecken kann man sehr gut besichtigen, dass ein Kürzen oder Erweitern einer Bruchdarstellung nur ein Vergrößern oder Verfeinern bewirkt. Dieses lässt sich sehr gut zeichnerisch aber auch an DIN A 4-Blättern visualisieren, auf denen ein bestimmter Anteil markiert ist. Man kann durch mehrfaches Falten des Papiers die Einteilung verfeinern und auf diese Weise den gleichen Bruchteil erweitert darstellen. Am Zahlenstrahl findet für eine Zahl bei immer weiterer Verfeinerung der Unterteilung immer mehr Namen.

Aber auch das eben genannte Beispiel zeigt dieses. Die Einheit wurde von 1 € auf 5 € vergrößert. Dabei wurde die Bruchdarstellung von $\frac{235}{940}$ auf $\frac{47}{188}$ gekürzt.

Wenn es um Alltagssituationen geht, dann werden oft bestimmte Darstellungen wie die vollständig gekürzte oder die mit dem Nenner 100 bevorzugt benutzt. Umgekehrt kann man auch einen Bruchoperator in mehreren verschiedenen Darstellungen auf eine Größe wirken lassen um festzustellen, dass jede Darstellung dasselbe bewirkt.

Der Einwand ist richtig, dass es in der Praxis nicht das Gleiche ist, ob man einen Teil von zweien bekommt oder 500 von 1000, weil eine Teilung in 1000 Teile mit einem viel größeren Aufwand verbunden ist, vielleicht weniger genau durchgeführt werden kann und letztlich auch andere Teile liefert. Andererseits galt dieses Argument auch schon für die natürlichen Zahlen, denn auch dort ist es ein Unterschied, ob man 100 000 Münzen zu 1 Cent hat oder zehn 100 € - Scheine, auch wenn beides gleich viel wert ist.

Es kann auch ein Zusammenhang zum Thema Größen in dem Sinne hergestellt werden, dass auf die Bedeutung der Silben „dezi“, „centi“ und „milli“ als Zehntel, Hundertstel und Tausendstel hingewiesen wird. Dann ist klar, dass man bei den

Umformungen $6\text{ m} = \frac{60}{10}\text{ m} = 60 \cdot \frac{1}{10}\text{ m} = 60\text{ dm}$ und

$6\text{ m} = \frac{600}{100}\text{ m} = 600 \cdot \frac{1}{100}\text{ m} = 600\text{ cm}$ sowie

$6\text{ m} = \frac{6000}{1000}\text{ m} = 6000 \cdot \frac{1}{1000}\text{ m} = 6000\text{ mm}$ nichts weiter macht, als die Einheit um

eine Zehnerpotenz zu verkleinern und die Maßzahl gleichzeitig um die gleiche Zehnerpotenz zu vergrößern. Das Verkleinern der Einheit ist ein Verfeinern, also ein Erweitern der Darstellung. Dieses kann gut an dieser Stelle thematisiert und bei der Behandlung der Kommadarstellung wieder aufgegriffen werden.

3. Wie können wir erkennen, welcher Bruch größer oder kleiner ist?

Wir haben gesehen, dass es schon im Formalen mehrere Möglichkeiten für einen Größenvergleich gibt. Im Konkreten kann man nun davon profitieren, dass alles, was im Formalen gilt, auch in jeder Konkretisierung gilt. Weil es in jeder Konkretisierung gilt, reicht die Besichtigung in einem konkreten Fall. Wenn

man zum Beispiel schon weiß, dass $\frac{a}{b}$ von 300 € mehr ist als $\frac{c}{d}$ von 300 €,

dann ist für jede beliebige Größe g auch $\frac{a}{b} g > \frac{c}{d} g$. Man kann also, wenn man einen Größenvergleich zweier Brüche vornehmen will, eine beliebige Größe wählen und auf diese die Bruchoperatoren mit den gegebenen Brüchen wirken lassen. Der Operator, der das größere Bild liefert, gehört zum größeren Bruch. Oft ist das aber gar nicht auf Anhieb zu erkennen.

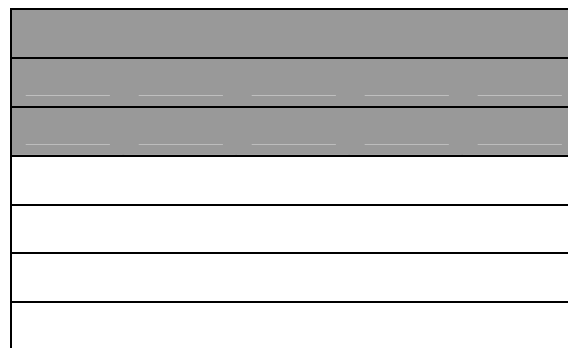
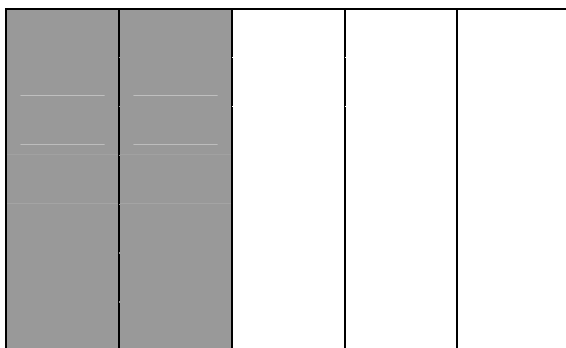
Soll beispielsweise festgestellt werden, ob $\frac{2}{5}$ oder $\frac{3}{7}$ von einer beliebigen Größe größer ist, so kann man das Problem im Formalen klären, aber man kann auch die gegebene Größe durch eine beliebige andere ersetzen und an dieser den Größenvergleich durchführen. In diesem Beispiel bietet es sich an, eine Maßzahl zu wählen, die sowohl durch 5 als auch durch 7 teilbar ist. Infrage dafür kommt also jedes Vielfache von 35. Der Größenvergleich kann also an der Größe der Bruchteile $\frac{2}{5}$ von 35 € oder $\frac{3}{7}$ von 35 € vorgenommen werden.

Ebenso ist es möglich $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{7}$ von einer Streckenlänge zu konstruieren.

Dementsprechend kann auch am Zahlenstrahl verglichen werden. Der weiter rechts liegende Bruch ist der größere.

Sehr gut ist auch immer ein Vergleich an einer Rechteckfläche möglich.

In diesem Beispiel zerlege man ein beliebiges Rechteck in 5 gleich große Teile und markiere 2 von diesen. In die andere Richtung zerlege man es in 7 gleich große Rechtecke und markiere 3 von ihnen.



Führt man nun beide Zerlegungen innerhalb eines Rechtecks durch, so wird es leicht, den Größenvergleich durchzuführen:

Denn nun sehen wir eine Unterteilung in 35 gleich große Teile und sehen $\frac{2}{5}$ als

$\frac{14}{35}$ sowie $\frac{3}{7}$ als $\frac{15}{35}$.

In vielen Sachzusammenhängen werden Zahlen miteinander ins Verhältnis gesetzt und auf diese Weise Quotienten hergestellt. Die auf diese Weise konkretisierten Brüche sind dabei zunächst gar nicht zu sehen, sondern sie werden bei Bildung des Quotienten sichtbar. Wenn zum Beispiel eine Fußballmannschaft in 8 Spielen 12 Punkte erzielt und eine andere in 9 Spielen 13 Punkte, dann lässt sich natürlich nicht argumentieren, die zweite Mannschaft sei erfolgreicher, da sie 13 statt 12 Punkte erzielt hat. Denn es muss ja die Tatsache berücksichtigt werden, dass die zweite Mannschaft auch ein Spiel mehr gemacht hat. Um die erfolgreichere Mannschaft zu ermitteln, müssen die Brüche $\frac{\text{Anzahl der erzielten Punkte}}{\text{Anzahl der absolvierten Spiele}}$ oder deren Kehrbüche miteinander verglichen werden.

In den meisten Sachsituationen besteht das Problem nun vorwiegend in der Mathematisierung und nicht im Größenvergleich. Dies kann einfach sein, wie im folgenden Beispiel¹³⁴:

„Uwe und Jörn laufen um die Wette. Wer ist Sieger?

Gemessene Zeiten: Uwe $\frac{11}{12}$ min, Jörn $\frac{29}{30}$ min“

¹³⁴ Mathematik heute 6 (1978: 88)

Es bieten sich hier sehr viele Lösungswege. Neben einem Vergleich der Maßzahlen ist natürlich auch eine Angabe in Sekunden geeignet.

4. Wie können wir Brüche addieren beziehungsweise subtrahieren?

Eine Addition beziehungsweise Subtraktion von Brüchen ist leicht zu konkretisieren. Im Folgenden wird nur die Addition beschrieben, weil die Subtraktion als ihre Umkehrung sich daraus ergibt. Die Konkretisierung kann an Streckenlängen und noch besser an Rechteckflächen vorgenommen werden. Die Addition zweier Bruchteile einer Streckenlänge kann konkretisiert werden, indem man zunächst beide Bruchteile konstruiert, anschließend beide Strecken aneinanderhängt. Der Bruchteil, den die Summe ausmacht, ist aber nicht immer gut sichtbar, weil nicht immer sofort eine geeignete Verfeinerung der

Längeneinteilung zu sehen ist. Um $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ einer Streckenlänge zu

veranschaulichen, konstruiere man also zunächst $\frac{2}{5}$ dieser Länge,

anschließend $\frac{3}{7}$ der Länge, hänge nun Strecken dieser Längen aneinander und

bestimme den Bruchteil, den diese zusammengesetzte Streckenlänge an der

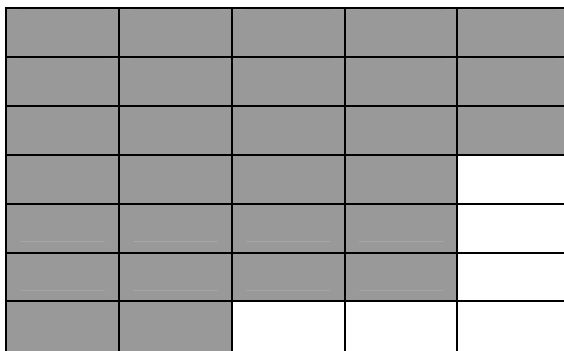
Gesamtstreckenlänge hat. Der Anteil ist $\frac{29}{35}$ und man wird ihn in der Praxis nur

nach einer Verfeinerung der Unterteilung in Fünfunddreißigstel bestimmen können.

Viel besser geeignet zur Visualisierung sind Rechteckflächen, denn hier ergibt sich die Verfeinerung von selbst, wenn man folgendermaßen vorgeht.

Die Abbildung zeigt die Addition $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$. Dazu wurde das Rechteck, wie schon oben für den Größenvergleich, entlang einer Richtung in 5 gleich große Teile zerteilt, von denen 2 grau markiert wurden. Entlang der anderen Richtung wurde es in 7 gleich große Rechtecke zerteilt, von denen 3 grau markiert wurden. Man sieht nun einen Bereich, der doppelt markiert wurde. Insgesamt sieht man 35 kleine Rechtecke, von denen 17 einfach grau und 6 doppelt, beziehungsweise hier dunkelgrau markiert wurden. Letztere müssen natürlich doppelt gezählt werden.

Daher kann auch folgende zusätzliche Darstellung für die Zählung nützlich sein.

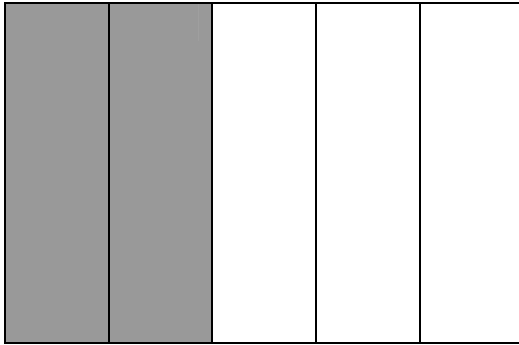


Beide Darstellungen führen zu $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{29}{35}$.

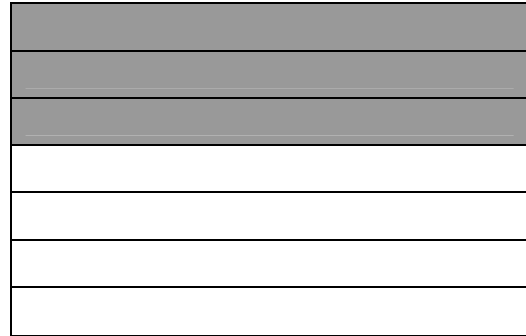
5. Wie können wir Brüche multiplizieren beziehungsweise dividieren?

Für eine Konkretisierung der Multiplikation ist zu bedenken, dass man Größen nicht miteinander multiplizieren kann. Auch eine Interpretation eines Produktes als verkürzte Schreibweise für eine mehrmalige Addition scheidet dann aus, wenn nicht mindestens einer der beiden Faktoren eine natürliche Zahl ist. Sehr wohl aber kann man einen Bruch mit einer Größe multiplizieren. Bei einem solchen Produkt ist der erste Faktor als Bruchteil zu verstehen, der zweite ist eine Größe, deren Maßzahl ein Bruch ist. Das Produkt ist dann ein Bruchteil von dieser Größe. Diese multiplikative Interpretation des Wortes „von“ wurde bereits hinreichend im Zusammenhang mit Bruchteilen von beliebigen Größen besprochen. Hier ist aber noch anzufügen, dass Rechteckflächen wieder

besonders gut für eine Visualisierung geeignet sind, weil man sich ja die Seitenlängen in jedem Fall so wählen kann, dass die Zerlegung besonders einfach durchgeführt werden kann.

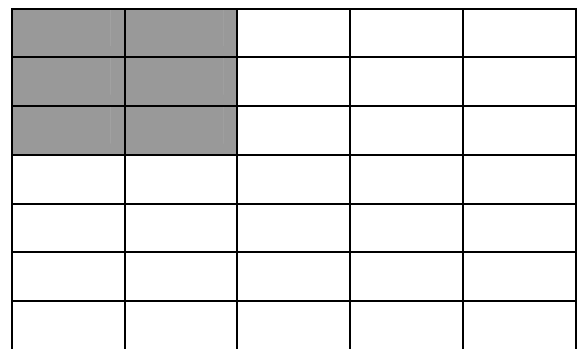
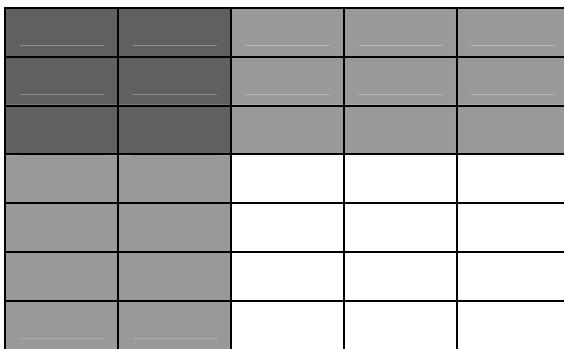


$\frac{2}{5}$ der Rechteckfläche



$\frac{3}{7}$ der Rechteckfläche

Man erhält folgende Bilder:



Der dunkle Teil im linken Rechteck, beziehungsweise der grau gefärbte Teil im rechten Rechteck ist $\frac{2}{5}$ von $\frac{3}{7}$ der Rechteckfläche oder $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$ der Rechteckfläche. Es ist leicht zu sehen, dass das Produkt $\frac{6}{35}$ ist.

Natürlich kann dieses auch wieder mit einem DIN A4 – Blatt oder einem anderen Blatt Papier geschehen. Faltet man es entlang einer Mittellinie und drittelt es anschließend entlang der anderen Richtung, wie in der oberen Zeile der folgenden Abbildung dargestellt, markiert dann die äußere Fläche, dann ist

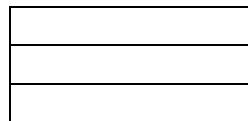
nach dem Auseinanderfalten genau $\frac{1}{3}$ von der Hälfte der Rechteckfläche

markiert und das ist eben genau $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ der Rechteckfläche.

Man nehme ein Blatt Papier und falte es entlang der innen markierten Linie.



Nun sieht man die Hälfte des Blattes. Dieses wird nun entlang der innen markierten Linien gefaltet.



Nun sieht man nur noch ein Drittel von der Hälfte des Blattes.



Den nun sichtbaren Teil markiere man deutlich.



Nun falte man es wieder auseinander und erkenne, dass zunächst ein Drittel der Hälfte erkennbar wird.



Schließlich falte man weiter auseinander, bis das ursprüngliche Blatt wieder hergestellt ist, und erkenne, dass man auf diese Weise ein Sechstel des Blattes markiert hat.



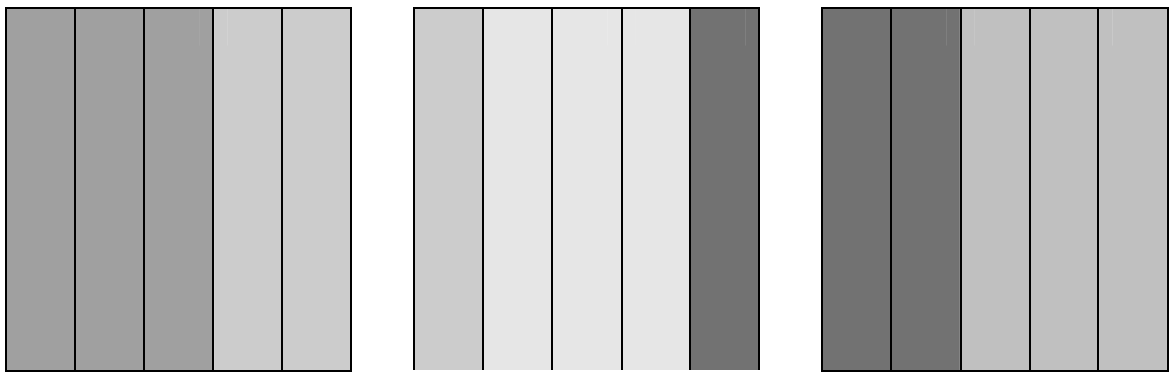
Eine Division $a : b$ kann im Bereich der natürlichen Zahlen, wenn a Vielfaches von b ist, als eine Kurzschreibweise für die wiederholte Subtraktion eines immer gleichen Subtrahenden gesehen werden. In Schülersprache schaut man, wie oft der Divisor in den Dividenden passt. Nach unserer Zahlbereichserweiterung

ist es aber nicht mehr erforderlich, dass bei einer Division $a : b$ noch a ein Vielfaches von b ist, denn es ist ja gerade der Gewinn der Zahlbereichserweiterung, dass jede dieser Divisionen, außer für $b = 0$, möglich ist. Eine Konkretisierung kann wieder an Rechteckflächen erfolgen, jedoch ist sie nicht so übersichtlich wie bei den anderen Rechenarten.

$3 : \frac{3}{5}$ kann beispielsweise veranschaulicht werden, indem 3 Rechtecke in

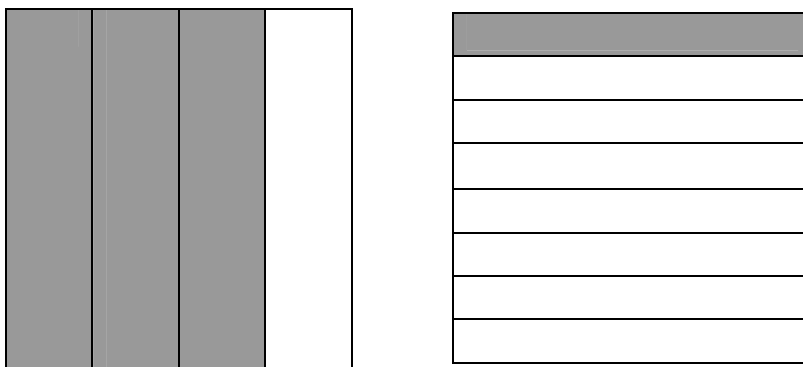
Teilflächen zerlegt werden, die jeweils $\frac{3}{5}$ einer Rechteckfläche einnehmen.

Der Quotient ist dann die Anzahl der Flächen, die man erhält.

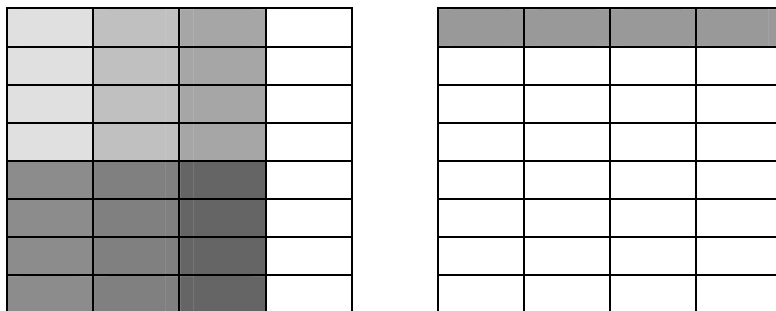


Wie man sieht, gibt es 5 solcher Teile, die hier mit verschiedenen Grautönen unterlegt sind.

$\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$ lässt sich beispielsweise wieder darstellen, indem man ein Rechteck einerseits in 4 Teile teilt, von denen man 3 markiert, und es andererseits in 8 Teile teilt, von denen man einen markiert.



Anhand dieser Rechtecke soll nun die Frage beantwortet werden, in wie viele Stücke, die $\frac{1}{8}$ der Rechteckfläche einnehmen, man das Stück zerteilen kann, das $\frac{3}{4}$ der Rechteckfläche einnimmt. Wenn man in beiden Darstellungen die gleiche Unterteilung vornimmt, dann sieht man, dass sie in jeweils 32 gleich große Rechtecke unterteilt sind, von denen links 24 markiert sind und rechts 4.



Die unterschiedlichen Grautöne im linken Bild sollen lediglich den Überblick erleichtern, dass die markierte Fläche sich in 6 Viererblöcke teilen lässt.

$$\text{Also ist } \frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{24}{32} : \frac{4}{32} = \frac{24 : 4}{32 : 32} = \frac{6}{1} = 6.$$

Auch bei vielen Sachzusammenhängen lassen sich mehrere Lösungswege finden, zum Beispiel¹³⁵:

„Die rechteckige Bodenfläche eines Schwimmbassins von 800 m² Größe soll mit $\frac{1}{16}$ m² großen Platten ausgelegt werden.

Berechne die Materialkosten, wenn eine Platte 12,50 € kostet.“

Eine im Zusammenhang mit Größen oftmals erfolgreiche Strategie ist die Verfeinerung der Einheit, die oft zur Folge hat, dass die Maßzahlen dann natürlich werden.

¹³⁵ Schnittpunkt (2004: 96)

„Der Musikunterricht dauert $\frac{3}{4} h$. Alle Schülerinnen und Schüler sollen ein Lied vortragen. Pro Person stehen $\frac{5}{2}$ min zur Verfügung. Pausen soll es nicht geben. Bestimme, wie viele Musikbeiträge es geben kann.“

Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, dass die Größen mit verschiedenen Einheiten dargestellt sind. Man kann $\frac{3}{4} h$ als $\frac{3 \cdot 60}{4}$ min schreiben oder $\frac{5}{2}$ min als $\frac{5}{2 \cdot 60} h$. Wie man es macht, ist egal, denn es ist $\frac{3}{4} : \frac{5}{2 \cdot 60} = \frac{3 \cdot 60}{4} : \frac{5}{2}$.

Hier kann schön gesehen werden, dass der Faktor 60 aus dem Nenner des Divisors in den Zähler des Dividenden übertragen werden kann, was der Erfahrung aus dem Formalen entspricht. Es kann sogar der ganze Quotient durch ein Produkt ersetzt werden, nämlich durch $\frac{3 \cdot 60 \cdot 2}{4 \cdot 5}$ und dieses erhält

man in beiden Fällen, indem man den Dividenden mit dem Kehrbuch des Divisors multipliziert. Es gibt also 18 Musikbeiträge.

Möchte man mit natürlichen Maßzahlen rechnen, dann muss man sich hier kleinere Einheiten wählen. Denn $\frac{3}{4} h = 45 \text{ min} = 2700 s$ und $\frac{5}{2} \text{ min} = 150 s$.

Natürlich ist auch $2700 : 150 = 18$.

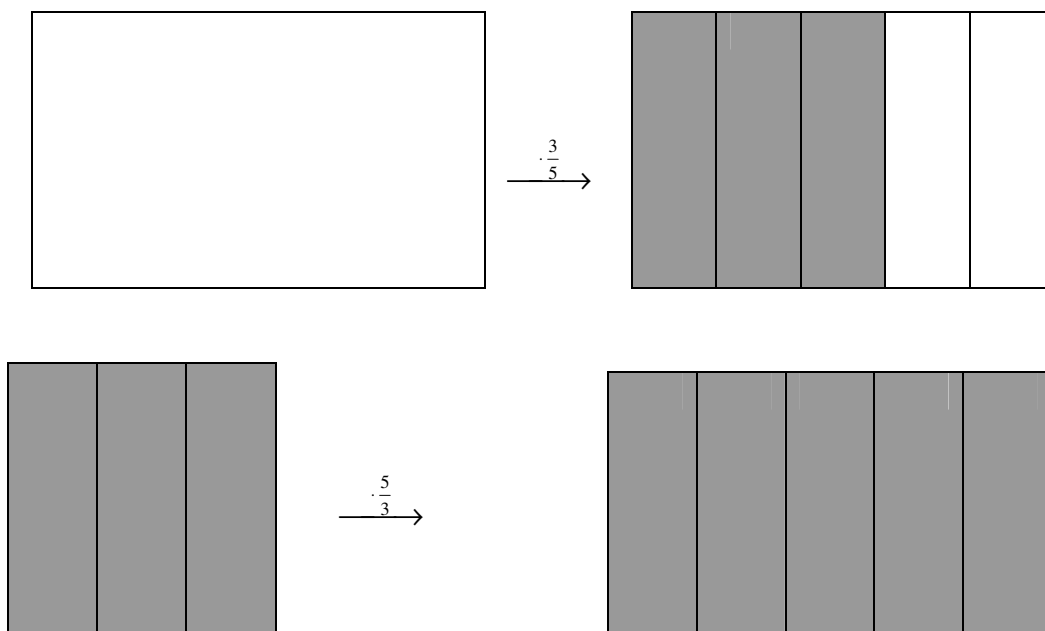
Zu klären ist noch

Frage 6: Welche Regeln gelten in der Menge der Brüche?

Von der Gültigkeit der Kommutativität und der Assoziativität bezüglich der Addition und der Multiplikation kann man sich leicht im Konkreten überzeugen. Das gleiche gilt für die Distributivgesetze. Es entspricht der Intuition der Schülerinnen und Schüler, dass diese Gesetze weiterhin gelten. Ein formaler Nachweis, der darauf hinausläuft, dass man mit der Gültigkeit dieser Gesetze im Bereich der natürlichen Zahlen argumentiert, verwirrt oft eher, wenn gar kein Klärungsbedarf bestand. Man kann sich leicht an beliebigen Beispielen davon überzeugen, dass diese Gesetze weiter gelten.

Einige Sachverhalte sind für die Schülerinnen und Schüler klar, sodass sie keiner Konkretisierung bedürfen. Dazu zählen die Trichotomie, die Existenz der 0 als neutrales Element bezüglich der Addition und der 1 als neutrales Element bezüglich der Multiplikation sowie die Abgeschlossenheit der Addition und der Multiplikation.

Die Tatsache, dass nun jede Zahl außer 0 ein multiplikatives Inverses besitzt, kann leicht konkretisiert werden. Wenn vor der Einführung der Brüche zum Beispiel Insekten in fünffacher Vergrößerung im Biologiebuch abgebildet waren, dann war klar, dass man alle Längen durch 5 dividieren musste, um das Tier in Originalgröße zu sehen. Umgekehrt galt, wenn im Atlas eine Landkarte ein Gebiet im Maßstab 1 : 100000 darstellt, dann muss jede Länge mit 100000 multipliziert werden um deren Originallänge zu erhalten. Es war also schon bekannt, dass eine Verkleinerung, die durch eine Division durch eine natürliche Zahl entstanden ist, durch eine bestimmte Multiplikation wieder aufgehoben werden kann und umgekehrt. Letzteres gilt auch in der Menge der Brüche. Multipliziert man nacheinander mit einem Bruch und seinem Kehrbuch, so erhält man wieder die Ausgangsgröße:



Eine Neuigkeit, die in der Menge der Brüche zu besichtigen ist und die den im Bereich der natürlichen Zahlen gewonnenen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler von der Multiplikation und der Division widerspricht ist die, dass

man durch Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Zahl eine Verkleinerung und durch Division eine Vergrößerung bewirkt.

Hier kann gut mit Streckenlängen gearbeitet werden. Beispielsweise könnte die Aufgabe lauten, eine Strecke der Länge 4 cm zu zeichnen und anschließend Strecken nebeneinander zu zeichnen, die 4, 3, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ Mal so lang sind.

Eine Multiplikation bewirkt, im Bereich der positiven Zahlen, eine Vergrößerung, wenn mit einem Faktor multipliziert wird, der größer als 1 ist. Schon wenn der Faktor 1 ist, wird das Produkt nicht mehr größer als der andere Faktor. Und wenn mit über die 1 hinaus immer kleiner werdenden Faktoren multipliziert wird, dann wird das Produkt auch immer kleiner. So wird nach dem Permanenzprinzip die alte Vorstellung korrigiert.

Ebenso kann es für die Division geschehen:

Zeichne untereinander 7 Strecken der Länge 16 cm.

Unterteile sie in Teilstrecken der Länge 8 cm, beziehungsweise 4 cm,

2 cm, 1 cm, $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{1}{5}$ cm und $\frac{1}{10}$ cm. Bestimme, wie viele Teilstrecken

man jeweils erhält.

Auch hier wird nach dem Permanenzprinzip die Division eines Dividenden durch über die 1 hinaus immer kleiner werdende Divisoren konkretisiert. Man erhält die Quotienten 2, 4, 8, 16, 32, 80, 160, die also immer größer werden, sogar größer als der Dividend, wenn der Divisor kleiner als 1 ist.

Falls nötig lassen sich viele weitere geeignete Beispiele mit Größen finden, zum Beispiel die Aufteilung einer Flüssigkeitsvolumens in Gefäße, die nur Bruchteile eines Liters fassen. Je kleiner der Bruchteil, desto mehr Gefäße lassen sich füllen.

Bei der Konkretisierung ist immer zu beachten, dass es nicht darum geht, alles was im Formalen erarbeitet wurde, einmal konkret vorzuzeigen, sondern es geht darum, das Verständnis dafür zu verbessern, wie Brüche in Sachzusammenhängen zu interpretieren sind und darum, einen Beitrag zur Verinnerlichung gewonnener Erkenntnisse zu leisten.

8 Kommadarstellung von Brüchen

Im Folgenden ist mit der „Kommadarstellung“ stets die Kommadarstellung im Dezimalsystem gemeint, wenn nichts anderes erwähnt wird. Jeder Bruch besitzt auch eine Kommadarstellung. Die Idee, auf die Bruchdarstellung zu verzichten, und stattdessen nur mit der Kommadarstellung

zu arbeiten, ist aus vielen Gründen abzulehnen. Die beiden schwerstwiegenden sind meines Erachtens, dass es nicht möglich ist, das Rechnen in der Kommadarstellung vollständig zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Bruchschreibweise verstanden hat, und dass gerade die Bruchschreibweise in vielen Zusammenhängen sehr praktikabel ist. Neben manchen Nachteilen bietet die Kommadarstellung aber gegenüber der Bruchdarstellung auch einige Vorteile. Der Größenvergleich, die Addition und die Subtraktion sind oft leichter. Auch taucht diese Schreibweise häufiger im Alltag auf. Die Multiplikation und die Division sind dagegen häufig schwieriger als in der Bruchschreibweise. Das exakte Markieren einer Zahl auf dem Zahlenstrahl kann ebenfalls schwieriger sein, als wenn man die Bruchschreibweise der Zahl kennt.

Die Schülerinnen und Schüler kennen die Kommadarstellung einiger Brüche schon aus Klassenstufe 5. Dort wird das Messen und Rechnen mit Größen unterrichtet.

Bei einer Größe wie 7,52 m wird häufig mit Hilfe einer Stellentafel gearbeitet, um zu erklären, was darunter zu verstehen ist.

Diese könnte so aussehen:

	km			m			dm	cm	mm
	H	Z	E	H	Z	E			
7,52m						7	5	2	

Hierbei ist darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler verstehen, was das Komma bedeutet und warum die 7 jetzt gerade an diese Stelle kommt und dass sie zum Beispiel 7,52 m ebenso als 75,2 dm oder 752 cm oder 7520 mm schreiben und lesen können. Das Verschieben des Kommas mit gleichzeitiger Änderung der Einheit ist nichts anderes als das Kürzen oder Erweitern mit einer

Zehnerpotenz. Eine wichtige Erkenntnis daraus ist, dass man hinter die letzte von 0 verschiedene Stelle, die sich rechts vom Komma befindet, beliebig viele Nullen ergänzen kann, also dass $7,5 = 7,50 = 7,500 = 7,500000000000$ ist und so fort.

Fast alle in der Grundschule und in Klassenstufe 5 behandelten Größen werden üblicherweise im Dezimalsystem dargestellt. Die Zeit ist eine Ausnahme und an dieser Stelle ungeeignet. Die Zeit wird oft mit mehreren Einheiten dargestellt, so zum Beispiel 1 h 25 min 12 s. Bei Sportübertragungen sieht man auch Doppelpunkte wie bei 1 : 25 : 12 zur Trennung zwischen den Einheiten. Davon ist abzuraten, weil jede weitere Verwendung des „:“ - Symbols Missverständnisse erzeugen kann. Die Schreibweise mit den 3 Einheiten hier etwas besser. Noch besser ist die Schreibweise $1\text{ h} + 25\text{ min} + 12\text{ s}$, denn sie kann überhaupt nicht zu Missverständnissen führen.

Die Schreibweise ohne das Additionszeichen wird leider auch in Schulbüchern oft auf andere Größen übertragen.

Häufig findet man nämlich die Schreibweise 4 m 52 cm statt 4,52 m.

Diese Schreibweise ist aus mehreren Gründen problematisch:

1. Wenn Schülerinnen und Schüler das Komma als Trennzeichen zwischen verschiedenen Einheiten erleben, dann könnten sie fälschlicherweise denken, dass sie 4 km 52 m analog als 4,52 km schreiben dürfen, nach der Vorstellung „vor dem Komma die Kilometer, hinter dem Komma die Meter“. Besser ist hier die Schreibweise $4\text{ m} + 52\text{ cm}$, wenn man schon eine Größe mithilfe mehrerer Einheiten ausdrücken möchte.
2. Die Schreibweise erweckt den Eindruck, dass das Komma nur eine Trennfunktion hat. Warum sollte man dann nicht auch 4 m 5 dm 2 cm als 4,5,2 m schreiben dürfen?
3. Noch ein weiterer fataler Fehler könnte später aus der Vorstellung vom Komma als Trennsymbol entstehen. Diese Vorstellung behindert den Größenvergleich. Beim Vergleich der Zahlen 3,2 und 3,17 wird bei

Missverständnis des Kommas als Trennsymbol 2 mit 17 verglichen, nachdem festgestellt wurde, dass $3 = 3$ ist.

Dabei kommen Schülerinnen und Schüler zu dem falschen Schluss, dass $3,2 < 3,17$ ist.

4. Ein weiterer Fehler, der aus dem Missverständnis des Kommas als Trennsymbol resultiert, zeigt sich, wenn Zahlen in Kommadarstellung addiert oder multipliziert werden und dann links und rechts vom Komma getrennt addiert oder multipliziert wird, wenn also zum Beispiel bei $5,4 + 6,13 = 11,17$ nach dem Verfahren $5 + 6 = 11$ und $4 + 13 = 17$ oder analog $4,2 \cdot 4,2 = 16,4$ nach dem Verfahren $4 \cdot 4 = 16$ und $2 \cdot 2 = 4$ gerechnet wird.

In obiger Tabelle sieht man, dass es teilweise für eine verzehnfachte Länge schon wieder eine neue Einheit gibt. Das ließe sich auch konsequent weiter führen, aber Einheiten wie Dekameter oder Hektometer sind ungebräuchlich. Sogar die in der Tabelle auftauchenden Dezimeter haben keine große Alltagsrelevanz.

Die Tabelle soll zum Verständnis der Tatsache beitragen, dass der Wert sich von jeder Spalte zur links benachbarten verzehnfacht, während er sich zur rechts benachbarten auf ein Zehntel reduziert. Das ist ja schon von Zahlen, die im Zehnersystem dargestellt werden, bekannt.

Nun soll aber die Kommaschreibweise ohne Größen eingeführt werden. Die Weiterführung nach rechts über die Einer hinaus knüpft an die Tafeln für Größen an. Bei der konsequenten Fortsetzung, hat jede Stelle ein Zehntel des Wertes wie ihre linke Nachbarstelle. Die Stellenwerttafel dafür sieht so aus:

	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
	T	H	Z	E	z	h	t
13,02			1	3	0	2	
0,253				0	2	5	3

13,02 bedeutet demnach $1 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100}$,

0,253 bedeutet $0 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{1000}$.

Dass $0,253 = 0,25300000$ ist, lässt sich sofort nachvollziehen.

Im Zusammenhang mit diesem Thema sollte auch das Runden behandelt werden. Dieses Thema ist mit einer Reihe von Problemen verbunden, die an dieser Stelle zwar noch nicht im Unterricht thematisiert werden können, aber über die man sich als Lehrerin oder Lehrer Gedanken machen sollte.

Später, wenn die Rechenarten behandelt werden, sollte darauf hingewiesen werden, dass das Runden von Zwischenergebnissen zu großen Abweichungen führen kann. Wenn beispielsweise vereinbart wird, dass auf eine Stelle hinter dem Komma gerundet werden soll, so ist leicht einzusehen, dass bei einer Multiplikation mit anschließender Rundung, die im folgenden Beispiel durch $\circ$ symbolisiert wird, das Assoziativgesetz außer Kraft gesetzt wird.

Denn wähle $a = 12,3$, $b = 0,4$ und $c = 0,6$, dann gilt

$$(a \circ b) \circ c = (12,3 \circ 0,4) \circ 0,6 = 4,9 \circ 0,6 = 2,9 \text{ und}$$

$$a \circ (b \circ c) = 12,3 \circ (0,4 \circ 0,6) = 12,3 \circ 0,2 = 2,5.$$

Multipliziert man dagegen zunächst vollständig, so erhält man

$12,3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 2,952$. Rundet man dieses auf eine Stelle nach dem Komma, so erhält man 3,0.

Man sollte sich gut überlegen, ob man überhaupt das Runden auf eine bestimmte Anzahl von Stellen fordert, denn dieses kann noch andere Probleme verursachen. Angenommen man hat mit seinen Schülerinnen und Schülern vereinbart, dass auf eine Stelle nach dem Komma gerundet werden soll. Nun soll der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 4,3 cm und 6,5 cm bestimmt werden. Schülerinnen und Schüler, die das Runden vermeiden wollen, schreiben die Seitenlängen als 43 mm und 65 mm und bestimmen den Flächeninhalt als 2795 mm². Andere Schülerinnen und Schüler nutzen das Runden vielleicht folgendermaßen. 4,3 cm sind 0,043 m. Rundet man die Maßzahl auf eine Stelle hinter dem Komma, dann erhält man 0 m. Aus 6,5 cm ergeben sich dann 0,1 m. Für den Flächeninhalt ergeben sich in diesem

Extremfall 0 m². Es ist zu bedenken, ob man nicht besser die Anzahl der signifikanten Stellen beim Runden festlegt.

Größenvergleich

Es ist sehr einfach, von zwei gegebenen Zahlen in der Kommadarstellung sofort die größere zu erkennen.

Man betrachte zunächst die links vom Komma geschriebenen Stellen und vergleiche sie, wie man natürliche Zahlen miteinander vergleicht. Sollte dieses gleich sein, so vergleiche man nun Stelle für Stelle hinter dem Komma. Sind die Zahlen dabei mit unterschiedlich vielen Stellen hinter dem Komma geschrieben, so dürfen bei der Zahl, die mit weniger Stellen dargestellt ist, hinter der letzten Stelle so viele Nullen ergänzt werden, bis beide Zahlen mit gleich vielen Nachkommastellen dargestellt sind. Findet man eine Stelle, an der verschiedene Ziffern vorkommen, dann ist die Zahl größer, die an dieser Stelle mit der größeren Ziffer geschrieben wird. Wenn es keine Stelle gibt, an der die Ziffern sich unterscheiden, dann sind beide Zahlen gleich groß.

So ist $17305,0 > 1735,0$, weil schon beim Vergleich der natürlichen Zahlen, die von den links vom Komma geschriebenen Ziffern gebildet werden, klar ist, dass $17305 > 1735$ ist.

Aber $17,305 < 17,35$, denn hier sind zwar beide Zahlen mit gleich vielen Stellen links vom Komma geschrieben, aber nun wird Stelle für Stelle verglichen und der erste Unterschied taucht an der zweiten Stelle hinter dem Komma auf.

Da $0 < 5$ ist, ist auch $17,305 < 17,35$. Dies ist ein weiteres Beispiel dafür, dass das Komma im Zusammenhang mit Größen vorsichtig eingeführt werden muss, und dass sich keinesfalls die Fehlvorstellung durchsetzen darf, man dürfe die vom Komma getrennten Teile der Zahl isoliert behandeln.

Während bei einigen Zahlen in Bruchdarstellung noch Umformungsarbeit zu leisten ist, um die größere der beiden zu ermitteln, so ist dies in Kommadarstellung sehr einfach, auch wenn das oben beschriebene Verfahren umständlich klingen mag.

Beispiel: $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$, hier ist nicht sofort entscheidbar, welche größer ist.

Bei den Kommadarstellungen dieser Zahlen, nämlich 0,6 und 0,625, ist dies sofort deutlich.

Von der Bruch- zur Kommadarstellung und umgekehrt

Es ist hier nicht nötig, weitere Beispiele für die Einfachheit des Größenvergleichs in Kommadarstellung im Gegensatz zur Bruchdarstellung anzuführen. Stattdessen erscheint es mir sinnvoll, auf das einzugehen, was bei diesem Beispiel schon vorausgesetzt wurde, nämlich die Kenntnis, wie man von der Bruchdarstellung zur Kommadarstellung gelangt.

Immer, wenn es möglich ist, die gegebenen Brüche mit einem Nenner in Form einer Zehnerpotenz darzustellen, ist es sehr einfach. Im Beispiel ist $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ und

$\frac{5}{8} = \frac{625}{1000}$. Man muss also nur noch auf die Stellenwerttafel blicken und findet sofort die Kommadarstellung.

Immer dann, wenn der Nenner der vollständig gekürzten Darstellung eines Bruchs eine Primfaktorzerlegung besitzt, die nur die Primfaktoren 2 oder 5 besitzt, lässt sich der Bruch auch mit einem Nenner darstellen, der eine Zehnerpotenz ist. Das ist leicht anzusehen, da 10 die Primfaktorzerlegung $2 \cdot 5$ besitzt.

Entscheidet man sich für die Kommadarstellung in einem anderen System als dem Dezimalsystem, so sind die Voraussetzungen natürlich anders. Im Siebenersystem ist es beispielsweise besonders leicht die Kommadarstellung von Brüchen zu finden, deren vollständig gekürzte Darstellung im Nenner eine Zahl besitzt, deren Primfaktorzerlegung nur den Primfaktor 7 enthält.

So ist $\frac{1}{7} = 0,1_7$ oder $\frac{3}{49} = 0,03_7$.

Aber natürlich ist es auch möglich, diese Brüche im Dezimalsystem in Kommadarstellung zu schreiben. Um die Kommadarstellung von zum Beispiel $\frac{1}{7}$ zu erhalten, kann man sich des altbekannten Divisionsalgorithmus bedienen.

Ich sage ausdrücklich „man kann“, denn es gibt natürlich auch andere Verfahren. Zum Beispiel kann man mithilfe einer Intervallschachtelung vorgehen. Dieses Verfahren werde ich hier nicht vorstellen, weil es nicht sehr praktikabel ist. Stattdessen werde ich einen multiplikativen Algorithmus vorstellen.

Doch zunächst soll kurz auf den Divisionsalgorithmus eingegangen werden.

Es ist $\frac{1}{7} = 1 : 7 = 0,\overline{142857}$.

Wie man üblicherweise aus der Bruchdarstellung die Kommadarstellung findet, wird in der folgenden Tabelle am Beispiel von $\frac{1}{7}$ dargestellt:

Überlegung	Notation
Man rechnet $1:7 = 0 + 1 : 7$ notiert eine 0 und ein Komma und schreibt nun den Rest 1 in Form von $\frac{10}{10}$.	0,
$\frac{10}{10} : 7 = \frac{7}{10} : 7 + \frac{3}{10} : 7 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} : 7$, man notiert an der nächsten Stelle die 1 und schreibt den Rest $\frac{3}{10}$ als $\frac{30}{100}$.	0,1
$\frac{30}{100} : 7 = \frac{4}{100} + \frac{2}{100} : 7$, man notiert an der nächsten Stelle die 4 und schreibt den Rest $\frac{2}{100}$ als $\frac{20}{1000}$.	0,14
$\frac{20}{1000} : 7 = \frac{2}{1000} + \frac{6}{1000} : 7$, man notiert an der nächsten Stelle die 2 und schreibt den Rest $\frac{6}{1000}$ als $\frac{60}{10000}$.	0,142
$\frac{60}{10000} : 7 = \frac{8}{10000} + \frac{4}{10000} : 7$, man notiert an der nächsten Stelle die 8 und schreibt den Rest $\frac{4}{10000}$ als $\frac{40}{100000}$.	0,1428

$\frac{40}{100000} : 7 = \frac{5}{100000} + \frac{5}{100000} : 7$, man notiert an der nächsten Stelle die 5 und schreibt den Rest $\frac{5}{100000}$ als $\frac{50}{1000000}$.	0,14285
$\frac{50}{1000000} : 7 = \frac{7}{1000000} + \frac{1}{1000000} : 7$, man notiert an der nächsten Stelle die 7 und erkennt nun, dass die Reste sich im Folgenden wiederholen, weil nun an der Millionstelstelle der Rest 1 bleibt, den wir schon oben hatten. Diese periodische Wiederkehr der Ziffern wird durch einen Balken kenntlich gemacht.	0,142857

Diese Schreibweise ist hier zur Verdeutlichung viel ausführlicher dargestellt, als sie gewöhnlich in der Praxis notiert wird.

In der Praxis läuft die schriftliche Division genau so ab, wie man es schon in der Grundschule gelernt hat. Man muss nun nur darauf achten, an welcher Stelle das Komma zu setzen ist.

Selbstverständlich funktioniert dieses Verfahren auch bei Brüchen, die man, wie oben gezeigt, durch einfaches Erweitern der Darstellung in die Kommaschreibweise überführen kann.

Beispiel: $1 : 8 = \frac{125}{1000} = 0,125$

Überlegung	Notation
Man rechnet $1 : 8 = 0 + 1 : 8$ notiert eine 0 und ein Komma und schreibt nun den Rest 1 in Form von $\frac{10}{10}$.	0,

$\frac{10}{10} : 8 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} : 8$, man notiert an der nächsten Stelle die 1	0,1
und schreibt den Rest $\frac{2}{10}$ als $\frac{20}{100}$.	
$\frac{20}{100} : 8 = \frac{2}{100} + \frac{4}{100} : 8$, man notiert an der nächsten Stelle die 2	0,12
und schreibt den Rest $\frac{4}{100}$ als $\frac{40}{1000}$.	
$\frac{40}{1000} : 8 = \frac{5}{1000}$, man notiert an der nächsten Stelle die 5 und	0,125
ist fertig, da der Rest 0 ist.	

Bei solchen Brüchen, die keine Periode besitzen, spricht man von einer abbrechenden Kommadarstellung.

Die Brüche mit periodischer Kommadarstellung kann man weiter unterscheiden, es gibt welche mit reinperiodischen und andere mit gemischt-periodischen Kommadarstellungen.

Es ist sofort einzusehen, dass zum Beispiel $\frac{1}{70}$ ein Bruch ist, der eine gemischt periodische Kommadarstellung besitzt, da $\frac{1}{70} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{7}$ ist und die Multiplikation mit $\frac{1}{10}$ die Verschiebung des Kommas um eine Stelle nach links bewirkt.

Also ist $\frac{1}{70} = 0,0142857$. Die Nachkommastellen, die nicht zur Periode gehören, werden als Vorperiode bezeichnet.

Es lässt sich leicht zeigen, dass jeder periodische Bruch der in vollständig gekürzter Darstellung im Nenner auch die Primfaktoren $2^a \cdot 5^b$ besitzt, eine Vorperiode der Länge $\max(a, b)$ besitzt.

Anstelle dieses Verfahrens kann man sich aber auch des von mir entwickelten Verfahrens mithilfe eines Multiplikationsalgorithmus bedienen, den ich in 8.1

vorstellen werde. Dieser Algorithmus ist nicht für die Klassenstufe 6 geeignet, und zwar nicht deswegen, weil er zu schwierig ist, sondern weil es zu schwierig ist, Schülerinnen und Schüler dieser Klassenstufe die Einsicht dafür zu vermitteln, warum dieser Algorithmus das Gewünschte liefert. Ich werde dennoch später diesen Algorithmus vorstellen, weil er bisher noch nirgends erwähnt wurde.

Natürlich möchte man auch in der Lage sein, von der Kommadarstellung in die Bruchdarstellung umzuschreiben. Dieses ist trivial, wenn die Kommadarstellung nicht periodisch ist. Dadurch, dass man den Wert jeder Stelle kennt, lässt sich jeder einzelnen Ziffer oder auch der ganzen Ziffernfolge unter Berücksichtigung der Stellen eine Bruchdarstellung zuweisen.

Zum Beispiel ist $1,75 = \frac{1}{1} + \frac{7}{10} + \frac{5}{100}$ oder $1,75 = \frac{175}{100}$. Hiermit ist das Problem gelöst, auch wenn es noch möglich ist, diese Darstellung durch eine gekürzte zu ersetzen.

Wenn man es mit einer periodischen Kommadarstellung zu tun hat, kann man nicht auf diese Weise verfahren. Würde man nämlich die Zahl als Summe solcher Brüche notieren wollen, deren Nenner Zehnerpotenzen sind, dann müsste man unendlich viele Summanden notieren.

Zum Beispiel soll etwa $0,\overline{13}$ in Bruchdarstellung umgeschrieben werden, dann ist

$$\begin{aligned} 0,\overline{13} &= \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{1}{100000} + \frac{3}{1000000} + \dots \\ &= \frac{13}{100} + \frac{13}{10000} + \frac{13}{1000000} + \dots \\ &= 13 \cdot \left(\frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \left(\frac{1}{100} \right)^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

Präzise gesagt ist $0,\overline{13} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 13 \cdot \left(\frac{1}{100} \right)^k = 13 \cdot \frac{\left(\frac{1}{100} \right)}{\left(1 - \frac{1}{100} \right)} = 13 \cdot \frac{\left(\frac{1}{100} \right)}{\left(\frac{99}{100} \right)} = 13 \cdot \frac{1}{99} = \frac{13}{99}$

In der Schule muss man diesen Zusammenhang natürlich anders präsentieren. Den Schülerinnen und Schülern ist bekannt, dass eine Multiplikation mit

10^n das Komma um n Stellen nach rechts verschiebt. Dieses sollte man ausnutzen:

$$\text{Es ist } 1 \cdot 0,\overline{13} = 0,131313131313131313\dots$$

Hier haben wir also die gleichen Nachkommastellen wie bei

$$100 \cdot 0,\overline{13} = 13,131313131313131313\dots$$

Nun bietet sich eine Subtraktion an:

$$\begin{array}{r} 100 \cdot 0,\overline{13} = 13,131313131313131313\dots \\ - 1 \cdot 0,\overline{13} = 0,131313131313131313\dots \\ \hline 99 \cdot 0,\overline{13} = 13 \end{array}$$

Die linke Seite ergibt sich wegen des Distributivgesetzes, die rechte ist auch klar, denn jede Stelle hinterm Komma „fällt nun weg“.

$$\text{Aus } 99 \cdot 0,\overline{13} = 13 \text{ ergibt sich aber } 0,\overline{13} = \frac{13}{99}.$$

Nun gibt es noch eine dritte mögliche Form der Kommadarstellung eines Bruches, nämlich die gemischt periodische. Das Problem, diese in Bruchdarstellung zu überführen, ist wieder leicht lösbar, wenn man es auf schon bekannte Verfahren zurückführt.

Beispielsweise soll $0,02\overline{23}$ in Bruchdarstellung überschrieben werden.

Wenn man sich wieder geeignete Vielfache sucht, die identische Nachkommastellen haben, dann wird es einfach:

$$\begin{array}{r} 10000 \cdot 0,02\overline{23} = 223,2323232323\dots \\ - 100 \cdot 0,02\overline{23} = 2,2323232323\dots \\ \hline 9900 \cdot 0,02\overline{23} = 221 \end{array}$$

Also ist $0,\overline{0223} = \frac{221}{9900}$.

Rechnen in Kommadarstellung

Addition und Subtraktion

Das Rechnen in Kommaschreibweise soll nur kurz dargestellt werden.

Die Verfahren für die Addition und die Subtraktion sind nicht besonders schwierig herzuleiten. Jede Zahl in Kommadarstellung kann sofort in die Bruchdarstellung überführt werden, sodass eine Zehnerpotenz im Nenner steht. Hierbei ist es sinnvoll zu erweitern, bis gleiche Zehnerpotenzen im Nenner

stehen. Beispiel: $0,7 + 0,44 = \frac{7}{10} + \frac{44}{100} = \frac{70}{100} + \frac{44}{100} = \frac{70+44}{100} = \frac{114}{100} = 1,14$.

Selbstverständlich wird man dazu übergehen, die Umwandlung in die Bruchschreibweise wegzulassen. Denn man braucht sie nicht mehr, wenn man verstanden hat, dass man analog zum schriftlichen Additions- oder Subtraktionsverfahren im Bereich der natürlichen Zahlen die zu addierenden oder subtrahierenden Zahlen so untereinander schreiben kann, dass Stellen gleichen Wertes übereinander stehen. Dann kann man genau so rechnen, wie man es gewohnt ist. Das Einzige, was zu beachten ist, geht aus dem Erweitern auf die gleiche Zehnerpotenz hervor, nämlich die Bedeutung der Stellen.

$$\begin{array}{r} 0,70 \\ 0,7 + 0,44 = \\ + 0,44 \end{array}$$

Das Stellenwertsystem ist den Schülerinnen und Schülern aus den vorigen Klassenstufen sehr wohl bekannt und kann hier auch gut eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} (0E + 7z) + (0E + 4z + 4h) &= (0 + 0) E + (7 + 4) z + 4 h \\ &= 0 E + 11z + 4h = 1E + 1z + 1h \end{aligned}$$

Hierbei stehen E für Einer, z für Zehntel und h für Hundertstel. Für die Rechnung werden nur das Assoziativ- und das Kommutativgesetz benutzt. Im Zusammenhang mit Größen haben die Schülerinnen und Schüler auch schon

die Kommaschreibweise in der Stellenwerttafel kennengelernt. Doch leider ist auch hierbei wieder eine Möglichkeit gegeben, Fehlvorstellungen zu fördern, die man in vielen Schulbüchern findet. So ist diese Fehlvorstellung ebenfalls sehr weit verbreitet.

Häufig sind nämlich in den Schulbüchern Aufgaben zu finden, in denen verlangt wird, eine Größe, die mit einer Einheit angegeben ist, so zu schreiben, dass zwei Einheiten vorkommen oder umgekehrt. Ob dieses Alltagsrelevanz vorgaukeln soll, ist mir nicht klar. Üblicherweise hat man zwar im Alltag schon einmal gehört, dass man für etwas zum Beispiel „19 Euro und 95 Cent“ zahlen soll oder dass man für den Besuch eines Fußballstadions eine Stunde und 45 Minuten einplanen muss. Darüber hinaus kommt es aber auch im Alltag sehr selten vor, dass man Größen mit Hilfe von zwei oder mehr Einheiten angibt. Meistens benutzt man eine Einheit, und gerade in der gesprochenen Sprache wird ein Komma durch die größere Einheit ersetzt. Man sagt also im Allgemeinen nicht „19 Euro und 95 Cent“ oder „19 Komma 95 Euro“, sondern spricht „19 Euro 95“ oder „1 Meter 86“ statt „1 Komma 86 Meter“. Ein Problem tritt nun auf, wenn bei Aufgaben vom Typ $1,86\text{m} = __\text{m}__\text{cm}$ trainiert wird, mit mehreren Einheiten zu schreiben. Das Problem, das schon oben erwähnt wurde, liegt nicht so sehr in der Beherrschung des Stellenwertsystems. Sondern es liegt im umgekehrten Fall darin, dass Schülerinnen und Schüler fälschlicherweise $1\text{m } 4\text{cm}$ als $1,4\text{ m}$ schreiben, weil sie das Komma als ein Trennsymbol sehen und weil die 0 für die Dezimeter beziehungsweise für die Zehnerstelle der Zentimeter in der Schreibweise mit zwei Einheiten fehlt. Dieser Fehler setzt sich fort, wenn ohne Einheiten fälschlicherweise die Teile links und rechts vom Komma ohne Berücksichtigung der Stellenwerte addiert werden, beispielsweise $2,7 + 1,25 = 3,32$.

Es ist zu überlegen, ob es nicht lohnend wäre, auf die Größen-Schreibweise mit mehreren Einheiten zu verzichten oder wenigstens ein „+“ - Symbol zwischen die Teilgrößen zu schreiben. Gegen die Schreibweise $1\text{m} + 86\text{cm}$ ist nichts einzuwenden.

Die Subtraktion kann analog eingeführt werden. Dabei ist darauf zu achten, dass mit dem Ergänzungsverfahren gearbeitet wird.

Multiplikation

Die Multiplikation mit einer Zehnerpotenz ist sehr einfach. Zur Einsicht ist eine Stellenwerttafel hilfreich:

$$\begin{aligned} & 10 \cdot 3,567 \\ &= 10 \cdot (3E + 5z + 6h + 7t) \\ &= 10 \cdot 3E + 10 \cdot 5z + 10 \cdot 6h + 10 \cdot 7t \\ &= 3Z + 5E + 6z + 7h \\ &= 35,67 \end{aligned}$$

Z steht hier für Zehner, t für Tausendstel, E, z, h wie oben.

Es wird meistens schnell eingesehen, dass bei einer Multiplikation mit 10 das Komma um eine Stelle nach rechts verschoben wird, analog bei einer Multiplikation mit 100 um zwei Stellen nach rechts, usw. Allgemein bewirkt eine Multiplikation mit 10^n für $n \in \mathbb{N}$ eine Kommaverschiebung um n Stellen nach rechts.

Auf ähnliche Weise lässt sich herleiten, dass eine Division durch 10^n für $n \in \mathbb{N}$ eine Kommaverschiebung um n Stellen nach links bewirkt. Natürlich muss man hier manchmal mit einem gedachten Komma und gedachten Nullen arbeiten, wenn noch gar kein Komma geschrieben steht.

Für die Herleitung einer Multiplikationsregel ist es sinnvoll, die Zahlen in Bruchdarstellung zu schreiben, sodass ihre Nenner Zehnerpotenzen sind. Das Produkt der Zähler kann im Bereich der natürlichen Zahlen bestimmt werden. Das Produkt der Nenner ist dann besonders leicht zu bestimmen: Es ist wieder eine Zehnerpotenz, sodass es wiederum besonders leicht ist, das Produkt in Kommadarstellung zu übertragen.

$$\text{Beispiel: } 5,3 \cdot 0,25 = \frac{53}{10} \cdot \frac{25}{100} = \frac{53 \cdot 25}{1000} = \frac{1325}{1000} = 1,325$$

Schnell wird man darauf kommen, dass es reicht, $53 \cdot 25$ zu rechnen und anschließend durch 1000 zu dividieren, da die Faktoren insgesamt 3 Stellen hinter dem Komma besetzt haben und $10^3 = 1000$ ist.

Division

Wie kann man nun verfahren, wenn man zwei Zahlen dividieren möchte, die in Kommadarstellung geschrieben sind?

Die Frage ist leicht zu beantworten. Denn man kann dieses Problem wieder auf ein bekanntes, bereits lösbares zurückführen.

Zum Beispiel: $13,4 : 1,25$ lässt sich schreiben als $1340 : 125$ und schon hat man durch Erweitern der Darstellung das neue Problem auf ein bekanntes zurückgeführt. Also wird die Division zweier Zahlen in Kommadarstellung so gelöst, dass man zunächst erweitert, beziehungsweise durch Multiplikation von Dividend und Divisor mit der gleichen Zehnerpotenz natürliche Zahlen als Dividend und Divisor, oder zumindest als Divisor erhält und anschließend dividiert.

Es lohnt sich nicht, genauer auf die Rechenverfahren mit der Kommadarstellung einzugehen, da sie schon vielfach hinreichend beschrieben wurden. (vgl. Padberg, Zech)

8.1 Ein multiplikativer Algorithmus zum Finden der Kommadarstellung von Brüchen

Den im Folgenden dargestellten Algorithmus habe ich mir als Alternative zum Divisionsalgorithmus ausgedacht. Da er bisher noch nirgends erwähnt wurde, findet er hier Raum zur Veröffentlichung.

Gegeben sei ein Bruch in einer Darstellung $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und m, n seien teilerfremd.

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: n ist teilerfremd zu 2 und zu 5.

1.1.Fall: $m < n$

Nach dem altbekannten Divisionsalgorithmus ist

$$\begin{array}{rclcl} m & = & a_0 & n & + & r_0 \\ 1 \quad 0 \quad r_0 & = & a_1 & n & + & r_1 \\ & & \dots & & & \\ 1 \quad 0 \quad r_{p-1} & = & a_p & n & + & r_p \end{array}$$

Dabei ist $a_0 = 0, \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \{0,1,\dots,9\} \forall i \in \mathbb{N} : r_i \in \{1,2,\dots,n-1\}$

Es gibt hierbei also höchstens $n - 1$ verschiedene Reste, die auftreten können.

p sei hier die kleinste Zahl (>0) für die $r_p = r_0$, dann hat $\frac{m}{n}$ die Periodenlänge p .

und $\frac{m}{n} =$ hat die Periode $a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_p$

Beispiel 1:

$$\begin{array}{rclcl}
 1 & = & 0 & \cdot & 7 & + & 1 \\
 1\ 0 & = & 1 & \cdot & 7 & + & 3 \\
 3\ 0 & = & 4 & \cdot & 7 & + & 2 \\
 2\ 0 & = & 2 & \cdot & 7 & + & 6 \\
 6\ 0 & = & 8 & \cdot & 7 & + & 4 \\
 4\ 0 & = & 5 & \cdot & 7 & + & 5 \\
 5\ 0 & = & 7 & \cdot & 7 & + & 1
 \end{array}$$

So findet man 142857 als Periode von $\frac{1}{7}$.

Jeder Bruch der oben angegebenen Form lässt sich darstellen mit einem

Nenner $n' \equiv 9(10)$, zum Beispiel $\frac{1}{7} = \frac{7}{49} = \frac{17}{119} = \dots$

Der Divisionsalgorithmus ist natürlich repräsentantenunabhängig.

So lässt sich die Periode zum Beispiel ebenso auf folgende Weisen bestimmen:

$$\begin{array}{rclcl}
 7 & = & 0 & \cdot & 4\ 9 & + & 7 \\
 7\ 0 & = & 1 & \cdot & 4\ 9 & + & 2\ 1 \\
 2\ 1\ 0 & = & 4 & \cdot & 4\ 9 & + & 1\ 4 \\
 1\ 4\ 0 & = & 2 & \cdot & 4\ 9 & + & 4\ 2 \\
 4\ 2\ 0 & = & 8 & \cdot & 4\ 9 & + & 2\ 8 \\
 2\ 8\ 0 & = & 5 & \cdot & 4\ 9 & + & 3\ 5 \\
 3\ 5\ 0 & = & 7 & \cdot & 4\ 9 & + & 7
 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rclcl}
 1\ 7 & = & 0 & \cdot & 1\ 1\ 9 & + & 1\ 7 \\
 1\ 7\ 0 & = & 1 & \cdot & 1\ 1\ 9 & + & 5\ 1 \\
 5\ 1\ 0 & = & 4 & \cdot & 1\ 1\ 9 & + & 3\ 4 \\
 3\ 4\ 0 & = & 2 & \cdot & 1\ 1\ 9 & + & 1\ 0\ 2 \\
 1\ 0\ 2\ 0 & = & 8 & \cdot & 1\ 1\ 9 & + & 6\ 8 \\
 6\ 8\ 0 & = & 5 & \cdot & 1\ 1\ 9 & + & 8\ 5 \\
 8\ 5\ 0 & = & 7 & \cdot & 1\ 1\ 9 & + & 1\ 7
 \end{array}$$

Der Algorithmus ist der gleiche wie oben. Nur haben wir den Bruch nun mit einem Nenner $n' \equiv 9(10)$ dargestellt. Dies bedeutet, dass für alle $i > 0$ gilt: $a_i \equiv r_i \bmod 10$. Den jeweils folgenden Dividenden findet man, wie wir es gewohnt sind, indem man r_i mit 10 multipliziert.

Da nun für alle $i > 0$ gilt, dass $a_i \cdot n' = -a_i \bmod 10$ ist, bietet es sich an, die Zerlegung des Dividenden auf folgende Weise vorzunehmen. Wie ersetzen n' durch $n' + 1$.

Aus den beiden obigen Beispielen erhält man nun folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 7 &= 0 \cdot 50 + 7 \\
 70 &= 1 \cdot 50 + 20 \\
 210 &= 4 \cdot 50 + 10 \\
 140 &= 2 \cdot 50 + 40 \\
 420 &= 8 \cdot 50 + 20 \\
 280 &= 5 \cdot 50 + 30 \\
 350 &= 7 \cdot 50 + 0
 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
 17 &= 0 \cdot 120 + 17 \\
 170 &= 1 \cdot 120 + 50 \\
 510 &= 4 \cdot 120 + 30 \\
 340 &= 2 \cdot 120 + 100 \\
 1020 &= 8 \cdot 120 + 60 \\
 680 &= 5 \cdot 120 + 80 \\
 850 &= 7 \cdot 120 + 10
 \end{aligned}$$

Wegen der Gewöhnung an das Dezimalsystem wird jeder es als „leichter“ empfinden, eine Zahl in ein Vielfaches einer durch zehn teilbaren Zahl (im Beispiel 50, beziehungsweise 120) und einen Rest zu zerlegen, statt in ein Vielfaches einer Zahl, die bei Division durch 10 den Rest 9 lässt, und einen Rest (im Beispiel 49 und 119). Die Frage ist nur, wie man den nächsten Dividenden, beziehungsweise die nächste auf diese Weise zu zerlegende Zahl findet.

Im Algorithmus für die Darstellung mit den Nenner $n' \equiv 9(10)$ gilt für alle i :

$10r_{i-1} = a_i n' + r_i$. Dabei findet man stets eine Zahl k_i mit $r_i = 10k_i + a_i$, sodass

$10r_{i-1} = a_i n' + 10k_i + a_i$ ist, also $10r_{i-1} = a_i(n'+1) + 10k_i$, was genau die Darstellung

ist, die in dem zuletzt angegebenen Algorithmus zu sehen ist. Der

nächstfolgende Dividend, beziehungsweise die nächste auf diese Weise zu

zerlegende Zahl ist also $10r_i$ und es ist $10r_i = 10(10k_i + a_i)$.

Die zuletzt genannten Gleichungen lassen sich problemlos durch folgende ersetzen:

$$\begin{array}{rclclcl} 7 & = & 1 & \cdot & 5 & + & 2 \\ 2 \ 1 & = & 4 & \cdot & 5 & + & 1 \\ 1 \ 4 & = & 2 & \cdot & 5 & + & 4 \\ 4 \ 2 & = & 8 & \cdot & 5 & + & 2 \\ 2 \ 8 & = & 5 & \cdot & 5 & + & 3 \\ 3 \ 5 & = & 7 & \cdot & 5 & + & 0 \\ 7 & = & 1 & \cdot & 5 & + & 2 \end{array}$$

beziehungsweise

$$\begin{array}{rclclcl} 1 \ 7 & = & 1 & \cdot & 1 \ 2 & + & 5 \\ 5 \ 1 & = & 4 & \cdot & 1 \ 2 & + & 3 \\ 3 \ 4 & = & 2 & \cdot & 1 \ 2 & + & 1 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 2 & = & 8 & \cdot & 1 \ 2 & + & 6 \\ 6 \ 8 & = & 5 & \cdot & 1 \ 2 & + & 8 \\ 8 \ 5 & = & 7 & \cdot & 1 \ 2 & + & 1 \\ 1 \ 7 & = & 1 & \cdot & 1 \ 2 & + & 5 \end{array}$$

Diese Gleichungen stellen nämlich schon wieder eine Vereinfachung dar.

Die erste Zeile wurde weggelassen. Die letzte Zeile zeigt nur an, dass der Algorithmus abubrechen ist, weil eine Wiederholung auftritt.

Aus $10r_i = 10(10k_i + a_i)$ folgt sofort $r_i = 10k_i + a_i$ und damit $r_i \equiv a_i \pmod{10}$

Das erlaubt es uns, diesen Algorithmus umzudrehen, ihn also durch einen multiplikativen zu ersetzen.

Man erinnere sich, dass für den gegebenen Bruch $\frac{m}{n}$ eine Darstellung $\frac{m'}{n'}$ mit $n' \equiv 9 \pmod{10}$ gewählt wird. Dabei ist m' die Startzahl, mit der nun der multiplikative Algorithmus beginnt, und $m' \pmod{10}$ ist die hinterste Stelle der gesuchten Periode. Der Multiplikator ist $\frac{n'+1}{10}$.

Bei dieser Umkehrung des obigen Algorithmus erhalten wir:

$$\begin{array}{rclclcl}
 m' \pmod{10} & \frac{n'+1}{10} & + & \frac{m'-m' \pmod{10}}{10} & = & x_2 \\
 x_2 \pmod{10} & \frac{n'+1}{10} & + & \frac{x_2 - x_2 \pmod{10}}{10} & = & x_3 \\
 & & & \dots & & \\
 x_{p-1} \pmod{10} & \frac{n'+1}{10} & + & \frac{x_{p-1} - x_{p-1} \pmod{10}}{10} & = & x_p \\
 x_p \pmod{10} & \frac{n'+1}{10} & + & \frac{x_p - x_p \pmod{10}}{10} & = & x_{p+1} = m' \\
 & & & & & \text{Abbruch!}
 \end{array}$$

Der Algorithmus wird durchgeführt, bis eine Summe x_{p+1} auftaucht, mit

$x_{p+1} = m'$. Setze nun für alle i mit $1 < i < p+1$: $y_i = x_i \pmod{10}$ und $y_1 = m' \pmod{10}$

Die Periode ist $y_p y_{p-1} \dots y_2 y_1$.

Für das Beispiel $\frac{1}{7}$ wähle man nun zunächst $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ und $b \equiv 9(10)$.

In der Darstellung $\frac{7}{49}$ ist die Startzahl 7 und der Multiplikator 5, da $\frac{49+1}{10} = 5$

Der neue Algorithmus liefert nämlich:

$$\begin{array}{rclclcl}
 7 \pmod{10} & \cdot \frac{49+1}{10} & + & \frac{7 - 7 \pmod{10}}{10} & = & 35 \\
 35 \pmod{10} & \cdot \frac{49+1}{10} & + & \frac{35 - 35 \pmod{10}}{10} & = & 28 \\
 28 \pmod{10} & \cdot \frac{49+1}{10} & + & \frac{28 - 28 \pmod{10}}{10} & = & 42 \\
 42 \pmod{10} & \cdot \frac{49+1}{10} & + & \frac{42 - 42 \pmod{10}}{10} & = & 14 \\
 14 \pmod{10} & \cdot \frac{49+1}{10} & + & \frac{14 - 14 \pmod{10}}{10} & = & 21 \\
 21 \pmod{10} & \cdot \frac{49+1}{10} & + & \frac{21 - 21 \pmod{10}}{10} & = & 7 \\
 & & & & & \text{Abbruch!}
 \end{array}$$

Was hier vielleicht kompliziert aussehen mag, ist aber in der praktischen Umsetzung sehr einfach, da sich alles sehr leicht im Kopf rechnen lässt. Etwas einfacher notiert sieht es so aus:

$$\begin{array}{rclclcl}
 7 & \cdot & 5 & + & 0 & = & 35 \\
 5 & \cdot & 5 & + & 3 & = & 28 \\
 8 & \cdot & 5 & + & 2 & = & 42 \\
 2 & \cdot & 5 & + & 4 & = & 14 \\
 4 & \cdot & 5 & + & 1 & = & 21 \\
 1 & \cdot & 5 & + & 2 & = & 7(\text{Abbruch})!
 \end{array}$$

Jeder Zahl m' und x_i für $1 < i < 7$ wird nun noch ihr Zehnerrest zugeordnet:

7	35	28	42	14	21
7	5	8	2	4	1

Nun lese man noch die untere Zeile von rechts nach links und schon erhält man die Periode 142857.

In der Darstellung $\frac{17}{119}$ ist die Startzahl 17 und der Multiplikator 12, da

$$\frac{119+1}{10} = 12$$

Der neue Algorithmus liefert:

$$\begin{array}{rclclcl}
 7 \cdot & 12 & + & 1 & = & 85 \\
 5 \cdot & 12 & + & 8 & = & 68 \\
 8 \cdot & 12 & + & 2 & = & 102 \\
 2 \cdot & 12 & + & 10 & = & 34 \\
 4 \cdot & 12 & + & 3 & = & 51 \\
 1 \cdot & 12 & + & 5 & = & 17(\text{Abbruch})!
 \end{array}$$

Jeder Zahl m' und x_i für $1 < i < 7$ wird nun noch ihr Zehnerrest zugeordnet:

17	85	68	102	34	51
7	5	8	2	4	1

Die Zahlen lassen sich oft sehr leicht im Kopf berechnen. Oftmals kann die Division durch mehrstellige Zahlen ersetzt werden durch die Multiplikation mit ein- oder zweistelligen Zahlen. Beispielsweise entfällt bei der Herleitung der Periode von $\frac{1}{13}$ die Division durch 13 und kann ersetzt werden durch die Multiplikation mit 4, die von den meisten Menschen als einfacher empfunden wird :

Wähle $(m', n') = (3, 39)$, dann ist $\frac{n'+1}{10} = 4$

Die Zahlen, die man nach diesem Algorithmus erhält, sind 3, 12, 9, 36, 27, 30, 3.

Für die Periode sind nur die Zehnerreste der ersten 6 Zahlen interessant, da die siebte Zahl wieder die Startzahl ist: 3, 2, 9, 6, 7, 0.

Um die Periode zu erhalten, muss die Reihenfolge nur noch umgekehrt werden:

$$\frac{1}{13} = 0,\overline{076923}$$

Ebenso wird bei der Entwicklung der Dezimaldarstellung von $\frac{5}{17}$ die Division durch 17 ersetzt durch die Multiplikation mit 12:

Wähle $(m', n') = (35, 119)$, dann ist $\frac{n'+1}{10} = 12$

Man erhält die Zahlen 35, 63, 42, 28, 98, 105, 70, 7, 84, 56, 77, 91, 21, 14, 49, 112 und wieder 35 also bricht die Periode hier ab. Die Zehnerreste dieser Zahl bilden in umgekehrter Reihenfolge die gesuchte Periode:

$$\frac{5}{17} = 0,\overline{2941176470588235}$$

1.2. Fall $m > n$ oder $m = n$

Im Falle $m = n$ ist $\frac{m}{n} = 1$ und es ist nichts zu tun.

Sei also $m > n$. Dann findet man $k, s \in \mathbb{N}$ mit $m = k \cdot n + s$ und $0 < s < n$, und $\frac{m}{n} =$

$k + \frac{s}{n}$. Man verfähre mit $\frac{s}{n}$ wie oben und addiere anschließend k .

2. Fall: n ist nicht teilerfremd zu 2 oder nicht teilerfremd zu 5

Dann findet man c, d, f mit $n = 2^c 5^d f$, sodass f teilerfremd zu 2 und zu 5 ist.

O. b. d. A. sei $c > d$, dann ist $\frac{m}{n} = \frac{1}{10^c} \frac{5^{c-d} m}{f}$.

Da nun wieder $5^{c-d} m$ und f teilerfremd sind, kann wie im 1. Fall verfahren werden.

Multiplikatoren

Die folgende Tabelle gibt für alle von 10 teilerfremden Zahlen n mit $1 < n < 1000$ die kleinsten möglichen Multiplikatoren für die Konstruktion der Periode von $\frac{1}{n}$ sowie die Länge der Periode (im Dezimalsystem) an.

n	kleinster möglicher Multiplikator	Periodenlänge von $\frac{1}{n}$
3	1	1
7	5	6
9	1	1
11	10	2
13	4	6
17	12	16
19	2	18
21	19	6
23	7	22
27	19	3
29	3	28
31	28	15
33	10	2
37	26	3
39	4	6
41	37	5
43	13	21
47	33	46
49	5	42
51	46	16
53	16	13
57	40	18
59	6	58
61	55	60
63	19	6
67	47	33
69	7	22
71	64	35
73	22	8
77	54	6
79	8	13
81	73	9
83	25	41
87	61	28
89	9	44
91	82	6
93	28	15
97	68	96
101	91	4

n	kleinster möglicher Multiplikator	Periodenlänge von $\frac{1}{n}$
103	31	34
107	75	53
109	11	108
111	100	3
113	34	112
117	82	6
119	12	48
121	109	22
123	37	5
127	89	42
129	13	21
131	118	130
133	40	18
137	96	8
139	14	46
141	127	46
143	43	6
147	103	42
149	15	148
151	136	75
153	46	16
157	110	78
159	16	13
161	145	66
163	49	81
167	117	166
169	17	78
171	154	18
173	52	43
177	124	58
179	18	178
181	163	180
183	55	60
187	131	16
189	19	6
191	172	95
193	58	192
197	138	98
199	20	99

Man vergleiche die Schwierigkeit beider Verfahren beispielsweise bei der Bestimmung der Periodenlänge von $\frac{1}{199}$.

Bei Nutzung des Divisionsalgorithmus beginnt man wie folgend dargestellt. Links ist der Beginn der Divisionskette zu sehen, rechts die ersten Stellen der Periode:

$1 = 0 \cdot 199 + 1$	0,...
$10 = 0 \cdot 199 + 10$	0,0...
$100 = 0 \cdot 199 + 100$	0,00...
$1000 = 5 \cdot 199 + 5$	0,005...
$50 = 0 \cdot 199 + 50$	0,0050...
$500 = 2 \cdot 199 + 102$	0,00502...
$1020 = 5 \cdot 199 + 25$	0,005025...
$250 = 1 \cdot 199 + 51$	0,0050251...
$510 = 2 \cdot 199 + 112$	0,00502511...

Die Division durch 199 lässt sich fast ebenso leicht im Kopf durchführen wie die Division durch 200 und die Bestimmung der Reste ist ebenfalls nicht schwierig. Dennoch wird sicher jeder die Berechnung mit Hilfe des multiplikativen Algorithmus für noch einfacher halten.

Bei Nutzung des Multiplikationsalgorithmus beginnt man mit der Suche eines Vielfachen von 199, das kongruent 9 modulo 10 ist. Die Suche ist sofort beendet, denn die Zahl 199 selbst ist eine solche Zahl. Zu dieser Zahl addieren wir 1 und erhalten 200. Nun dividieren wir noch durch 10 und haben mit der Zahl 20 unseren Multiplikator gefunden.

Wir beginnen mit der Startzahl 1 und multiplizieren mit 20 modulo 199. Wir fahren fort, die erhalten Produkte mit 20 modulo 199 zu multiplizieren, bis wir wieder 1 erhalten. Diese Multiplikation lässt sich leicht durchführen. Wir zerlegen jedes erhaltene Produkt x in die beiden Summanden $10a + b$, so dass b gerade der Zehnerrest von x ist und erhalten das nächste Produkt $20x \bmod 199 = 20(10a + b) \bmod 199 = 200a + 20b \bmod 199 = 20b + a \bmod 199$.

Die Rechnung ist dann kinderleicht im Kopf durchführbar und beginnt wie folgend dargestellt. Links sind die ersten Multiplikationen dargestellt, rechts die auf diese Weise gefundenen letzten Stellen der Periode:

1	...1
$1 \cdot 20 = 20$	...01
$0 \cdot 20 + 2 = 2$	...201
$2 \cdot 20 = 40$	...0201
$0 \cdot 20 + 4 = 4$	...40201
$4 \cdot 20 = 80$	...040201
$0 \cdot 20 + 8 = 8$	...8040201
$4 \cdot 20 = 160$	...08040201
$0 \cdot 20 + 16 = 16$	...608040201
$6 \cdot 20 + 1 = 121$	...1608040201

Nun war dieses Beispiel auch noch mit dem Divisionsverfahren recht einfach. Deutlicher wird der Vorteil des multiplikativen Verfahrens in anderen Beispielen. Der Blick auf obige Tabelle zeigt beispielsweise, dass eine fortwährende Division durch 197 zur Bestimmung der Periode von $\frac{1}{197}$ ersetzt werden kann durch eine Multiplikation mit 138. Wenn man sich nun noch vergegenwärtigt, dass immer nur die Zehnerreste, also einstellige Zahlen mit 138 multipliziert werden müssen, und dann noch eine einfache Addition durchzuführen ist, dann dürfte klar sein, dass dieses Verfahren die Konstruktion der Periode erleichtert.

Natürlich ist dieses Verfahren, wie schon oben erwähnt, nicht für den Einsatz in Klassenstufe 6 geeignet, da es kaum möglich sein dürfte, den Schülerinnen und Schülern zu erklären, warum es auf diese Weise möglich ist, die Kommadarstellung zu finden.

Dass dieses Verfahren völlig unabhängig von der Wahl des gewählten Stellenwertsystems funktioniert, ist selbstverständlich. Aber dennoch ist es eine lohnende Übung, es einmal in einem anderen Stellenwertsystem anzuwenden.

Beispielhaft wird die Herleitung der Kommadarstellung von $\frac{1}{7}$ hier im Zweier- und anschließend im Dreiersystem durchgeführt.

Im Zweiersystem schreibt sich 7 als 111. Gesucht ist nun die Kommadarstellung von $\frac{1}{111_{(2)}}$, alle nun folgenden Zahlen sind im Zweiersystem geschrieben. Es wird das gleiche Verfahren angewendet wie oben. Zunächst ist ein Vielfaches von 111 zu suchen, das kongruent zu $-1 \bmod 10$ ist. Da schon $111 \equiv -1 \bmod 10$ ist, ist die Suche beendet, und man kann beginnen.

Die Startzahl ist 1 und der Multiplikator ist $\frac{111+1}{10} = 100$.

$$\begin{array}{rclclcl}
 1 \bmod 10 & \cdot \frac{111+1}{10} & + & \frac{1-1 \bmod 10}{10} & = & 100 \\
 & \cdot \frac{111+1}{10} & + & \frac{100-100 \bmod 10}{10} & = & 10 \\
 100 \bmod 10 & & & & & \\
 10 \bmod 10 & \cdot \frac{111+1}{10} & + & \frac{10-10 \bmod 10}{10} & = & 1
 \end{array}$$

Nach drei Stellen endet also im Zweiersystem die Periode von $\frac{1}{7}$.

Es ist nur noch die Reihenfolge der Nachkommastellen zu beachten:

Wir hatten die Startzahl 1 und erzeugten danach mithilfe des Algorithmus die Zahlen 100, 10 und wieder 1, die aber nur den Abbruch des Verfahrens mitteilen soll. Also bilden die Endziffern der Zahlen 1, 100, 10 in umgekehrter Reihenfolge die Periode:

$$\frac{1}{7_{(10)}} = \frac{1}{111_{(2)}} = 0,\overline{001}_{(2)}.$$

Übrigens ist es, da an der dritten Stelle hinter dem Komma im Zweiersystem die Achtel geschrieben werden, der Grenzwert der geometrischen Reihe

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{8}\right)^i \text{ und es ist}$$

$$\lim(-1 + \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{8})^i) = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} - 1 = \frac{1}{(\frac{7}{8})} - 1 = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}.$$

Ein anderer Weg der Selbstkontrolle ist natürlich wieder gegeben, indem man das oben genannte Verfahren zur Umschreibung der Kommadarstellung in die Bruchdarstellung benutzt, bei dem man ein geeignetes Vielfaches der gegebenen Zahl sucht und die Differenz bildet:

$$\text{Es ist } 1000_{(2)} \cdot 0,001_{(2)} = 1,001_{(2)}$$

$$1_{(2)} \cdot 0,001_{(2)} = 0,001_{(2)}$$

$$\text{also } 111_{(2)} \cdot 0,001_{(2)} = 1, \text{ also } 0,001_{(2)} = \frac{1}{111_{(2)}}$$

Im Dreiersystem schreibt sich 7 als 21 und es ist $\frac{1}{7_{(10)}} = \frac{1}{21_{(3)}}$. Zu der $21_{(3)}$ ist

nun zunächst wieder ein Vielfaches zu finden, das kongruent zu $-1 \bmod 10$ ist, beziehungsweise kongruent zu $2 \bmod 10$. Das Doppelte der Zahl erfüllt die

Bedingung. Es ist $2 \cdot 21_{(3)} = 112_{(3)}$ und $\frac{1}{21_{(3)}} = \frac{2}{112_{(3)}}$. Unsere Startzahl ist also

die 2, und der Multiplikator ist $\frac{112_{(3)} + 1}{10_{(3)}} = 12_{(3)}$

$2 \bmod 10$	$\cdot \frac{112+1}{10}$	+	$\frac{2 - 2 \bmod 10}{10}$	=	101
	$\cdot \frac{112+1}{10}$	+	$\frac{101 - 101 \bmod 10}{10}$	=	22
$101 \bmod 10$	$\cdot \frac{112+1}{10}$	+	$\frac{22 - 22 \bmod 10}{10}$	=	110
$22 \bmod 10$	$\cdot \frac{112+1}{10}$	+	$\frac{110 - 110 \bmod 10}{10}$	=	11
$110 \bmod 10$	$\cdot \frac{112+1}{10}$	+	$\frac{11 - 11 \bmod 10}{10}$	=	20
$11 \bmod 10$	$\cdot \frac{112+1}{10}$	+	$\frac{20 - 20 \bmod 10}{10}$	=	2
$20 \bmod 10$					Abbruch!

Abgesehen von der zuletzt erzeugten Zahl 2, die den Abbruch anzeigt, weil sie mit der Startzahl übereinstimmt, haben wir mit unserem Algorithmus nacheinander die Zahlen 2, 101, 22, 110, 11, 20 erzeugt, von denen wir aber nur die Endziffern benötigen 2, 1, 2, 0, 1, 0 und diese noch in ihrer Reihenfolge umkehren müssen: 0, 1, 0, 2, 1, 2 sind die ersten 6 Nachkommastellen, die sich danach periodisch wiederholen.

Es ist also $\frac{1}{7_{(10)}} = \frac{1}{21_{(3)}} = 0,\overline{010212}_{(3)}$. Auch hier kann man natürlich wieder

mithilfe des bereits gezeigten Verfahrens für die Umwandlung von Kommadarstellung in Bruchdarstellung oder mithilfe einer geometrischen Reihe die gefundene Darstellung auf ihre Richtigkeit überprüfen.

Ich fand den Algorithmus bei der Beschäftigung mit sogenannten Karussellzahlen. Letztere begegneten mir erstmals bei einer Denksportaufgabe. Das Problem hieß folgendermaßen:

Gesucht ist eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass man eine doppelt so große Zahl erhält, wenn man die letzte Ziffer dieser Zahl von hinten nach vorne stellt und alle anderen Ziffern eine Stelle nach rechts rücken.

Es zeigte sich, dass die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft 18 Stellen hat: 105263157894736842. Denn durch das Stellen der letzten Ziffer nach vorne und Verschiebung aller anderen Ziffern um eine Stelle nach rechts, erhält man mit 210526315789473684 die Zahl, die doppelt so groß ist.

Es fällt auf, dass es die Perioden der Zahlen $\frac{2}{19}$ und $\frac{4}{19}$ sind. $\frac{1}{19}$ hat die Periode 052631578947368421 und wenn eine links stehende Null erlaubt wäre, dann wäre dieses die kleinste Zahl, die als Lösung der Denksportaufgabe infrage kommt. Man findet sie leicht, in dem man sie von der Einerstelle ausgehend konstruiert. Setzt man dort eine 1, so muss an der Zehnerstelle eine 2 sein, da man beim Verschieben der Zehnerstelle um eine Stelle nach rechts

das Doppelte erhält. Somit muss an der Hunderterstelle eine 4, an der Tausenderstelle eine 8 sein und so weiter.

Man kann die Denksportaufgabe natürlich leicht abändern und eine Zahl suchen mit der Eigenschaft, dass man das Fünffache der Zahl erhält, wenn man die letzte Ziffer nach vorne stellt und jede weitere Ziffer um eine Stelle nach hinten verschiebt.

Eine solche Zahl ist 142857, denn ihr Fünffaches ist 714285. Es sind übrigens die Periodenlängen von $\frac{1}{7}$ und $\frac{5}{7}$.

Man kann leicht viele weitere Beispiele suchen und finden.

9 Zur Erprobung des Konzepts im Unterricht

Im Folgenden werde ich über die erste Erprobung des Konzeptes im Unterricht berichten. Denn ich wünsche mir Nachahmer für die Arbeit nach diesem Konzept. Dieser Bericht soll einerseits über die praktische Erfahrung mit diesem Konzept Auskunft geben, andererseits soll er potenziellen Interessenten auf verschiedene Weise Hilfestellung für die eigene Arbeit nach diesem Konzept geben. So kann der Bericht als eine Art Leitfaden betrachtet werden, an dem man sich orientieren kann. Da das Konzept einiger bereits erwähnter Grundvoraussetzungen bedarf, die nicht zwangsläufig gegeben sind, werde ich auch darüber berichten, wie ich diese vor dem Start zu schaffen bemüht war. Bei der Beschreibung des Konzeptes werde ich bewusst nicht über die Methodik berichten. Denn wie jedes didaktische Konzept lässt auch dieses die Freiheit der Methode unberührt.

Nicht verschweigen werde ich Hindernisse und Schwierigkeiten, die bei der Arbeit nach diesem Konzept vorgekommen sind und die vielleicht auch nur schwer vermeidbar sind.

9.1 Äußere Hindernisse und Schwierigkeiten

Alle Mathematiklehrerinnen und -lehrer, die mit den bisherigen didaktischen Konzepten für die Bruchrechnung unzufrieden sind und einem neuen Konzept gegenüber aufgeschlossen sind, werden auch über mögliche Probleme nachdenken, die ein neues Konzept mit sich bringt, ehe sie abwägen, ob es sich lohnen wird, nach dem neuen Konzept zu arbeiten. Die Prognose von potenziellem Nutzen eines Konzeptes und potenziellen Problemen, die den Nutzen behindern, ist schwierig und kann aus verschiedenen Gründen sehr unterschiedlich ausfallen.

Über den erhofften Nutzen dieses Konzeptes habe ich schon geschrieben und es folgt noch ein Bericht über den erfolgreichen Einsatz dieses Konzeptes.

Nicht verschwiegen werden sollen die potenziellen Probleme, die man bei der Arbeit nach diesem Konzept sehen kann, um zu zeigen, dass die Sorge, diese potenziellen Probleme stellten Schwierigkeiten dar, unberechtigt ist.

Vermutete Probleme sollen nicht die Arbeit nach diesem Konzept verhindern.

Denn es kann gezeigt werden, dass sie überschätzt werden.

Im Folgenden wird klar, dass alle vorherigen Befürchtungen über Hindernisse und Erschwernisse aufgrund äußerer Umstände sich als übertrieben erweisen und der Unterricht nach diesem Konzept sehr wohl ohne größere Schwierigkeiten gestaltet werden kann.

Zunächst mag es tatsächlich so scheinen, als gäbe es einige grundsätzlich verschiedene Hindernisse, welche die Arbeit nach diesem Konzept erschweren. Oben wurde über Fehlvorstellungen berichtet, die im Primarstufenunterricht erworben wurden beziehungsweise über günstige Voraussetzungen, die den Einstieg nach diesem Konzept erleichtern.

Nun hat man im Normalfall als Mathematiklehrer in Klassenstufe 6 keinen Einfluss auf den Primarstufenunterricht. Wie diesem Problem begegnet werden kann, wird in 9. 2 behandelt.

Daneben gibt es äußere Faktoren, welche die Arbeit nach diesem Konzept zu behindern scheinen.

Ich werde zeigen, dass diese äußeren „Hindernisse“ sich als Scheinhindernisse entpuppen. Aus Gesprächen mit Lehrerinnen und Lehrern gingen folgende befürchtete „Hindernisse“ hervor:

1. Die Arbeit nach einem neuen Konzept erfordert viel gedankliche Arbeit. Warum sollte jemand, der schon mehrfach Bruchrechnung unterrichtet hat, sich diese Arbeit machen?
2. Das Lehrbuch ist ein Problem, denn es gibt kein Lehrbuch, das nach diesem Konzept vorgeht. Alle bisher erhältlichen Lehrbücher beginnen auf der konkreten Ebene. Eine Einführung der Brüche auf der konkreten Ebene widerspricht aber diesem Konzept

3. Die Eltern oder die Nachhilfelehrerinnen und -lehrer sind mit diesem Konzept nicht vertraut und werden ihren Kindern schon frühzeitig mit Konkretisierungen helfen, die in dem Konzept erst später vorgesehen sind.
4. Durch institutionelle Zwänge wie Parallelarbeiten oder Vergleichstests fühlen sich viele Lehrerinnen und Lehrer verpflichtet, mit ihren Kolleginnen und Kollegen parallel zu arbeiten und detailliert abzusprechen, wie didaktisch und methodisch gearbeitet werden soll. Da müssten sich alle für das gleiche Konzept entscheiden.

All dies sind keine Hindernisse, wie gleich gezeigt wird.

zu 1.: Der Grund für einen Konzeptwechsel ist offensichtlich und wurde auch schon genannt: Alle bisherigen Konzepte sind gescheitert. Wie aus der Beschreibung der Erprobung ersichtlich wird, ist die Arbeit mit zumutbarem Zusatzaufwand zu bewältigen.

zu 2.: Es empfiehlt sich, das Lehrbuch nur als Aufgabensammlung zu verwenden. Es ist klar, dass ein Ansatz im Formalen auch andere Übungsaufgaben erfordert als ein Ansatz im Konkreten. Somit ist darauf zu achten, dass die gewählten Aufgaben nicht im Konflikt mit dem Konzept stehen, was bei vielen Aufgaben aus dem Buch der Fall sein dürfte. Eine Alternative dazu besteht darin, die Bücher sogar während der Zeit des Bruchrechnenunterrichts einzusammeln und selbst geeignete Aufgaben zur Übung zusammenzustellen.

Was das „Hindernis“ Lehrbuch betrifft, so ist festzustellen, dass die Voraussetzungen nicht ideal sind. Aber das kann auch gar nicht anders sein. Wenn ein neues Konzept umgesetzt wird, dann ist klar, dass im Buch nach einem anderen Konzept vorgegangen wird. Entscheidend ist, dass es unabhängig vom Lehrbuch gut möglich ist nach diesem Konzept zu arbeiten – falls nötig, dann eben mit vollständigem Verzicht auf das Lehrbuch.

zu 3.: Wenn dieses wirklich ein Hinderungsgrund wäre, hätte es noch niemals eine Entwicklung neuer didaktischer Konzepte geben können, da es diese Voraussetzungen immer gibt. Natürlich ist es nicht optimal, wenn im Unterricht bewusst darauf verzichtet wird, einen Zugang im Konkreten zu wählen und die Eltern oder Nachhilfelehrer diesen Zugang im Konkreten ungefragt nachliefern. Aber es muss entgegnet werden, dass ein Unterrichtskonzept sich niemals an den Fähigkeiten oder Kenntnissen der Eltern oder an den Konzepten von Nachhilfelehrern orientieren darf. Der Unterricht wird schließlich für die Schülerinnen und Schüler gemacht.

Nebenbei bemerkt zeigt sich natürlich besonders deutlich, bei welchen Schülerinnen und Schülern die Eltern intensiv mitgewirkt und dadurch leider sogar manchmal die Arbeit behindert haben. Denn es kam zum Beispiel vor, dass in den Hausaufgaben bei einigen die gemischte Schreibweise auftauchte, ohne dass sie jemals Gegenstand des Unterrichts war.

Grundsätzlich lässt es sich nicht vermeiden, dass andere Personen Einfluss nehmen und selbst mit anderen Konzepten arbeiten. Schon in einer einzigen Vertretungsstunde, die ein Kollege erteilt, könnte das passieren. Das ist aber keine spezielle Eigenschaft dieses Konzepts, sondern es trifft auf alle Konzepte zu und ist deswegen auch kein Argument gegen dieses Konzept.

zu 4.: Man kann nicht davon ausgehen, dass alle Kolleginnen und Kollegen, die im Jahrgang parallel Mathematik unterrichten, ebenfalls das Interesse und die Bereitschaft mitbringen, nach einem neuen Konzept zu arbeiten. Man muss sich da auf Widerstand einstellen, denn manche haben die Problematik der bisherigen Konzepte noch gar nicht erkannt. Man sollte bereit sein, dann auch alleine nach diesem Konzept zu arbeiten und kann anschließend, wenn man sich selbst vom Erfolg überzeugt hat, bei den Kolleginnen und Kollegen erneut dafür werben. Sie

werden vermutlich auch offener dafür sein, wenn sie erste positive Erfahrungsberichte und natürlich auch Hinweise auf mögliche Problembereiche erhalten.

Der Wunsch nach Zusammenarbeit mit Kolleginnen und Kollegen oder der Zwang zur Teilnahme an Parallelarbeiten oder Vergleichstests darf nicht darüber entscheiden, nach welchem didaktischen Konzept man arbeitet. Denn sonst hieße es, dass die Orientierung an Kolleginnen und Kollegen oder an verordneten Tests wichtiger wären als der Lernerfolg der Schülerinnen und Schüler.

Möglicherweise werden vereinzelt noch weitere „Hindernisse“ gesehen. Wenn man aber von der Qualität eines Konzeptes überzeugt ist, dann sollte man sich bei jedem der angeführten „Hindernisse“ die Frage stellen, ob es nicht nur ein Scheinhindernis ist.

9.2 Grundvoraussetzungen

Der Bruchrechnenunterricht findet in Klassenstufe 6 statt. Es gibt eine Reihe von Vorkenntnissen, die die Schülerinnen und Schüler für die Bruchrechnung beherrschen sollten. Dafür kann man als Lehrperson sorgen, indem man gegebenenfalls entsprechende Übungen veranlasst, sodass die Schülerinnen und Schüler sich die fehlenden Kenntnisse und Fähigkeiten aneignen können. Außerdem gibt es neben den nötigen Vorkenntnissen auch eine Reihe von bereits erwähnten Fehlvorstellungen, deren Existenz man berücksichtigen muss, um diese, falls möglich, zu beseitigen.

Zu den Vorkenntnissen, die die Schülerinnen und Schüler haben sollten, kommen weitere Vorkenntnisse, die sie zum Beispiel im Alltag erworben haben. So kennen sie einige konkrete Brüche aus dem Alltag und aus dem Unterricht der Größen in Klassenstufe 5: die $\frac{1}{2}$ -Liter - Flasche, die $\frac{3}{4}$ -Stunde, aber auch 1,99 € oder 1,65 m und viele andere konkrete Brüche in Kommadarstellung.

Auf diese konkreten Brüche als Einstieg zurück zu greifen, scheint sich nach der vorherrschenden Meinung anzubieten, denn ein Alltagsbezug kann motivierend wirken. Aber der Schein trügt. Sogar Padberg räumt ein, dass der Nutzen dieser Vorerfahrungen überschätzt wird: „Vielmehr wird von den weitaus meisten Schülern in unserer Untersuchung bislang kaum ein Zusammenhang zwischen der *Zahlenwelt* der Brüche (Beispiel: $\frac{3}{4}$) und der *Bilderwelt* konkreter Größen (Beispiel: dreiviertel Pizza) gesehen. [...] Daher sollte man zu Beginn der systematischen Bruchrechnung in Klasse 6 die vorhandenen anschaulichen Vorerfahrungen der Schüler zum Bruchzahlbegriff keineswegs *überschätzen* und rasch zur *symbolischen* Bruchebene übergehen.“¹³⁶

Dass die Vorerfahrungen unserem Konzept sowieso nicht als Grundlage dienen, ist klar, denn dieses Konzept beginnt im Abstrakten und führt erst später zum Konkreten. Dass außerdem der Beginn des Bruchrechnenunterrichts auf der Anschauungsebene für viele Fehlvorstellungen verantwortlich ist, wurde oben schon als ein guter Grund genannt, diese Ebene zu Beginn des Unterrichts zu vermeiden.

Die Grundlagen liegen also außerhalb der Vorerfahrungen mit Brüchen und außerhalb ihrer Anschauung.

Von allen Inhalten, die in den Klassenstufen 1 bis 5 unterrichtet werden, wird natürlich besonders die Beherrschung der Grundrechenarten benötigt. Dabei sollte besonders Wert darauf gelegt werden, dass die Schülerinnen und Schüler sicher mit dem Einmaleins umgehen und das Kommutativ- und Distributivgesetz beherrschen.

Für die Umwandlung in die Kommadarstellung sind die Beherrschung des Stellenwertsystems und der Divisionsalgorithmus besonders wichtig.

Auch wenn es immer wieder vorkommt, dass Sechstklässler große Defizite bei der Beherrschung der Grundrechenarten oder beim sicheren Umgang mit dem Stellenwertsystem haben, so sind die oftmals im Grundschulunterricht erworbenen Fehlvorstellungen das viel größere Hindernis bei der Einführung der Brüche. Diese Fehlvorstellungen gilt es zu korrigieren, bevor mit dem Bruchrechnenunterricht nach diesem Konzept begonnen werden kann.

¹³⁶ Padberg (2002: 34)

Oben wurden bereits ausführlich einige dieser Fehlvorstellungen genannt, von denen die schwerstwiegenden, wie erwähnt, das Missverständnis zwischen Zahl und Aufgabe sowie die falsche Notation der Division mit Rest zu sein scheinen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Lernvoraussetzungen einerseits Fähigkeiten sind, die die Schülerinnen und Schüler haben sollten, andererseits Fehlvorstellungen, die sie nicht haben sollten:

1. Sicherer Umgang mit den Grundrechenarten einschließlich der schriftlichen Rechenverfahren und der Division mit Rest
2. Sicherer Umgang mit den Rechengesetzen
3. Sicherer Umgang mit den Teilbarkeitsregeln, ggT und kgV
4. Klarheit darüber, was Zahl und was Aufgabe ist

In den meisten Fällen ist es wahrscheinlich unumgänglich, das Missverständnis zwischen Zahl und Aufgabe aus der Welt zu schaffen, sodass keine Aufgabe – Ergebnis – Deutung mehr vorliegt, sondern von allen akzeptiert wird, dass eine Zahl viele Darstellungsmöglichkeiten hat.

9.3 Erfahrungsbericht über die Erprobung des Konzepts

Die Ausgangslage in meiner Klasse, in der ich das Konzept zum ersten Mal in der Praxis erprobt habe, war folgende:

Es handelte sich um die 6. Klasse einer Realschule. In der Klasse waren zum Beginn des Schuljahres 22 Kinder, davon 14 Mädchen und 8 Jungen. 19 der Kinder waren schon seit der 5. Klasse zusammen, drei kamen erst zu Beginn des 6. Schuljahres dazu. Zwei von diesen Dreien absolvierten die 5. Klasse auf einem Gymnasium, eine wiederholte bei uns die 6. Klasse, die sie zuvor auf einer Gesamtschule erfolgreich absolviert hatte. Ein Schüler verließ nach ein paar Monaten die Klasse wegen eines Umzugs in eine andere Stadt, ein anderer stieß fast gleichzeitig aus einer Parallelklasse dazu, die er als Folge einer Ordnungsmaßnahme wegen permanenter Unterrichtsstörungen verlassen musste.

Ein weiterer Schüler kam im letzten Drittel des Schuljahres aus einer anderen Stadt dazu. Während der meisten Zeit bestand die Lerngruppe also aus 22 Schülerinnen und Schülern, von denen acht eine Hauptschulempfehlung haben. 10 Schülerinnen und Schüler dieser Klasse haben eine Lese-Rechtschreib-Schwäche. Ich unterrichtete in der Klasse schon im 5. Schuljahr Mathematik und bin auch seitdem ihr Klassenlehrer gewesen. Die Leistungsstärke der Lerngruppe war insgesamt zunächst als schwächer zu bezeichnen, als ich sie aus 5. Klassen der Vorjahre gewohnt war. Dagegen war die Einsatzbereitschaft deutlich überdurchschnittlich.

Wenn im Mathematikunterricht Ruhe zur Bearbeitung von Problemen oder zum Erklären erforderlich war, zeigte die Klasse sich äußerst diszipliniert. Durch eine gute Arbeitsatmosphäre und auch wegen der geringen Größe der Lerngruppe konnten die meisten der leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler ihre Leistungen in ihrer Realschulzeit verbessern und die Aufgaben auch meist erfolgreich absolvieren. Benachteiligt wurde die Klasse allerdings durch meine Klassenlehrertätigkeit. Denn da keine Zusatzstunde für die Bewältigung der Klassenangelegenheiten zur Verfügung stand, mussten diese alle während der wenigen Mathematikstunden geklärt werden, sodass weniger Unterrichtszeit für die Mathematik zur Verfügung stand.

In Klassenstufe 5 zeigte sich schon, dass manche Schülerinnen und Schüler aus der Grundschulzeit nicht auf ausreichende Fähigkeiten bei Multiplikationen oder Divisionen im Einmaleins zurückgreifen konnten. Teils fehlte es auch an Sicherheit, wenn es um Additionen oder Subtraktionen zweistelliger Zahlen im Kopf ging. Auch im Bereich der schriftlichen Rechenverfahren musste nachgearbeitet werden, insbesondere bei der Multiplikation und der Division.

Wie eine Division mit Rest notiert wird, war nicht bekannt, stattdessen hatten die Schülerinnen und Schüler die bereits mehrfach erwähnte falsche Notation gelernt und verinnerlicht, zeigten sich aber schließlich einsichtig, dass diese gelernte Notation falsch sein muss. Es war nicht leicht, die Schülerinnen und Schüler davon zu überzeugen, dass etwas, was sie in der Grundschule gelernt haben, falsch oder nicht gut ist, beziehungsweise ihnen antrainierte Notationen oder Verfahren abzugewöhnen.

So überzeugte ich sie, wie in 3.2 beschrieben, davon, dass ihre Schreibweise nicht gut ist und durch eine korrekte Schreibweise ersetzt werden muss.

Solche Voraussetzungen wie der Umgang mit den Rechenregeln, zum Beispiel dem Distributivgesetz, wurden lang vorher, schon in Klassenstufe 5 vorbereitet.

Bei den Rechengesetzen ging es nicht darum, sie stur anwenden zu lassen, sondern die Schülerinnen und Schüler an zahlreichen Beispielen merken zu lassen, dass diese Gesetze nützlich sind, um sich Rechenvorteile zu verschaffen. Diese Vorteile haben wir an vielen Aufgaben genutzt.

Einige Beispiele, an denen die Rechenvorteile, die sich aus einem cleveren Umgang mit dem Distributivgesetz ergeben, sind:

$$157 \cdot 42 + 143 \cdot 42 = (157 + 143) \cdot 42 = 300 \cdot 42 = 12600$$

$$19 \cdot 56 + 19 \cdot 44 = 19 \cdot (56 + 44) = 19 \cdot 100 = 1900$$

Beim Kopfrechnen benutzten die meisten Schülerinnen und Schüler ebenfalls das Distributivgesetz, ohne dass sie sich dessen bewusst waren. Sie zerlegten nämlich meist einen der beiden Faktoren in zwei Summanden:

$$23 \cdot 12 = 23 \cdot (10 + 2) = 23 \cdot 10 + 23 \cdot 2 = 230 + 46 = 276 \text{ oder}$$

$$23 \cdot 12 = (20 + 3) \cdot 12 = 20 \cdot 12 + 3 \cdot 12 = 240 + 36 = 276.$$

Wir sahen, dass auch für die Division beide Richtungen nützlich sein können:

$$175 : 5 + 325 : 5 = (175 + 325) : 5 = 500 : 5 = 100$$

$$378 : 7 = (350 + 28) : 7 = 350 : 7 + 28 : 7 = 50 + 4 = 54$$

Zum Beginn des Schuljahres befassten wir uns mit Teilbarkeitseigenschaften von Zahlen. Die Schülerinnen und Schüler lernten, woran man die Teilbarkeit durch Zahlen wie 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 20, 50, 100 und so weiter leicht erkennen kann. In diesem Zusammenhang lernten sie auch die Neunerprobe kennen und anzuwenden. Sie lernten, was Primzahlen sind, wie man sie mit dem Sieb des Eratosthenes finden kann, dass man jede zusammengesetzte Zahl als Produkt von Primzahlen darstellen kann, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Sie befassten sich mit Teiler- und Vielfachenmengen, machten sich auf

verschiedene Weisen auf die Suche nach gemeinsamen Teilern und Vielfachen gegebener Zahlen und lernten Verfahren zur Bestimmung besonderer gemeinsamer Teiler und Vielfache, nämlich dem größten gemeinsamen Teiler (ggT) und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV). Das Wissen über diese Inhalte war an vielen Stellen im späteren Bruchrechnenunterricht nützlich.

Schließlich musste ich dafür sorgen, dass der 4. Punkt in obiger Liste der Lernvoraussetzungen erfüllt wird, nämlich dass die Schülerinnen und Schüler Klarheit darüber besitzen, was eine Zahl ist.

Auch in meiner Lerngruppe herrschte das Missverständnis zwischen Zahl und Aufgabe in Klassenstufe 5 noch aus Grundschulzeiten vor. Folglich stellte ich, insbesondere vor Beginn der Einheit, Aufgaben, deren Ziel es war, dieses Missverständnis zu beheben.

Beispielsweise teilte ich die Tafelfläche in 6 Bereiche, von denen jeder einen Quadratmeter groß war, und forderte dann 6 Schülerinnen und Schüler auf, sich Zahlen zu wünschen. Sie wünschten sich die Zahlen 6, 8, 0, 2, 15 und 2000000.

Sie durften jede dieser Zahlen ungefähr in die Mitte eines quadratmetergroßen Feldes schreiben. Anschließend forderte ich alle Schülerinnen und Schüler der Klasse auf, nach vorne zu kommen und gab ihnen den Auftrag, andere Schreibweisen dieser Zahlen in das jeweilige Feld zu notieren.

Bei der 6 begann es zum Beispiel mit „sechs“, „six“, „VI“, „ⅢⅢ I“, „110₂“, ehe sich einige an Schreibweisen wie „2 · 3“ oder „5 + 1“ wagten. Es dauerte nicht lange, bis die Tafel voll beschrieben war, und es hatte auch jeder aus der Klasse seinen Anteil daran. Es wurde zwar, wie erwartet, die Frage geäußert, ob nicht „5 + 1“ eine Aufgabe sei, aber dieses Bedenken wurde schnell aus dem Weg geräumt mit der Gegenfrage, wie viel denn 5 + 1 sei und der Bemerkung, dass es also das gleiche sei wie 6.

Die Frage, auf wie viele Weisen sich die Zahl 6 schreiben lässt, konnte danach jeder mit „unendlich“ beantworten. Dass dasselbe auch für jede andere Zahl zutrifft, konnte problemlos eingesehen werden.

Es fiel auf, dass bei diesen Darstellungen bestimmte Verknüpfungen häufiger auftauchen als andere. Wir untersuchten, woran das liegen könnte und fanden heraus:

Addition:	Die Anzahl der Möglichkeiten scheint von der Größe der Zahl abzuhängen.
Multiplikation:	Die Anzahl der Möglichkeiten scheint von der Anzahl der Teiler abzuhängen.
Subtraktion:	Die Anzahl der Möglichkeiten ist unendlich.
Division:	Die Anzahl der Möglichkeiten ist unendlich.

Aufschlussreich war die Seite mit der 0. Denn dort wurde 0 additiv als $0 + 0$ sowie als $0 + 0 + 0$ dargestellt. Das veranlasste eine Schülerin zu der Einsicht, dass obige Aussage über die Anzahl der Möglichkeiten bei der Addition korrigiert werden muss. Denn dort gibt es auch unendlich viele Möglichkeiten, da man ja immer wieder „+ 0“ anhängen darf. Ich fragte dann provokativ, ob die Multiplikation die einzige Rechenart sei, bei der man eine begrenzte Anzahl von Möglichkeiten habe. Mir wurde geantwortet, dass man ebenso wie „+ 0“ auch „ $\cdot 1$ “ beliebig oft anfügen dürfe. Während man also bei der Subtraktion und der Division unendlich viele wesentlich verschiedene Möglichkeiten für die Darstellung einer Zahl finden kann, so ist man bei der Addition und bei der Multiplikation auf die wiederholte Verknüpfung mit dem für die jeweilige Verknüpfung neutralen Element angewiesen, wenn man unendlich viele Darstellungsmöglichkeiten finden möchte.

Zum Einstieg in die Bruchrechnung wiederholten wir, was oben beschrieben wurde: Die Tafel sollte mit ganz vielen Namen für eine Zahl beschrieben werden. Das Resultat wurde bereits beschrieben, diese Aufgabe wurde von der Lerngruppe gerne und erfolgreich bewältigt. Die vollgeschriebene Tafel lieferte nun eine Menge Material, das sich ausnutzen ließ, um durch Ordnung nach der jeweils benutzten Verknüpfung die Invarianzen zusammenzutragen. Dass dies in einer 6. Klasse nicht auf formaler Ebene geschehen soll, ist klar. Es reicht, wenn die Lerngruppe die Invarianzen erkennt, sie erklären kann und dann auch wieder anwenden kann. Dass diese Invarianzen an dieser Stelle nicht zum

ersten Mal auftauchten, ist auch klar. Sie sollten schon in der Grundschule zur Erleichterung von Rechnungen ausgenutzt worden sein. In jedem Fall nutzten wir sie zu diesem Zweck in der Klassenstufe 5, in der viel Unterrichtszeit für das vertiefende Üben der Grundrechenarten vorgesehen ist. Es bot sich aber an, diese Invarianzen hier noch einmal besonders herauszuheben.

Ist eine Zahl als Summe geschrieben, so können wir den einen Summanden um eine Zahl verkleinern und den anderen Summanden um die gleiche Zahl vergrößern und erhalten wieder eine Darstellung der Zahl als Summe zweier Zahlen.

Das heißt, es gilt:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0: a + b = (a - c) + (b + c)$$

Selbstverständlich beschränkt man sich auf Beispiele, die in Klassenstufe 6 „gehen“, nämlich auf solche, bei denen $a - c > 0$ ist. Auch für die folgenden Invarianzen soll gelten, dass wir im Bereich der positiven und zunächst auch im Bereich der natürlichen Zahlen bleiben.

Ist eine Zahl als Differenz dargestellt, so erhalten wir wieder eine Darstellung derselben Zahl als Differenz, wenn wir Minuend und Subtrahend um die gleiche Zahl vergrößern oder verkleinern:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \mathbb{N}_0: \quad a - b &= (a + c) - (b + c) \\ a - b &= (a - c) - (b - c) \end{aligned}$$

Ist eine Zahl als Produkt zweier Zahlen dargestellt, so erhalten wir wieder eine Darstellung derselben Zahl als Produkt zweier Zahlen, wenn wir den einen Faktor durch eine Zahl dividieren und den anderen Faktor mit derselben Zahl multiplizieren:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}_0 \quad \forall c \in \mathbb{N} : a \cdot b = (a : c) \cdot (b \cdot c)$$

Ist eine Zahl als Quotient zweier Zahlen dargestellt, so erhalten wir wieder eine Darstellung als Quotient zweier Zahlen, wenn Dividend und Divisor durch dieselbe Zahl dividieren oder mit derselben Zahl multiplizieren:

$$\forall a \in \mathbb{N}_0 \quad \forall b, c \in \mathbb{N} : \quad \begin{aligned} a : b &= (a \cdot c) : (b \cdot c) \\ a : b &= (a : c) : (b : c) \end{aligned}$$

Man erleichtert sich den Einstieg in die Bruchrechnung auf der formalen Ebene, wenn man dieses ausführlich behandelt. Dass all dieses auch zum Ausnutzen von Rechenvorteilen genutzt werden kann, wurde noch einmal zum Thema gemacht und auch an Beispielen angewendet.

Beim Kopfrechnen bedient man sich oft solcher Rechenvorteile. Soll zum Beispiel die Summe von $234 + 397$ berechnet werden, so ist man im Vorteil, wenn man sich erinnert, dass es immer besonders leicht ist, Vielfache von 10, 100, 1000 und so fort zu addieren. Wenn man dann noch sieht, dass beim zweiten Summanden nur 3 bis zur 400 fehlen, dann addiere man dort 3, die man gleichzeitig vom ersten Summanden subtrahiere.

$$234 + 397 = (234 - 3) + (397 + 3) = 231 + 400 = 631$$

Auch bei Subtraktionen kann man geschickt vorgehen, zum Beispiel:

$$597 - 423 = (597 + 3) - (423 + 3) = 600 - 426 = 174 \text{ oder noch besser}$$

$$597 - 423 = (597 - 23) - (423 - 23) = 574 - 400 = 174, \text{ da die meisten Menschen es als leichter empfinden ein Vielfaches von Hundert zu subtrahieren als von einem Vielfachen von Hundert zu subtrahieren.}$$

Natürlich erreicht man das auch, wenn man 597 und 423 jeweils um 77 vergrößert oder um 97 verringert. Es soll sich im Idealfall jede Schülerin und jeder Schüler die für sich selbst beste Weise aussuchen. Es soll auch nicht zwanghaft ein Rechenvorteil geschaffen werden, da viele Schülerinnen und Schüler auch schon so gut rechnen können, dass sie manche Rechnungen viel schneller und ebenso sicher ohne einen solchen Zwischenschritt ausführen

können und deswegen seinen Sinn nicht nachvollziehen können. Diese wollen dann meistens auch viel lieber zeigen, wie gut und schnell sie rechnen können als dass sie bereit sind, sich auf solch einen Rechenvorteil, „mit dem es ja viel länger dauert“, einzulassen. Aber es sollte jeder einsehen, dass man so rechnen darf und auch für die besten Rechner lassen sich Aufgaben finden, bei denen sie einen Rechenvorteil erkennen, beziehungsweise zumindest sehen, dass andere, die sich dieses Vorteils bedienen, plötzlich sicherer und schneller rechnen können als sie selbst.

Bei der Multiplikation ist dieser Rechenvorteil ebenso gut brauchbar, beispielsweise

$$36 \cdot 20 = (36 \cdot 2) \cdot (20 : 2) = 72 \cdot 10 = 720$$

$$12 \cdot 25 = (12 : 4) \cdot (25 \cdot 4) = 3 \cdot 100 = 300$$

Auch bei der Division ist es vorteilhaft, sich Rechnungen auf diese Weise zu vereinfachen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} &100\,000\,000 : 50\,000\,000 \\ &= (100\,000\,000 : 10\,000\,000) : (50\,000\,000 : 10\,000\,000) = 10 : 5 = 2 \end{aligned}$$

oder auch in beliebigen anderen geeigneten Schritten, etwa:

$$1440 : 160 = (1440 : 10) : (160 : 10) = 144 : 16 = (144 : 4) : (16 : 4) = 36 : 4 = 9$$

$$3125 : 25 = (3125 \cdot 4) : (25 \cdot 4) = 12500 : 100 = 125$$

Ich ließ zahlreiche Übungen bearbeiten, um den Blick für Rechenvorteile zu schärfen. Leider gab es ein Problem, das sich hierbei immer ergibt: es fällt natürlich gerade einigen rechenschwachen Kindern am meisten schwer, zu erkennen, dass sie sich die Rechnung durch geschickte Umformungen erleichtern könnten. Das heißt: Die Rechenvorteile werden meistens gerade von denjenigen Schülerinnen und Schülern am ehesten erkannt, die diese Vorteile am wenigsten brauchen. Etwas anders verhält es sich oft mit den schon genannten Schnellrechern, die zunächst glauben, dass sie bei

Benutzung eines anderen als des gewohnten Verfahrens langsamer werden und deswegen gerne freiwillig auf Rechenvorteile verzichten wollen. Sie werden aber zunehmend bereitwillig, solche Rechenvorteile zu nutzen, wenn die Rechnungen so schwierig werden, dass auf anderem Wege Fehler entstehen oder wenn andere, die sonst langsamer rechneten, plötzlich wegen der Ausnutzung von Vorteilen schneller rechnen.

Wir übten viel während des Unterrichts. Aber auch zuhause bekamen die Schülerinnen und Schüler Zahlen, die miteinander verknüpft sind, mit dem Auftrag, sie unter Nutzung der oben beschriebenen Rechenwege möglichst einfach darzustellen. Analogien zwischen Punkt- und Strichrechnungen werden vielen, die anfangs noch nicht den Überblick haben, natürlich bei häufiger Wiederholung ähnlicher Aufgaben deutlich. Insbesondere ist das der Fall, wenn man der Lerngruppe durch saubere Notation den Überblick erleichtert.

Hausaufgaben zu diesem Thema sahen zum Beispiel so aus, dass Rechnungen ohne Verwendung schriftlicher Rechenverfahren aber mit Zwischenschritten zu bearbeiten waren, in denen Vorteile genutzt werden sollten. (hier mit kursiv gedruckten Lösungsvorschlägen):

$$397 + 625 = (397 + 3) + (625 - 3) = 400 + 622 = 1022$$

$$407 + 388 = (407 - 7) + (388 + 7) = (400 + 395) = 795$$

$$523 - 497 = (523 + 3) - (497 + 3) = 526 - 500 = 26$$

$$876 - 312 = (876 - 12) - (312 - 12) = 864 - 300 = 564$$

$$72 \cdot 25 = (72 : 4) \cdot (25 \cdot 4) = 18 \cdot 100 = 1800$$

$$45 \cdot 12 = (45 : 5) \cdot (12 \cdot 5) = 9 \cdot 60 = 540$$

$$2700000 : 30000 = (2700000 : 10000) : (30000 : 10000) = 270 : 3 = 90$$

$$3280 : 80 = (3280 : 10) : (80 : 10) = 328 : 8 = (320 : 8) + (8 : 8) = 40 + 1 = 41$$

Ich wiederhole, es geht nicht darum, zwanghaft Rechenvorteile zu nutzen. Es ging vielmehr darum, durch diese Übungen die Kenntnis und Nutzung der Invarianzen zu üben und den Blick für diese zu schärfen. Solche Übungen wurden natürlich in größerem Umfang bearbeitet als hier dargestellt.

Später wurde die oben beschriebene Tafelübung wiederholt. Nur schrieb ich diesmal eine natürliche Zahl mithilfe eines Rechenzeichens nämlich $28 : 4$ in die

Mitte der Tafel. Ich wollte sehen, in welcher Weise die Schülerinnen und Schüler reagieren, da es natürlich in Klassenstufe 5 noch welche gab, die einen Ausdruck wie $28 : 4$ nicht als Zahl akzeptieren wollten, sondern als Aufgabe bezeichneten, „weil da ja noch nichts ausgerechnet“ sei.

Eine solche Reaktion blieb nun aus. Überhaupt behandelten die Kinder den Ausdruck genau so, wie ich es erwartet hätte, wenn ich stattdessen 7 angeschrieben hätte, was ich als Fortschritt wertete.

Anschließend wurde eine andere Seite der Tafel genutzt, um die gefundenen Darstellungen nach Verknüpfungsart zu sortieren. Dies sollte die oben formal beschriebenen Invarianzen deutlich sichtbar machen und hatte nebenbei die Wirkung, dass durch Darstellungen wie $14 : 2$, $35 : 5$, $70 : 10$ und so weiter. das Kürzen und Erweitern vorbereitet wurde.

Nun wollte ich diese Aufgabe verändern und einen nichtnatürlichen Quotienten wie $30 : 4$ an die Tafel schreiben. Zwar waren solche Quotienten schon aus der Behandlung des Themas Division mit Rest bekannt, aber es ist ja sonst nicht weiter mit solchen nichtnatürlichen Quotienten gearbeitet worden. Es gab also Klärungsbedarf.

Ich musste an dieser Stelle für die allgemeine Akzeptanz solcher Quotienten wie $30 : 4$ als Zahl sorgen. An dieser Stelle folgte der einzige Ausflug ins Konkrete während der gesamten Einführungsphase.

Zu diesem Ausflug ins Konkrete sei ein methodischer Hinweis gestattet. Um bei allen Schülerinnen und Schülern für die Akzeptanz solcher Quotienten als Zahl zu sorgen, bietet es sich an, dafür zu sorgen, dass die Schülerinnen und Schüler selbst die Argumentation dafür übernehmen, dass auch nichtnatürliche Quotienten sinnvoll sind. In Kleingruppen bekamen sie kleine Schachteln mit Kaubonbons und einer Auftragskarte. Die Anzahl der Bonbons war niemals Vielfaches der Anzahl der Gruppenmitglieder. Der Auftrag lautete nun, die Bonbons zu gleichen Teilen an alle Gruppenmitglieder aufzuteilen und die Vorgehensweise zu beschreiben. Sollte ihnen eine solche Teilung und ihre erfolgreiche Beschreibung gelingen, dann durften sie die Bonbons behalten. Anderenfalls sollten sie die Bonbons zurückgeben. Bei den Kaubonbons

handelte es sich um längliche Kaustreifen mit Fruchtgeschmack, die bei Jugendlichen sehr beliebt sind. Ebenso gut sind kleine Schokoladenriegel geeignet. Es geschah, was zu erwarten war. Jeder Gruppe gelang eine solche Teilung und jede Gruppe konnte ihre Vorgehensweise beschreiben. Die Schülerinnen und Schüler traten mit ihrer Teilung und deren Beschreibung selbst dafür ein, dass von nun an nichtnatürliche Quotienten als Zahl verstanden wurden.

Bei den Beschreibungen zeigten sich unterschiedliche Strategien. Wenn beispielsweise 11 Kaubonbons an 3 Personen verteilt werden sollten, dann wurde einerseits erklärt, man könne ja zunächst jeder Person 3 Bonbons geben und müsse dann noch jeden der übrigen Bonbons in 3 Teile teilen, so dass auch diese an die 3 Personen geteilt werden könnten. Andererseits wurde auch erklärt, man könne jeden der 11 Bonbons in drei Teile teilen, dann hätte man 33 Teile, von denen jeder 11 bekäme. Anschließend wurde erfolgreich überprüft, dass beide Strategien das gleiche liefern. Analog wurde auch von Paaren argumentiert, die 7 Bonbons unter sich aufteilen durften.

Im Folgenden stellte ich ein weiteres Problem. Die Gruppen sollten sich überlegen, wie viele Kaubonbons ich in eine Schachtel legen müsste für eine Gruppe, die aus zwei- oder dreimal so vielen Personen besteht, wenn es gerecht zu gehen solle? Es gab niemanden, der dieses Problem nicht lösen konnte. Ebenso war es bei zahlreichen weiteren Beispielen. Damit war die Grundlage für das Kürzen und Erweitern geschaffen.

Um herauszustreichen, dass es sich bei diesen Quotienten um Zahlen handelt, kehrte ich zurück zu den Gruppen, die sich mit dem Quotienten $11 : 3$ befasst hatten. Diese hatten zunächst 11 Bonbons, die an 3 Schülerinnen und Schüler aufgeteilt werden sollten. Auf die Frage, wie viele Bonbons jede Person bekommen sollte, konnte nur die Antwort $11 : 3$ gegeben werden. Ich stellte nun die Aufgabe, welchen Anspruch jede Person hätte, wenn die Gruppe 7 weitere Bonbons bekäme. Es ist natürlich sofort klar, dass dann jede Person weitere $7 : 3$ Bonbons bekommen soll. Hier kamen einige Schülerinnen und Schüler sehr schnell zu der Erkenntnis, dass nun jede Person 6 Bonbons bekommen sollte. Ihr Argument war, dass insgesamt 18 Bonbons an 3 Personen aufgeteilt

werden, da sie ja zuerst 11 und dann noch einmal 7 bekommen. Nun wurde zum ersten Mal auch mit diesen neuen Zahlen gerechnet. Natürlich war es nicht mein Anliegen, innerhalb einer Unterrichtsstunde die Akzeptanz nichtnatürlicher Brüche als Zahlen, das Kürzen und Erweitern sowie die Addition zu unterrichten. Die einfachen angeführten Beispiele für das Kürzen und Erweitern und die Addition stellten keinerlei Überforderung der Schülerinnen und Schüler dar und trugen sehr zu meinem Ziel bei, nämlich für die Akzeptanz der nichtnatürlichen Quotienten als Zahlen zu sorgen.

Bei der Addition wurde einfach, wenn auch intuitiv, das Distributivgesetz auf die Brüche übertragen, formal war alles korrekt:

$$(11 : 3) + (7 : 3) = (11 + 7) : 3 = 18 : 3 = 6$$

Mit dem Ergebnis dieser Aufgaben musste ich sehr zufrieden sein. Denn ich hatte mit den Schülerinnen und Schülern schon sehr viel erreicht: Es hat nun wirklich jeder in der Klasse eingesehen, dass diese neuen Zahlen sinnvoll sind.

Aber ich zeigte an einigen Beispielen, dass noch viele Fragen offen waren.

So war es nicht sofort zu sehen, ob nun die Schülerinnen und Schüler, die 11 Bonbons für ihre Dreiergruppe hatten, ebenso gut oder besser oder schlechter versorgt wurden als die beiden, die 7 Bonbons für sich hatten. Auch musste mit diesen Zahlen das Rechnen möglich sein, denn das erwartet man schließlich von Zahlen. Beruhigend war, dass schon in einem Beispiel die Addition durchgeführt wurde, aber es gab noch sehr viel zu tun.

Der nächste Schritt in der Folgestunde war, die oben erwähnte Veränderung der Aufgabe. Ich schrieb $30 : 4$ an die Tafel und forderte die Schülerinnen und Schüler auf, weitere Darstellungen anzugeben.

Es stellte sich heraus, dass einige der Schülerinnen und Schüler nun eher Probleme hatten, andere Namen zu finden als in den Fällen, in denen eine natürliche Zahl vorgegeben war. Aber die Tafel füllte sich schnell mit Quotienten wie $15 : 2$, $300 : 40$, $600 : 80$ und auch in extremer Form wie $300000000000 : 40000000000$ mit der vom Schüler gelieferten Begründung: „Die Nullen kann man doch alle wegstreichen“.

Diskussionsbedarf gab es im Falle von $15 : 2$, denn es war zwar nach der letzten Stunde schon klar, dass man Dividend und Divisor mit demselben Faktor multiplizieren darf, ohne dass dadurch der Quotient verändert wird. Nun wurde einerseits dafür plädiert, dass der Quotient auch gleich bleiben müsste, wenn man Dividend und Divisor durch dieselbe Zahl teilt, da dies ja früher bei den natürlichen Quotienten auch so gewesen sei, zum Beispiel $20 : 4 = 10 : 2$.

Das beste Schülerargument dafür war jedoch das folgende:

„Wenn man mit $15 : 2$ anfängt und dann beide Zahlen mit 2 malnimmt, dann hat man $30 : 4$ und wenn $30 : 4$ dasselbe ist wie $15 : 2$, dann ist doch auch $15 : 2$ das gleiche wie $30 : 4$.“

Ein Gespräch zur Ergebnissicherung zeigte, dass nun alle Schülerinnen und Schüler in der Lage waren, sowohl zu überprüfen, ob es sich in jedem Fall um Darstellungen der Zahl $30 : 4$ handelte, als auch selbst eigene Darstellungen zu finden.

Wir hatten zwar schon die Invarianzen im Bereich der natürlichen Zahlen behandelt. Aber ich hatte nicht damit gerechnet, dass es den Schülerinnen und Schülern so leicht fallen würde, die Invarianz der Division vom Bereich der natürlichen Zahlen auf den Bereich der rationalen Zahlen zu übertragen, die wir ja noch gar nicht richtig kennengelernt hatten. Es bereitete ihnen also kein Problem, Dividend und Divisor mit demselben Faktor zu multiplizieren oder sie durch dieselbe Zahl zu dividieren, auch wenn es sich um einen nichtnatürlichen Quotienten handelte.

Wir bezeichneten nun alle Quotienten zweier natürlicher Zahlen, von denen der Divisor stets von 0 verschieden sein sollte, als Brüche.

Selbstverständlich mussten damit auch alle natürlichen Zahlen Brüche sein. Denn wir haben ja schon auf vielfältige Weise gesehen, dass jede natürliche Zahl sich als Quotient zweier natürlicher Zahlen schreiben lässt.

Was in vielen Lehrbüchern aber auch in der Didaktik-Literatur, siehe 3. 2, so oft als eine besondere Eigenschaft der Brüche angepriesen wird, als ob diese Eigenschaft nicht von den natürlichen Zahlen schon immer bekannt sei, nämlich dass jeder Bruch unendlich viele Darstellungen oder Namen hat, war hier

überhaupt kein Thema. Es konnte auch keines sein, da dies nichts besonderes war.

Da nun die Akzeptanz der Brüche als Zahlen gegeben war und wir uns darauf geeinigt haben, dass jeder Quotient zweier natürlicher Zahlen ein Bruch sein sollte und ferner schon klar war, dass jeder Bruch sich auf unendlich viele verschiedene Weisen darstellen lässt, stellten sich auf natürliche Weise die weiteren Fragen 3. bis 6. aus dem Fragenkatalog, der oben zur Bewertung der Konzepte aufgestellt wurde:

1. Was ist ein Bruch?
2. Wie kann man Brüche darstellen?
3. Wie können wir erkennen, welcher Bruch größer oder kleiner ist?
4. Wie können wir Brüche addieren beziehungsweise subtrahieren?
5. Wie können wir Brüche multiplizieren beziehungsweise dividieren?
6. Welche Regeln gelten in der Menge der Brüche?

Bevor wir uns mit weiteren Inhalten befassten, führte ich die Bruchschreibweise ein. Ich wollte, dass die Schülerinnen und Schüler sich frühzeitig an sie gewöhnen, um auf diese Weise auch zu verhindern, dass später bei der Behandlung weiterer Themen, neue Schwierigkeiten noch durch eine ungewohnte Schreibweise überlagert werden. Der Bruchstrich sollte lediglich eine andere Schreibweise für das Divisionszeichen sein. Die Zahl über dem Bruchstrich nennen wir den Zähler der Darstellung, die unter dem Bruchstrich nennen wir den Nenner der Darstellung. Ich achtete zu Beginn konsequent darauf, dass nicht vom Zähler oder Nenner eines Bruchs, sondern immer von Zähler oder Nenner einer Darstellung gesprochen wurde. Später konnte im Sprachgebrauch auch nur vom Zähler oder Nenner gesprochen werden, weil schon klar war, dass diese Begriffe sich nur auf die Darstellung beziehen. Da jeder Quotient auf unendlich viele Weisen darstellbar ist, gibt es auch für jeden Bruch unendlich viele Darstellungen. Es sollte immer im Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler sein, dass ein Bruch nicht an einen bestimmten Zähler oder Nenner gebunden ist. Wir übten die neue Schreibweise, indem wir Zahlen von der Quotientendarstellung in die Bruchdarstellung übertrugen.

Der Vorteil der Bruchschreibweise war noch nicht ganz klar, aber ich zeigte an einigen Termen, dass die Übersichtlichkeit bei der Bruchschreibweise gegenüber der Quotientenschreibweise zunimmt. Auch wenn wir noch gar nicht gelernt hatten, mit Brüchen zu rechnen, hatte ich den Eindruck, dass das Argument der Übersichtlichkeit überzeugend war als die Tatsache, dass diese Schreibweise allgemein üblich ist.

Brüche, die im Zähler und im Nenner mit Brüchen dargestellt sind, werden oft als „Doppelbrüche“ bezeichnet. Klar ist, dass sich der Begriff Doppelbruch nur auf die Darstellung bezieht. Auf diese Doppelbrüche konnte im Zusammenhang mit dem Argument der Übersichtlichkeit natürlich noch nicht eingegangen werden, weil ja noch gar nicht geklärt werden konnte, ob es sich dabei überhaupt um Brüche handelt, denn nach unserem Verständnis waren Brüche Quotienten zweier natürlicher Zahlen.

Es folgten zunächst Übungen zum Kürzen und Erweitern in der Bruchschreibweise. Dabei wurden auch diese beiden Begriffe eingeführt. Es war mir wichtig, darauf zu achten, dass wir vom Kürzen oder Erweitern einer Darstellung statt vom Kürzen oder Erweitern eines Bruches sprachen. Denn die Begriffe Kürzen und Erweitern lassen eine Änderung der Zahl vermuten, wenn nicht auf genaue Sprache geachtet wird. Dieses Problem ist nicht zu unterschätzen, da umgangssprachlich ein Erweitern (zum Beispiel eines Gebäudes) oft mit einem Ausbau, jedenfalls mit einer Vergrößerung gleichgesetzt wird und Kürzen (beispielsweise einer Hose) mit einer Verkleinerung.

Durch Kürzen oder Erweitern ändern wir also nicht den Bruch, sondern nur seine Darstellung. Es lohnte sich an dieser Stelle, die Quotientenschreibweise der Bruchdarstellung gegenüberzustellen, denn von ersterer war schon die Invarianz der Division bekannt, die nur eine Analogie zum Kürzen und Erweitern der Bruchdarstellung ist.

Es fiel schon bald auf, dass jeder Bruch eine Darstellung besitzt, die sich nicht mehr weiter kürzen lässt. Das ist dann der Fall, wenn der Zähler und der Nenner den größten gemeinsamen Teiler 1 besitzen. Diese Darstellung nannten wir die vollständig gekürzte Darstellung.

Anschließend übten wir das Kürzen und Erweitern anhand vieler Beispiele. Weitere Übungen erforderten das Kürzen oder Erweitern der Darstellungen, um Brüche mit vorgegebenen Zählern oder Nennern darzustellen. Außerdem gab es natürlich Übungen, deren Ziel es war, die vollständig gekürzte Darstellung gegebener Brüche zu finden.

Es zeigte sich bei diesen Übungen, dass die natürlichen Zahlen genau die Brüche sind, die sich mit dem Nenner 1 schreiben lassen.

In vielen Büchern wird nach dem Kürzen und Erweitern oft die gemischte Schreibweise eingeführt, oft wird sogar von „gemischten Zahlen“ gesprochen. Ich habe aus den oben genannten Gründen auf die Einführung der gemischten Schreibweise verzichtet und erst später, während der Konkretisierung gemischte Schreibweise mit Additionszeichen eingeführt.

Das Kürzen und Erweitern war natürlich für das danach folgende Thema „Größenvergleich“ sehr nützlich.

Um für das Problem, welcher von zwei Brüchen der größere ist, eine Lösung zu finden, motivierte ich eine Verlagerung in einen bekannten Bereich. Ich forderte die Schülerinnen und Schüler auf, einige natürliche Zahlen zu wählen und sie in verschiedenen Bruchdarstellungen gegenüberzustellen, um auf diese Weise eine Regel für den Größenvergleich zu finden. Man weiß schließlich, welche von zwei gewählten natürlichen Zahlen größer ist. Wenn zum Beispiel 4 und 5 gewählt wurden, und argumentiert wurde, dass $\frac{12}{3} < \frac{20}{4}$ sei, weil $12 < 20$ und $3 < 4$ sei, dann konnte leicht widersprochen werden, dass mit derselben Begründung auch $\frac{10}{2} < \frac{12}{3}$ sein müsste, also insbesondere $\frac{10}{2} < \frac{20}{4}$. Dies ist jedoch nicht möglich. Somit ist klar, dass ein Bruch, der sowohl mit größerem Zähler als auch mit größerem Nenner dargestellt ist als ein anderer, nicht größer sein muss als dieser. Übrigens folgt dies ja schon aus der Erkenntnis, dass man durch das Kürzen oder Erweitern der Darstellung keine kleinere oder größere Zahl erhält. Es wäre sonst ja jede Zahl sowohl größer als auch kleiner als sie selbst.

Es fiel auf, dass man genau dann, wenn 4 und 5 mit dem gleichen Nenner dargestellt waren, die 5 den größeren Zähler besaß und genau dann, wenn 4

und 5 mit dem gleichen Zähler dargestellt wurden, die 4 den größeren Nenner besaß.

Analoge Vergleiche führten zu einer ersten Regelvermutung:

Wenn zwei Brüche mit dem gleichen Zähler dargestellt sind, dann hat der größere Bruch den kleineren Nenner.

Wenn zwei Brüche mit dem gleichen Nenner dargestellt sind, dann hat der größere Bruch den größeren Zähler.

Diese Regeln waren sehr gut nachvollziehbar, wenn man sich daran erinnerte, dass die Brüche nichts anderes als Quotienten sind. Denn wenn zwei Quotienten mit gleichem Dividenden gegeben sind, dann ist der mit dem kleineren Divisor der größere und wenn zwei Quotienten mit gleichem Divisor gegeben sind, dann ist der mit dem größeren Dividenden der größere. Es war plausibel, dass dies immer gelten musste, also auch bei nichtnatürlichen Quotienten und so wurde die Regel übertragen.

Daraus ergab sich aber schon, wie man einen Größenvergleich vornehmen konnte, wenn die gegebenen Brüche nicht mit dem gleichen Zähler oder dem gleichen Nenner dargestellt waren. Denn dann sorgen wir eben dafür, dass sie mit dem gleichen Zähler oder mit dem gleichen Nenner dargestellt werden.

Weitere Strategien fanden sich bei weiteren Beispielen. Um zu entscheiden, dass $\frac{4}{3} > \frac{5}{7}$ ist, kann man natürlich auf eine der beiden eben genannten Strategien zurückgreifen, denn sie führen immer zum Ziel.

Leicht lässt sich aber auch erkennen, dass eine der beiden Zahlen größer als 1 ist und die andere kleiner als 1. Es reicht, wenn Schülerinnen und Schüler mit einer „dazwischen liegenden“ Vergleichszahl argumentieren. Die Suche nach einer dazwischen liegenden Vergleichszahl ist meistens dann besonders leicht, wenn eine natürliche Zahl dazwischen liegt. Aber auch der Vergleich mittels anderer Vergleichszahlen konnte motiviert werden. So ließ sich anhand der dazwischen liegenden Vergleichszahl $\frac{1}{2}$ entscheiden, dass $\frac{17}{33} > \frac{21}{43}$ ist.

Dass man immer Zahlen findet, die zwischen zwei gegebenen Zahlen liegen, wussten die Schülerinnen und Schüler ja noch nicht.

Wir sahen später, dass manchmal auch andere Strategien geeignet waren. Zum Beispiel lässt sich $\frac{25}{4}$ als $6 + \frac{1}{4}$ schreiben und $\frac{43}{7}$ als $6 + \frac{1}{7}$. So konnte schon entschieden werden, dass $\frac{25}{4} > \frac{43}{7}$ ist.

Es ist $\frac{1}{15} > \frac{1}{16}$, daher weiß man, dass $1 - \frac{1}{15} < 1 - \frac{1}{16}$ ist, also ist auch $\frac{14}{15} < \frac{15}{16}$.

Wir sahen, dass es viele Möglichkeiten für den Größenvergleich gab.

Ich wollte nicht wie im Lehrbuch eine Regel erarbeiten, schon gar nicht sollte so ein falscher Satz wie schon oben zitierter in meinem Unterricht vorkommen: „Bei ungleichen Nennern müssen wir die Brüche zuerst gleichnamig machen.“¹³⁷ Denn die Schülerinnen und Schüler waren schon weiter, als dieses Schulbuch ihnen zugetraut hatte. Sie wussten schon, dass man Brüche für einen Größenvergleich keineswegs gleichnamig machen muss.

Die Darstellung mit dem gleichen Nenner hat gegenüber den anderen Strategien nur den Vorteil, dass man nicht nur sieht, welche Zahl größer ist, sondern den Größenunterschied sofort ablesen kann. Wenn es aber allein um den Größenvergleich geht, ist natürlich in jedem Fall neu zu entscheiden, wie man vorgehen möchte.

Nach zahlreichen Übungen zum Größenvergleich stellte ich aber noch das Problem, ob die Strategie mit einer dazwischen liegenden Zahl vielleicht nicht nur manchmal unpraktisch ist, sondern vielleicht auch manchmal gar nicht möglich ist. Ich wollte erarbeiten, dass es zu zwei gegebenen Brüchen immer einen Bruch gibt, der zwischen ihnen liegt.

Es gibt keine natürliche Zahl, die zwischen 17 und 18 liegt. Warum sollte es also einen Bruch geben, der zwischen $\frac{17}{20}$ und $\frac{18}{20}$ liegt. Andere sollten sich mit

dem Problem beschäftigen, ob zwischen $\frac{1}{10000}$ und $\frac{1}{9999}$ noch ein Bruch liegt.

Diese und ähnliche Probleme ließ ich von mehreren Gruppen untersuchen und später vortragen. Im ersten Beispiel wurde sehr schnell gesehen, dass

¹³⁷ Schnittpunkt 6 (2004: 68)

$\frac{171}{200}, \frac{172}{200}, \dots, \frac{179}{200}$ zwischen $\frac{17}{20}$ und $\frac{18}{20}$ liegen. Natürlich fragte ich nach, ob dieses alle seien oder ob es weitere dazwischen liegende Brüche gebe. Es kam nach kurzer Überlegung die Antwort, dass es natürlich weitere dazwischen liegende Brüche gebe, denn man könne ja das gleiche noch mal machen, also „auf Zweitausendstel erweitern und immer weiter“.

Das zweite Beispiel stellte schon manche vor eine Schwierigkeit. Sie erkannten schnell, dass $\frac{1}{10000} = \frac{9999}{99990000}$ und $\frac{1}{9999} = \frac{10000}{99990000}$ ist. Einige ließen sich dann aber davon abschrecken, dass diese Darstellungen sehr hohe Zahlen im Zähler und im Nenner enthielten und wussten dann nicht, wie sie weiter arbeiten sollten. Als aber die Lösung des ersten Problems vorgetragen wurde, konnte daraus insofern Profit gezogen werden, dass bei einer erweiterten Darstellung dieser Brüche auf $\frac{99990}{999900000}$ und $\frac{100000}{999900000}$ sofort dazwischen liegende Brüche genannt werden konnten.

Eine andere Gruppe fand auf andere Weise, die mir besonders gut gefiel eine dazwischen liegende Zahl. Sie stellten fest, dass man eine solche schon durch Erweitern mit 2 finden kann. Es ist nämlich $\frac{1}{10000} = \frac{2}{20000}$ und $\frac{1}{9999} = \frac{2}{19998}$, also liegt $\frac{2}{19999}$ zwischen den beiden gegebenen Zahlen.

Es wurde schnell die Einsicht gewonnen, dass es zu je zwei Brüchen immer nicht nur einen dazwischen liegenden Bruch gibt, sondern sogar unendlich viele.

Als erste Rechenarten führten wir die Addition und die Subtraktion ein. Dabei bedienten wir uns der natürlichen Zahlen, weil wir die Summe oder Differenz zweier natürlicher Zahlen schon lange berechnen konnten. Mit „berechnen“ ist das Finden einer möglichst einfachen Schreibweise, am besten ohne Rechenzeichen, gemeint. Mit „Ergebnis“ ist diese einfachste Schreibweise gemeint. Nach unserem Verständnis war klar, dass $5 + 3$ die Summe von 5 und 3 ist. Aber wenn es darum ging, diese Summe zu „berechnen“, sollte die einfachste Schreibweise, also 8 als „Ergebnis“ angegeben werden.

Nun ist ein Bruch, wenn er keine natürliche Zahl ist, nicht ohne Rechenzeichen schreibbar. Denn nach unserem Verständnis ist der Bruchstrich nur ein anderes Symbol für das Divisionszeichen. So musste die Einschränkung gemacht werden, dass das „Ergebnis“ noch einen Bruchstrich enthalten darf.

Ich forderte die Schülerinnen und Schüler auf, sich zwei natürliche Zahlen zu wählen und diese in verschiedenen Bruchdarstellungen zu notieren, um an geeigneten Darstellungen eine Regel für die Addition zu finden.

Wenn man nun zum Beispiel $5 + 3$ in beliebige Bruchdarstellung überträgt, dann könnte es so aussehen: $\frac{50}{10} + \frac{9}{3}$. Wir wissen natürlich, dass die Summe 8

ist. So ist sofort klar, dass die komponentenweise Addition von Zähler und Nenner nicht die Summe liefert, denn $\frac{59}{13} \neq 8$.

Ich erinnerte die Schülerinnen und Schüler nicht an das schon mehrere Tage zurückliegende Beispiel mit den Bonbons, bei dem das Distributivgesetz genutzt werden konnte, denn dieses lieferte später die Begründung für die gefundene Regel. Diese musste aber erst gesucht werden. Viele versuchten mehrfach, die Zahlen in unterschiedlichen Darstellungen additiv zu verknüpfen, konnten dabei aber zunächst keine Regel erkennen. Sie wussten ja immerhin, dass die Summe 8 sein muss und waren insofern in der Lage, Vermutungen zu falsifizieren. Es dauerte aber nicht lange, bis sie geeignete Darstellungen fanden, wie zum Beispiel $\frac{50}{10} + \frac{30}{10}$, $\frac{10}{2} + \frac{6}{2}$ oder $\frac{5}{1} + \frac{3}{1}$, die etwas erkennen

ließen. Es wurde völlig analog mit anderen natürlichen Zahlen wiederholt, bis wir zu folgender Regel kamen: Wenn die Brüche mit dem gleichen Nenner dargestellt sind, dann erhält man die Summe, wenn man den gemeinsamen Nenner behält und die Zähler addiert. Eine analoge Übertragung auf die Subtraktion fiel nicht schwer. Wir erweiterten diese Regel auf alle Brüche und übten ausführlich. Besonders einsichtig für die Legitimation dieser Übertragung zeigten sich die Schülerinnen und Schüler meines Erachtens deswegen, weil wir die Brüche als Quotienten eingeführt haben. Denn dass $\frac{10}{2} + \frac{6}{2} = \frac{10+6}{2} = \frac{16}{2}$ ist, konnte nun mit dem Distributivgesetz begründet werden, nur schrieben wir früher: $10 : 2 + 6 : 2 = (10 + 6) : 2 = 16 : 2$.

Was wir gerade an den natürlichen Brüchen erkannt hatten, übertrugen wir permanent auf alle Brüche. Statt $17 : 4 + 11 : 4 = (17 + 11) : 4 = 28 : 4$ schreiben wir nun $\frac{7}{3} + \frac{11}{3} = \frac{7+11}{3} = \frac{18}{3}$, was ja auch durch das Bonbon-Beispiel gerechtfertigt war.

Wie aber konnten wir vorgehen, wenn zwei Brüche gegeben waren, die mit verschiedenen Nennern dargestellt sind? Die Lösung dieses Problems war wieder sehr einfach und die Strategie schon vom Problem des Größenvergleichs bekannt. Wir führten dieses Problem nämlich auf ein bekanntes zurück. Wir wussten ja schon, dass jeder Bruch unendlich viele Darstellungen besitzt und wir wussten schon, wie sich die Summe zweier Brüche vereinfachen lässt, die mit dem gleichen Nenner dargestellt sind.

Also lief das Problem nun darauf hinaus, dass man für zwei gegebene Brüche Darstellungen mit dem gleichem Nenner finden muss. Aus dem Unterricht über Teiler und Vielfache war bekannt, dass es immer möglich ist, zu zwei natürlichen Zahlen ein gemeinsames Vielfaches zu finden. Zu zwei gegebenen Brüchen suche man also ein gemeinsames Vielfaches der Nenner, mit denen sie dargestellt sind, dann stelle man beide Brüche so dar, dass ihr Nenner dieses gemeinsame Vielfache ist und schon kann man so verfahren wie oben.

Keinesfalls bestand ich darauf, dass ein solcher gemeinsamer Nenner das kgV der beiden Nenner sein muss. Dass das kgV der Nenner immer ein geeigneter gemeinsamer Nenner ist, fanden die Schülerinnen und Schüler später heraus, nachdem sie gesehen hatten, dass gefundene Darstellungen, die nicht mit dem kgV dargestellt wurden, immer noch gekürzt werden konnten. Es ist meines Erachtens auch nicht sinnvoll, auf der Darstellung mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner zu bestehen, trotz der Vorteile, die im Wesentlichen darin bestehen, dass man mit einfacheren Darstellungen arbeitet und alle in der Klasse dieselbe Darstellung „rausbekommen“ könnten. Die Nachteile sind die, dass der Zwang zur Darstellung mit dem kleinsten möglichen Nenner den Eindruck erweckt, andere Darstellungen seien falsch. Denn wieso sollte man nicht $\frac{4}{10}$ sondern stattdessen $\frac{2}{5}$ schreiben müssen, wenn es doch die gleiche

Zahl ist? Darüber hinaus kommt es bei Rechnungen oft vor, dass errechnete Ergebnisse später weiter verarbeitet werden sollen. Da ist es viel sinnvoller,

einen Blick darauf zu werfen, wie die weitere Verarbeitung stattfinden soll, statt zwanghaft die Darstellung mit dem kleinsten möglichen Nenner zu suchen. Beispielsweise könnte man in einer Rechnung $\frac{15}{40}$ als Zwischenergebnis erhalten haben. Ein zwanghafter Mechanismus, der das vollständige Kürzen der Darstellung bewirkt, führt zur Darstellung $\frac{3}{8}$. Wenn aber nun das eben errechnete Zwischenergebnis zu $\frac{7}{40}$ addiert werden soll, zeigt sich beispielhaft, dass das automatische Kürzen keinesfalls immer sinnvoll ist. Denn man macht hier einen überflüssigen Rechenschritt. Ein weiteres Beispiel dafür, dass eine Darstellung mit dem kleinsten möglichen Nenner nicht immer erwünscht ist, liegt ebenfalls nahe. Denn oft möchte man Brüche miteinander vergleichen. Und da ist es doch in jedem Fall geschickter, erst einmal alle Brüche so „stehen zu lassen“, anstatt sie umzuformen, denn möglicherweise erschwert die Umformung die Vergleichbarkeit, sodass ein zusätzlicher Umformungsschritt nötig wird. Manchmal sind aber auch Darstellungen mit einem festgelegten Nenner, der nicht der kleinstmögliche ist, erwünscht.

So werden die Schülerinnen und Schüler im 7. Schuljahr aufgefordert, Brüche mit dem Nenner 100 oder 1000 darzustellen. Sie lernen anschließend, dass man statt Hundertstel auch Prozent sagt und statt Tausendstel Promille.

Die Addition und auch die Subtraktion wurden an vielen Beispielen geübt, natürlich auch an solchen, wo es sinnvoll war, zuerst die Darstellung des einen Bruchs oder auch beider Brüche zu kürzen, um die Rechnung zu vereinfachen.

Anschließend beschäftigten wir uns mit der Multiplikation. In der Grundschule wird die Multiplikation als verkürzte Schreibweise einer wiederholten Addition dargestellt. Das ist nun natürlich nur dann auf die Brüche übertragbar, wenn

einer eine natürliche Zahl ist. So kann man $3 \cdot \frac{2}{5}$ als $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$ auffassen. Aber

wie soll man $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$ verstehen? Ich verzichtete darauf, die Multiplikation des Typs „natürliche Zahl · nichtnatürlicher Bruch“ einzuführen, sondern forderte, wie schon bei der Einführung der Addition, die Schülerinnen und Schüler dazu auf,

Bruchdarstellungen für natürliche Zahlen zu suchen, um dann eine Regel für die Multiplikation zu finden. Wieder war der Vorteil, dass man ja schon wusste, was „herauskommen“ soll. Auf diese Weise konnte sehr schnell gesehen werden, dass eine komponentenweise Multiplikation der Zähler und Nenner zum Ziel führt.

Ein Vorgehen analog der Addition, nämlich multiplikative Verknüpfung der Zähler bei Beibehaltung des gemeinsamen Nenners, konnte schnell verworfen werden. Denn ein Beibehalten des Nenners, vorausgesetzt beide Brüche sind mit dem gleichem Nenner dargestellt, bei ausschließlicher Multiplikation der Zähler, führt immer dann zu einem falschen Ergebnis, wenn der Nenner von 1 verschieden ist und beide Zähler von 0 verschieden sind.

Anschließend folgten zahlreiche Übungen zur Multiplikation.

Nach zahlreichen Übungen, auch mit größeren Zahlen als Zähler oder Nenner erwies sich die Notation mit einem Zwischenschritt als günstig, in der das Produkt der Zähler nicht „ausgerechnet“ im Zähler und das Produkt der Nenner nicht „ausgerechnet“ im Nenner notiert wurde, zum Beispiel: $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 6}$. Denn

das führte zu der Einsicht, dass man „über Kreuz“ kürzen darf. Schließlich ist auch $\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3 \cdot 4}{6 \cdot 8}$. Man erhält also das gleiche Produkt, denn Zähler und Nenner sind ja bei beiden Produkten gleich. Das Kürzen, das bei den Darstellungen der Faktoren im zweiten Produkt möglich ist, kann im zuerst dargestellten Produkt also „über Kreuz“ erfolgen.

Es ging nicht darum, das Kürzen „über Kreuz“ zur wichtigsten Aufgabe bei der Multiplikation zu machen, denn man kann auch vollständig darauf verzichten. Aber unter dem Aspekt, dass geschicktes Rechnen zur Vermeidung von Fehlern beitragen kann, war es nicht schwierig, geeignete Beispiele zu finden, die das Kürzen „über Kreuz“ motivierten. Wenn man zum Beispiel den Ausdruck

$\frac{35}{36} \cdot \frac{42}{55}$ vereinfachen möchte oder soll, ist man im Vorteil, wenn man erkennt, dass 42 und 36 den gemeinsamen Teiler 6 sowie 35 und 55 den gemeinsamen Teiler 5 haben. Denn dann liegt die Vereinfachung zu $\frac{35}{36} \cdot \frac{42}{55} = \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{11} = \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 11} = \frac{49}{66}$ nahe. Deswegen wurde die Teilbarkeitslehre vor der

Behandlung der Bruchrechnung unterrichtet. Es ist fraglich, ob diejenigen, die

hier nicht die gemeinsamen Teiler entdecken, überhaupt noch eine so einfache Darstellung finden. Denn wenn man zuerst $\frac{35}{36} \cdot \frac{42}{55} = \frac{35 \cdot 42}{36 \cdot 55} = \frac{1470}{1980}$ rechnet, sieht man vielleicht noch, dass die letzte Darstellung sich mit 10 kürzen lässt. Aber es ist fraglich, ob noch der gemeinsame Teiler 3 von 147 im Zähler und 198 im Nenner entdeckt wird, wenn man ihn schon vorher als gemeinsamen Teiler von 36 und 42 nicht finden konnte. Ich bestand, wie schon in den oben genannten Fällen, jedoch nicht darauf, dass Brüche immer vollständig gekürzt dargestellt werden, sondern hoffte auf Einsicht in den Vorteil, der beim Vergleich der Rechenwege offensichtlich werden sollte. Beim ersten Beispiel werden 35 und 55 durch 5 dividiert und 36 und 42 durch 6 dividiert. Das sind einfache Rechnungen auf Grundschulniveau. Beim zweiten Beispiel wird 35 mit 42 multipliziert und 36 mit 55 multipliziert. Zwar gibt es in manchen 6. Klassen Schülerinnen und Schüler, die solche Produkte fehlerfrei auch im Kopf „ausrechnen“ können, die Mehrheit braucht dafür aber eine schriftliche Rechnung. Ein erhöhtes Fehlerpotenzial gegenüber den einfachen Divisionen ist auf jeden Fall gegeben.

Nach vielen Übungen stellten wir fest, dass es zu jedem positiven Bruch einen multiplikativ inversen Bruch gibt, ohne allerdings diesen Begriff zu verwenden. Wir nannten ihn den Kehrbruch zu dem gegebenen Bruch. Das Produkt aus einem Bruch und seinem Kehrbruch ist 1. Wenn irgendein positiver Bruch gegeben ist, dann wähle man sich irgendeine Bruchdarstellung, vertausche anschließend Zähler und Nenner und schon hat man eine Darstellung des Kehrbruchs des gegebenen Bruchs. Außerdem fanden wir, dass der Kehrbruch des Kehrbruchs eines Bruchs wieder der Bruch selbst ist.

Bei der Einführung der Division konnte man sich wieder der Beispiele aus dem Bereich der natürlichen Zahlen bedienen. Dazu sollten also zunächst wieder natürliche Zahlen in Bruchdarstellung geschrieben werden, und zwar solche, deren Quotient wieder natürlich ist, sodass wir wissen, „was herauskommt“, zum Beispiel: $6 : 2 = 3$.

Es zeigte sich wieder, dass nicht jede Darstellung gleich gut geeignet ist. Beispiel:

$$\text{a) } \frac{12}{2} : \frac{12}{6} \quad \text{b) } \frac{18}{3} : \frac{6}{3} \quad \text{c) } \frac{180}{30} : \frac{10}{5}$$

In jedem der drei Beispiele a), b) und c) ist $6 : 2$ in Bruchdarstellung geschrieben. Im Fall a) ist nicht klar erkennbar, wieso dies 3 ist. Im Fall b) liefert eine komponentenweise Division von Zähler und Nenner $\frac{18:6}{3:3} = \frac{3}{1} = 3$. Ebenso liefert die komponentenweise Division von Zähler und Nenner im Fall c) $\frac{180:10}{30:5} = \frac{18}{6} = 3$. Wie sollten wir die Vermutung der komponentenweisen Division als richtige Strategie mit a) vereinbaren? Dort liefert die komponentenweise Division von Zähler und Nenner $\frac{12:12}{2:6} = \frac{1}{1:3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}$. Was

sollte das sein? Ein solches Objekt hatten wir noch nicht gesehen. Ist dies überhaupt ein Bruch? Ein Bruch sollte doch nach unserer Definition ein Quotient zweier natürlicher Zahlen sein.

Da die Division die Umkehroperation der Multiplikation ist und die Multiplikation komponentenweise stattfindet, war es naheliegend, dass auch komponentenweise dividiert werden kann. Wie wir an obigem Beispiel sahen, können die gegebenen Darstellungen dazu führen, dass man bei komponentenweiser Division im Zähler oder im Nenner eine nichtnatürliche Zahl erhält. Also hieß es nun zu versuchen, die gegebenen Darstellungen so zu verändern, dass eine komponentenweise Division sowohl im Zähler als auch im Nenner natürliche Quotienten liefert. Beispiele dafür sind:

$$\frac{12}{2} : \frac{12}{6} = \frac{36}{6} : \frac{12}{6} = \frac{36:12}{6:6} = \frac{3}{1} \quad \text{oder} \quad \frac{12}{2} : \frac{12}{6} = \frac{12}{2} : \frac{4}{2} = \frac{12:4}{2:2} = \frac{3}{1} \quad \text{und so weiter.}$$

Diese beiden Rechnungen und zahlreiche weitere Beispiele führten zu der Vermutung, dass man komponentenweise dividieren darf, zumindest, wenn die Quotienten natürlich sind. Kann man aber immer zwei Brüche so darstellen, dass dieses möglich ist? Dazu wählte ich 4 paarweise teilerfremde Zahlen, die

Zähler und Nenner zweier Brüche darstellen sollten, damit der Blick nicht durch gemeinsame Teiler erschwert wird. Das sah zum Beispiel so aus: $\frac{3}{5} : \frac{4}{7}$

Die Frage war nun, wie man die Darstellungen verändern konnte, sodass man bei komponentenweiser Division der gegebenen Zähler und Nenner natürliche Quotienten erhält. Für den Zähler reichte es, die Darstellung des ersten Bruches mit 4 zu erweitern. Für den Nenner reichte es, die Darstellung des ersten Bruches mit dem Nenner des zweiten zu erweitern.

Es konnte gezeigt werden, dass es immer reicht, den Dividenten mit dem Zähler und dem Nenner, mit dem der Divisor dargestellt ist, zu erweitern. Dann liefert eine komponentenweise Division immer natürliche Quotienten. Was man dann erhält, fanden einige Schülerinnen und Schüler lustig. Denn der Quotient ist die gleiche Zahl, wie das Produkt aus Divident und dem Kehrbuch des Divisors.

An obigem Beispiel:

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 7} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4 : 4}{5 \cdot 4 \cdot 7 : 7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4}$$

In der Folge verzichteten die Schülerinnen und Schüler auf das eben beschriebene „Schrittweise Erweitern“, da die Multiplikation mit dem Kehrbuch viel einfacher ist.

Da wir schon zu Beginn den Bruchstrich als gleichwertigen Ersatz für das Divisionszeichen eingeführt haben, stellt sich die Frage, ob man statt $\frac{3}{5} : \frac{4}{7}$

auch $\left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{4}{7} \right)$ schreiben darf? Wir haben ursprünglich definiert, dass die Brüche die

Zahlen sind, die sich als Quotienten zweier natürlicher Zahlen schreiben lassen. Nach dem, was gerade herausgefunden wurde, ist dies natürlich ein Bruch, denn die Division eines Bruchs durch einen anderen Bruch ist nichts anderes als die Multiplikation des Bruchs mit dem Kehrbuch des anderen Bruchs. Das

Produkt ist wieder ein Bruch. Also ist diese Zahl eine solche Zahl, die sich auch als Quotient zweier natürlicher Zahlen darstellen lässt.

Wir können daraus den Schluss ziehen, dass wir beliebige Brüche im Zähler und Nenner eines Bruches zulassen dürfen, denn wir erhalten dadurch keine Zahlen, die uns nicht schon vorher bekannt waren.

Damit ist auch die Frage nach dem Objekt $\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}$ geklärt, die nun beantwortet

werden kann. Allein durch Veränderung der Darstellung fanden wir heraus, dass es sich um eine andere Schreibweise der Zahl 3 handelt.

Nach der eben gefundenen Regel ist $\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 1 \cdot \frac{3}{1} = 3$. Das ergibt sich übrigens

auch aus der Überlegung, dass $\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}$ der Kehrbuch von $\frac{1}{3}$ ist, und da auch 3

der Kehrbuch von $\frac{1}{3}$ ist, muss $\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 3$ sein.

Es wurden in mehreren Abschnitten die Möglichkeiten des Größenvergleichs und die Grundrechenarten behandelt. Natürlich folgte auf jeden Abschnitt eine Übungseinheit, deren Länge jeweils davon abhing, wie lange die Schülerinnen und Schüler benötigten, um die behandelten Inhalte zu verinnerlichen.

Selbstverständlich konnte das Schulbuch (Schnittpunkt 6) nur gelegentlich und dann auch nur als Aufgabensammlung eingesetzt werden. Ich wollte sowieso nicht eine große Anzahl von ähnlichen Aufgaben desselben Typs bearbeiten lassen. Daher war mehr Variation der Aufgabentypen nötig, als sie vom Schulbuch geboten wurden. Da diese Arbeit aber ein didaktisches Konzept zur Bruchrechnung vorstellt, folgt hier keine Aufgabensammlung. Lediglich anhand einiger Beispiele wird gezeigt, dass es auch dann sehr gut möglich ist, geeignete Aufgaben zur Übung zu finden, wenn das Lehrwerk, wie in den meisten Fällen, nicht sehr viel anbietet, was sich mit diesem Konzept vereinbaren lässt. Beispielsweise bietet das Schulbuch zur Addition und Subtraktion auf mehreren Seiten Aufgaben an. Davon findet ein Großteil auf der anschaulichen Ebene statt und ein anderer, nicht ganz so großer Teil enthält

Sachaufgaben mit Bruchteilen von Größen. Diese Aufgaben ließ ich zunächst weg, da ich erst einmal konsequent auf der formalen Ebene arbeiten wollte. Der größte Teil der Aufgaben im Schulbuch war vom Typ „Berechne“, wo man die Summe oder Differenz zweier oder mehrerer Brüche bestimmen sollte. Viele dieser Aufgaben waren ebenfalls nicht für den Einsatz tauglich, da in ihnen die gemischte Schreibweise vorkam. Neben einigen Aufgaben dieses Typs waren nur wenige andere Aufgaben im Buch zu finden, die gut geeignet waren.

Deswegen werde ich einige Aufgaben vorstellen, die sich als gut geeignet erwiesen haben. Dabei achtete ich darauf, die Aufgaben nicht zu einfach zu stellen, denn zu einfache Aufgaben stellen keine Herausforderung dar. Außerdem vermied ich es, zu viele Aufgaben des gleichen Typs zu stellen, denn die Schülerinnen und Schüler sollen Verfahren lernen und keine Schemata.

Eine spielerische Übungsaufgabe zum Kürzen und Erweitern war es beispielsweise, Darstellungen von Brüchen wie $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ zu finden. Dazu war ein Schema mit zwei Feldern für Zähler und Nenner und ein Bruchstrich gegeben. An die Stelle des Zählers durften Kärtchen benutzt werden, die mit den Zahlen 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12 bedruckt waren. Für den Nenner lagen Kärtchen mit den Zahlen 10, 12, 16, 18, 20, 24, 25 bereit. In Kleingruppen wurde dieses so gespielt, dass eine Zeit vorgegeben wurde. Nach dieser Zeit wurden den Gruppen Punkte für jede richtige gefundene Darstellung gegeben.

In einer Variation dieses Spiels wurde der Wettkampf innerhalb der einzelnen Gruppen ausgetragen, die nicht zu klein sein sollten. Das Spiel wurde durch einen Stopp-Ruf einer der Spielerinnen oder eines der Spieler beendet. Dann werden die Brüche verglichen. Für jede richtige Darstellung gibt es einen Punkt. Für eine richtige Darstellung, die niemand sonst in der Gruppe gefunden hat, gibt es einen weiteren Punkt. Wenn als einzige Person zu einem gegebenen Bruch eine Darstellung gefunden hat, erhält man einen dritten Punkt.

So genannte Rechenpyramiden, bei denen die Summe zweier benachbarter Steine bestimmt und in den darüber liegenden Stein eingetragen werden soll, waren als Übungen ebenfalls gut geeignet, weil man den Schülerinnen und

Schülern durch Vorgabe des Eintrags im obersten Stein eine gute Möglichkeit zur Selbstkontrolle der eigenen Rechnung anbieten konnte.

Magische Quadrate waren mit geeigneten Vorgaben auch gut geeignet. So genannte Triominos ließen sich sowohl beim Kürzen und Erweitern als auch bei allen Rechenarten gut einsetzen und boten ebenfalls die Möglichkeit zur Selbstkontrolle, wenn am Ende bei richtiger Lösung ein schönes Muster erschien.

Es wurden Aufgaben gestellt, bei denen man sich durch Ausnutzung der Kommutativität und Assoziativität von Addition und Multiplikation sowie der Distributivität der Multiplikation (und Division) über der Addition (und der Subtraktion) die Rechenarbeit vereinfachen konnte. Es gab Aufgaben, bei denen man eine gegebene Anzahl von Brüchen finden sollte, die zwischen zwei anderen gegebenen Brüchen liegen. Es wurde dabei auch eingesehen, dass Brüche weder Vorgänger noch Nachfolger haben.

Aufgaben zu Stammbrüchen boten sich an, weil die Schülerinnen und Schüler sich mit vielen interessanten Fragestellungen dazu beschäftigen können, wie zum Beispiel, ob sich alle Brüche auf nicht triviale Weise als Summe zweier oder mehrerer Stammbrüche darstellen lassen, in welchen Fällen es mehrere Darstellungen gibt.

Als Stammbruch definierten wir alle Brüche, die eine Darstellung $\frac{1}{a}$ mit einer positiven natürlichen Zahl a besitzen.

Wir erarbeiteten, dass es immer eine triviale Darstellung eines Stammbruches als Summe von zwei oder auch beliebig vielen Stammbrüchen gibt.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2 \cdot a} + \frac{1}{2 \cdot a} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{3 \cdot a} + \frac{1}{3 \cdot a} + \frac{1}{3 \cdot a} \quad \text{und so fort.}$$

$$\text{Außerdem gilt immer } \frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a \cdot (a+1)}.$$

Bei einer Aufgabe sollten die Schülerinnen und Schüler Stammbrüche auf andere Weise als Summe von Stammbrüchen darstellen.

Dabei fanden sie so schöne Darstellungen wie:

$$\frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ und}$$

$$\frac{1}{63\,000\,000} + \frac{1}{31\,500\,000} + \frac{1}{15\,750\,000} + \frac{1}{7\,875\,000} + \frac{1}{3\,937\,500} + \frac{1}{1\,968\,750} = \frac{1}{1\,000\,000}$$

Beim Größenvergleich hieß eine Aufgabe, alle möglichen Zahlen zu suchen, die man bei $\frac{1}{3} < \frac{\quad}{20} < \frac{1}{2}$ in die Lücke schreiben kann, sodass eine wahre Aussage entsteht. Es ist klar, dass dabei auch das Kürzen und Erweitern geübt wurde.

Zur Übung aller Rechenarten war auch dieser Aufgabentyp gut geeignet:

Setze in das Kästchen eines der Symbole +, -, ·, : ein, sodass a) eine möglichst große, b) eine möglichst kleine Zahl entsteht. $\frac{3}{5} \quad \square \quad \frac{2}{7}$.

Ebenso konnten die Rechenzeichen vorgegeben werden und die Aufgabe hieß dann:

Verteile die Zahlen 3, 4, 6, 7, 11, 12 so auf die sechs Plätze über und unter den Bruchstrichen, dass Du eine möglichst große (oder möglichst kleine) Zahl erhältst: $- : \left(\begin{array}{c} - + - \end{array} \right)$.

Auch wenn es nicht allen Schülerinnen oder Schülern gelingt, diese Aufgaben zu lösen, also die größt- oder kleinstmögliche Zahl zu finden, so sind sie doch alle damit beschäftigt, mit Brüchen zu rechnen und sehen dabei selbst, dass die in der Grundschule erworbene Vorstellung, Multiplikation bedeute Vergrößerung und Division Verkleinerung, nicht auf alle Brüche übertragen werden kann.

Dieser Aufgabentyp wurde auch so abgewandelt, dass man Zahlen und Rechenzeichen einsetzen sollte, um möglichst nah an eine vorgegebene Zahl zu kommen. Es ergab sich schnell eine Fülle von Aufgaben, bei denen nicht das „Ausrechnen“ im Vordergrund steht, sondern die Lösung eines gegebenen

Problems. Beim Lösen dieser Probleme trainiert man sowieso seine Rechenfähigkeit. Leicht lassen sich aus derartigen Aufgaben auch Spiele machen, die wettkampftartig durchgeführt werden können und mehr Begeisterung wecken als ein Domino oder Quartett mit Brüchen.

Aus der Erkenntnis heraus, dass bei den Brüchen das Produkt zweier Zahlen kleiner sein kann als jeder der Faktoren ergab sich die Fragestellung, ob es Brüche a, b gibt mit der Eigenschaft, dass $a - b < a \cdot b < a + b < a : b$, beziehungsweise auch in beliebiger Variation der Reihenfolge. Klar war ja bisher nur, dass nicht $a + b < a - b$ sein konnte, da uns ja die negativen Zahlen noch nicht bekannt waren.

Schön ist zum Beispiel auch folgende Aufgabenstellung mit der Möglichkeit zur Selbstkontrolle aus dem Sammelband „Ideen für Vertretungsstunden“¹³⁸: „Nach folgender Regel sollst du eine Serie von Brüchen berechnen: Die ersten beiden Brüche darfst du beliebig auswählen. Den dritten Bruch erhältst du, wenn du zu dem zweiten Bruch 1 addierst und die Summe durch den ersten Bruch teilst. Den vierten Bruch erhältst du, wenn du zu dem dritten Bruch 1 addierst und die Summe durch den zweiten Bruch teilst. Und so weiter: Immer mußt du zu dem letzten Bruch 1 addieren und die Summe durch den vorletzten teilen.“

Der erste Bruch muss hierbei von 0 verschieden sein.

Man kann den Beginn auch mit Schülerinnen und Schülern gemeinsam an einem Beispiel betrachten, um für besseres Verständnis des Textes zu sorgen:

Zum Beispiel wähle man 1. Bruch: $\frac{1}{2}$, 2. Bruch: $\frac{1}{3}$

Addiere 1 zum zweiten Bruch und erhalte als Zwischenergebnis $\frac{4}{3}$!

Dividiere die Summe durch den ersten Bruch $\frac{4}{3} : \frac{1}{2} = \frac{8}{3}$, also ist der 3. Bruch: $\frac{8}{3}$.

Addiere 1 zum dritten Bruch und erhalte als Zwischenergebnis $\frac{11}{3}$!

Dividiere die Summe durch den zweiten Bruch $\frac{11}{3} : \frac{1}{3} = \frac{11}{1}$, also erhält man als

4. Bruch: 11 und so weiter.

¹³⁸ Wittmann in mathematik lehren (Sammelband, 2003)

Es ist völlig egal, welche beiden Startzahlen man sich wählt. Es lässt sich leicht zeigen, dass der sechste Bruch, den man erhält, der gleiche ist wie der erste und der siebte Bruch der gleiche ist wie der zweite. Dies trifft sogar auf alle reellen Startzahlen a und b zu, für die $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq -1$ und $a + b \neq -1$ ist, denn seien solche a , b als Startzahl gegeben.

Dann soll zunächst b um 1 vergrößert werden. Die so erhaltene Zwischensumme ist $b + 1$. Nun wird die Zwischensumme durch die erste Zahl dividiert und man erhält die 3. Zahl: $\frac{b+1}{a}$. Die nächste Zwischensumme erhält

man wieder durch Addition von 1, sie ist also $\frac{b+1+a}{a}$. Die 4. Zahl erhält man

durch Division der Zwischensumme durch die zweite Zahl, also ist die 4. Zahl $\frac{b+1+a}{ab}$. Hierzu addiert man wieder 1 und erhält $\frac{b+1+a+ab}{ab}$. Diese Zahl wird

durch die 3. Zahl dividiert und so erhält man die 5. Zahl $\frac{ab+a+a^2+a^2b}{ab^2+ab}$. Nun

wird wieder 1 addiert und man erhält $\frac{ab+a+a^2+a^2b+ab^2+ab}{ab^2+ab}$. Dividiert man

diese Zahl nun durch die 4. Zahl, dann erhält man die 6. Zahl nämlich $\frac{ab \cdot (ab+a+a^2+a^2b+ab^2+ab)}{(b+1+a) \cdot (ab^2+ab)} = \frac{a \cdot (ab^2+ab+a^2b+a^2b^2+ab^3+ab^2)}{ab^3+ab^2+a^2b^2+ab^2+ab+a^2b} = a$.

Addiert man hierzu 1, erhält man $a + 1$ und teilt man $a + 1$ durch die 5. Zahl, so

erhält man die 7. Zahl, nämlich $\frac{(a+1) \cdot (ab^2+ab)}{ab+a+a^2+a^2b} = \frac{a^2b^2+ab^2+a^2b+ab}{ab+a+a^2+a^2b} = b$.

Erst als alle Grundrechenarten ausführlich behandelt und geübt worden waren, wendeten wir uns der anschaulichen Ebene zu. Wir beschäftigten uns mit Bruchteilen von Größen, natürlich auch von Kreis- oder Rechteckausschnitten, aber auch im Zusammenhang mit Sachproblemen sowie mit der Darstellung von Brüchen auf dem Zahlenstrahl. Mit Hilfe von Parallelen, die auf Folie kopiert wurden, konnten beliebige Bruchteile gegebener Strecken markiert werden.

Man findet natürlich auch in den Schulbüchern eine Fülle geeigneter Aufgaben. Doch nicht alle Aufgaben sind gut. Vorsicht ist auch geboten, wenn man anhand von Sachaufgaben diagnostizieren möchte, wie gut die Schülerinnen

und Schüler die Bruchrechnung verstanden haben. Abgesehen vom Einfluss, den der Sachkontext auf die Lösbarkeit durch Schülerinnen und Schüler hat, und von der Problematik, die vom unzureichenden Sprachverständnis ausgeht, gibt es auch Aufgaben, deren schriftliche Bearbeitung keinen Aufschluss darüber gibt, ob das Sachproblem richtig mathematisiert werden konnte. Ein Beispiel dafür ist die folgende Aufgabe, die mir sinngemäß in folgender Form von einer Kollegin zugetragen wurde:

Noch Plätze frei?

Im Zirkus gibt es 90 Plätze. $\frac{1}{3}$ der Plätze wird von Schülern besetzt, 6 Plätze mehr werden von Eltern besetzt und 12 Plätze sind für Lehrer reserviert.

Die Notation, die in einigen Heften ihrer Schülerinnen und Schüler zu finden war, ist folgende: $\frac{1}{3} \cdot 90 - 6 - 12 = 12$.

Sie erlaubt zwei verschiedene Schlüsse. Erstens könnte man denken, diese Schülerinnen und Schüler haben im Kopf berechnet, dass ein Drittel der Plätze der Schüler und ein Drittel der Plätze, die in „6 Plätze mehr werden von Eltern besetzt“ enthalten sind, zusammen zwei Drittel von 90 Plätzen ausmachen, sodass nur noch ein Drittel von 90 Plätzen übrig bleibt, von denen nun noch 6 weitere Plätze für die Eltern und 12 Plätze für die Lehrer subtrahiert werden müssen, um die Anzahl freien Plätze zu erhalten.

Zweitens könnte man aber auch denken, dass diese Schülerinnen und Schüler die Aufgabe, wie oben im Zusammenhang mit den „Kapitänsaufgaben“ beschrieben, behandelt haben, nämlich so, dass sie die im Text erkannten Zahlen mit einer für sie naheliegenden Rechenart verknüpft haben. Man wird es erst erfahren, wenn man ein Gespräch darüber führt, denn an obiger Gleichung ist nichts falsch, auch wenn sie einen falschen Lösungsansatz vermuten lässt.

Aus einem anderen Grund problematisch für die Überprüfung des Verständnisses ist eine Aufgabe aus einer zentralen Abschlussprüfung für Hauptschulen in Schleswig-Holstein. Dabei ist ein Rechteck in 15 Quadrate zerlegt, von denen 7 schwarz gefärbt und die anderen weiß gefärbt sind. Der Aufgabentext heißt nur: „Welcher Bruchteil ist dargestellt?“ Das Problem

entsteht dann, wenn man als Lehrerin oder Lehrer auf die Antwort $\frac{7}{15}$ fixiert ist, da 7 der 15 Quadrate gefärbt sind. Denn ebenso müsste man auch $\frac{8}{15}$ als Lösung akzeptieren, da ja an keiner Stelle gesagt wurde, ob schwarz auf weiß oder weiß auf schwarz markiert wurde.¹³⁹

Nach Einführung der Bruchrechnung und ihrer späteren Konkretisierung war ganz deutlich erkennbar, dass die Schülerinnen und Schüler ein gutes Verständnis für die Brüche hatten und dass sie mit Brüchen rechnen konnten. Natürlich tauchten auch Probleme und Schwierigkeiten auf. Obwohl ich auf einem Elternabend angekündigt hatte, die Bruchrechnung nach einem neuen Konzept zu unterrichten, sodass es stören würde, wenn die Schülerinnen und Schüler durch ihre Eltern oder Nachhilfelehrer mit anderen Konzepten in Berührung kämen, kam dieses natürlich vereinzelt vor. Allerdings hatte dies gar nicht so eine große Verwirrung der betroffenen Schülerinnen und Schüler zur Folge, wie ich es vermutet hatte. Es gab aber weitere Probleme und Schwierigkeiten, die ich aber vorhersehen konnte:

1. Die Schülerinnen und Schüler hatten teilweise in der Grundschule nur unzureichende Fähigkeiten im „Einmaleins“ erworben. Diese Schwäche führte auch beim Rechnen mit Brüchen oft zu falschen Ergebnissen. Dieses Problem würde sich aber ebenso in jedem anderen Konzept zeigen. Die Schwierigkeit kann nur behoben werden, wenn die betroffenen Schülerinnen und Schüler zu intensive zusätzlichen Übungen dieses Grundschulstoffs bereit sind.

2. Nach der Einführung auf der formalen Ebene beschäftigten die Schülerinnen und Schüler sich auch mit Sachaufgaben. Dabei gab es Probleme, die richtige Mathematisierung der Texte zu finden. Dieses ist ein klassisches Problem, das unabhängig vom Unterrichtsgegenstand immer wieder auftaucht. Eine Hilfestellung bestand in einem „Gerüst“ zur Bearbeitung solcher Aufgaben. Wenn alle Begriffe im Text geklärt sind, dann ist es wichtig zu erkennen, welche Informationen gegeben sind und was gesucht ist. Danach ist zu untersuchen,

¹³⁹ http://za.lernnetz2.de/docs/mathe_hs_bsp.pdf (Stand: 17.8.2009)

welche weiteren Informationen der Text gibt, die Zusammenhänge erkennen lassen. Oft erweist es sich dabei für Schülerinnen und Schüler als hilfreich, den Text mit eigenen Worten neu zu formulieren.

Ein mehrfach auftretendes Problem bei den Sachaufgaben während der Bruchrechnung war die richtige Interpretation des Wortes „von“ in Abhängigkeit vom Kontext.

Beispiel:

- a) *5 von 20 Schülern kommen mit dem Rad. Bestimme den Bruchteil der Rad fahrenden Schüler.*
- b) *Die Klasse hat 20 Schüler. $\frac{1}{4}$ von ihnen kommt mit dem Rad. Bestimme die Anzahl der Rad fahrenden Schüler.*

In a) ist das Wort „von“ als Bindeglied zwischen der Bezugsgröße, im Beispiel 20 Schüler, und einem Teil davon, nämlich hier 5 Schüler zu interpretieren.

Gesucht ist der Bruchteil, den 5 von 20 ausmachen. Dieser kann nur $\frac{5}{20}$ sein.

In b) verbindet das Wort „von“ einen Bruchteil einer Bezugsgröße, im Beispiel $\frac{1}{4}$ mit 20.

Die Interpretation in a) war natürlich vor der Einführung der Brüche nicht möglich. Natürlich war eine Aussage wie in a) auch schon vorher möglich, aber die Beschreibung des Anteils der Radfahrer an der Klasse durch die Zahl $\frac{5}{20}$

war zuvor nicht möglich, weil man diese Zahl ja nicht kannte.

Dass in a) der Quotient beschrieben wird, wird vielleicht besser sichtbar, wenn man „5 Schüler von 20“ oder „5 Schüler von 20 Schülern“ formuliert. Denn immer dann, wenn beide Zahlen mit einer Einheit versehen sind, dann zeigt das Wort „von“, dass ein Quotient beschrieben wird.

Neben diesen beiden häufiger vorkommenden Problembereichen, die nicht auf das benutzte Konzept zurückführen sind, sondern auch in jedem anderen Konzept Problembereiche darstellen, gab es zwei auffällige Fehlermuster, die aber nur vereinzelt auftauchten:

3. Ein Schüler machte bei der Multiplikation von Brüchen diese zunächst gleichnamig, multiplizierte anschließend die Zähler der neuen Darstellung und behielt deren Nenner, Beispiel: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{8}{20} \cdot \frac{15}{20} = \frac{120}{20}$.

Einige andere Schüler machten bei der Multiplikation ebenfalls die Brüche zunächst gleichnamig, multiplizierten aber richtig, sodass kein Schaden entstand.

4. Zwei Schülerinnen nahmen bei der Division zweier Brüche den Kehrruch des Dividenden und multiplizierten ihn anschließend mit dem Divisor, sodass sie als falschen Quotienten den Kehrwert des eigentlichen Quotienten erhielten, Beispiel:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$$

Hierzu ist zu sagen, dass die Schülerinnen und Schüler, bei denen die beiden zuletzt genannten Fehlertypen vorkamen, leicht davon überzeugt werden konnten, dass die Rechnungen fehlerhaft sind. Oben wurde als eine Stärke des Konzepts angesprochen, dass die Schülerinnen und Schüler durch Rückführung ihrer Rechenweisen auf das Bekannte, also auf den Bereich der natürlichen Zahlen, selbstständig überprüfen können, ob sie auf dem richtigen Weg sind. Dieses Argument wird keineswegs dadurch entkräftet, dass trotzdem solche Fehler vorkommen. Denn erstens wäre es illusorisch anzunehmen, dass es irgendein Konzept gäbe, das alle Fehler verhindert. Zweitens brauchen die Schülerinnen und Schüler natürlich auch viel Zeit und Übung in dieser Methodenkompetenz. Natürlich können sie selbstständig überprüfen, ob die in 3. und 4. gemachten Rechenwege richtig sind. Sie tun es nur nicht immer selbstständig, weil sie in dieser Methodenkompetenz „Überprüfung durch Anwendung der vermuteten Methode im Bekannten“ noch nicht geübt sind. Möglicherweise auch deshalb, weil sie gar nicht daran dachten, dass dort ein

Fehler stecken könnte. Schülerinnen und Schüler überprüfen nur selten Rechenwege, insbesondere wenn sie sich in der Sache sehr sicher fühlen. Ich gehe noch kurz auf die bei Padberg und Wartha beschriebenen Fehlerstrategien ein, die ich schon in 7.4 aufgeführt habe.

1. Zahlen in Bruchdarstellung werden, anders als in Kommadarstellung, kaum mit normalen Zahlvorstellungen verbunden.
2. Die Schülerinnen und Schüler sehen ständig zwei oder mehr natürliche Zahlen, die miteinander verknüpft sind. Dadurch wird ihnen viel Übersicht abverlangt.
3. Falsche Addition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
4. Falsche Multiplikation: $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$
5. Falsche Darstellung der natürlichen Zahlen: $n = \frac{n}{n}$
6. Falscher Größenvergleich: zum Beispiel $\frac{17}{92} > \frac{1}{2}$, weil $17 > 1$ und $92 > 2$.
7. Operieren mit falschen Grundvorstellungen bei Sachaufgaben

Die in 1 und 2 beschriebenen Probleme tauchten nicht auf, was vermutlich durch die Vorbereitung begründet ist. Summen, Produkte, Differenzen und Quotienten zweier Zahlen wurden schon vorher als legitime Darstellung von Zahlen akzeptiert. Somit konnte es hier keine Identifikations- oder Übersichtsprobleme geben.

Fehlertyp 3 tauchte nur sehr selten auf. Ich vermute, dass dieser Fehlertyp durch einen Einstieg im Konkreten begünstigt wird und daher wegen des formalen Einstiegs so selten vorkam.

Die Fehlertypen 4 und 7 kamen wie beschrieben vereinzelt vor.

Fehlertyp 5 kam gar nicht vor. Ich vermute die Ursache darin, dass der Bruchstrich als Ersatz für das Divisionszeichen eingeführt wurde.

Fehlertyp 6 kam gelegentlich vor.

Dies sind aber nur Beobachtungen an einer Klasse.

Schließlich wurde nach der Einführung der Bruchschreibweise, Behandlung aller Rechenarten und der anschließenden Konkretisierung noch die Kommaschreibweise eingeführt. Das Vorgehen dabei war eher „traditionell“.

Sehr wichtig war mir dabei, wie in der ganzen Einheit, die Wahl des Vokabulars. Denn es sollte vermieden werden, durch Vokabeln wie Dezimalbruch, Dezimalzahl oder Kommazahl die Fehlvorstellung zu nähren, es handle sich um neue Zahlen. Brüche und Kommazahlen sind zunächst dasselbe, da wir in Klassenstufe 6 noch keine irrationalen Zahlen kennen. Deswegen wurde nur von Bruchdarstellung oder Kommadarstellung gesprochen und auch wirklich klar gemacht, dass es sich jeweils nur um verschiedene Schreibweisen derselben Zahl handelt.

Es war schon aus der 5. Klasse eine Stellenwerttafel bekannt. Schaut man sich die Stellenwerttafel für das Zehnersystem an, so sieht man, dass rechts die Einer, und an den links davon platzierten Stellen nacheinander die Zehner, Hunderter, Tausender und so fort folgen. Das bedeutet bei jedem Schritt nach links verzehnfacht sich der Wert der Stelle. Ebenso wird der Wert der Stelle nach rechts mit jedem Schritt gezehntelt. Diese Zehntelung wurde nun einfach von der Einerstelle an fortgesetzt, sodass wir rechts davon Zehntel, Hunderstel, Tausendstel und so weiter, erhielten. Es folgten Übungen zur Übertragung von Kommaschreibweise in Bruchdarstellung und umgekehrt. Dabei fiel auf, dass eine Umwandlung von Bruchdarstellung in Kommadarstellung zunächst nur dann problemlos gelang, wenn man den Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner schreiben konnte.

Im Folgenden lernten die Schülerinnen und Schüler, dass man die Kommadarstellung auch mithilfe des Algorithmus für die schriftliche Division finden kann.

Anschließend beschäftigten wir uns mit Brüchen, die eine Periode in Kommadarstellung besitzen, wobei wir unterschieden zwischen solchen, bei denen die Periode sofort hinter dem Komma beginnt und solchen, die eine Vorperiode besitzen. Wichtig war mir dabei die Erkenntnis, dass jeder Bruch eine endliche oder eine nicht endliche, dann aber periodische Kommadarstellung besitzt, die rein- oder gemischt-periodisch sein kann. Außerdem wurde natürlich auch geübt, die Bruchdarstellung zu einer gegebenen rein- oder gemischt-periodischen Kommadarstellung zu finden.

Es wurde anschließend der Größenvergleich thematisiert, ehe auf die Addition und Subtraktion eingegangen wurde. Bis hierhin fanden die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit der Kommadarstellung leichter als den Umgang mit der Bruchdarstellung. Einzige Ausnahme war die Addition oder Subtraktion von Brüchen mit periodischer Kommadarstellung, wo eingesehen werden musste, dass es in vielen Fällen sinnvoll ist, zunächst in die Bruchdarstellung zu übertragen. In den meisten Fällen als schwieriger als in der Bruchdarstellung wurde aber die Multiplikation und die Division in Kommadarstellung empfunden, insbesondere dann, wenn die Zahlen in Kommadarstellung über mehrere signifikante Stellen verfügen. Beispiel: $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{640}$ lässt sich nach

allgemeinem Empfinden leichter rechnen als $0,0625 \cdot 0,025 = 0,0015625$.

Da die Multiplikation im Wesentlichen so abläuft wie die Multiplikation von natürlichen Zahlen, musste nur das Problem geklärt werden, wo sich im Produkt das Komma befindet. Im eben genannten Beispiel ist es leicht, wenn man die Bruchschreibweise mit Zehnerpotenzen im Nenner verwendet:

$$0,0625 \cdot 0,025 = \frac{625}{10000} \cdot \frac{25}{1000} = \frac{15625}{10000000} = 0,0015625. \text{ So kann man leicht die}$$

Multiplikation durch eine Multiplikation im Bereich der natürlichen Zahlen ersetzen und findet leicht die Stelle, an der das Komma gesetzt werden muss.

Bei der Division wurde schnell klar, dass sich jede Division durch Erweitern von Dividend und Divisor um eine geeignete Zehnerpotenz auf eine Division zurückführen lässt, deren Divisor eine natürliche Zahl ist.

Schließlich wurde natürlich noch dem Problem nachgegangen, wo man Zahlen in Kommadarstellung auf dem Zahlenstrahl lokalisieren kann. Es wurde auch das Rechnen mit der Kommadarstellung an Sachproblemen geübt.

Die Problembereiche beim Rechnen in der Kommadarstellung waren die klassischen: das Komma wurde gelegentlich für ein Trennsymbol gehalten und so kam es zu Fehlern wie:

$$4,7 < 4,12$$

$$4,3 + 5,26 = 5,29$$

$$5,2 \cdot 3,3 = 15,6$$

Diese Fehler waren aber meistens Resultate der Fahrlässigkeit, denn wenn die Schülerinnen und Schüler, die diese Fehler gemacht hatten, aufgefordert wurden, ihr Vorgehen zu begründen, dann stießen sie meist selbst auf ihren Fehler.

10 Fazit

Insgesamt muss die Erprobung dieses Konzepts als erfolgreich beurteilt werden. Insbesondere in den Bereichen Addition und Subtraktion von Brüchen, die sonst häufig Problembereiche waren, zeigten sich die Schülerinnen und Schüler auch zu Beginn des folgenden Schuljahres sehr sicher.

Dies ist zurückzuführen auf den Beginn im Formalen, da so die durch den Einstieg im Konkreten begünstigte Fehlerstrategie von vornherein fernlag.

Es gab keinen Bereich, in dem zu Beginn des Folgeschuljahres auffällige Schwächen festzustellen waren.

Eine große Stärke des Konzepts liegt darin, dass die Schülerinnen und Schüler sich alles aus dem Bekannten abholen können, wozu sie natürlich zunächst angeleitet werden müssen. Eine weitere Stärke liegt darin, dass im Gegensatz zu den anderen Konzepten kein Missverständnis darüber entstehen kann, ob die natürlichen Zahlen zu den Brüchen gehören oder nicht.

Eine in der Zukunft wirksame Stärke liegt darin, dass die Vorgehensweise, die Rechenregeln aus dem Bereich der natürlichen Zahlen abzuholen, den Schülerinnen und Schülern später, wenn einmal einzelne Regeln in Vergessenheit geraten sein sollten, helfen wird, diese zu rekonstruieren.

Literatur

- Baruk, S.: Wie alt ist der Kapitän? - Über den Irrtum in der Mathematik
1. Auflage Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 1989
- Berk, L.A. : Entwicklungspsychologie. 3. Auflage München: Pearson-Studium,
2005
- Burmester, K./ Bönig, D.: „Im Mathebuch ergeben alle Aufgaben einen Sinn...’ -
Warum lösen Schüler Kapitänsaufgaben?“ In: Beiträge zum
Mathematikunterricht 1993, Verlag Franzbecker, 1993, Seiten 104 – 107
- Dehaene, S.: Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können. 1. Auflage
Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag 1999
- Dittmann, M.: Sprachverwendung in Internet-Untersuchungen zur Nutzung
des Internet Relay Chat (IRC) in Deutschland und Frankreich.
Norderstedt: Books on Demand Verlag, 2002
- Döring, N.: „HandyKids: Wozu brauchen sie das Mobiltelefon?“ In: Dittler, U.,
Hoyer, M. (Hrsg.): Machen Computer Kinder dumm? Wirkung
interaktiver, digitaler Medien auf Kinder und Jugendliche aus
medienpsychologischer und mediendidaktischer Sicht. 1. Auflage
München: Kopaed Verlag 2006, Seiten 45 – 66
- Fend, H.: Entwicklungspsychologie des Jugendalters, Opladen: Leske +
Budrich, 2000
- Flammer, A./ Alsaker, F.D.: Entwicklungspsychologie der Adoleszenz: die
Erschließung äußerer und innerer Welten im Jugendalter. 1. Auflage:
Bern: Huber Verlag, 2002
- Flynn, J. R.: „Lurija und das Paradox massiver IQ-Gewinne längs der Zeit“ In:
Oesterdiekhoff, G.W./ Rindermann, H. (Hg.): Kultur und Kognition.
Berlin: LIT Verlag, 2008, Seiten 111 - 132
- Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. 1. Auflage
Stuttgart: Klett 1973
- Gatterburg, A.: „Aliens im Kinderzimmer“ In: Der Spiegel, 20/2007, Seiten 42 –
54
- Gee, J. P.: What Video Games Have to teach us about Learning and Literacy.
2. Auflage: New York: Palgrave Macmillan Verlag, 2007

- Greenfield, P.M.: Die kulturelle Evolution des IQ. In: Spektrum Freizeit, 21. Jhg., Nr. 2, 1999, Seiten 18 – 50
- Griggs, R.A., Cox, J.R.: "The elusive thematic-materials effect in Wason's selection task." In: British Journal of Psychology (1982) Heft 73, Seiten 407 - 420
- Heis, E.: Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 1. Auflage Köln: Verlag der M.DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung, 1894
- Herden, G., Pallack, A.: „Fehlerstrategien in der Bruchrechnung“ In: Journal für Mathematik-Didaktik, Leipzig, Berlin: B.G.Teubner Verlag, Jahrgang 21 (2000), Heft 3/4, Seiten 259 - 279
- Jahnke, H.N./ Mies, T./ Otte, M./ Schubring, G.: „Zu einigen Hauptaspekten der Mathematikdidaktik“ In: Zur Piaget-Rezeption in der Mathematik-Didaktik der 70er Jahre - Beiträge aus dem IDM, Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik, 1985
- Johnson, S.: Neue Intelligenz - Warum wir durch Computerspiele und TV klüger werden. 1. Auflage Köln: Kiepenheuer & Witsch 2006
- Kraam-Aulenbach, N.: Interaktives, problemlösendes Denken im vernetzten Computerspiel, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrads, Wuppertal, 2002
- Kutzner, M.: „Kognitive Strukturen und mentale Entwicklung in vormodernen Gesellschaften“; in Oesterdiekhoff, G.W./ Rindermann, H.: Kultur und Kognition. Berlin: LIT Verlag, 2008, Seiten 79 – 92
- Lankes, E.-M./ Lorenzen, H./ Petersen, C./ von Urban, S./ von Zelewski, H.-D./ Zielinski, D.: Kompetenzorientierter Mathematikunterricht – Anregungen für die Arbeit mit den Bildungsstandards zum Hauptschulabschluss und mittleren Abschluss (Sekundarstufe I), Kronshagen 2006
- Lehrplan des Landes Schleswig-Holstein für die Sekundarstufe I der weiterführenden allgemeinbildenden Schulen, Hauptschule, Realschule, Gymnasium, Gesamtschule
- Lietzmann, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts. 3. Auflage Heidelberg: Quelle & Meyer Verlag, 1961
- Malle, G.: „Zahlen fallen nicht vom Himmel“ In: Mathematik lehren 142 – Auf dem Weg zu neuen Zahlen, Seelze: Friedrich Verlag 2007, Seiten 4 – 11

- Menninger, K.: Zahlwort und Ziffer – Eine Kulturgeschichte der Zahl, 3. Auflage, unveränd. Nachdr. d. 2., neubearb. u. erw. Aufl. von 1958 Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1979
- Mietzel, G.: Wege in die Entwicklungspsychologie - Kindheit und Jugend. 4. Auflage Weinheim: Beltz Verlag, 2002
- Mikos, L.: „Ästhetische Erfahrung und visuelle Kompetenz. Zur Erweiterung der diskursiven Medienkompetenz um präsentative Elemente“ In: MedienPädagogik Themenheft 1, 2000, Seite 10 - 11
- Müller-Weuthen, K.: „Jean Piaget: Der Invarianz-Irrtum“. In: „Schüler - Wissen für Lehrer 2006: Lernen“, Friedrich Verlag 2006, Seite 10
- Neuß, N.: „Neue Medien im Kindergarten: Ein Bestandteil frühkindlicher Bildung?“ In: Dittler, U., Hoyer, M. (Hrsg.): Machen Computer Kinder dumm? Wirkung interaktiver, digitaler Medien auf Kinder und Jugendliche aus medienpsychologischer und mediendidaktischer Sicht. 1. Auflage München: Kopaed Verlag 2006, Seiten 85 - 102
- Oesterdiekhoff, G.W.: Kulturelle Bedingungen kognitiver Entwicklung. 1. Auflage Frankfurt a. M.: Suhrkamp Verlag, 1997
- Oesterdiekhoff, G.W.: Zivilisation und Strukturgenese: Norbert Elias und Jean Piaget im Vergleich. 1. Auflage , Frankfurt a. M.: Suhrkamp Verlag, 2000
- Oesterdiekhoff, G.W.: Kulturelle Evolution des Geistes, Berlin: LIT Verlag, 2006
- Oesterdiekhoff, G.W.: „Kulturgeschichte der Menschheit und kognitive Entwicklung“ In: Oesterdiekhoff, G.W./ Rindermann, H. (Hg.): Kultur und Kognition. Berlin: LIT Verlag, 2008, Seiten 19 - 56
- Oesterdiekhoff, G.W./ Rindermann, H.: „Paradigmen kognitiver Kompetenz“ In: Oesterdiekhoff, G.W./ Rindermann, H. (Hg.): Kultur und Kognition. Berlin: LIT Verlag, 2008, Seiten 1 – 18
- Padberg, F.: Didaktik der Arithmetik. 2. Auflage. Heidelberg – Berlin – Oxford: Spektrum Akademischer Verlag 1996
- Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung. 3. Auflage. Heidelberg - Berlin: Spektrum Akademischer Verlag 2002
- Pfeifer, D.: Klick. Wie moderne Medien und klüger machen. 1. Auflage Frankfurt, New York: Campus Verlag, 2007,
- Piaget, J./ Szeminska, A.: Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. 3. Auflage Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1972

- Pohlmann, H.: Überwältigt von der Spieleflut? - Genrekunde In Kaminski, W., Witting, T (Hrsg.): Digitale Spielräume: Basiswissen Computer- und Videospiele, 1. Auflage München: Kopaed Verlag 2007, Seiten 9 -15
- Scharloth, M.: „Zur propädeutischen Funktion des Arithmetikunterrichts“. In: Journal für Mathematik-Didaktik, B. G. Teubner Verlag, Jahrgang 20 (1999), Heft 2/3, Seite 84 f.
- Schneider, R. U.: „Das Experiment - Die wundersame Vermehrung des Sirups“. In NZZ Folio: Schweizer Qualität, 11/05
- Schrage, K.-P.: Bruchrechnung international - Eine Bestandsaufnahme in vier Ländern. Inaugural-Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades des Doktors in den Erziehungswissenschaften an der Westfälischen Wilhelms- Universität Münster, 1988
- Siegler, R./ DeLoache, J./ Eisenberg, N.: Entwicklungspsychologie im Kindes- und Jugendalter. 1. Auflage Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag, 2005
- Sleegers, J.: „Und das soll Spaß machen? - Faszinationskraft“ In Kaminski, W., Witting, T. (Hrsg.): Digitale Spielräume - Basiswissen Computer- und Videospiele, 1. Auflage München: Kopaed Verlag 2007, Seiten 17 - 20
- Spitzer, M.: Vorsicht Bildschirm! - Elektronische Medien, Gehirnentwicklung, Gesundheit und Gesellschaft. 5. Auflage, München: dtv, 2008
- Statistisches Jahrbuch 2007 für die Bundesrepublik Deutschland, Wiesbaden: Statistisches Bundesamt 2007
- Stoll, F./ Schallberger, U.: „Auch Schweizer Jugendliche lösen Intelligenztest-Aufgaben immer besser.“ In U. Gerhard (Hrsg.): Psychologische Erkenntnisse zwischen Philosophie und Empirie (S. 194 - 205). Bern (u. a.): Huber Verlag 1992
- Tomasello, M.: Die kulturelle Entwicklung des menschlichen Denkens. 1. Auflage Frankfurt a. M.: Suhrkamp 2006
- Voigt - Lambert, T.: Bruchrechnen leicht gelernt. Lichtenau: AOL-Verlag 2005
- Vollbrecht, R.: „Mediensozialisation von Kindern und Jugendlichen“. In: Dittler, U., Hoyer, M. (Hrsg.): Machen Computer Kinder dumm? Wirkung interaktiver, digitaler Medien auf Kinder und Jugendliche aus medienpsychologischer und mediendidaktischer Sicht. 1. Auflage München: Kopaed Verlag 2006, Seiten 33 - 44

- Wartha, S.: „Verständnis entwickeln - Diagnose von Grund- und Fehlvorstellungen bei Bruchzahlen“. In: *Mathematik lehren* 142 - Auf dem Weg zu neuen Zahlen , Seelze: Friedrich Verlag 2007, Seiten 24 – 44
- Wartha, S.: „Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs“. Hildesheim, Berlin: Franzbecker Verlag 2007
- Wason, P. C.: „Reasoning about a Rule“. In: *Quarterly Journal of Experimental Psychology* 20, 1968, S. 273–281.
- Wieleitner, H.: Der Begriff der Zahl. Mathematisch-Physikalische Bibliothek, 2. Auflage Leipzig, Berlin: Verlag B. G. Teubner, 1918
- Winter, H.: „Ganze und zugleich gebrochene Zahlen“. In: *Mathematik lehren* 123 - Brüche und Verhältnisse, Seelze: Friedrich Verlag 2004, Seiten 14 -19
- Witting, T.: „Worum geht's denn da? - Spielinhalte“. In: Kaminski, W., Witting, T. (Hrsg.): *Digitale Spielräume - Basiswissen Computer- und Videospiele*. 1. Auflage München: Kopaed Verlag 2007, Seiten 35 – 40
- Wittmann, E. C.: „Operative Übungen für das 6./7. Schuljahr“. In: *Mathematik lehren* Sammelband: Ideen für Vertretungsstunden, Seelze: Friedrich Verlag 2003, Seite 87
- Zech, F.: *Mathematik erklären und verstehen*. 2. Auflage. Berlin: Cornelsen Verlag 1995
- Ziegler, G.M.: „Nicht jugendfrei“. In: *DMV Mitteilungen*, Band 15 Heft 3, 2007, Seite 176

Inspizierte Schulbücher:

Der neue Koschmann 5, Diesterweg, 1968
Neue Mathematik 6, Schroedel, 1970
Westermann Mathematik 6, Westermann, 1972
Mathematik 6, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1972
Einführung in die Mathematik 6. Schuljahr, Diesterweg, 1975
Mathematisches Arbeitsbuch 6, Diesterweg, 1975
Gamma 6, Klett, 1976 und 1984
Mathematik SI Klasse 6, Girardet, 1981
Plus 6, Schöningh, 1982
Welt und Zahl 6, Schroedel, 1984
Mathematik 6, Mildenerger, 1985
Mathematik 6, Volk und Wissen, 1991
Mathematik Real 6, Cornelsen, 1992
Mathematik, 6.Schuljahr, Cornelsen, 1993
Querschnitt Mathematik 6, Westermann, 1993
Mathematik Lehrbuch Klasse 6, Volk und Wissen, 1994
Elemente der Mathematik, Schroedel, 1999
Einblicke in die Mathematik, Klett, 1997
Mathematik heute 6, Schroedel, 1978, 1987 und 2000
Mathematik Neue Wege 6, Schroedel, 2001
Zahlen und Größen 6, Cornelsen, 2002
Lambacher Schweizer 6, Klett, 2004
Schnittpunkt 6, Klett, 2002, 2004
Welt der Zahl 1, Schroedel, 2004
Mathematik 6, Denken und Rechnen, Westermann 2005
Fokus Mathematik Gymnasium Klasse 6, Cornelsen, 2007
Mathematik Interaktiv 6 Ausgabe N, Cornelsen, 2007
Mathematik 6, Westermann, 2007
Maßstab 6, Schroedel, 2007
Stark in Mathematik 2, Schroedel, 2009

Weitere Publikationen, „Lerntrainer“, Materialsammlungen:

Mathematik 6. Schuljahr, Weiterführende Schulen, Manz, 1978

Wiederholen – Üben – Vertiefen, Arbeitsheft für die 6. Jahrgangsstufe, Manz, 1993

Besser in Mathematik - Bruchrechnen ab 6. Schuljahr, Cornelsen Scriptor 2001

Mach Dich Fit - Arbeitsheft 6, Westermann, 2001

Unterrichtssequenzen, Mathematik 6. Jahrgangsstufe, Auer, 2002

Bruchrechnen- Kopiervorlagen für das 6. Schuljahr, Cornelsen Scriptor, 2002

Lernen an Stationen in der Sekundarstufe I - Bruchrechnen, Cornelsen Scriptor, 2005

Mathematik kompakt, Wien: Tosa Verlag, 2005

Bruchrechnen leicht gelernt, AOL Verlag, 2006

Prozentrechnung leicht gemacht, AOL Verlag 2006

Sachrechnen leicht gemacht, AOL Verlag 2003

Kein Einbruch bei Brüchen, Aulis Verlag Deubner, 2006

Arbeitsheft Interaktiv Mathematik 6 Ausgabe N, Cornelsen, 2006

199 Tests Bruch- und Prozentrechnen, Cornelsen Scriptor, 2006

Links zu zitierten Internetseiten:

www.db.globus.pictures.de, 2001-2008 dpa-Infografik GmbH

<http://de.wikipedia.org/wiki/Bruchrechnung>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalbruch>

<http://www.math.uni-frankfurt.de/~grathwoh/Mathematikdidaktik2-VL9.pdf>

<http://www.selbstlernmaterial.de>

http://mathematik.lernnetz.de/walter_fendt/m14d/bruchrechnen.htm

<http://www.mallig.eduvinet.de/mathe/6bruch/expl/6brucQT1.htm>

http://www.uni-leipzig.de/~erzwiss/mitarbeiter/hoppe_graff/material/ma-VEntw+LernenI_ws04-05_Kapitel06.pdf

<http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmzb41.htm>

http://za.lernnetz2.de/docs/mathe_hs_bsp.pdf

<http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1ar/fs/rmb08.PDF>