Wirtschaftsmathematik im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I und II

Eine Analyse mathematischer und ökonomischer Inhalte zur Konzeption von Unterrichtseinheiten mit wirtschaftsmathematischer Aufgabenstellung

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie (Dr. phil.)
im Fachbereich Mathematik und ihre Didaktik an der Europa-Universität Flensburg

Vorgelegt von: Jens Dennhard

im November 2016

Erstgutachterin: Frau Prof. Dr. Peggy Daume

Zweitgutachter: Herr Prof. Dr. Armin Wiedemann

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

> *„Die Mehrheit der Bevölkerung hat große Wissensdefizite über Ökonomie und Finanzen. Mehr Bildung wäre nötig.“*

Die „Frankfurter Allgemeine“ vom 02.05.2016 greift mit diesem Zitat die aktuelle bildungspolitische Diskussion über eine ökonomische Allgemeinbildung in Schulen auf. Diese geht einher mit der Forderung nach einem eigenen Fach Wirtschaft. Wurde etwa in Baden-Württemberg bislang der Fächerverbund GWG (Geographie, Wirtschaft und Gemeinschaftskunde) unterrichtet, steht ab dem Schuljahr 2016/17 ein eigenständiges Fach Wirtschaft, Berufs- und Studienorientierung auf dem Stundenplan. Allgemein ist die Umsetzung Ländersache, von den Zielen und Inhalten ganz zu schweigen: In Bayern lernen Schüler[1] Wirtschaft und Recht, in Hamburg wird PGW – Politik, Gesellschaft und Wirtschaft gelehrt (KRUBER 2005, S. 76). Dabei ist der Wunsch nach Eigenständigkeit nicht neu. Wirtschafts- und Gewerkschaftsverbände votieren schon seit Jahren für ein unabhängiges Fach (z. B. die Deutsche Gesellschaft für ökonomische Bildung). Sie argumentieren, dass ein gelegentliches Ansprechen wirtschaftlicher Problemstellungen zum Verstehen komplexer Funktionsweisen von etwa Märkten und Unternehmen nicht ausreiche. Lehrerverbände befürchten in diesem Zuge eine Streichung der Stunden von Gemeinschaftskunde oder Erdkunde. Des Weiteren wird als Argument zur Beibehaltung eines Fächerverbundes angeführt, dass ökonomische Probleme mehrperspektivisch und nicht ohne politische sowie gesellschaftliche Zusammenhänge zu untersuchen seien (vgl. HEDTKE et al. 2010).

Losgelöst von der Diskussion zum Unterrichtsfach Wirtschaft kann der Mathematikunterricht einen Beitrag zur ökonomischen Bildung leisten: Ökonomische Themengebiete besitzen viele Schnittstellen mit Inhalten der Analysis, so dass sie für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht geeignet sind. Dieser beinhaltet neben der Auffassung von Mathematik als Wissenschaft mit eigenen Regeln und Symbolen auch realitätsnahe Anwendungen, die zum Verständnis der Welt beitragen (vgl. WINTER 1995). Existiert wie in Baden-Württemberg ein eigenständiges Fach Wirtschaft, kann der Mathematikunterricht fächerübergreifend neue Perspektiven eröffnen. Einzelne Aufgaben in Schulbüchern unterstützen diese Vorhaben ansatzweise, zusammenhängende Unterrichtsvorschläge fehlen bisher. Ziel der vorliegenden Dissertationsschrift ist es daher, unter Berücksichtigung der Bildungsstandards Mathematik ein zusammenhängendes und spiralförmig aufgebautes Curriculum mit beispielhaften Unterrichtseinheiten zu entwickeln.

[1] Der besseren Lesbarkeit halber wird im Folgenden nur die männliche Form genutzt. Die weibliche Form sei impliziert.

Wir zeigen ökonomische Fragestellungen auf, die für einen verständnisvollen, anschaulichen Einstieg in mathematische Themengebiete geeignet und zur Entwicklung tragfähiger Begriffe dienlich sind. Den Schwerpunkt legen wir dabei auf die Betrachtung der schulischen Vermittlung des Ableitungsbegriffs. Zu diesem gibt es verschiedene, in der Mathematikdidaktik diskutierte Zugänge (vgl. DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 45 ff.):

– Ableitung als Tangentensteigung

– Ableitung als lokale Änderungsrate

– Ableitung als lokale Linearisierung.

Der geometrische Ansatz von der Sekanten- zur Tangentensteigung ist zwar anschaulich, schwierig gestaltet sich jedoch die Vermischung geometrischer und analytischer Aspekte. Im Mathematikunterricht hat sich die lokale Änderungsrate z. B. beim Gang von der mittleren zur momentanen Geschwindigkeit durchgesetzt, wie es auch die Bildungsstandards Mathematik für die allgemeine Hochschulreife fordern (KMK 2012, S. 20). Trotz ihrer hohen praktischen Bedeutung belegen aktuelle Studien zur Vermittlung des Ableitungsbegriffs, dass der Zugang über die lokale Änderungsrate wenig nachhaltig ist (WITZKE 2014). Es zeigt sich, dass Schüler nach einer Einführung in die Differenzialrechnung in ihren Vorstellungen zum Tangentenbegriff hauptsächlich an Grundvorstellungen aus der Kreis- und Koordinatengeometrie anknüpfen. Aspekte der lokalen Änderung wurden nur wenig, die Grundvorstellung der lokalen Linearität gar nicht angesprochen (BÜCHTER 2014). Ähnliche Ergebnisse bestätigt KRAMER (2013), der feststellt, dass „elementare Kennzeichen des analytischen Tangentenbegriffs fehlen – wie etwa die lokale Eigenschaft und der Aspekt der lokalen Linearität [...]“ (KRAMER 2013, S. 87). Da nur wenige Schulbücher auf die Grundvorstellung der Tangente als lokale Linearisierung eingehen, scheint deren Fehlen nachvollziehbar. Der Wert der Ableitung einer ökonomischen Funktion wird in der Wirtschaftsmathematik als Näherung zur Funktionswertänderung aufgefasst (vgl. TIETZE 2010, S. 241). Folglich bleibt zu prüfen, welcher der zuvor genannten Zugänge zum Ableitungsbegriff im ökonomischen Umfeld geeignet ist.

Mit den zu entwickelnden Unterrichtseinheiten möchten wir nicht nur ein aktuelles fachdidaktisches Thema der Mathematik aufgreifen, sondern wirtschaftliche Fragestellungen auf ihre praktische Umsetzung und ihren Beitrag zu einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht untersuchen. Während der Anwendungsbezug impliziert ist, bleibt zu prüfen, inwiefern innermathematische Themen anschließen können. Dabei ist zu überlegen, welche ökonomischen Inhalte Schüler beherrschen müssen, um entsprechende Aufgaben zu bearbeiten. Die Dissertationsschrift ist dazu in vier Teile gegliedert:

Im ersten Teil werden dem Leser die wichtigsten mathematischen und ökonomischen Grundlagen aus fachwissenschaftlicher Sicht aufgezeigt, deren Inhalte u. E. im Mathematikunterricht sinnvoll umzusetzen sind. Zunächst führen wir grundlegende Größen der Wirtschaftsmathematik sowie deren Funktionen (Angebot, Nachfrage, Preis-Absatz, Erlös, Kosten, Gewinn) im Umfeld verschiedener Marktformen ein (Kap. 1). Es folgt die Differenzialrechnung für Funktionen mit einer Variablen sowie deren ökonomische Anwendungen (Kap. 2). Eine Erweiterung auf Funktionen mit zwei Variablen (Kap. 3) schließt den fachwissenschaftlichen Teil.

Der zweite Teil ergänzt aus fachdidaktischer Sicht den theoretischen Begründungsrahmen dieser Arbeit. Maßgebend sind der allgemeinbildende Charakter des Mathematikunterrichts (Kap. 4) und die Vorgaben der Bildungsstandards Mathematik (Kap. 5). Anschließend betrachten wir im Umfeld der Didaktik der Analysis, welche der diskutierten Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff sinnvoll mit ökonomischen Funktionen zu erarbeiten sind (Kap. 6). Nach einem kurzen Überblick über die Verwendung des Rechners im Mathematikunterricht (Kap. 7) zeigen wir anhand von ausgewählten Schulbuchaufgaben sowie Abituraufgaben exemplarisch auf, wie sich die aktuelle Umsetzung der Wirtschaftsmathematik im allgemeinbildenden Gymnasium darstellt (Kap. 8).

Im dritten Teil stellen wir unter Berücksichtigung der theoretischen und didaktischen Rahmenbedingungen konkrete Unterrichtsvorschläge in Form von drei Unterrichtseinheiten dar. Ihr Aufbau ist spiralförmig angelegt und inhaltlich an vielen Themen gängiger Lehrpläne[2] orientiert. Die Unterrichtseinheiten widmen sich folgenden Themen:

- **„Von Märkten und Unternehmen“:** Modellierung von Angebot und Nachfrage mittels linearer Funktionen und Analyse grundlegender ökonomischer Funktionen (Kap. 9)
- **„Änderung ökonomischer Funktionen I“:** Einführung in die Differenzialrechnung mittels ökonomischer Funktionen und Bedeutung der ersten Ableitung als Grenzfunktion (Kap. 10)
- **„Änderung ökonomischer Funktionen II“:** Weiterführung der Differenzialrechnung mittels der zweiten Ableitung einer ökonomischen Funktion und durch Analyse der Exponentialfunktion im ökonomischen Kontext (Kap. 11).

[2]Weitere Synonyme sind Rahmenpläne (Berlin-Brandenburg), Fachanforderungen (Schleswig-Holstein), Kernlehrpläne (Nordrhein-Westfalen) oder Kerncurriculum (Niedersachsen).

Der vierte Teil befasst sich mit der Frage, ob die vorgestellten Unterrichtseinheiten im schulischen Alltag realisierbar sind. Dabei führten die Einheit „Von Märkten und Unternehmen“ und das Ergänzungsmodul „Preis-Elastizität der Nachfrage“ aus der Einheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“, die an einer Mannheimer Gesamtschule erprobt wurden, zu positiven Erfahrungen und Reaktionen seitens der Schüler und Lehrer. Die schulpraktischen Beschreibungen schließen mit den Ergebnissen einer Sequenz zur „Analyse ertragsgesetzlicher Kosten mittels zweiter Ableitung“ aus dem Basismodul „Änderung ökonomischer Funktionen II“ in einer zwölften Klasse (Kap. 12). Es folgt die Schilderung von außerschulischen Erprobungen der Wirtschaftsmathematik im Rahmen des Würth Bildungspreises und eines Studienvorbereitungskurses. In diesem testeten wir das Basismodul der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“ einschließlich dem zugehörigen Ergänzungsmodul „Die Ableitung als lokale Linearisierung“ sowie das Ergänzungsmodul „Approximation von Funktionen“ aus der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen II“ (Kap. 13). Abschließend fassen wir die wichtigsten Befunde dieser Arbeit zusammen (Kap. 14).

I Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

1 Ökonomische Funktionen mit einer Variablen

Dieses Kapitel behandelt die wichtigsten mathematischen und ökonomischen Grundlagen für diese Arbeit. Zunächst gehen wir auf einzelne Marktformen ein (Abschn. 1.1). Anschließend greifen wir die Idee der Regression auf, um aus fachwissenschaftlicher Sicht das Verhalten von Anbietern und Nachfragern auf einem Markt zu untersuchen (Abschn. 1.2). Wir beschreiben die grundlegenden Größen Preis-Absatz, Erlös, Kosten und Gewinn sowie deren funktionale Darstellung (Abschn. 1.3). Dabei setzen wir beim Leser elementare Kenntnisse zum Funktionsbegriff voraus.

Die (wirtschafts-)mathematischen Inhalte beziehen sich hauptsächlich auf BEA et al. (2002), HOLEY und WIEDEMANN (2010), TERVEER und TERVEER (2011) sowie TIETZE (2010). Die ökonomischen Inhalte orientieren sich an BECK (2011), BREYER (2015), EICHBERGER (2004), FRIEDL et al. (2013), HORNGREN et al. (2001), HUTSCHENREUTER (2009) sowie PINDYCK und RUBINFELD (2009).

1.1 Was sind Märkte?

Auf einem **Markt** stehen sich **Nachfrager** (Käufer) und **Anbieter** (Verkäufer) gegenüber. Die Anbieter handeln mit **Gütern**, die die Nachfrager zu bestimmten **Preisen** kaufen können. Es gibt verschiedene Märkte, wie den Arbeitsmarkt, den Kapitalmarkt, den Wochenmarkt oder den Immobilienmarkt. Um zu verstehen, wie sich auf einem Markt die Preise bilden, ist dieser zu analysieren. Ein wichtiges Kriterium ist, ob es sich um einen **vollkommenen Markt** handelt. Für diesen gelten die folgenden Annahmen (vgl. GÜIDA 2009, S. 104; LACHMANN 2006, S. 58; SCHÖLER 2011, S. 124):

– Die Güter sind homogen. Sie unterscheiden sich nicht in sachlichen, persönlichen oder räumlichen Aspekten.

– Das Gut wird überall auf dem Markt zu einem einheitlichen Preis angeboten.

– Alle Marktteilnehmer verfügen über vollständige Markttransparenz. Dies betrifft Informationen über das Gut, den Preis und die Teilnehmer.

– Es gibt keine Beschränkungen für den Markteintritt oder -austritt.

– Außer den Produktionskosten und dem Verkaufspreis entstehen beim Kauf und Verkauf keine weiteren Ausgaben für die Marktteilnehmer.

Ist eine der genannten Bedingungen nicht erfüllt, liegt ein **unvollkommener Markt** vor. Ein vollkommener Markt stellt eine Idealform eines Marktes dar, der sich als Modell zur Beschreibung komplexer Sachverhalte eignet. Neben der Klassifizierung nach der Vollkommenheit eines Marktes ist eine Abgrenzung hinsichtlich der Menge der handelnden Personen sinnvoll. Je nach Anzahl der Anbieter und Nachfrager unterscheiden wir drei Grundformen von Märkten (Monopol, Oligopol, Polypol), wie Tabelle 1.1 zeigt.

Nachfrager **Anbieter**	viele	wenige	einer
viele	Polypol	Nachfrage-oligopol	Nachfrage-monopol
wenige	Angebots-oligopol	bilaterales Oligopol	beschränktes Nachfrage-monopol
einer	Angebots-monopol	beschränktes Angebots-monopol	bilaterales Monopol

Tabelle 1.1: Übersicht zu den Marktformen (vgl. WILDMANN 2007, S. 174)

Wir gehen im Folgenden von vielen Nachfragern aus und betrachten lediglich die Anbieter: Stehen genau einem Anbieter viele Nachfrager gegenüber, sprechen wir von einem **Monopol**. Auf einem vollkommenen Markt wird dieses auch als **reines Monopol** bezeichnet (vgl. KORTMANN 2006, S. 454). Lediglich der freie Markteintritt ist aufgrund des Alleinstellungsmerkmals aufgehoben, alle weiteren Voraussetzungen bleiben erhalten. Daher ist es in der Realität nur ansatzweise zu finden. Als Beispiel ist die Deutsche Bahn zu nennen, der im Jahr 2012 noch 99 Prozent des Marktanteils am Fernverkehr gehörte (vgl. SCHLESIER 2012). Gibt es wenige Anbieter für viele Nachfrager, heißt diese Marktform **Oligopol**. So regeln etwa auf dem Mineralölmarkt wenige Konzerne den Verkauf von Benzin. Treffen auf einem vollkommenen Markt unendlich viele Nachfrager und eben so viele Anbieter aufeinander, liegt ein **Polypol**, auch **vollständige Konkurrenz** genannt, vor. Es stellt wie das reine Monopol ein theoretisches Modell dar und ist daher eine „idealtypische Marktform“ (SCHUMANN et al. 2011, S. 221). Befindet sich ein polypolistischer Anbieter auf einem unvollkommenen Markt, wird dies als **monopolistische Konkurrenz** (vgl. PINDYCK und RUBINFELD 2009, S. 574 ff.) bezeichnet. Sie beschreibt die Möglichkeit eines polypolistischen Unternehmens, sich innerhalb eines Preisspielraums wie ein Monopolist zu verhalten. Dies ist in der Realität etwa bei den Herstellern von Markenartikeln der Fall. Durch die enge Kundenbindung führen Preissteigerungen in einem bestimmten Bereich nur zu geringen Absatzeinbußen. Monopol, Polypol und monopolistische Konkurrenz bilden die zentralen Untersuchungsobjekte für diese Arbeit. Wir verzichten im Weiteren auf die Marktform des Oligopols, da sie für den mathematischen Teil dieser Arbeit nicht relevant ist[3].

1.2 Preisbildung auf verschiedenen Märkten

Abhängigkeiten zweier ökonomischer Größen sind in der Wirtschaftstheorie nach ALLEN (1972, S. 113) von unbekannter Form. Zur Vereinfachung erfolgt deren Beschreibung meist durch die Annahme eines funktionalen Zusammenhanges, wie es für die Käufer auf einem Markt der Fall ist. Dies greifen wir auf und stellen die Zuordnung „Preis $\mapsto$ Nachfrage“ als Funktion dar.

Definition 1 (Nachfragefunktion)
Die Funktion $x_N : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$, die jedem Preis p eine nachgefragte Menge x zuordnet, heißt Nachfragefunktion. Sie wird mit $x_N(p)$ bezeichnet.

Den angenommenen funktionalen Zusammenhang zwischen Preis und Nachfrage beschreiben Wirtschaftswissenschaftler über Schätzmethoden wie Regressionen. Ein mögliches Modell stellt eine lineare Funktion dar, die nach BLACK und BRADLEY (1984, S. 8 f.) die Anpassung der Daten meist nicht schlechter als eine kompliziertere Funktion abbildet. DILLER (2008, S. 78) hebt hervor, dass lineare Modelle den Vorteil einer einfachen Handhabung besitzen und über die Methode der kleinsten Quadrate statistisch leicht zu schätzen sind. Betrachten wir hierzu ein Beispiel.

Beispiel 1
Auf einem Wochenmarkt möchten die Käufer Äpfel erwerben. Der Preis für ein Kilogramm Äpfel variiert über einen Zeitraum. In Tabelle 1.2 sind zu den entsprechenden Verkaufspreisen die nachgefragten (abgesetzten) Mengen notiert. Da es sich bei der Menge um die gesamte Nachfrage vieler Einzelpersonen handelt, wird diese auch als ***Marktnachfrage*** *bezeichnet. Wie eingangs erwähnt, erfolgt eine mögliche Modellierung für die in Tabelle 1.2 aufgeführten Werte mittels linearer Regression. Für die Nachfragefunktion ergibt sich (gerundet auf eine Nachkommastelle) in unserem Beispiel:*

$$x_N(p) = -66,2p + 185,6.$$

Abbildung 1.1 (a) zeigt die Punktwolke der Daten aus Tabelle 1.2 in einem ***Preis-Mengen-Diagramm****, Abbildung 1.1 (b) den Graphen der linearen Funktion, die sich aus der Regression ergibt.*

[3] Den interessierten Leser verweisen wir an dieser Stelle auf PINDYCK und RUBINFELD 2009.

Preis in Euro pro Kilogramm	*Nachgefragte Menge in Kilogramm*
$1,00$	124
$1,50$	80
$2,00$	52
$2,50$	23

Tabelle 1.2: Nachgefragte Menge von 1 kg Äpfel zu verschiedenen Preisen

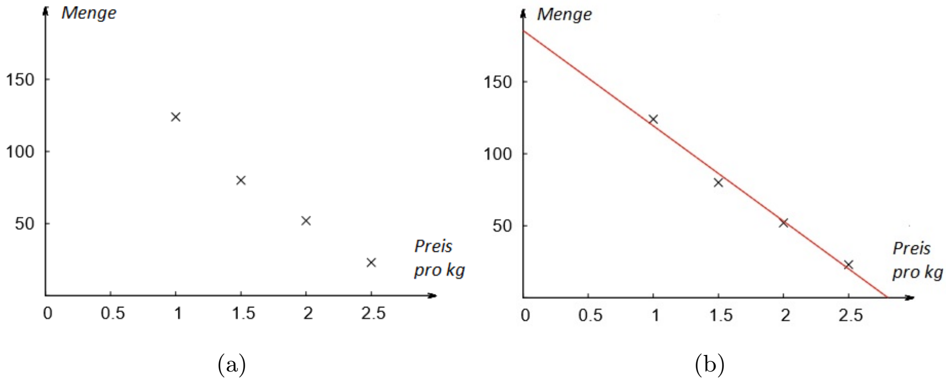


Abbildung 1.1: (a) Preis-Mengen-Diagramm der Datenpaare aus Tabelle 1.2 und (b) Modellierung dieser Datenpaare als lineare Funktion

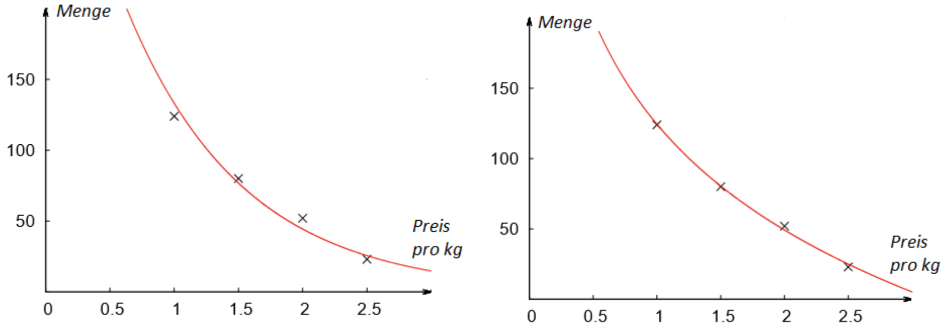
Jedoch ist im Einzelfall zu prüfen, ob die Wahl eines linearen Modells sinnvoll ist. Die Güte der Beschreibung einer Punktwolke durch eine Funktion kann mittels Bestimmtheitsmaß r^2 mit $0 \leq r^2 \leq 1$ erfolgen (vgl. GROSS 2010, S. 196). Je näher ein Bestimmtheitsmaß bei 1 liegt, desto besser ist die Anpassung[4]. SCHLITTGEN (2013, S. 6) betont jedoch, dass vom Bestimmtheitsmaß nicht automatisch auf die Form der Anpassung geschlossen werden kann, da es sich um eine relative Größe handelt. Eine Interpretation dieses Wertes ist nur in Verbindung mit der Punktwolke sinnvoll, die sich aus den Daten ergibt.

Beispiel 2
Wir greifen Beispiel 1 auf. Weitere Modellierungen der Daten aus Tabelle 1.2 über eine a) exponentielle oder b) logarithmische Regression sind möglich. Für die zugehörigen Funktionsgleichungen (gerundet auf eine Nachkommastelle) gelten:

a) $x_N(p) = 400,2 \cdot e^{-1,1p}$ *mit* $r^2 \approx 0,972$,

b) $x_N(p) = -108,6 \cdot ln(p) + 124,5$ *mit* $r^2 \approx 0,998$.

[4] Das Bestimmtheitsmaß für die lineare Regression aus Beispiel 1 liegt bei $r^2 \approx 0,9873$.



(a) (b)

Abbildung 1.2: Preis-Mengen-Diagramm der Datenpaare aus Tabelle 1.2 mit (a) exponentieller und (b) logarithmischer Regression

Abbildung 1.2 (a) zeigt den Graphen der exponentiellen Funktion, Abbildung 1.2 (b) stellt den Graphen der logarithmischen Funktion dar. Der Vergleich der Bestimmtheitsmaße der verschiedenen Regressionen für unser Beispiel bestätigt, dass das lineare Modell kaum schlechtere Werte liefert.

Das Verhalten der Nachfrager aus Tabelle 1.2 ist durchaus marktüblich. Bei einem günstigen Preis ist die Nachfrage nach einem Gut stärker. Die Käufer sind in diesem Fall in der Lage, mit ihrem Einkommen größere Mengen zu erwerben. Für einen höheren Preis ist die Nachfrage geringer, da sich die Käufer weniger leisten können. Es besteht die Möglichkeit, auf gleichwertige oder preisgünstigere Güter auszuweichen. Dies lässt sich mit dem so genannten „**Gesetz der Nachfrage**“ (BECK 2011, S. 37; EICHBERGER 2004, S. 74; WILDMANN 2007, S. 47) erklären: Je niedriger der Preis eines Gutes ist, desto höher ist die Nachfrage. Aus dem Gesetz der Nachfrage und dem Wunsch nach einer einfacheren mathematischen Handhabung fordern wir von einer Nachfragefunktion zunächst folgende Eigenschaften:

- **stetig:** Auch wenn sich die Nachfrage nach einem Gut bei Preisänderungen sprunghaft ändern kann, ist ein stetiges Modell für die anfänglichen Betrachtungen angemessener und bequemer (vgl. ALLEN 1972, S. 117). Anschaulich ist eine Funktion stetig, wenn sie keine Sprünge aufweist[5].

[5] Während das Kriterium der Anschauung für die „gutmütigen“ Funktionsgraphen aus der Schule genügt, stößt es bei der folgenden Funktion an Grenzen:

$$f(x) = \begin{cases} sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Hier versagt die Anschauung, da f bei Annäherung an $x_0 = 0$ immer stärker oszilliert. Weitere Funktionen, deren Überprüfung auf Stetigkeit durch die Anschauung problematisch sind, finden sich bei BÜCHTER und HENN 2010 (S. 185 ff.).

- **streng monoton fallend:** Dabei legen wir großen Wert auf die Anforderung „streng“, da für eine einfach monoton fallende Funktion Funktionswerte gleich sein können und daraus Probleme mit der Umkehrbarkeit resultieren.

Gemein ist allen Nachfragefunktionen $x_N(p)$, dass deren Graphen im 1. Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems verlaufen. Sowohl die Menge als auch der Preis nehmen keine negativen Werte an. Die Menge x besitzt allgemein die Einheit **Mengeneinheiten** (kurz: ME). Konkret kann es sich hierbei um Stück, Kilogramm oder Liter handeln. Der Preis p ist allgemein in **Geldeinheiten pro Mengeneinheit** (kurz: $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$) angegeben[6]. Mögliche Darstellungen sind Euro pro Stück oder Dollar pro kg. Betrachten wir nun das Verhalten der Anbieter. Auch in diesem Fall lässt sich die Zuordnung „Preis $\mapsto$ Angebot“ als Funktion darstellen.

Definition 2 (Angebotsfunktion)
Die Funktion $x_A : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$, die jedem Preis p eine angebotene Menge x zuordnet, heißt Angebotsfunktion. Sie wird mit $x_A(p)$ bezeichnet.

Beispiel 3
*Ausgehend von Beispiel 1 untersuchen wir das Verhalten der Anbieter. In Tabelle 1.3 sind zu entsprechenden Verkaufspreisen die angebotenen Mengen notiert. Da es sich um das gesamte Angebot verschiedener Verkäufer handelt, wird dieses auch als **Marktangebot** bezeichnet.*

Preis in Euro pro Kilogramm	*Angebotene Menge in Kilogramm*
$1,00$	18
$1,50$	41
$2,00$	79
$2,50$	155

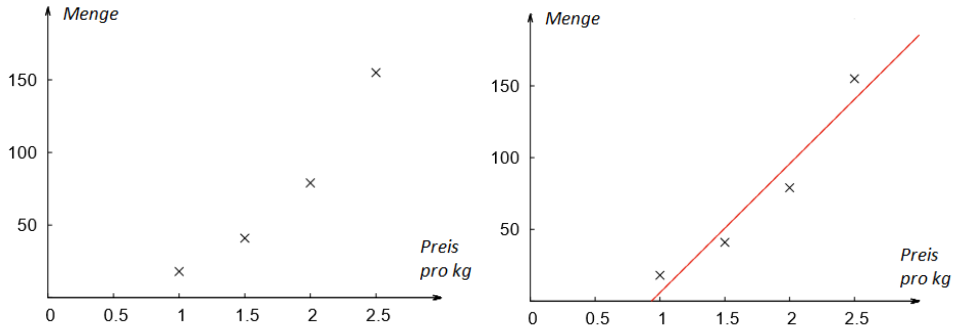
Tabelle 1.3: Angebotene Menge von 1 kg Äpfel bei verschiedenen Preisen

In Analogie zu Beispiel 1 stellen wir für die in Tabelle 1.3 aufgeführten Werte mittels Regression ein lineares Modell auf. Für die Angebotsfunktion ergibt sich (gerundet auf eine Nachkommastelle):

$$x_A(p) = 89,8p - 83,9.$$

Die Punktwolke der Daten als auch der Graph der Angebotsfunktion lassen sich in einem Preis-Mengen-Diagramm veranschaulichen. Abbildung 1.3 (a)

[6] Sofern im Folgenden nichts anderes notiert ist, gehen wir stets von ME als Einheit der Menge und $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$ als Einheit des Preises aus.



(a) (b)

Abbildung 1.3: (a) Datenpaare des Preises und zugehöriger angebotener Menge als Punktwolke und (b) Modellierung dieser Datenpaare als lineare Funktion

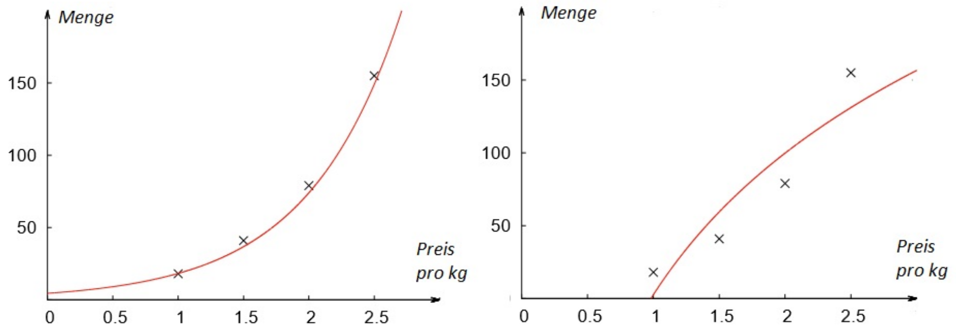
zeigt die Darstellung der Datenpaare aus Tabelle 1.3 als Punktwolke, Abbildung 1.3 (b) den Graphen der linearen Funktion, der sich aus der Regression ergibt. Das Bestimmtheitsmaß liegt bei $r^2 \approx 0,93$. *Weitere Darstellungen sind über eine a) exponentielle oder b) logarithmische Regression möglich. Die Funktionsgleichungen (gerundet auf eine Nachkommastelle) lauten:*

a) $x_A(p) = 4,5 \cdot e^{1,4p}$ *mit* $r^2 \approx 0,99$,

b) $x_A(p) = 140,2 \cdot ln(p) + 2,6$ *mit* $r^2 \approx 0,85$.

Abbildung 1.4 (a) zeigt den Graphen der exponentiellen Funktion, Abbildung 1.4 (b) den Graphen der logarithmischen Funktion. Der Vergleich der Bestimmtheitsmaße der verschiedenen Regressionen für unser Beispiel unterstreicht, dass das lineare Modell eine gute Anpassung der Datenpaare darstellt. Das höchste Bestimmtheitsmaß resultiert aus der exponentiellen Regression, daher stellt diese eine Alternative dar. Abbildung 1.4 (a) unterstützt diese Einschätzung, da die Menge für höhere Preise stärker als linear steigt.

Das Verhalten der Anbieter aus Tabelle 1.3 ist üblich. Bei einem günstigen Preis bieten sie nur eine kleine Menge an Äpfeln an, da die Verdienstmöglichkeiten sehr gering sind. Bei einem höheren Preis offerieren die Anbieter eine größere Menge. Der Verkauf ist deutlich lohnenswerter und führt zu höheren Einnahmen. Dieser Zusammenhang lässt sich mit dem „**Gesetz des Angebots**“ (BECK 2011, S. 45; WILDMANN 2007, S. 47) erklären: Je höher der Preis eines Gutes ist, desto größer ist das Angebot. Aus dem Gesetz des Angebots und dem Wunsch nach einer einfacheren mathematischen Handhabung fordern wir in Analogie zur Nachfragefunktion eine **streng monoton steigende** und **stetige** Angebotsfunktion. In der Ökonomie ist die gemeinsame Untersuchung der Funktionsgraphen von Angebot und Nachfrage von Interesse. Betrachten wir dazu Beispiel 4.



(a) (b)

Abbildung 1.4: Preis-Mengen-Diagramm der Datenpaare aus Tabelle 1.3 mit (a) exponentieller und (b) logarithmischer Regression

Beispiel 4
Für ein Gut seien die angebotene Menge mit $x_A(p) = 2p + 4$ *und die nachgefragte Menge mit* $x_N(p) = 16 - p$ *gegeben. Bei einem Preis von 2* $\frac{GE}{ME}$ *liegt die Nachfrage bei 14* ME *und das Angebot bei 8* ME*. Es existiert ein* ***Nachfrageüberschuss*** *und die Anbieter können den Preis anheben. Für einen Preis von 6* $\frac{GE}{ME}$ *liegt die Nachfrage bei 10* ME*, das Angebot bei 16* ME*. Es kommt zu einem* ***Angebotsüberschuss****. Um die Nachfrage zu erhöhen, müssen die Anbieter den Preis senken. Abbildung 1.5 zeigt die Graphen der Angebots- und Nachfragefunktion.*

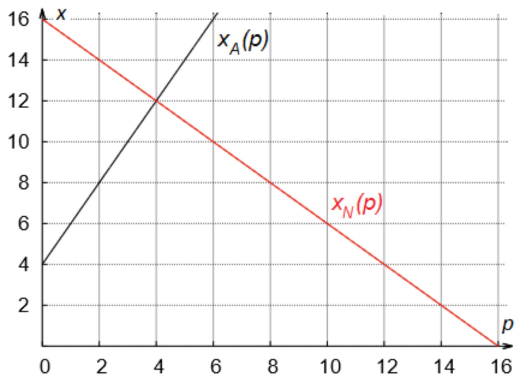


Abbildung 1.5: Graphen von Angebots- und Nachfragefunktion

Beispiel 4 zeigt, dass der Markt zu hohe und zu niedrige Preise selbst reguliert. Anbieter und Nachfrager finden mit der Zeit einen Preis, bei dem sich ein „stabiles Gleichgewicht am Markt“ (TERVEER und TERVEER 2011, S. 236) einstellt. Dieses Phänomen beschrieb bereits 1937 der schottische Ökonom ADAM SMITH mit seiner Metapher der „unsichtbaren Hand“:

„[...] and he is in this, as in many other cases, led by an invisible hand to promote an end which was no part of his intention. Nor is it always the worse for the society that it was not part of it.“ (SMITH 1937, S. 423).

Jeder Marktteilnehmer strebt nach eigenen Zielen. Aufgrund der Konkurrenz stellt sich ein Gleichgewicht ein, das unbeabsichtigt auch dem Gemeinwohl nützt. Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition 3 (Marktgleichgewicht)
Der Schnittpunkt $S(p_M|x_M)$ der Graphen von Nachfrage- und Angebotsfunktion heißt Marktgleichgewicht. Dabei stellt p_M den Gleichgewichtspreis und x_M die Gleichgewichtsmenge dar.

Beispiel 5
Mit $x_A(p) = x_N(p)$ gilt für das Marktgleichgewicht aus Beispiel 4:

$$2p + 4 = 16 - p \Leftrightarrow p = 4.$$

Wir erhalten $p_M = 4$ und $x_M = 12$: Für einen Gleichgewichtspreis in Höhe von 4 $\frac{GE}{ME}$ liegt die Gleichgewichtsmenge bei 12 ME.

In den Wirtschaftswissenschaften wird für die Existenz eines Marktgleichgewichts ein vollkommener Markt unterstellt.

1.3 Erlös, Kosten und Gewinn auf Unternehmensseite

1.3.1 Preis-Absatz

Anbieter auf einem Markt sind hauptsächlich Unternehmen. Sie produzieren ein Gut und setzen es auf dem Markt zu einem bestimmten Preis ab. Der funktionale Zusammenhang zwischen dem Preis in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge eines Gutes[7] heißt **Preis-Absatz-Funktion**. Zunächst untersuchen wir die Preis-Absatz-Funktion eines monopolistischen Anbieters. Ein alleiniger Anbieter kann den Preis eines Gutes festlegen. Da die (individuelle) Nachfrage des Monopolisten mit der Marktnachfrage übereinstimmt, gilt für dessen Preis-Absatz-Funktion:

[7] Obwohl es natürlicher erscheint, den Preis als unabhängige Variable und die abgesetzte Menge als abhängige Variable festzulegen, erfolgt in den Wirtschaftswissenschaften die Darstellung einer Preis-Absatz-Funktion über die Abhängigkeit des Preises von der abgesetzten Menge. Wir schließen uns dieser Notation an, denn sie besitzt den Vorteil, dass die im Folgenden genannten Größen (Erlös, Kosten, Gewinn) ebenfalls in Abhängigkeit von der Menge angegeben werden können.

Definition 4 (Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten)
Die Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten ist die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion $x_N(p)$. Es gilt: $p_N(x) := x_N^{-1}(p)$.

Die Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten ist eindeutig definiert, da laut Forderung eine Nachfragefunktion streng monoton fallend ist. Ist in einem ökonomischen Sachzusammenhang lediglich von der Nachfrage- oder der Preis-Absatz-Funktion die Rede, kann zu Gunsten einer übersichtlicheren Schreibweise der Index wie im folgenden Beispiel entfallen.

Beispiel 6
Die Funktion $x(p) = -0,2p + 25$ beschreibe die Nachfrage nach Äpfeln auf einem Wochenmarkt . Da es nur einen Anbieter dieses Gutes auf dem Markt gibt, gilt für dessen Preis-Absatz-Funktion:

$$x = -0,2p + 25 \Leftrightarrow 0,2p = -x + 25 \Leftrightarrow p = -5x + 125.$$

Die Preis-Absatz-Funktion des Monopolisten lautet somit $p(x) = -5x + 125$.

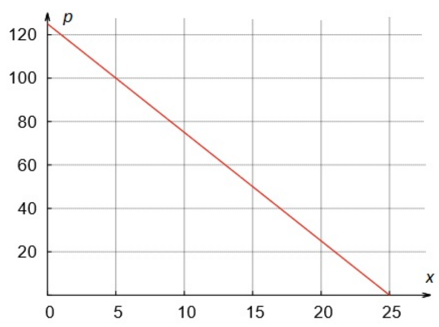
Doch wie sieht die Preis-Absatz-Funktion für ein Unternehmen im Polypol aus? Wie in Abschnitt 1.2 beschrieben, bildet sich auf einem vollkommenen Markt ein Marktgleichgewicht heraus. Daher gilt:

Definition 5 (Preis-Absatz-Funktion eines Polypolisten)
Die Preis-Absatz-Funktion eines polypolistischen Unternehmens ist eine konstante Funktion in Höhe des Gleichgewichtspreises mit $p(x) := p_M$.

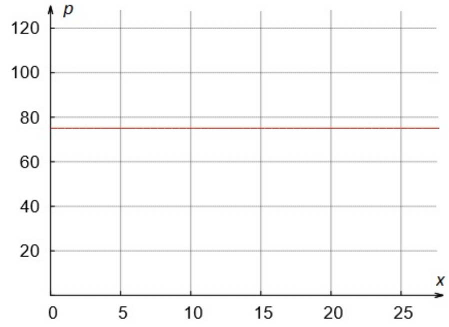
Beispiel 7
Die Funktion $x_N(p) = 325 - p$ modelliere auf einem Wochenmarkt die Nachfrage nach Äpfeln. Das Verhalten der vielen Anbieter von Äpfeln folgt der Funktion $x_A(p) = 25 + 3p$. Das Marktgleichgewicht liegt bei $S(75|250)$ und liefert den Gleichgewichtspreis $p_M = 75$. Für die Preis-Absatz-Funktion gilt:

$$p(x) = 75.$$

Aus den Beispielen 6 und 7 werden verschiedene Verläufe von Preis-Absatz-Funktionen eines Unternehmens auf den beiden beschriebenen Märkten deutlich. Abbildung 1.6 (a) zeigt, dass ein Monopolist sich als Preissetzer verhalten kann. Abbildung 1.6 (b) stellt dar, dass der Preis für ein Unternehmen bei vollständiger Konkurrenz vorgegeben ist. Der Anbieter kann die abgesetzte Menge anpassen (vgl. BECK 2011, S. 173).



(a)



(b)

Abbildung 1.6: Graph einer (linearen) Preis-Absatz-Funktion eines Unternehmens im (a) Monopol und (b) Polypol

Wir betrachten abschließend ein polypolistisches Unternehmen auf einem unvollkommenen Markt. Es kann zwischen einer oberen Preisgrenze p_o und einer unteren Preisgrenze p_u „wie ein Monopolist agieren“ (HUTSCHENREUTER 2009, S. 183). Diese Preisspanne wird daher als **monopolistischer Bereich** bezeichnet. Eine Preissteigerung in diesem Bereich zieht nur einen verhältnismäßig schwachen Nachfragerückgang nach sich, der umso geringer ausfällt, je größer das Ansehen des Unternehmens ist. Dieses so genannte **akquisitorische Potenzial** zeichnet die Fähigkeit zur Kundenbindung aus. Oberhalb des Preises p_o und unterhalb des Preises p_u liegt der Anbieter außerhalb der Preisvorstellung des Käufers. Eine Preissteigerung hat hier einen vergleichsweise stärkeren Rückgang der Nachfrage zur Folge. Wie sieht der Graph der Preis-Absatz-Funktion unter monopolistischer Konkurrenz aus? Das entsprechende Modell geht auf GUTENBERG (1984) zurück und zeigt den Graphen einer doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion. Ein möglicher Verlauf ist in Abbildung 1.7 zu sehen. Im monopolistischen Bereich zwischen den beiden Preisen p_o und p_u besitzt der Graph im Vergleich zu den Randbereichen einen steileren (negativen) Anstieg.

Beispiel 8
*Für ein Unternehmen unter monopolistischer Konkurrenz existieren folgende Zusammenhänge zwischen der abgesetzten Menge und dem Preis: Der maximale Verkaufspreis liegt bei 30 $\frac{GE}{ME}$. Er wird als **Prohibitivpreis** bezeichnet. Bei einem Preis von 25 $\frac{GE}{ME}$ werden 10 ME abgesetzt. Eine weitere Senkung des Preises auf 10 $\frac{GE}{ME}$ führt zu einem Absatz von 20 ME. Zwischen diesen beiden Preisen befindet sich der monopolistische Preisbereich. Die größte absetzbare Menge bei einem Preis von 0 $\frac{GE}{ME}$ liegt bei 40 ME. Sie wird als **Sättigungsmenge** bezeichnet (vgl. WILDMANN 2007, S. 127).*

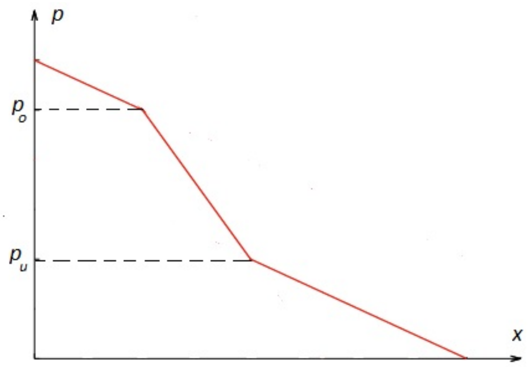


Abbildung 1.7: Graph einer doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion

Für ein abschnittsweises lineares Modell der Preis-Absatz-Funktion gilt:

$$p(x) = \begin{cases} 30 - 0,5x, & 0 \leq x < 10 \\ 40 - 1,5x, & 10 \leq x < 20 \\ 20 - 0,5x, & 20 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

Wie gelangt ein Unternehmen in der Realität zu Informationen zur Preis-Absatz-Funktion? Es kann die Zahlungsbereitschaft von Käufern über einen „Preisbereitschaftstest" (RUNIA et al. 2007, S. 167) gewinnen. Hierbei wird der Kunde befragt, welchen Preis er für das Produkt zahlen würde. Des Weiteren werden historische Preise samt zugehöriger Absatzzahlen als Datengrundlage herangezogen. Daraus lässt sich mithilfe statistischer Methoden wie der Regression (vgl. Abschn. 1.2) das Modell einer Preis-Absatz-Funktion erstellen.

1.3.2 Erlös und Erlösfunktion

Die Einnahmen, die ein Unternehmen aus dem Verkauf erwirtschaftet, werden **Erlös** oder Umsatz genannt. Dieser berechnet sich als Produkt von Preis und Menge und wird in Geldeinheiten GE (Euro, Dollar etc.) angegeben[8]. Der Erlös lässt sich als Funktion in Abhängigkeit von der verkauften Menge angeben.

Definition 6 (Erlösfunktion)
Sei p der Preis zu dem ein Unternehmen ein Produkt verkauft und x die Menge, die für diesen Preis abgesetzt wird. Die Funktion $E : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$ mit

$$E(x) = p \cdot x \tag{1.1}$$

heißt Erlösfunktion.

[8] Sofern im Folgenden nichts anderes notiert ist, gehen wir stets von GE aus.

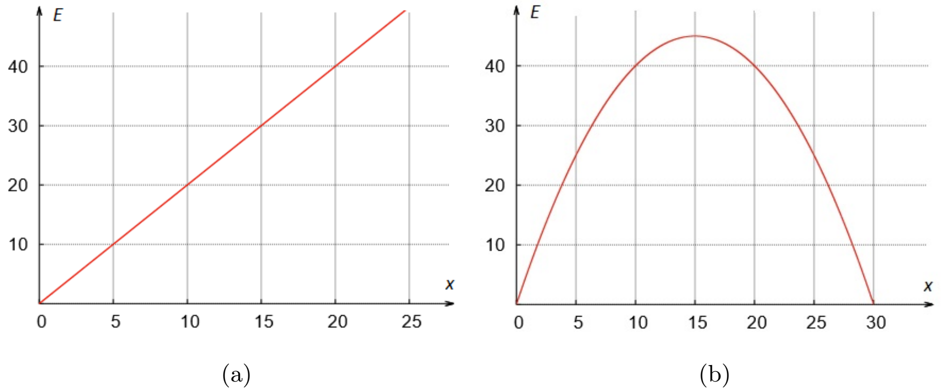


Abbildung 1.8: Graph einer (a) linearen Erlösfunktion im Polypol und einer (b) quadratischen Erlösfunktion im Monopol

Wir betrachten ein Beispiel zur Bestimmung des Erlöses im Polypol.

Beispiel 9
Ein polypolistisches Unternehmen verkaufe sein Gut zum konstanten Marktpreis von 2 $\frac{GE}{ME}$. Die Erlösfunktion lautet mit Gleichung (1.1):

$$E(x) = p_M \cdot x = 2 \cdot x.$$

Existiert wie im Monopol ein Zusammenhang zwischen dem Preis und der abgesetzten Menge, erweitert sich Gleichung (1.1) zu:

$$E(x) = p(x) \cdot x. \tag{1.2}$$

Beispiel 10
Ein monopolistischer Anbieter setze sein Gut mit der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -0,2x+6$ ab. Für die Erlösfunktion erhalten wir mit Gleichung (1.2):

$$E(x) = p(x) \cdot x = (-0,2x + 6) \cdot x = -0,2x^2 + 6x.$$

Abbildung 1.8 zeigt die Graphen der (a) linearen Erlösfunktion des polypolistischen Anbieters aus Beispiel 9 und der (b) quadratischen Erlösfunktion des Monopolisten. Zunächst verwundert der parabelförmige Verlauf des Graphen der Erlösfunktion aus Abbildung 1.8 (b). Tabelle 1.4 verdeutlicht den funktionalen Zusammenhang von Preis-Absatz- und Erlösfunktion anhand Beispiel 10. Der Erlös ist gleich null, wenn entweder der Preis oder die abgesetzte Menge null sind. Des Weiteren steigt das Produkt aus Preis und verkaufter Menge bis zu einem Absatz von 15 ME, danach wird es wieder kleiner. Dieser Verlauf sollte sich auch in der Funktion widerspiegeln.

x_0	0	5	10	15	20	25	30
$p(x_0)$	6	5	4	3	2	1	0
$E(x_0)$	0	25	40	45	40	25	0

Tabelle 1.4: Wertetabelle zur Preis-Absatz-Funktion aus Beispiel 10

Für die Marktformen Monopol und Polypol lässt sich der Erlös als Funktion in Abhängigkeit von der Menge darstellen[9]. Gleiches gilt auch für die Erlösfunktion unter monopolistischer Konkurrenz.

Beispiel 11
Für das polypolistische Unternehmen mit einem monopolistischen Preisspielraum aus Beispiel 8 berechnet sich die Erlösfunktion mit Gleichung (1.2) zu:

$$E(x) = p(x) \cdot x = \begin{cases} 30x - 0,5x^2, & 0 \le x < 10 \\ 40x - 1,5x^2, & 10 \le x < 20 \\ 20x - 0,5x^2, & 20 \le x \le 40. \end{cases}$$

Abbildung 1.9 zeigt den Graphen der Erlösfunktion.

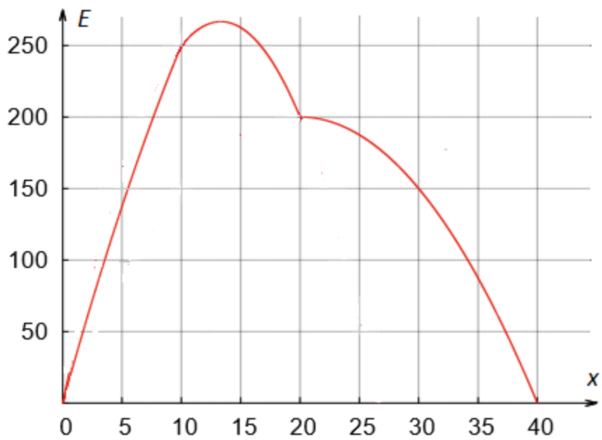


Abbildung 1.9: Graph einer Erlösfunktion eines polypolistischen Anbieters mit monopolistischem Preisspielraum

[9]Liegt die Nachfrage in Form einer Nachfragefunktion vor, dann können wir den Erlös auch in Abhängigkeit von der Variablen p darstellen. Aus Gleichung (1.1) erhalten wir:

$$E(p) = p \cdot x(p).$$

Diese Darstellung ist jedoch beim Vergleich ökonomischer Funktionen (Erlös, Kosten, Gewinn) eher die Ausnahme. Der Preis als unabhängige Variable ist insbesondere im Umfeld der Elastizität (vgl. Abschnitt 2.2.4) von Interesse. Daher verbleiben wir in diesem Abschnitt vorrangig bei der nachgefragten Menge als unabhängige Variable.

Ein mögliches Ziel eines Unternehmens besteht in der Bestimmung des größten Erlöses, auch **Erlösmaximum** genannt. Je nach zugrundeliegender Marktform ergeben sich hierbei verschiedene Lösungsansätze.

Beispiel 12
Wir betrachten die Erlösmaximierung getrennt nach Marktformen aus den Beispielen 9 bis 11:

a) *Der Graph der Erlösfunktion des polypolistischen Anbieters aus Beispiel 9 ist streng monoton steigend. Das Unternehmen erhöht seinen Erlös, indem es theoretisch so viele Mengen wie möglich produziert und verkauft. In der Realität ist dies jedoch begrenzt, z. B. durch Lager- und Produktionskapazitäten. Diese maximal mögliche Anzahl von Mengeneinheiten, die ein Unternehmen verkaufen kann, heißt **Kapazitätsgrenze**.*

b) *Die Erlösfunktion des monopolistischen Anbieters aus Beispiel 10 besitzt ein Maximum. Es liegt bei $x_1 = 15$ mit $E(15) = 45$. Der zu x_1 zugehörige Preis berechnet sich aus der Preis-Absatz-Funktion zu $p(15) = 3$. Für einen Preis von 3 $\frac{GE}{ME}$ erzielt das Unternehmen den größten Erlös in Höhe von 45 GE.*

c) *Die Erlösfunktion des Anbieters aus Beispiel 11 besitzt im Intervall $[0; 40]$ ein globales Maximum im monopolistischen Bereich an der Stelle $x_2 = \frac{40}{3}$ mit $E(\frac{40}{3}) = 266\frac{2}{3}$. Aus der Preis-Absatz-Funktion erhalten wir $p(\frac{40}{3}) = 20$. Für einen Preis von 20 $\frac{GE}{ME}$ erzielt das Unternehmen den größten Erlös in Höhe von ca. 267 GE. Dabei werden ungefähr 13 ME abgesetzt.*

Treten wie in Beispiel 12 c) keine ganzzahligen Lösungen auf, empfehlen wir, mit diesen Werten ungerundet im mathematischen Modell weiterzuarbeiten. Für die abschließende Interpretation der Ergebnisse ist es hingegen sinnvoll, etwa Stückzahlen auf ganze Zahlen, Größen in GE auf zwei Nachkommastellen zu runden.

1.3.3 Kosten und Kostenfunktion

Bei der Produktion, dem Einkauf von Waren und dem Verkauf eines Gutes fallen für ein Unternehmen Kosten an. Sie beschreiben die Ausgaben in Geldeinheiten[10] GE und werden allgemein in Abhängigkeit von der so genannten **Beschäftigung** angegeben. Diese gibt die Höhe der ausgenutzten Kapazität eines Leistungsbereichs pro Zeitraum an. Der Beschäftigungsgrad setzt die genutzte Kapazität in Relation zur maximal verfügbaren Kapazität.

[10] Sofern im Folgenden nichts anderes notiert ist, gehen wir stets von GE aus.

Beispiel 13
In einer Waschstraße können am Tag bis zu 200 Autos abgefertigt werden. Wenn nur 50 Autos gewaschen werden, liegt die Beschäftigung bei 50 Autos pro Tag bzw. der Beschäftigungsgrad bei 25% der verfügbaren Kapazität am Tag.

Je nach Kostenart besitzt die Beschäftigung geringe oder große Auswirkungen auf die Kosten. Zur besseren Klassifizierung wird in einen fixen und variablen Anteil unterschieden. **Variable Kosten** ändern sich bei Variation der Beschäftigung. Zu diesen gehören z. B. Benzinkosten in Abhängigkeit der gefahrenen Kilometer oder Telefonkosten in Abhängigkeit der Zeit. Eine Flatrate zum Telefonieren fällt unter **fixe Kosten**, da diese auch bezahlt werden muss, wenn nicht telefoniert wird. Jedoch ist eine eindeutige Trennung von Ausgaben in fixe und variable Kosten nicht immer ersichtlich. So gehören etwa Lohnkosten von Zeitarbeitern eher zu variablen Kosten, da diese abhängig von der Auftragslage entstehen. Löhne langfristiger Mitarbeiter fallen zumeist unter fixe Kosten. Die Unterscheidung, zu welchem Anteil etwa Löhne, Gehälter, Lagerhalterung, Reise- oder Betriebskosten zu fixen oder variablen Kosten zählen, obliegt in einem Unternehmen dem **Kostenplaner**.

Ein Unternehmen interessiert sich vor allem für die Art des Anstiegs der variablen Kosten bei Ausweitung der Beschäftigung. Steigen variable Kosten im gleichen Maße wie die Beschäftigung, liegt eine **proportionale Kostenentwicklung** vor. Dies ist z. B. beim Telefonieren mit einem Prepaid-Tarif der Fall, denn mit zunehmender Dauer erhöhen sich die Kosten um einen konstanten Betrag pro Minute. Bei einer **unterproportionalen Kostenentwicklung** fällt der Anstieg der Ausgaben bei einer zunehmenden Beschäftigung vergleichsweise gering aus. Dazu führen etwa Preisnachlässe beim Einkauf größerer Mengen oder Lerneffekte bei der Montage, die Arbeiter mit Erfahrung schneller erledigen (vgl. FRIEDL et al. 2013, S. 203). In der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur wird diese Form der Kostenentwicklung auch als **degressive Kosten** bezeichnet (vgl. FREIDANK 2001, S. 47). Steigen die Ausgaben mit zunehmender Beschäftigung vergleichsweise stark an, liegt eine **überproportionale Kostenentwicklung** vor. Gründe dafür sind beispielsweise in kostspieligen Überstunden- oder Wochenendlöhnen sowie in einem höheren Verschleiß von Maschinen zu finden. Auch wenn ein Unternehmen aufgrund einer hohen Auftragslage kurzfristig bei einem teureren Rohstoffhändler einkaufen muss, steigen die zusätzlichen Kosten stärker als die Beschäftigung an. In der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur wird diese Form der Kostenentwicklung als **progressive Kosten** bezeichnet (vgl. FREIDANK 2001, S. 47). Abbildung 1.10 verdeutlicht die verschiedenen Kostenverläufe.

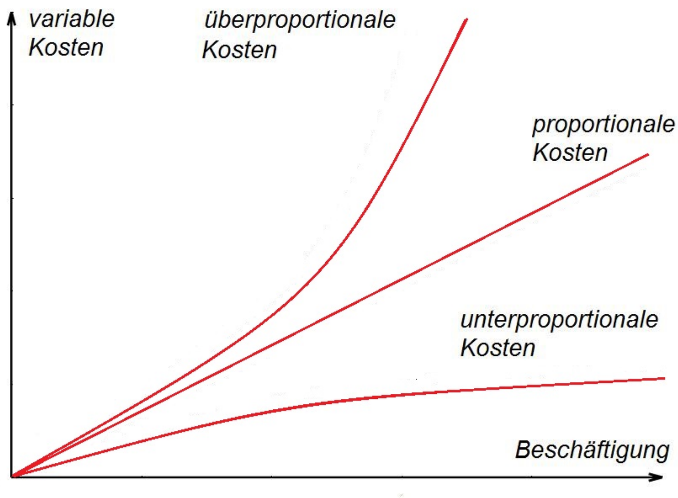
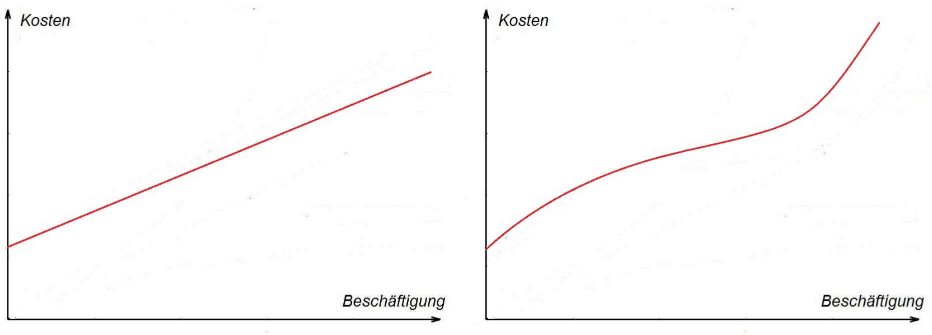


Abbildung 1.10: Verschiedene Kostenentwicklungen variabler Kosten in Abhängigkeit von der Beschäftigung

Aus fixen Kosten und den aufgeführten Entwicklungen variabler Kosten ergeben sich verschiedene Mischformen. Die für diese Arbeit wichtigen sind so genannte **semi-proportionale** und **S-förmig verlaufende Kosten**. Semi-proportionale Kosten setzen sich aus einem fixen und einem proportionalen Anteil zusammen, wie dies etwa bei einem Stromtarif der Fall ist: Neben der Grundgebühr fallen pro verbrauchter Kilowattstunde weitere konstante Ausgaben an. Der Graph einer semi-proportionalen Kostenfunktion ist auf dem zugrundeliegenden Definitionsbereich eine Gerade, wie Abbildung 1.11 (a) verdeutlicht. Ein S-förmiger Kostenverlauf setzt sich aus einem zunächst unterproportionalen und später überproportionalen Kostenanstieg zusammen. Er entsteht, wenn z. B. Arbeiter eines Unternehmens ein Produkt herstellen. Bei einer geringen Anzahl von Gütern kann eine Erhöhung der Produktion von einem weiteren Arbeiter aufgefangen werden. Es fallen zwar mehr Kosten an, jedoch unterstützten die Arbeiter sich gegenseitig und arbeiten effektiver. Übersteigt die Produktion jedoch eine bestimmte Menge, dann können sie sich nicht mehr helfen und behindern sich im ungünstigsten Fall gegenseitig. Die Kosten steigen stärker an als zuvor. Abbildung 1.11 (b) zeigt einen möglichen Graphen bei einem S-förmigen Kostenverlauf.

Erkennt ein Kostenplaner semi-proportionale oder S-förmige Kosten, entwickelt er zur Abschätzung zukünftiger Ausgaben das Modell einer Kostenfunktion. Diese stellt den funktionalen Zusammenhang zwischen der Beschäftigung und den Kosten dar. Jedoch lässt sich die Beschäftigung oft nicht direkt angeben, daher „verwendet man als Näherung so genannte Bezugsgrößen“ (FRIEDL et al. 2013, S. 207), die sich messen lassen. Dies kann



(a) (b)

Abbildung 1.11: Graphen von (a) semi-proportionalen Kosten und (b) S-förmigen Kosten

inputorientiert etwa über die eingesetzten Rohstoffe, Arbeitsstunden oder auch **outputorientiert** etwa über die Anzahl der gefertigten Güter erfolgen[11]. Die Zuordnung „produzierte Menge $\mapsto$ Kosten" lässt sich als Funktion darstellen.

Definition 7 (Kostenfunktion)
Sei x die produzierte Menge, die ein Unternehmen verkauft. Die Funktion $K : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}_0^+$ mit

$$K(x) = K_v(x) + K_f \tag{1.3}$$

heißt Kostenfunktion. Dabei steht K_v für die variablen Kosten und K_f für die fixen Kosten.

Beispiel 14
Die Funktion $K(x) = 100x + 25$ beschreibt einen semi-proportionalen Kostenverlauf. Dabei berechnen sich die variablen Kosten aus $K_v(x) = 100x$ und die fixen Kosten betragen $K_f = 25$. Ein Funktionsterm für einen S-förmigen Kostenverlauf ist $K(x) = x^3 - 4x^2 + 6x + 10$. Zu den fixen Kosten mit $K_f = 10$ addieren sich je nach Höhe der produzierten Menge x die variablen Kosten $K_v(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$. Maßgeblich für den Graphen dieser Kostenfunktion ist ein Wendepunkt, auf den wir in Abschnitt 2.2.3 näher eingehen.

Ein semi-proportionaler Kostenverlauf lässt sich mittels einer **linearen Kostenfunktion** darstellen. Eine S-förmige Kostenentwicklung modelliert ein

[11] Wir verbleiben im Folgenden beim Output in Form der produzierten Menge als Bezugsgröße der unabhängigen Variable, sofern nichts anderes gegeben ist.

Kostenplaner mittels einer Polynomfunktion dritten Grades. Diese wird in den Wirtschaftswissenschaften als **ertragsgesetzliche Kostenfunktion** bezeichnet. Das Ertragsgesetz ist ein Begriff aus der Produktionstheorie, das seinen Ursprung in der Landwirtschaft besitzt. Es besagt, dass bei gleicher Bodenfläche eine Erhöhung des Düngers zunächst zu einer starken Zunahme und später zu einer geringeren Zunahme des Gesamtertrags führt (vgl. GÜIDA 2009, S. 75).

In der Definition 7 sind wir mit der produzierten Menge lediglich von einer abhängigen Größe ausgegangen. In der Realität hängen die Kosten nur selten von einer Bezugsgröße ab. Wirken verschiedene unabhängige Bezugsgrößen auf die Kosten ein, bildet eine Kostenfunktion in Abhängigkeit einer Variablen die Realität nur unzureichend ab. Ist das Unternehmen auf eine differenzierte Betrachtung angewiesen, ist in diesem Fall eine Kostenfunktion mit mehreren Variablen anzugeben (vgl. FRIEDL et al. 2013, S. 208 f.). In Abschnitt 3 gehen wir näher auf Funktionen mit zwei Variablen ein, verbleiben der Einfachheit halber zunächst bei einer unabhängigen Variable, denn ein Kostenplaner kann bei mehreren Kosteneinflussgrößen diese bis auf wenige oder sogar nur eine Größe reduzieren.

Im Folgenden stellen wir drei verschiedene Methoden vor, die ein Kostenplaner bei der Ermittlung von Kostenfunktionen mit einer Variablen verwenden kann. Dabei nehmen wir an, dass sich die Kosten mit wachsendem Output nicht sprunghaft ändern. Eine Methode, die ein Kostenplaner zur Schätzung einer Kostenfunktion verwendet, heißt **Kostenklassifikation**[12] (vgl. FRIEDL et al. 2013, S. 216). Er listet alle Kosten auf, die in einem Unternehmen anfallen und unterteilt diese in fixe sowie variable Kosten.

Beispiel 15
Ein Kostenplaner sieht sich die Auflistung der Kosten des letzten Quartals eines Unternehmens an. Er grenzt wie in Tabelle 1.5 die anfallenden Ausgaben in fixe und variable Kosten ab. Die zugrundeliegende Beschäftigung lag bei 2400 Stunden. Die Anschaffungskosten für Neueinkäufe ordnet der Kostenplaner komplett den variablen Kosten zu. Beim Personal findet eine Trennung der Kosten statt, da es sich aus Teilzeitkräften und Festangestellten zusammensetzt. Gleiches gilt für die Instandhaltung, für die ein fester Betrag pro Quartal eingeplant ist. Zugleich fallen aber außerplanmäßige Ausgaben aufgrund eines hohen Verschleißes an. Die Stromkosten setzen sich aus einem Grundbetrag und einem Verbrauch in Abhängigkeit der Kilowattstunden zusammen. Geht der Kostenplaner von einer semi-proportionalen Kostenentwicklung aus, kann er eine lineare Funktion für die Kosten aufstellen. Die Summe der fixen Kosten entspricht dem Ordinatenabschnitt und

[12] HORNGREN et al. (2001) bezeichnen diese als Kontenanalyse.

Kosten für...	Kosten gesamt	fixe Kosten	variable Kosten
Anschaffung	€57.300	€0	€57.300
Personal	€24.900	€16.700	€8200
Instandhaltung	€5760	€1520	€4240
Strom	€4180	€3240	€940
Summe	€92.140	€21.460	€70.680

Tabelle 1.5: Beispiel für eine proportionale Kostenentwicklung

liegt bei €21.460. Die Steigung ergibt sich als Quotient aus der Summe der variablen Kosten und der Beschäftigung mit $\frac{70680}{2400} = 29,45$ *Euro pro Stunde. Die lineare Kostenfunktion, die die Kosten* K *in Abhängigkeit der Beschäftigungsstunden* x *angibt, lautet nach Gleichung (1.3):*

$$K(x) = 29,45x + 21460.$$

Mit der Kostenfunktion kann der Kostenplaner schätzen, wie hoch die Kosten für eine größere Beschäftigung z. B. in Höhe von 2800 Stunden sind. Aus $K(2800) = 103920$ *folgt, dass bei 2800 Beschäftigungsstunden Kosten in Höhe von ungefähr €103.920 anfallen. Mit dieser Information kann das Management des Unternehmens weitere operative Entscheidungen treffen.*

Die Kostenklassifikation ist ein subjektives Verfahren, das vom Wissen und der Erfahrung des Kostenplaners abhängt. Im Vergleich dazu stellt die so genannte **Extremwertmethode** ein objektives Verfahren zur Ermittlung einer Kostenfunktion dar. Dabei betrachtet der Kostenplaner die anfallenden Kosten in mehreren Zeiträumen und bezieht lediglich die Kosten mit der niedrigsten sowie höchsten Beschäftigung in seine Berechnungen ein. Die lineare Funktion, die beide Werte verbindet, ist die geschätzte Kostenfunktion.

Beispiel 16
Ein Unternehmen möchte den Einfluss der produzierten Stückzahl eines Gutes auf die Löhne der Hilfsarbeiter analysieren. Dazu wurden die produzierten Stückzahlen und die Höhe der Hilfslöhne der letzten fünf Wochen in Tabelle 1.6 festgehalten. Der niedrigste Beschäftigungswert liegt in Woche zwei mit 18 produzierten Stücken, der höchste in Woche fünf mit 33 Stücken vor. Für die Steigung m *einer linearen Kostenfunktion* $K(x) = mx + c$ *durch die Punkte* $P(18|7980)$ *und* $Q(33|23010)$ *gilt:*

$$m = \frac{23010 - 7980}{33 - 18} = 1002.$$

Aus $m = 1002$ *und* $K(18) = 7980$ *folgt die Kostenfunktion zu:*

$$K(x) = 1002x - 10056.$$

Woche	produzierte Einheiten	gezahlte Hilfslöhne
1	25	€9770
2	18	€7980
3	19	€8230
4	28	€14.990
5	33	€23.010

Tabelle 1.6: Beispiel für wöchentliche Hilfslohnkosten in Abhängigkeit der produzierten Stückzahl.

Beispiel 16 verdeutlicht, dass eine mit der Extremwertmethode geschätzte Kostenfunktion nur lokal zu interpretieren ist. Der ***relevante Bereich*** *liegt im Intervall der niedrigsten und höchsten Beschäftigung, wie Abbildung 1.12 zeigt. Global liefert die Kostenfunktion keine sinnvollen Werte, da in Beispiel 16 der Ordinatenabschnitt mit* $K(0) = -10056$ *keine fixen Kosten darstellt.*

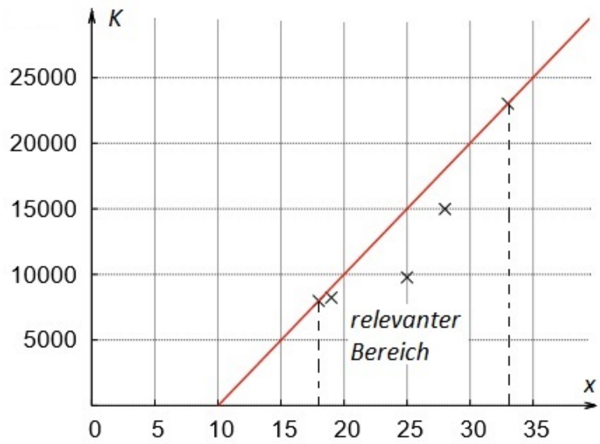


Abbildung 1.12: Extremwertmethode zur Schätzung einer Kostenfunktion

Neben der Extremwertmethode besteht die Möglichkeit eine Kostenfunktion mittels **Regression** zu schätzen. Liegt nur eine Kosteneinflussgröße vor, so kann ein Kostenplaner mittels einfacher Regression ein lineares Modell erstellen. Bei mehreren Bezugsgrößen ist eine multiple Regression anzuwenden. Wir betrachten im Folgenden ein Beispiel zur einfachen Regression, auf Kostenfunktionen mit mehreren unabhängigen Variablen gehen wir in Abschnitt 3 ein.

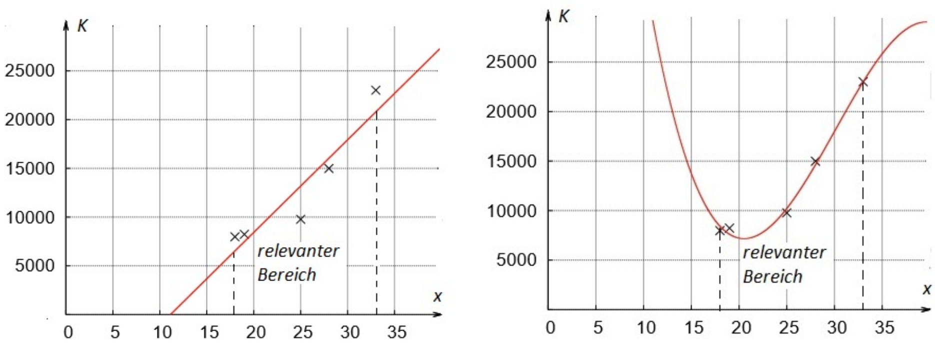
Beispiel 17
Für die Werte aus Tabelle 1.6 berechnet ein Kostenplaner mittels linearer Regression die Kostenfunktion (gerundet auf eine Nachkommastelle):

$$K(x) = 950,4x - 10583,7.$$

Das Bestimmtheitsmaß der Regression liegt bei $r \approx 0,87$. Daher bildet ein lineares Modell die Daten lokal sehr gut ab. Zum Vergleich liefert die Regression mit einer ganzrationalen Funktion dritten Grades die Funktionsgleichung (gerundet auf zwei Nachkommastellen):

$$K(x) = -6,31x^3 + 569,10x^2 - 15388,48x + 137814,97.$$

Die Regression besitzt ein Bestimmtheitsmaß von $r \approx 0,99$. Abbildung 1.13 (a) zeigt die Punktwolke der Datenpaare aus Tabelle 1.6 sowie den Graphen der linearen Kostenfunktion. Abbildung 1.13 (b) zeigt den Graphen der ganzrationalen Funktion vom Grad 3, die aus der Regression entsteht. Der Vergleich der beiden Graphen verdeutlicht, dass die Modelle nur im relevanten Bereich zu interpretieren sind. Insbesondere der Graph der Regression mittels Polynomfunktion zeigt außerhalb dieses Bereichs kein sinnvolles Verhalten zur Schätzung weiterer Werte. Aber auch innerhalb des relevanten Bereichs ist die Interpretation problematisch: Die Kostenfunktion besitzt ein lokales Minimum, was dazu führt, dass die geschätzten Kosten für z. B. 20 ME mit $K(20) \approx 7205$ größer sind, als für 21 ME mit $K(21) \approx 7193$. Da Kosten mit zunehmender Beschäftigung steigen, wird der Kostenplaner trotz der größeren statistischen Güte des nicht linearen Modells die lineare Regression aus Sicht der ökonomischen Plausibilität bevorzugen.



(a) (b)

Abbildung 1.13: Graph einer (a) linearen Funktion und (b) ganzrationalen Funktion dritten Grades als Kostenfunktion

Die Wahl der Kostenfunktion hängt auch davon ab, wie wichtig die Informationen aus der Analyse für ein Unternehmen sind. Ein Kostenplaner muss daher immer „den Ermittlungsaufwand gegen die Präzision der Kostenprognose abwägen“ (FRIEDL et al. 2013, S. 213). Ein Vergleich der aufgeführten Methoden zeigt die Vor- und Nachteile: Die Kostenklassifikation hängt stark von der Erfahrung des Planers ab und kann bei einer falschen Einschätzung von fixen und variablen Kosten zu großen Unterschieden in der Prognose führen. Sie bietet sich für eine Auflistung einzelner Ausgaben in einem bestimmten Zeitraum an. Die Extremwertmethode ist ein objektives Verfahren, das mit wenig Aufwand eine lineare Kostenfunktion liefert. Jedoch hängt die Schätzung nur von zwei Punkten ab, was die Methode anfällig für Ausreißer macht (vgl. HORNGREN et al. 2001, S. 322). Ein geübter Kostenplaner untersucht die Extremwerte auf ihre Verallgemeinerbarkeit und wählt notfalls Stellvertreter aus den übrigen Datenpaaren. Im Gegensatz dazu bezieht die Regression alle Datenpaare mit ein, ihre Güte lässt sich mit dem Bestimmtheitsmaß objektiv messen. Jedoch müssen hierfür viele Messwerte vorliegen, was einen höheren Aufwand zur Folge hat. Die Wahl der Funktion als Ergebnis der Regression obliegt dem Kostenplaner. Bildet eine nicht lineare Funktion die Messwerte deutlich besser ab, ist diese bei wichtigen operativen Entscheidungen zu berücksichtigen.

1.3.4 Gewinn und Gewinnfunktion

Die Differenz aus Erlös und Kosten heißt **Gewinn**. Dieser wird allgemein in Geldeinheiten GE (Euro, Dollar etc.) gemessen[13]. Sind die Erlösfunktion und die Kostenfunktion eines Unternehmens bei der Produktion und dem Verkauf eines Gutes bekannt, lässt sich daraus die Gewinnfunktion nach folgender Definition bestimmen.

Definition 8 (Gewinnfunktion)
Sei x die Menge, die ein Unternehmen verkauft. Die Funktion $G : \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = E(x) - K(x) \tag{1.4}$$

heißt Gewinnfunktion.

Die Bestimmung der Gewinnfunktion nach Gleichung (1.4) ist unabhängig von der Marktform. Wir beschränken uns auf ein Beispiel.

Beispiel 18
Ein Monopolist sehe sich der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -7x + 49$ gegenüber. Die für Produktion und Verkauf anfallenden Kosten lassen sich mittels der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 32$ beschreiben. Für die Gewinnfunktion gilt:

[13] Sofern im Folgenden nichts anderes notiert ist, gehen wir stets von GE aus.

$$
\begin{aligned}
G(x) &\overset{(1.4)}{=} E(x) - K(x) \\
&\overset{(1.2)}{=} p(x) \cdot x - K(x) \\
&= (-7x + 49) \cdot x - (x^3 - 6x^2 + 15x + 32) \\
&= -x^3 - x^2 + 34x - 32.
\end{aligned}
$$

Im Vergleich zu den vorherigen Funktionen können für die Gewinne negative Werte auftreten. Übersteigen die Kosten den Erlös, verzeichnet ein Unternehmen einen Verlust. Aus ökonomischer Sicht ist daher der Bereich interessant, in dem der Gewinn nicht negativ ist. Dieser wird als **Gewinnzone** bezeichnet. Mathematisch sind dazu die Nullstellen der Gewinnfunktion zu bestimmen. Diese besitzen in den Wirtschaftswissenschaften eine eigene Bezeichnung:

Definition 9 (Untere und obere Gewinnschwelle)
Seien x_1 und x_2 (mit $x_1, x_2 \geq 0$ und $x_1 < x_2$) Lösungen der Gleichung $G(x) = E(x) - K(x) = 0$ und sei $E(x) > K(x)$ in (x_1, x_2), dann heißt x_1 untere Gewinnschwelle und x_2 obere Gewinngrenze.

Beispiel 19
Der Gewinn des Monopolisten aus Beispiel 18 lässt sich über die Gewinnfunktion G mit $G(x) = -x^3 - x^2 + 34x - 32$ bestimmen. Als Lösungen der Gleichung $G(x) = 0$ ergeben sich $x_0 \approx -6,74$, $x_1 = 1$ und $x_2 \approx 4,74$. Die Lösung x_0 liegt nicht im ökonomischen Definitionsbereich. Die untere Gewinnschwelle liegt bei 1 ME und die obere Gewinngrenze bei ungefähr 4,74 ME. Im Bereich zwischen der Gewinngrenze und der Gewinnschwelle liegt die Gewinnzone.

Für den Fall, dass unter den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 9 lediglich eine Lösung $x_1 \geq 0$ mit $G(x_1) = 0$ existiert, beschreibt diese die untere Gewinnschwelle. Der Punkt $P(x_1|0)$ wird in den Wirtschaftswissenschaften als **Break-Even-Point** bezeichnet. Dessen Bestimmung heißt dementsprechend **Break-Even-Analyse** (vgl. PREISSLER 2005, S. 126; ZIMMERMANN et al. 2003, S. 213).

Beispiel 20
Ein polypolistisches Unternehmen setze sein Gut zum konstanten Marktpreis in Höhe von €5 pro Stück ab. Die Kosten, die bei der Produktion und dem Verkauf entstehen, lassen sich mit der Kostenfunktion $K(x) = 3x + 8$ beschreiben. Für die Gewinnfunktion gilt:

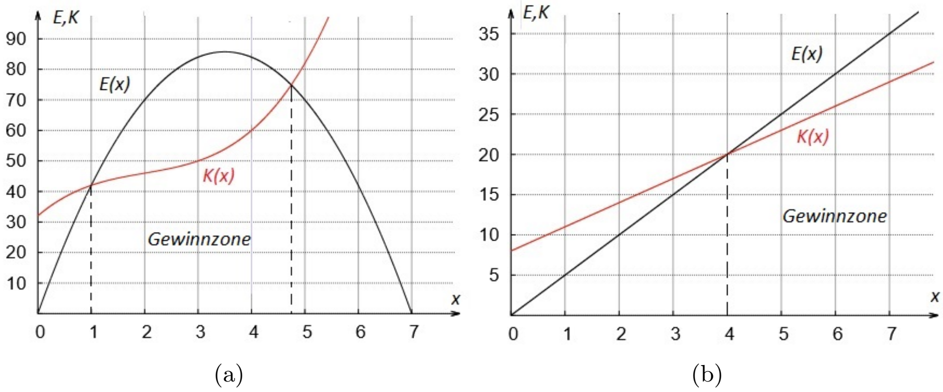


Abbildung 1.14: Graphen von Erlös- und Kostenfunktion im (a) Monopol und (b) Polypol

$$\begin{aligned} G(x) &\overset{(1.4)}{=} E(x) - K(x) \\ &\overset{(1.1)}{=} p \cdot x - K(x) \\ &= 5x - (3x + 8) \\ &= 2x - 8. \end{aligned}$$

Es ist $G(4) = 0$ und $E(x) > K(x)$ für $x > 4$. Die untere Gewinnschwelle liegt bei 4 verkauften Stücken.

Abbildung 1.14 verdeutlicht den Begriff der Gewinnzone anhand der Graphen von Erlös- und Kostenfunktionen aus den Beispielen 19 und 20. In beiden Schaubildern ist die untere Gewinnschwelle als Schnittpunkt der Graphen von Erlös- und Kostenfunktion zu erkennen. Der monopolistische Anbieter aus Beispiel 19 sieht sich einer links- und rechtsseitig begrenzten Gewinnzone (vgl. Abb. 1.14 (a)) gegenüber. Der polypolistische Anbieter aus Beispiel 20 erzielt einen Gewinn, sobald die untere Gewinnschwelle überschritten ist. Die Gewinnzone beginnt in $x_0 = 4$. Der Gewinn wird mit steigender Menge größer (vgl. Abb. 1.14 (b)). Die obere Gewinngrenze liegt an der Kapazitätsgrenze des Unternehmens.

Neben der Gewinnzone interessiert sich ein Unternehmen für den größten Gewinn, das **Gewinnmaximum**. Die Menge, für die der Gewinn am größten wird, heißt **gewinnmaximale Menge**. Der Preis zur gewinnmaximalen Menge heißt **gewinnmaximaler Preis**. Dieser ergibt sich durch Einsetzen der gewinnmaximalen Menge in die Preis-Absatz-Funktion. Er ist von großer Bedeutung für ein Unternehmen, da sich nach diesem Preis der Verkauf richten kann. Betrachten wir ein Beispiel zur Gewinnmaximierung eines polypolistischen Anbieters mit monopolistischem Preisspielraum.

Beispiel 21

Gegeben sei eine Preis-Absatz-Funktion eines polypolistischen Anbieters mit monopolistischem Preisspielraum:

$$p(x) = \begin{cases} 110 - 0,5x, & 0 \leq x \leq 40 \\ 130 - x, & 40 < x \leq 80 \\ 70 - 0,25x, & 80 < x \leq 280. \end{cases}$$

Die Kosten lassen sich mit der Funktion $K(x) = 20x + 1000$ *beschreiben. Für den Gewinn gilt mit den Gleichungen (1.4) und (1.2):*

$$G(x) = E(x) - K(x) = \begin{cases} (110 - 0,5x) \cdot x - (20x + 1000), & 0 \leq x \leq 40 \\ (130 - x) \cdot x - (20x + 1000), & 40 < x \leq 80 \\ (70 - 0,25x) \cdot x - (20x + 1000), & 80 < x \leq 280. \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} -0,5x^2 + 90x - 1000, & 0 \leq x \leq 40 \\ -x^2 + 110x - 1000, & 40 < x \leq 80 \\ -0,25x^2 + 50x - 1000, & 80 < x \leq 280. \end{cases}$$

Abbildung 1.15 zeigt den Graphen der abschnittsweise definierten Gewinnfunktion, der sich aus nach unten geöffneten Parabeln zusammensetzt. Es gilt die Funktion G auf ihr Maximum zu untersuchen. Im Intervall $[0; 40]$ *besitzt G ein Randmaximum an der Stelle* $x_1 = 40$ *mit* $G(40) = 1800$*. Der zweite Abschnitt der Funktion G besitzt im Intervall* $(40; 80]$ *an der Stelle* $x_2 = 55$ *einen Scheitel mit* $G(55) = 2025$*. Für die Parabel im dritten Abschnitt liegt ebenfalls ein Scheitelpunkt im vorgegebenen Intervall* $(80; 280]$ *an der Stelle* $x_3 = 100$ *mit* $G(100) = 1500$ *vor. Mit* $p(55) = 75$ *gilt: Für einen Verkaufspreis in Höhe von 75* $\frac{GE}{ME}$ *erzielt das Unternehmen bei einem Absatz von 55 ME den maximalen Gewinn mit 2025 GE.*

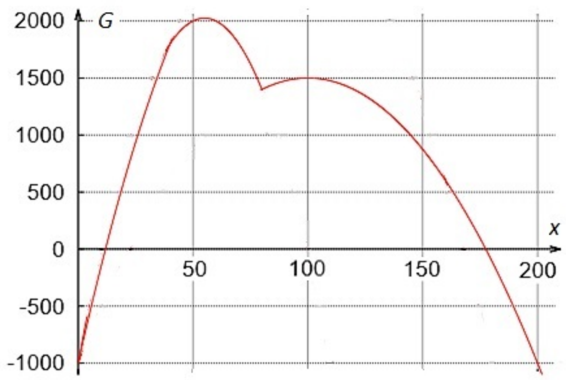


Abbildung 1.15: Graph einer Gewinnfunktion eines polypolistischen Anbieters mit monopolistischem Preisspielraum

Die Menge und der Preis, die zum maximalen Gewinn führen, spielen in den Wirtschaftswissenschaften eine wichtige Rolle. Es gilt:

Definition 10 (Cournotscher Punkt)
Sei x_C die gewinnmaximale Menge und $p_C := p(x_C)$ der gewinnmaximale Preis eines Monopolisten. Der Punkt $P\,(x_C|p_C)$ auf der Preis-Absatz-Funktion heißt Cournotscher Punkt.

Beispiel 22
Für das polypolistische Unternehmen mit monopolistischem Preisspielraum aus Beispiel 21 folgt aus der Preis-Absatz-Funktion mit $p_C = p(55) = 75$: Der Cournotsche Punkt besitzt die Koordinaten $P(55|75)$. Die gewinnmaximale Menge liegt bei 55 ME und der gewinnmaximale Preis beträgt 75 $\frac{GE}{ME}$.

Abschließend fassen wir zusammen, welche ökonomischen Zusammenhänge zwischen Erlös, Kosten und Gewinn allgemein bestehen. Abbildung 1.16 zeigt beispielhaft die Graphen der Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktionen eines (a) Monopolisten mit linearem Kostenverlauf und eines (b) Polypolisten mit ertragsgesetzlichem Kostenverlauf. Es lassen sich folgende Beziehungen erkennen:

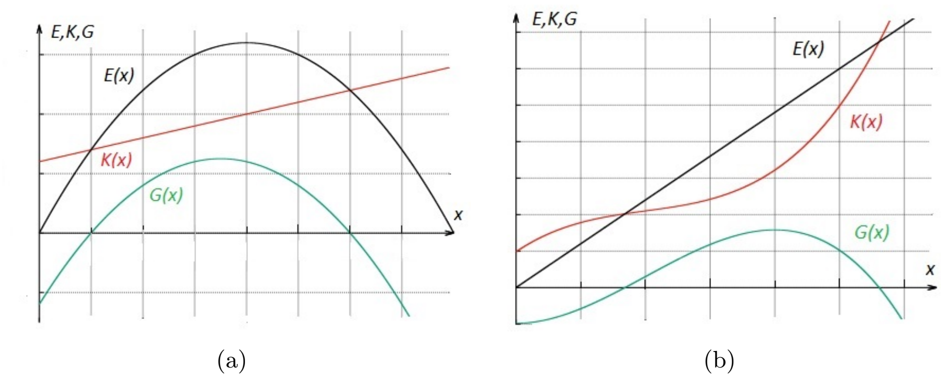


Abbildung 1.16: Gemeinsames Schaubild der Graphen von Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktion eines (a) monopolistischen und (b) polypolistischen Anbieters

a) Liegen die Kosten über dem Erlös, so ist der Gewinn negativ: Für $K(x) > E(x)$ ist $G(x) < 0$.

b) Ist der Erlös größer als die Kosten, so ist der Gewinn positiv: Für $E(x) > K(x)$ ist $G(x) > 0$.

c) Schneiden sich die Graphen der Erlös- und Kostenfunktion, so ist der Gewinn gleich null: Für $E(x) = K(x)$ ist $G(x) = 0$.

d) Diejenige Nullstelle von $G(x)$, bei der der Erlös zum ersten Mal die Kosten übersteigt, ist die untere Gewinnschwelle.

e) Der maximale Gewinn ist an der Stelle der maximalen Differenz zwischen Erlös und Kosten zu finden.

Die Zusammenhänge a) bis e) besitzen natürlich auch für die monopolistische Konkurrenz Gültigkeit und lassen sich mit der Gleichung (1.4) mathematisch begründen.

2 Differenzialrechnung im Umfeld ökonomischer Funktionen mit einer Variablen

Dieses Kapitel behandelt aus fachwissenschaftlicher Sicht die wesentlichen Grundlagen, die die Basis der Unterrichtsvorschläge zur Differenzialrechnung bilden. Zu Beginn gehen wir auf die erste Ableitung ein (Abschn. 2.1) und untersuchen, wie sich deren Wert im Umfeld ökonomischer Funktionen interpretieren lässt. Daraufhin analysieren wir Ableitungsfunktionen und Taylorpolynome, bevor einzelne Anwendungen der Differenzialrechnung für ökonomische Funktionen mit einer Variablen zusammengefasst werden (Abschn. 2.2). Im Umfeld der ersten Ableitung betrachten wir die Themen Gewinnmaximum sowie Betriebsminimum und -optimum, zur Untersuchung ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen beziehen wir die zweite Ableitung mit ein. Abschließend gehen wir mit dem Konzept der Elastizität auf relative Funktionsänderungen ein. Dabei setzen wir beim Leser elementare Kenntnisse zur Differenzialrechnung voraus[14].

Die Ausführungen zu den mathematischen Inhalten beziehen sich auf BEHRENDS (2015), BÜCHTER und HENN (2010), DANCKWERTS und VOGEL (2006), DEISER (2015), HOLEY und WIEDEMANN (2010), JÄGER und SCHUPP (2013), LUDERER und WÜRKER (2003) sowie TIETZE (2010). Die ökonomischen Inhalte orientieren sich an DIETZ (2012), PINDYCK und RUBINFELD (2009), SIEG (2012) als auch an WILDMANN (2007).

2.1 Ableitung ökonomischer Funktionen

2.1.1 Zur ökonomischen Interpretation der ersten Ableitung

In jedem Unternehmen übt die Änderung der produzierten Menge oder des vorgegebenen Preises einen direkten Einfluss auf die Kosten, den Erlös und auf den Gewinn aus. Lassen sich diese Größen mittels ökonomischer Funktionen beschreiben, liefert deren Änderungsverhalten Informationen über mögliche Konsequenzen. Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen ist die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten mit:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2.1}$$

Das Änderungsverhalten einer Funktion lässt sich lokal durch ihre Ableitung beschreiben. Dabei weicht der Wert der Ableitung einer Funktion f an einer Stelle a von der genauen Funktionswertänderung $f(a+1) - f(a)$ nur

[14] In Anhang A sind die für unsere Zwecke wichtigen Grundlagen zur Differenzialrechnung zusammengefasst.

geringfügig ab. Er stellt demnach eine gute Möglichkeit zur Näherung des Funktionswertes im ökonomischen Kontext dar. Es gilt:

Satz 1
Gegeben sei eine ökonomische Funktion f. Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle a gibt die näherungsweise Funktionswertänderung an, wenn die unabhängige Variable um eine Einheit erhöht wird.

Auf den Beweis von Satz 1 gehen wir zum Ende dieses Abschnitts ein. Vorerst möge Beispiel 23 zur Verdeutlichung genügen.

Beispiel 23
Gegeben sei die Erlösfunktion $E(x) = 160x - 2x^2$. Für $a = 20$ gilt für den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}\frac{E(x) - E(20)}{x - 20} &= \frac{160x - 2x^2 - 2400}{x - 20} \\ &= \frac{-2 \cdot (x - 20) \cdot (x - 60)}{x - 20} \\ &= -2x + 120.\end{aligned}$$

Wir vergleichen die Erlösänderung für a) $x_0 = 21$ und b) $x \to 20$:

a) $\frac{E(21)-E(20)}{21-20} = -2 \cdot 21 + 120 = 78,$

b) $E'(20) \overset{(2.1)}{=} \lim\limits_{x \to 20} (-2x + 120) = 80.$

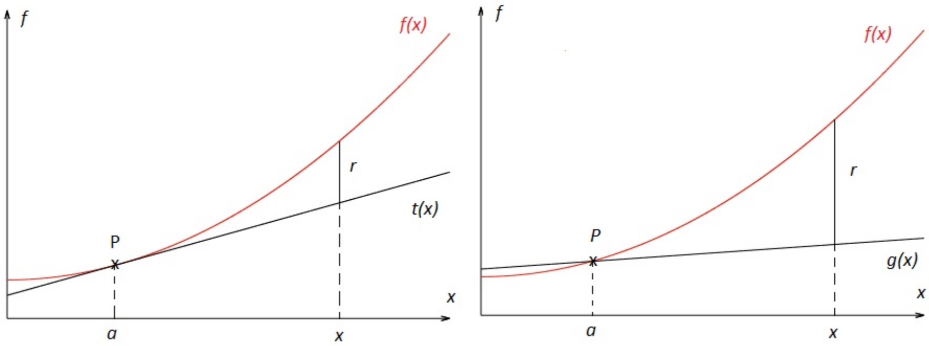
Wie bereits in Satz 1 formuliert, erkennen wir, dass der Wert der ersten Ableitung der Erlösfunktion für 20 ME in Höhe von 80 $\frac{GE}{ME}$ näherungsweise mit der Erlösänderung in Höhe von 78 $\frac{GE}{ME}$ übereinstimmt[15].

Diese Näherung der Funktionswerte über die Ableitung betrachten wir im Folgenden unter algebraisch-analytischen Aspekten genauer. Die Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen von f im Punkt $P\,(a|f(a))$ lässt sich mit $t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ für $x \neq a$ angeben. Eine Gerade g mit beliebiger Steigung $m \neq f'(a)$, die die Funktion in P schneidet, lautet:

$$g(x) = f(a) + m \cdot (x - a). \tag{2.2}$$

Sowohl die Tangente (vgl. Abb. 2.1 (a)) als auch die beliebige Gerade (vgl. Abb. 2.1 (b)) approximieren die Funktion in einer kleinen Umgebung von P.

[15] Anstatt die Funktionswertänderung in Abhängigkeit der Zunahme der nächsten verkauften Menge zu betrachten, ist eine analoge Interpretation der Ableitung für die letzte verkaufte Menge möglich. Wir verbleiben im Folgenden beim Anstieg der unabhängigen Variable, so kann der Zahlenwert der Ableitung direkt interpretiert werden.



(a) (b)

Abbildung 2.1: Lineare Approximation über (a) eine Tangente und (b) eine beliebige Gerade an den Graphen einer Funktion

Doch worin besteht der Unterschied zwischen den beiden? Wir betrachten in den Abbildung 2.1 (a) und (b) den Approximationsfehler r, der sich aus der Differenz von f und g an einer Stelle $x \neq a$ ergibt.
Für den Approximationsfehler r an einer Stelle x gilt:

$$\begin{aligned} r(x) &= f(x) - g(x) \\ &\overset{(2.2)}{=} f(x) - (f(a) + m \cdot (x-a)) \\ &= f(x) - f(a) - m \cdot (x-a). \end{aligned}$$

Ausklammern von $(x-a)$ liefert:

$$r(x) = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - m \right) \cdot (x-a). \tag{2.3}$$

Aus $x \to a$ folgt $r(x) \to 0$. Für $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m \to 0$ strebt der Approximationsfehler r noch schneller gegen Null, denn in Gleichung (2.3) konvergieren beide Faktoren gegen Null. Eine analoge Argumentation lässt sich über den relativen Fehler führen:

$$\frac{r(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - m \tag{2.4}$$

Es zeigt sich, dass dieser genau dann gegen Null strebt, wenn für die Differenz auf der rechten Seite der Gleichung (2.4) gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m, \tag{2.5}$$

mit $m = f'(a)$. Für jeden anderen Wert von m ist dies nicht der Fall. Damit stellt das Verschwinden des relativen Fehlers ein Charakteristikum der Ableitung dar. Es gilt:

Definition 11 (Ableitung)
Eine Funktion f heißt in a differenzierbar, wenn es eine Gerade t durch den Punkt $P\,(a|f(a))$ gibt, so dass der Approximationsfehler $r(x) = f(x) - t(x)$ der Bedingung

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$$

mit $x \neq a$ genügt. Die Steigung von t heißt Ableitung von f an der Stelle a.

Der Approximationsfehler $r(x)$ strebt für $x \to a$ für jede Gerade durch P gegen Null. Handelt es sich bei der Geraden um die Tangente mit $m = f'(a)$, strebt auch der relative Fehler $\frac{r(x)}{x-a}$ gegen Null. Betrachten wir ein Beispiel zur lokalen linearen Approximation einer Erlösfunktion.

Beispiel 24
Gegeben sei die Erlösfunktion $E(x) = -x^2 + 10x$. Die Gleichung der Tangente t an E an Stelle $a = 4$ lautet:

$$t(x) = E(4) + E'(4) \cdot (x-4) = 24 + 2 \cdot (x-4)$$

Sei x eine beliebige Stelle mit $x \neq a$. Für den absoluten Approximationsfehler der Tangente t zu E in Abhängigkeit von x gilt:

$$r(x) = t(x) - E(x) = 24 + 2(x-4) - (-x^2 + 10x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2.$$

Daraus folgt für den relativen Fehler der Tangente t zu E in Abhängigkeit von x:

$$\frac{r(x)}{x-4} = \frac{(x-4)^2}{x-4} = x - 4.$$

Für $x \to 4$ gilt: $r(x) \to 0$ sowie $\frac{r(x)}{x-4} \to 0$. Zum Vergleich betrachten wir eine beliebige Gerade g mit $g(x) = 24 + m \cdot (x-4)$ mit der Steigung $m \neq E'(4)$. Für den absoluten Fehler der Geraden g zu E erhalten wir:

$$r(x) = g(x) - E(x) = 24 + m(x-4) - (-x^2 + 10x) = m(x-4) + (x-4)(x-6).$$

Auch in diesem Fall gilt: $r(x) \to 0$ für $x \to 4$. Der relative Approximationsfehler der Geraden g zu E ist aber für $x \to 4$ von Null verschieden:

$$\lim_{x \to 4} \frac{r(x)}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{m(x-4) + (x-4)(x-6)}{x-4} = \lim_{x \to 4} (m + (x-6)) = m - 2.$$

Aufgrund dieser Schmiegeigenschaft (vgl. DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 71) ist die Tangente als lokale lineare Approximation an eine Funktion jeder anderen Geraden vorzuziehen. Dies legitimiert die Verwendung der Ableitung in der Wirtschaftsmathematik zur Näherung einer Funktionswertänderung. Aus den Gleichungen (2.4) und (2.5) folgt:

$$r(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a) \Leftrightarrow r(x) + f'(a) \cdot (x - a) = f(x) - f(a).$$

Für $x - a = 1$ wird der Approximationsfehler $r(x)$ im Umfeld ökonomischer Funktionen vernachlässigt. Daraus erfolgt der algebraische Nachweis von Satz 1, denn es gilt:

$$f'(a) \approx f(a + 1) - f(a).$$

Der relative Fehler aus Gleichung (2.4) wird auch als **Fehlerfunktion** $\delta(x)$ bezeichnet (vgl. JÄGER und SCHUPP 2013, S. 33). Diese ist folgendermaßen definiert:

$$\delta(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \text{ für } x \neq a, \delta(a) := 0. \tag{2.6}$$

Sei t die Tangente einer Funktion an einer beliebigen Stelle x. Für den Approximationsfehler r gilt mit Gleichung (2.6):

$$r(x) = f(x) - t(x) = \delta(x) \cdot (x - a).$$

Für $\delta(x) \to 0$ strebt der relative Approximationsfehler $\frac{r(x)}{x-a}$ gegen Null. Die Fehlerfunktion $\delta(x)$ ermöglicht uns zusätzlich den Ableitungsbegriff auf Funktionen mit zwei Variablen (vgl. Kap. 3) zu übertragen.

2.1.2 Ableitungsfunktion als Grenzfunktion

Die Berechnung der Ableitung einer Funktion f mittels Differenzenquotient an verschiedenen Stellen ist sehr aufwändig. Daher ist es zielführender, die Ableitung als Funktion in Abhängigkeit einer Variablen direkt anzugeben.

Definition 12 (Ableitungsfunktion)
Eine Funktion, die jedem $x \in D_f$ die Ableitung an dieser Stelle zuordnet, heißt Ableitungsfunktion von f. Sie wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Beispiel 25
Gegeben sei die Erlösfunktion E mit $E(x) = 20x - x^2$. Für die Ableitung an einer beliebigen Stelle a gilt:

$$\begin{aligned} E'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{E(x) - E(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{20x - x^2 - (20a - a^2)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{20(x - a) - (x - a)(x + a)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} (20 - (a + x)) = 20 - 2a. \end{aligned}$$

Existiert der Grenzwert $E'(a)$ für jedes $a \in D_f$, so liegt eine differenzierbare Funktion vor und wir können den Zusatz „an einer beliebigen Stelle" vernachlässigen. Die Ableitungsfunktion lautet $E'(x) = 20 - 2x$. Damit sind etwa $E'(5) = 10$ und $E'(6) = 8$.

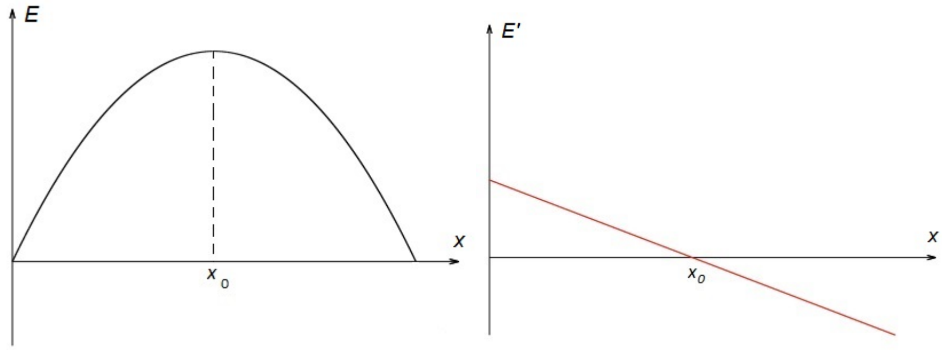
Aus den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion können wir erste Aussagen über deren Zusammenhänge treffen. Spätere Rechenverfahren fußen damit auf anschaulichen Vorstellungen. Dazu ein Beispiel.

Beispiel 26
Abbildung 2.2 zeigt die Graphen einer quadratischen Erlösfunktion eines Monopolisten und deren Ableitung. Wir vermuten folgende Zusammenhänge:

a) Der Erlös steigt, wenn $E'(x) > 0$ ist.

b) An der Stelle x_0 des maximalen Erlöses ist $E'(x_0) = 0$. Der Graph von $E'(x)$ schneidet an dieser Stelle die Abszisse.

c) Der Erlös sinkt, wenn $E'(x) < 0$ ist.



(a) (b)

Abbildung 2.2: (a) Graph einer quadratischen Erlösfunktion und (b) Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion

Wir weisen an dieser Stelle explizit auf die Darstellung der Graphen von f und f' in zwei verschiedenen Schaubildern hin. In einigen Literaturquellen (vgl. EICHBERGER 2004, S. 230 oder VOGT 2007, S. 275) sind diese gemeinsam aufgeführt. Dies erfüllt zwar den Zweck, verschiedene Zusammenhänge zwischen f und f' zu verdeutlichen, jedoch ist diese Form der Darstellung problematisch: Eine Funktion und deren Ableitung besitzen verschiedene Einheiten (z. B. Erlös in GE und Ableitung des Erlöses in $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$). Daher sprechen wir uns für eine separate Darstellung der Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion aus.

Die Ableitung einer ökonomischen Funktion heißt **Grenzfunktion**. Daraus resultieren weitere Begriffe: Die Ableitung einer Kostenfunktion heißt folglich Grenzkostenfunktion. Analog bezeichnen Grenzerlös- und Grenzgewinnfunktion die Ableitungen von Erlös- und Gewinnfunktion. Grenzfunktionen dienen zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswertänderungen (Erlös, Kosten, Gewinn), wenn die unabhängige Variable (produzierte Menge, Preis pro Stück) um eine Einheit erhöht wird.

2.1.3 Taylorpolynome

In diesem Unterabschnitt greifen wir die Idee der lokalen Näherung mittels Tangente aus Unterabschnitt 2.1.1 auf. Die Tangente t, die mit einer Funktion f an einer Stelle a mit dem Funktionswert und der ersten Ableitung übereinstimmt, approximiert f lokal besser als jede andere beliebige Gerade. Eine Tangente besitzt folgende Funktionsgleichung:

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Die Idee zur Verallgemeinerung liegt nahe: Anstelle einer linearen Funktion soll f in a durch eine Polynomfunktion T_n vom Grad n approximiert werden, die mit f im Funktionswert und im Wert der ersten n Ableitungen übereinstimmt. T_n ist allgemein von der Form:

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + ... + a_n(x - a)^n.$$

Betrachten wir das Näherungspolynom T_2 vom Grad 2 (synonym: quadratisches Polynom):

$$T_2(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2. \tag{2.7}$$

Aus $f(a) = T_2(a)$, $f'(a) = T_2'(a)$ sowie $f''(a) = T_2''(a)$ folgt das LGS:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & a_1(a-a) & + & a_2(a-a)^2 & = & f(a) \\ & & a_1 & + & 2a_2(a-a) & = & f'(a) \\ & & & & 2a_2 & = & f''(a). \end{array}$$

Damit gilt für das quadratische Polynom aus Gleichung (2.7):

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Eine analoge Vorgehensweise liefert das Näherungspolynom vom Grad 3 (synonym: kubisches Polynom):

$$T_3(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3.$$

Betrachten wir zudem T_4 und T_5, lässt sich für die Koeffizienten von T_n folgende Verallgemeinerung erkennen[16]:

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.$$

Dabei stellt (i) die i-te Ableitung von f für $i = 1, 2, 3, ..., n$ dar und es ist $a_0 = f(a)$. Allgemein gilt:

Definition 13 (Taylorpolynom)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in D$. Das Näherungspolynom

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

heißt Taylorpolynom n-ten Grades zur Funktion f an der Stelle a.

Beispiel 27
Wir betrachten die Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $a = 0$. Das lineare Taylorpolynom lautet $T_1(x) = 1 + x$. Für das Taylorpolynom T_4 gilt:

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$

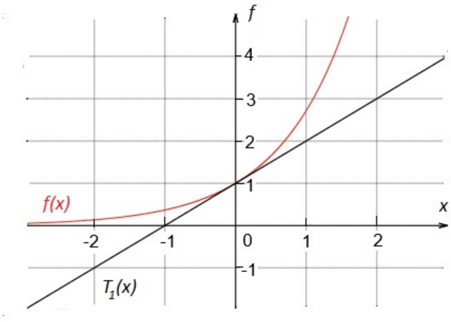
Abbildung 2.3 zeigt den Graphen von f und die Näherung durch die Graphen von (a) T_1 und (b) T_4. Das Näherungspolynom T_4 ist auch in höheren Ableitungen mit f an der Stelle $a = 0$ identisch. Dies lässt sich anschaulich belegen: Im Vergleich zum Graphen von T_1 stimmen die Graphen von f und T_4 auch in der Krümmung überein. Daher scheint der Graph von T_4 den Graphen von f lokal besser zu approximieren.

Taylorpolynome besitzen im Vergleich zur ursprünglichen Funktion entscheidende Vorteile: Zur Funktionswertbestimmung kommen sie mit den Rechenarten Addition und Multiplikation aus. Sie sind leicht ableit- und integrierbar, da es sich um ganzrationale Funktionen handelt. Im Folgenden untersuchen wir den Fehler, der durch die Näherung entsteht. In Abschnitt 2.1.1 zeigen wir, dass die lokale Approximation einer Funktion f an der Stelle a durch eine beliebige Gerade $g(x) = m(x-a) + f(a)$ über den Fehler $r(x)$ beschrieben werden kann. Es gilt:

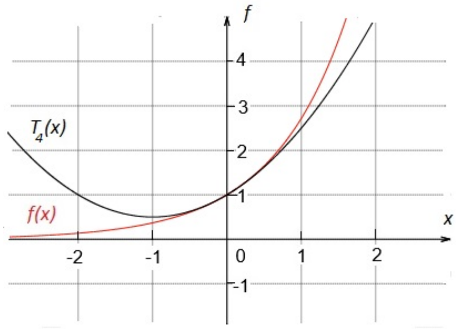
$$f(x) = g(x) + r(x).$$

[16] Zur Kontrolle:

$$T_4(x) = T_3(x) + \frac{f''''(a)}{24}(x-a)^4,\ T_5(x) = T_4(x) + \frac{f'''''(a)}{120}(x-a)^5.$$



(a)



(b)

Abbildung 2.3: (a) Graphen von $f(x) = e^x$ sowie von $T_1(x)$ und (b) Graphen von $f(x) = e^x$ sowie von $T_4(x)$ an der Stelle $a = 0$

Anstatt f an der Stelle a durch die Tangente als ein Polynom ersten Grades zu approximieren, verwenden wir im Folgenden Taylorpolynome höheren Grades. Über den daraus resultierenden Fehler R gibt der Satz von Taylor Auskunft.

Satz 2
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion. Weiterhin sei $T_n(x)$ das Taylorpolynom n-ten Grades von f an der Stelle $a \in D$. Dann gilt für ein $z \in (a; x)$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \qquad \text{mit} \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{2.8}$$

Beweis. Gegeben seien $F(y)$ und $G(y)$ mit:

$$F(y) := f(y) + \frac{f'(y)}{1!}(x-y) + ... + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n \qquad \text{und}$$
$$G(y) := (x-y)^{n+1}.$$

Daraus resultieren die folgenden Zusammenhänge:

$$F(x) = f(x), F(a) = T_n(x), G(x) = 0 \text{ sowie } G(a) = (x-a)^{n+1}.$$

Des Weiteren gelten:

$$G'(z) = -(n+1)(x-z)^n \text{ und } F'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Aus dem 2. Mittelwertsatz (vgl. BARNER und FLOHR 2000, S. 273) erhalten wir:

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)} \Leftrightarrow \frac{f(x)-T_n(x)}{0-(x-a)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n}{-(n+1)(x-z)^n}.$$

Daraus folgt die gesuchte Darstellung von $f(x)$:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

□

Die Darstellung von $R_n(x)$ in Gleichung (2.8) heißt **Restgliedformel von Lagrange**. Aus Satz 2 ist nur bekannt, dass im Intervall $(a;x)$ ein z existiert, so dass das Gleichheitszeichen gilt. Da über z keine weiteren Informationen vorliegen, ist im Allgemeinen eine genaue Berechnung des Fehlers in Gleichung (2.8) schwierig. Jedoch lassen sich Aussagen über eine maximale Abweichung vom gesuchten Funktionswert treffen. Dazu ein Beispiel.

Beispiel 28
Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x$. Nach dem Satz von Taylor gilt für die Funktion an der Stelle $a = 0$:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Das Restglied nach Lagrange ergibt sich zu $R_n(x) = \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}$. Wir suchen eine Abschätzung für e^1 mit $R_n(x) < 0,01$. Nach Satz 2 existiert eine Zahl $z \in (0;1)$ für die $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ gilt. Aus gewähltem z resultiert folgende Abschätzung:

$$R_n(x) = \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0,01.$$

Ab einem Grad $n = 6$ liefert die Lagrangesche Form des Restglieds einen geschätzten Fehler, der im vorherigen Beispiel kleiner als $0,01$ *ist. Es ergibt sich die folgende Approximation:*

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2,718055556.$$

Anmerkung: Wünschenswert ist eine exakte Erfassung des Fehlers, daher „bleibt die Darstellung des Restglieds unbefriedigend“ (DEISER 2015, S. 95). Mithilfe der Integralrechnung lässt sich dieses Problem beheben. Der interessierte Leser sei auf DEISER (2015, S. 95 f.) oder HEUSER (2004, S. 283 ff.) verwiesen.

2.2 Anwendungen der Differenzialrechnung auf ökonomische Funktionen mit einer Variablen

2.2.1 Gewinnmaximierung

Bei der Analyse von Gewinnfunktionen steht neben der Gewinnschwelle der maximale Gewinn im Fokus. So führt etwa ein Artikel zu den hohen Ticketpreisen im englischen Fußball auf, dass ausländische Investoren in den Klubs „eine gnadenlose Gewinnmaximierung“ (WALLRODT 2016) verfolgen. Eine Studie von RobecoSam zeigt, dass Anleger mit einem Aktienportfolio aus nachhaltig agierenden Unternehmen ihren Gewinn maximieren können:

> „Overall, the findings of this research provide us with credible evidence that firms that adopt corporate sustainability best practices are not contradicting or neglecting their primary objective, which is to maximize the profits of their shareholders.“ (ROBECOSAM 2014, S. 7).

Aus Abschnitt 1.3.4 ist bekannt, dass sich der Gewinn als Differenz von Erlös und Kosten berechnet. Erfolgt die Modellierung dieser Größen mittels Funktionen in Abhängigkeit von der verkauften Menge, erhalten wir:

$$G(x) = E(x) - K(x).$$

Die Bestimmung eines lokalen Gewinnmaximums kann mittels Ableitung erfolgen[17]. Sei x_G die verkaufte Menge, für die der Gewinn maximal wird. Es gilt die notwendige Bedingung[18]:

$$G'(x_G) = 0. \tag{2.9}$$

Als hinreichende Bedingung zählt[19] zu $G'(x_G) = 0$ ein Vorzeichenwechsel von $G'(x)$ in einer Umgebung von x_G von $+ \to -$ oder das Verhalten der zweiten Ableitung: An der Stelle x_G des lokalen Maximums einer Gewinnfunktion ist diese nach rechts gekrümmt. Daraus folgt:

$$G''(x_G) < 0. \tag{2.10}$$

Zur Berechnung eines lokalen Maximums einer Gewinnfunktion ist dieses Vorgehen ausreichend. Damit auch tatsächlich ein globales Maximum vorliegt, sind noch die Randwerte der Gewinnfunktion zu untersuchen. Insbesondere eingeschränkte Definitionsbereiche in Form von etwa Kapazitätsbegrenzungen können zu einem globalen Gewinnmaximum am Rand führen.

[17] Möglich sind auch Verfahren, die nicht auf der Differenzialrechnung basieren, wie das Bestimmen der Scheitelpunktform bei quadratischen Funktionen.

[18] Einige Wirtschaftswissenschaftler beschränken sich auf die notwendige Bedingung für das Gewinnmaximum (vgl. PINDYCK und RUBINFELD 2009, S. 368; SIEBERT und LORZ 2007, S. 78). Eine hinreichende Bedingung zu dessen Bestimmung ist vermehrt bei Wirtschaftsmathematikern wie TIETZE (2010, S. 283) oder LACHMANN (2006, S. 106) zu finden. Daran möchten wir uns im Folgenden orientieren.

[19] Möglich ist auch eine Überprüfung von G in einer Umgebung von x_G.

In der Regel zeigen ökonomische Funktionen aber einen gutmütigen Verlauf, so dass das lokale Maximum zumeist mit dem globalen identisch ist.

Erfolgt die Bestimmung des maximalen Gewinns anhand der Erlös- und Kostenfunktionen zeigen sich weitere ökonomische Zusammenhänge. Im Folgenden legen wir anhand von ausgewählten Beispielen dar, welche Besonderheiten sich bei der Gewinnmaximierung auf einzelnen Märkten (Monopol, Polypol, monopolistische Konkurrenz) mit unterschiedlichen Kostenverläufen ergeben. Zunächst betrachten wir einen Monopolisten, dessen Produktionsausgaben sich mit einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion modellieren lassen. Für diesen gilt:

Satz 3
Ein monopolistischer Anbieter sehe sich einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G *verkauft, für die*

a) Grenzerlös und Grenzkosten übereinstimmen: $E'(x_G) = K'(x_G)$ *und*

b) die Steigung des Grenzerlöses kleiner ist als die der Grenzkosten: $E''(x_G) < K''(x_G)$.

Beweis.
Aus Gleichung (2.9) ergibt sich in Verbindung mit der Definition der Gewinnfunktion:

$$G'(x_G) = 0 \overset{(1.4)}{\Leftrightarrow} E'(x_G) - K'(x_G) = 0 \Leftrightarrow E'(x_G) = K'(x_G).$$

An der Stelle der gewinnmaximalen Menge x_G sind der Grenzerlös und die Grenzkosten gleich. Für Bedingung b) erhalten wir aus Gleichung (2.10):

$$G''(x_G) < 0 \overset{(1.4)}{\Leftrightarrow} (E(x_G) - K(x_G))'' < 0 \Leftrightarrow E''(x_G) < K''(x_G).$$

□

Wir betrachten zum vorhergehenden Satz ein Beispiel.

Beispiel 29
Ein monopolistischer Anbieter setze sein Produkt mit der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -x + 22$ *ab und sehe sich der folgenden ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gegenüber:*

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 10x + 20.$$

Die Erlösfunktion lautet:

$$E(x) \overset{(1.2)}{=} p(x) \cdot x = -x^2 + 22x.$$

Für das Gewinnmaximum gilt nach Satz 3 die notwendige Bedingung:

$$E'(x) = K'(x) \Leftrightarrow -2x + 22 = x^2 - 6x + 10 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0. \qquad (2.11)$$

Die Gleichung (2.11) besitzt die Lösungen $x_1 = -2$ *und* $x_2 = 6$*. Da* x_1 *nicht im ökonomischen Definitionsbereich liegt, verbleibt* x_2 *als einzige Lösung für* x_G*. Mit* $E'(6) = K'(6)$ *und* $E''(6) < K''(6)$ *besitzt* G *an der Stelle* $x_G = 6$ *ein lokales Maximum. Der zugehörige Funktionswert lautet* $G(6) = 52$ *und stellt gleichzeitig ein globales Maximum dar: Es ist* $G(0) = -20 = -K_f$ *und für* $x \to \infty$ *ist* $K(x) > E(x)$*. Der maximale Gewinn liegt bei einem Absatz von 6 ME und beträgt 52 GE.*

Betrachten wir im Folgenden einen Monopolisten, der sich einem linearen Kostenanstieg gegenübersieht. Da die Grenzkosten in diesem Fall konstant sind, vereinfacht sich die hinreichende Bedingung aus Gleichung (2.10) zur Bestimmung eines Gewinnmaximums.

Satz 4
Ein monopolistischer Anbieter sehe sich einer linearen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G *verkauft, für die*

a) Grenzerlös und Grenzkosten übereinstimmen: $E'(x_G) = K'(x_G)$ *und*

b) die Steigung des Grenzerlöses negativ ist: $E''(x_G) < 0$.

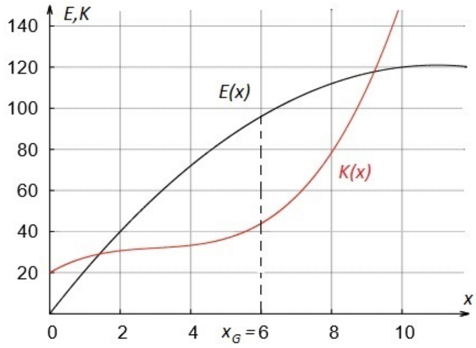
Beweis. Die Bedingung a) ist identisch mit derjenigen aus Satz 3. Sei weiterhin $K(x) = mx + c$ die Funktionsgleichung der linearen Kostenfunktion. Mit $K''(x) = 0$ folgt für die Bedingung b) mit Gleichung (2.10):

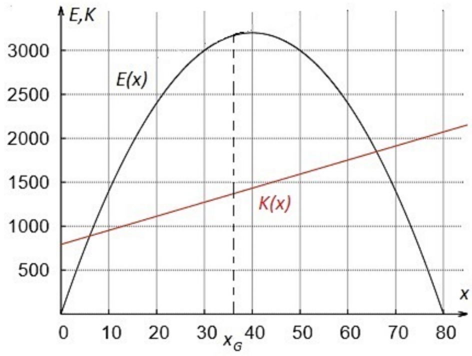
$$G''(x_G) < 0 \overset{(1.4)}{\Leftrightarrow} (E(x_G) - K(x_G))'' < 0 \Leftrightarrow E''(x_G) < 0.$$

□

Beispiel 30
Es sei $p(x) = -2x + 160$ *die Preis-Absatz-Funktion eines monopolistischen Anbieters. Für die Erlösfunktion gilt:*

$$E(x) \overset{(1.2)}{=} p(x) \cdot x = -2x^2 + 160x.$$





(a) (b)

Abbildung 2.4: Identische Tangentensteigungen der Graphen von Erlös- und Kostenfunktion an der Stelle des maximalen Gewinns

Mit der linearen Kostenfunktion $K(x) = 16x + 792$ *gilt für das Gewinnmaximum nach Satz 4 die notwendige Bedingung:*

$$E'(x) = K'(x) \Leftrightarrow -4x + 160 = 16 \Leftrightarrow x = 36.$$

Mit $E'(36) = K'(36)$ *und* $E''(36) = -4$ *liegt für* $x_G = 36$ *ein lokales Maximum mit* $G(36) = 1800$ *vor, das auch gleichzeitig das globale Maximum darstellt: Es ist* $G(0) = E(0) - K(0) = -792 = -K_f$ *und für* $x \to \infty$ *ist* $K(x) > E(x)$. *Der größte Gewinn liegt bei einem Absatz von 36* ME *und beträgt 1800* GE.

Abbildung 2.4 (a) veranschaulicht Satz 3 für den Monopolisten aus Beispiel 29. Für die gewinnmaximale Menge $x_G = 6$ sind die Steigungen der Graphen von Erlös- und Kostenfunktion identisch. Beide Anstiege sind positiv, jedoch nehmen für x_G der Grenzerlös ab und die Grenzkosten zu. Anschaulich besitzt der Graph der Erlösfunktion eine Rechtskurve und der Graph der Kostenfunktion ist nach links gekrümmt. Analog verdeutlicht Abbildung 2.4 (b) Satz 4 anhand des Monopolisten aus Beispiel 30. Für die gewinnmaximale Menge $x_G = 36$ stimmen die Steigungen der Graphen von Erlös- und Kostenfunktionen überein. Für x_G nimmt der Grenzerlös ab und die Grenzkosten ändern sich nicht. Der Graph der Erlösfunktion ist nach rechts gekrümmt, während der Graph der Kostenfunktion eine konstante Steigung besitzt und damit die zweite Ableitung gleich null ist.

Neben einem Monopol, das in der Realität selten vorzufinden ist (vgl. PINDYCK und RUBINFELD 2009, S. 470), ist das Polypol eine weitere theoretische Marktform. Für die Gewinnmaximierung eines Polypolisten, der seine Kosten mit einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion modelliert, gilt:

Satz 5
Ein polypolistischer Anbieter sehe sich einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G verkauft, für die

a) die Grenzkosten mit dem Preis übereinstimmen: $K'(x_G) = p_M$ und

b) die Steigung der Grenzkosten positiv ist: $K''(x_G) > 0$.

Beweis. Ein polypolistischer Anbieter sieht sich einem konstanten Marktpreis p_M gegenüber. Daher gilt für dessen Erlösfunktion $E(x) = p_M \cdot x$. Mit $E'(x) = p_M$ sowie $E''(x) = 0$ lässt sich Satz 3 vereinfachen. Für die Bedingung a) gilt:

$$G'(x_G) = 0 \overset{(1.4)}{\Leftrightarrow} E'(x_G) = K'(x_G) \Leftrightarrow p_M = K'(x_G).$$

Weiterhin folgt für die Bedingung unter b):

$$G''(x_G) < 0 \overset{(1.4)}{\Leftrightarrow} E''(x_G) - K''(x_G) < 0 \Leftrightarrow E''(x_G) < K''(x_G) \Leftrightarrow 0 < K''(x_G).$$

□

Beispiel 31
Ein polypolistisches Unternehmen vertreibe sein Produkt zum Marktpreis in Höhe von 87 $\frac{GE}{ME}$. Die obere Produktionsgrenze liege bei 14 ME. Das Unternehmen produziere mit einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K mit:

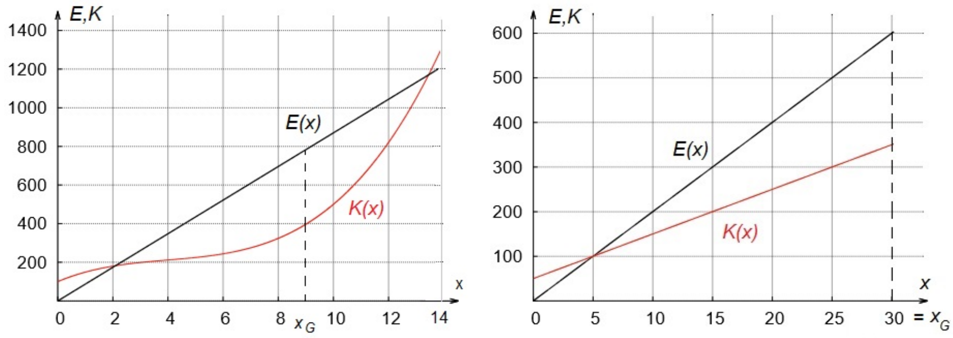
$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100.$$

Wir erhalten für das Gewinnmaximum nach Satz 5:

$$K'(x) = p_M \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 60 = 87 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x - 27 = 0. \tag{2.12}$$

Die Gleichung (2.12) besitzt die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 9$. Da x_1 nicht im ökonomischen Definitionsbereich liegt, verbleibt x_2 als einzig sinnvolle Lösung für x_G. Mit $K'(9) = 87$ und $K''(9) = 30 > 0$ besitzt G für $x_G = 9$ ein lokales Maximum mit $G(9) = 386$, das auch ein globales Maximum ist. Wir betrachten die Randwerte: Es ist $G(0) = -100 = -K_f$ und $G(14) = -114$. Beim Absatz von 9 ME erzielt das Unternehmen den maximalen Gewinn in Höhe von 386 GE.

Modelliert ein polypolistischer Anbieter seine Ausgaben mit einer linearen Kostenfunktion, so ist Satz 3 nicht anwendbar. Grenzerlös und Grenzkosten besitzen in der Regel verschiedene konstante Werte.



(a) (b)

Abbildung 2.5: Gewinnmaximierung eines polypolistischen Anbieters mit (a) einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion und (b) einer linearen Kostenfunktion

Satz 6
Ein polypolistischer Anbieter sehe sich einer linearen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G verkauft, die bei Überschreitung der unteren Gewinnschwelle an der Kapazitätsgrenze liegt.

Beweis. Sei x_0 die untere Gewinnschwelle, so dass für jedes $x_G > x_0$ gilt: $E(x_G) > K(x_G)$. Da $E(x)$ und $K(x)$ streng monoton steigend sind und $E'(x) > K'(x)$ gilt, nimmt die Differenz aus $E(x)$ und $K(x)$ für $x_G \to \infty$ zu.

□

Beispiel 32
Ein polypolistischer Anbieter sehe sich dem Marktpreis 20 $\frac{GE}{ME}$ gegenüber. Daraus ergibt sich für ihn die Erlösfunktion $E(x) = 20x$. Die Kosten lassen sich mit $K(x) = 10x + 50$ beschreiben. Maximal können 30 Mengeneinheiten produziert werden. Der Ansatz $E'(x) = K'(x)$ ist hier nicht zielführend. Aus $E(x) = K(x)$ ergibt sich die untere Gewinnschwelle bei $x_0 = 5$. Mit $G(30) = E(30) - K(30) = 250$ gilt: Der maximale Gewinn liegt an der Kapazitätsgrenze mit $x_G = 30$ und beträgt 250 GE.

Abbildung 2.5 (a) verdeutlicht die Aussage von Satz 5 anhand des Beispiels 31. Sieht sich ein polypolistischer Anbieter einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gegenüber, stimmen für die gewinnmaximale Menge dessen Grenzkosten und Grenzerlös, der identisch mit dem Preis ist, überein. Das

Gewinnmaximum liegt im Bereich der überproportional ansteigenden Kosten. Abbildung 2.5 (b) veranschaulicht Satz 6. Es zeigt die Graphen der linearen Erlös- und Kostenfunktionen des polypolistischen Anbieters aus Beispiel 32. Der maximale Gewinn liegt an der Kapazitätsgrenze. In beiden Schaubildern ist der maximale Gewinn als größte Differenz aus Erlös und Kosten zu erkennen. Abschließend untersuchen wir die Gewinnmaximierung eines Unternehmens unter monopolistischer Konkurrenz. Ein Anbieter auf diesem Markt sieht sich wie in Abschnitt 1.3.1 beschrieben einer doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion gegenüber. Wir beschränken uns bei der Betrachtung auf eine lineare Kostenfunktion.

Satz 7
Ein Anbieter unter monopolistischer Konkurrenz sehe sich einer doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion sowie einer linearen Kostenfunktion gegenüber. Er maximiert seinen Gewinn, wenn er diejenige Menge x_G verkauft, für die gilt:

a) Grenzkosten und Grenzerlös sind identisch: $E'(x_G) = K'(x_G)$ und

b) die Steigung des Grenzerlöses ist negativ: $E''(x_G) < 0$ und

c) $G(x_G)$ ist globales Maximum von $G(x)$.

Beweis. Die Bedingung a) $E'(x_G) = K'(x_G)$ folgt aus Satz 3. Aufgrund der doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion ist sie auf jeden Abschnitt anzuwenden. Lösungen, die außerhalb eines Abschnitts liegen, entfallen. Da es sich um eine lineare Kostenfunktion handelt, vereinfacht sich die Bedingung $E''(x_G) < K''(x_G)$ unter b) zu $E''(x_G) < 0$, da $K''(x_G) = 0$ ist[20]. Durch Einsetzen der verbliebenen Lösungen in $G(x)$ ist zu prüfen, an welcher Stelle x_G das globale Maximum liegt.

□

Beispiel 33
Ein polypolistischer Anbieter mit monopolistischem Preisspielraum sehe sich folgender Erlösfunktion gegenüber:

$$E(x) = \begin{cases} -0,5x^2 + 110x, & 0 \leq x < 40 \\ -x^2 + 130x, & 40 \leq x < 80 \\ -0,25x^2 + 70x, & 80 \leq x \leq 280. \end{cases}$$

[20] Für eine nicht-lineare Kostenfunktion ist $E''(x_G) < K''(x_G)$ zu fordern.

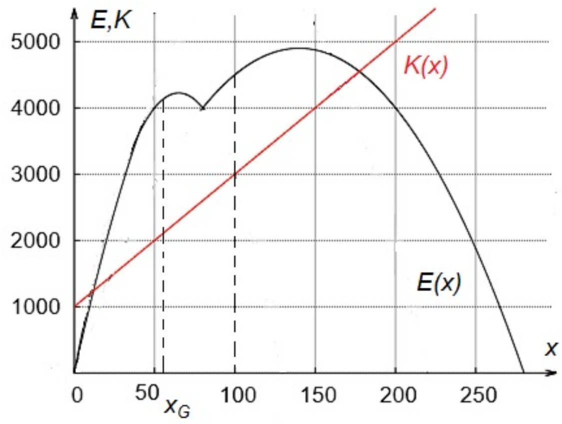


Abbildung 2.6: Übereinstimmung von Grenzerlös und Grenzkosten unter monopolistischer Konkurrenz

Die anfallenden Kosten lassen sich mit $K(x) = 20x + 1000$ *beschreiben. Nach Satz 7* sind die folgenden drei Gleichungen zu lösen:

$$-x + 110 = 20; \quad -2x + 130 = 20; \quad -0,5x + 70 = 20.$$

Wir erhalten drei Lösungen für eine mögliche lokale Extremstelle. Die erste Gleichung besitzt die Lösung $x_1 = 90$*, jedoch liegt diese nicht im vorgegebenen Intervall* $[0; 40)$*. Der zweite Abschnitt besitzt an der Stelle* $x_2 = 55$*, der dritte Abschnitt an der Stelle* $x_3 = 100$ *eine mögliche lokale Extremstelle. Sowohl* x_2 *als auch* x_3 *liegen im vorgegebenen Intervall und es gilt jeweils* $E''(55) < 0$ *bzw.* $E''(100) < 0$*. Mit* $G(55) = 2025$ *und* $G(100) = 1500$ *ist* $x_G = 55$ *und an dieser Stelle besitzt* $G(x)$ *auch das globale Maximum, da die Überprüfung der Randbereiche keinen größeren Funktionswert liefert. Abbildung 2.6 zeigt die Ergebnisse dieses Beispiels: Es existieren zwei Stellen, für die Grenzerlös und Grenzkosten identisch sind. Für beide ist* $E''(x) < 0$*. Die Differenz aus Erlös und Kosten ist für* $x_G = 55$ *aber am größten.*

Zum Ende dieses Abschnitts weisen wir darauf hin, dass der Begriff Gewinnmaximum nicht gleichbedeutend ist mit Gewinn erzielen. Die erste Ableitung berücksichtigt nur die Steigung der Funktionen, die zweite Ableitung deren Krümmung. Über die Funktionswerte wird nichts ausgesagt. Betrachten wir ein Beispiel:

Beispiel 34
Ein Monopolist sehe sich der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -x+10$ *und der Kostenfunktion* $K(x) = 2x + 25$ *gegenüber. Für die Erlösfunktion gilt:*

$$E(x) \overset{(1.2)}{=} p(x) \cdot x = -x^2 + 10x.$$

Mit der notwendigen Bedingung aus Satz 3 erhalten wir:

$$E'(x) = K'(x) \Leftrightarrow -2x + 10 = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Wir vergleichen die zweiten Ableitungen an dieser Stelle:

$$E''(4) < K''(4) \Leftrightarrow -2 < 0.$$

Aus $G(4) = -9$ resultiert: Der maximale Gewinn liegt bei 4 ME und beträgt −9 GE. Das Unternehmen arbeitet folglich mit Verlust.

2.2.2 Betriebsminimum und -optimum

Neben den Größen Erlös, Kosten und Gewinn interessiert sich ein Unternehmen für die entsprechende Größe pro Stück. So ist etwa in einem Artikel zu VW zu lesen, dass der Konzern das Ziel verfolgt, möglichst viele verschiedene Modelle aus den gleichen Teilen zusammenzubauen. Denn „je mehr davon gebaut werden, desto geringer fallen die Stückkosten aus und desto höher der Gewinn“ (DOLL, N. 2015). Liegt eine ökonomische Funktion vor, so kann daraus die Stückfunktion bestimmt werden. Dazu benötigen wir den Begriff der Durchschnittsfunktion, der im Folgenden definiert wird.

Definition 14 (Durchschnittsfunktion)
Gegeben sei die Funktion $f(x)$ mit $x \neq 0$. Der Quotient

$$\overline{f}(x) := \frac{f(x)}{x} \tag{2.13}$$

heißt Durchschnittsfunktion von $f(x)$.

Beispiel 35
In der Ökonomie wichtige Durchschnittsfunktionen nach Definition 14 sind:

a) *Die Durchschnittsfunktion einer Kostenfunktion heißt Stückkostenfunktion. Sie gibt die Kosten pro Stück (auch Stückkosten) für x Mengeneinheiten an und wird mit $k(x)$ bezeichnet. Wir erhalten etwa für $K(x) = x^3 - 30x^2 + 310x + 1156$:*

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 30x + 310 + \frac{1156}{x}.$$

b) *Die Durchschnittsfunktion einer variablen Kostenfunktion heißt variable Stückkostenfunktion. Sie gibt die variablen Kosten pro Stück für x Mengeneinheiten an und wird mit $k_v(x)$ bezeichnet. Es gilt für $K_v(x) = x^3 - 30x^2 + 310x$:*

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = x^2 - 30x + 310.$$

c) *Die Durchschnittsfunktion einer Erlösfunktion $E(x)$ eines monopolistischen Anbieters ist identisch mit dessen Preis-Absatz-Funktion $p(x)$. Der Zusammenhang folgt aus Gleichung (1.2):*

$$E(x) = p(x) \cdot x \Leftrightarrow \frac{E(x)}{x} = p(x).$$

Wir erhalten etwa für die Erlösfunktion $E(x) = -x^2 + 25x$:

$$p(x) = \frac{E(x)}{x} = -x + 25.$$

Im Folgenden untersuchen wir die Funktionen der Stückkosten und der variablen Stückkosten einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion. Es gilt:

Definition 15 (Betriebsminimum/-optimum)
Gegeben seien die Funktionen der variablen Stückkosten $k_v(x)$ und der Stückkosten $k(x)$.

a) *Das Minimum von $k_v(x)$ heißt Betriebsminimum.*

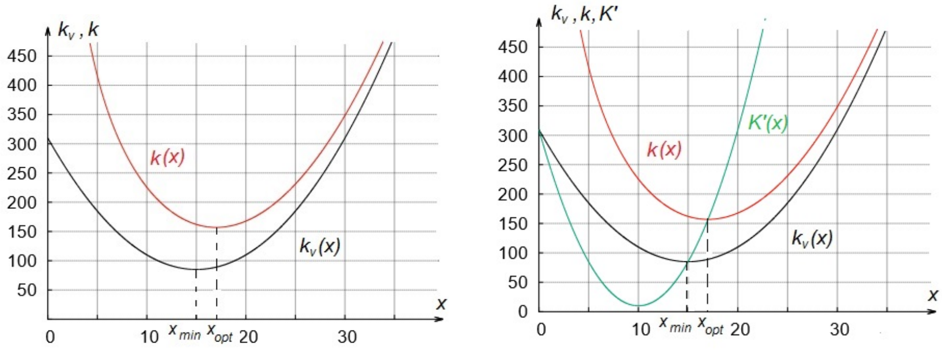
b) *Das Minimum von $k(x)$ heißt Betriebsoptimum.*

Beispiel 36
Gegeben sei die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 30x^2 + 310x + 1156$.

a) *Das Betriebsminimum besitzt die Koordinaten $B_{min}(15|85)$. Der Funktionswert kennzeichnet die **kurzfristige Preisuntergrenze**, da beim Verkauf des Gutes lediglich die variablen Kosten gedeckt sind.*

b) *Das Betriebsoptimum besitzt die Koordinaten $B_{opt}(17|157)$. Der Funktionswert kennzeichnet die **langfristige Preisuntergrenze**, da beim Verkauf des Gutes sowohl die variablen als auch die fixen Kosten gedeckt sind. Für einen höheren Preis erwirtschaftet das Unternehmen Gewinn.*

Abbildung 2.7 (a) zeigt die Graphen der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion aus Beispiel 36. Betriebsminimum und -optimum sind als Tiefpunkte der Graphen zu erkennen. Zeichnen wir wie in Abbildung 2.7 (b) zusätzlich den Graphen der Grenzkostenfunktion ein, scheint dieser die Graphen der variablen und gesamten Kosten in deren Tiefpunkten zu schneiden. Diese Zusammenhänge lassen sich auch rechnerisch bestätigen. Wir halten fest (vgl. TIETZE 2010, S. 319):



(a) (b)

Abbildung 2.7: (a) Graphen von variablen sowie gesamten Stückkostenfunktionen und (b) Zusammenhang zwischen den Grenzkosten sowie variablen und gesamten Stückkosten

Satz 8
Sei K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Es gelten folgende Zusammenhänge:

a) Im Betriebsminimum sind die Grenzkosten und die variablen Stückkosten identisch.

b) Im Betriebsoptimum sind die Grenzkosten und die gesamten Stückkosten identisch.

Beweis. Aus der notwendigen Bedingung für eine Extremstelle folgt für die variable Stückkostenfunktion mit $x \neq 0$:

$$(k_v(x))' = 0 \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{K_v(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(K_v(x) \cdot x^{-1}\right)' = 0.$$

Anwenden der Produktregel liefert:

$$K_v'(x) \cdot x^{-1} + K_v(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = 0.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $x^2 \neq 0$:

$$K_v'(x) \cdot x - K_v(x) = 0 \Leftrightarrow K_v'(x) = \frac{K_v(x)}{x} \Leftrightarrow K'(x) = k_v(x).$$

Der letzte Schritt erfolgt aus der Gleichheit der Ableitungen von K und K_v (die Fixkosten verschwinden beim Ableiten) und aus der Definition der variablen Stückkosten als Durchschnittsfunktion der variablen Kosten. Sei x_{min} die Stelle des Betriebsminimums, folglich gilt:

$$(k_v(x_{min}))' = 0 \Leftrightarrow K'(x_{min}) = k_v(x_{min}).$$

Der Beweis des 2. Satzes für das Betriebsoptimum folgt analog. Es ist lediglich K_v durch K zu ersetzen.

□

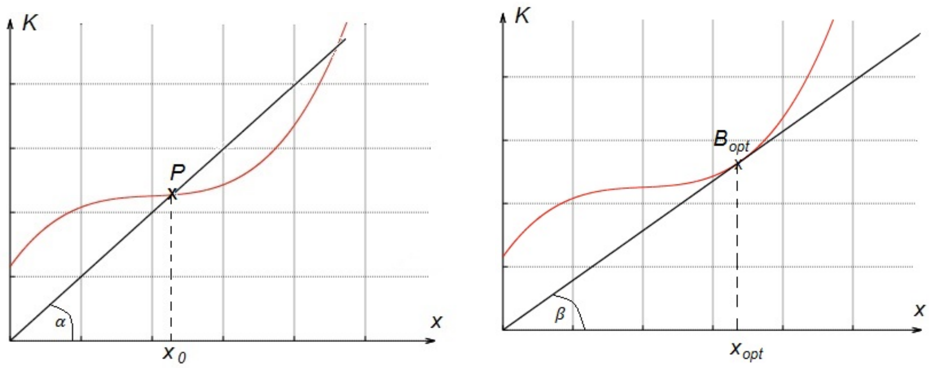
Neben der algebraischen Bestimmung von Betriebsminimum und -optimum lassen sich diese wie in Abbildung 2.8 (a) graphisch darstellen: Die Steigung der Verbindungsgeraden vom Ursprung zu einem Punkt $P(x_0|K(x_0))$ mit $x_0 \neq 0$ auf dem Graphen der Kostenfunktion entspricht den Stückkosten mit:

$$\tan(\alpha) = \frac{K(x_0)}{x_0} = k(x_0).$$

Des Weiteren beschreibt diejenige Gerade, „die eine Tangente zur Kostenfunktion ist“ (SIEG 2012, S. 94), die minimalen Stückkosten. Denn am Berührpunkt der Tangente $B_{opt}(x_{opt}|K(x_{opt}))$ mit dem Graphen von $K(x)$ ist die Steigung der Geraden am kleinsten. Abbildung 2.8 (b) zeigt die Tangente vom Ursprung zum Graphen von $K(x)$. Hierbei gilt:

$$k(x_{opt}) = \tan(\beta) = K'(x_{opt}).$$

Aus Satz 8 folgt, dass an der Stelle x_{opt} das Betriebsoptimum liegt. Für das Betriebsminimum ist analog die Tangente durch den Ursprung an den Graphen von $K_v(x)$ zu ziehen. Wird die Untersuchung am Graphen von $K(x)$ vorgenommen, ist anstelle des Ursprungs der Punkt $P(0|K_f)$ zu wählen.



(a) (b)

Abbildung 2.8: Verbindungsgerade vom Ursprung zu (a) einem beliebigen Punkt auf $K(x)$ und (b) als Tangente an $K(x)$

2.2.3 Koeffizienten einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

Kosten nehmen im Normalfall mit steigender produzierter Menge zu. Folglich sind die in dieser Arbeit aufgeführten Kostenfunktionen auf ihrem Definitionsbereich (streng) monoton steigend[21]. Von allen möglichen Kostenverläufen (linear, über-, unterproportional) untersuchen wir in diesem Abschnitt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion genauer. Diese ist im Allgemeinen von der Form:

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad (a \neq 0).$$

Wie sind die Koeffizienten a, b, c und d zu wählen? Es gilt:

Satz 9
Für die Koeffizienten einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion mit

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

gilt: $\quad a > 0; \quad b < 0; \quad c \geq 0; \quad d \geq 0; \quad b^2 \leq 3ac.$

Beweis.

a) Mit d werden die Fixkosten beschrieben, die bei einer Absatzmenge von Null anfallen. Sie sind nicht negativ. Damit ist $d \geq 0$.

b) Für $x \to \infty$ strebt $K \to \infty$. Daher ist $a > 0$.

c) Die Kosten sind für zunehmende Mengen monoton steigend. Der Graph von K besitzt keine Hoch- oder Tiefpunkte, ansonsten sinken die Kosten in einem Intervall. Daher darf die folgende Gleichung höchstens eine Lösung besitzen:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Mithilfe einer quadratischen Lösungsformel erhalten wir:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a}}. \tag{2.14}$$

Damit die Gleichung (2.14) höchstens eine Lösung besitzt, darf der Wert der Diskriminante nicht positiv sein. Es folgt:

$$\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{9a^2} \leq \frac{c}{3a} \Leftrightarrow 3ab^2 \leq 9a^2c \Leftrightarrow b^2 \leq 3ac.$$

Es sind $b^2 \geq 0$ und $a > 0$. Daraus resultiert, dass $c \geq 0$ ist[22].

[21] Wir begnügen uns im Folgenden mit einer monoton steigenden Kostenfunktion, um in den Unterrichtseinheiten die Existenz eines Sattelpunktes zu ermöglichen.

[22] Das gleiche Ergebnis erhalten wir über $x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$.

d) Im ersten Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems besitzt der Graph der Kostenfunktion einen Wendepunkt $W(x_W|K(x_W))$. An der Stelle x_W ist das Minimum der Grenzkosten zu finden. Es muss daher gelten:

$$K''(x_W) = 0 \Leftrightarrow 6ax_W + 2b = 0 \Leftrightarrow x_W = -\frac{b}{3a}.$$

$K'''(x) = 6a > 0$ bestätigt nochmals, dass $a > 0$ zu wählen ist (Minimum von K'). Folglich gilt $b < 0$, da x nur positive Werte annehmen kann.

□

Beispiel 37
Gegeben sei eine Schar von Funktionen $K_c(x) = x^3 - 30x^2 + cx + 1156$. Mit Satz 9 handelt es sich bei $K_c(x)$ um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion, wenn für den Parameter c gilt:

$$(-30)^2 \leq 3 \cdot 1 \cdot c \Leftrightarrow c \geq 300.$$

Für $c \geq 300$ ist $K_c(x)$ eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion.

2.2.4 Elastizität im Umfeld ökonomischer Funktionen

Die Elastizität beschreibt in den Wirtschaftswissenschaften die Möglichkeit, eine relative Funktionswertänderung zu messen. Sie stellt eine Verbindung aus Differenzial- und Prozentrechnung dar. Ihre große Bedeutung erhält die Elastizität dadurch, dass sich mit ihr ökonomische Zusammenhänge beschreiben lassen, die sonst nur schwer zugänglich sind. Aus Satz 1 wissen wir, dass sich die (näherungsweise) absolute Funktionswertänderung bei Erhöhung der unabhängigen Variablen um eine Einheit über die Grenzfunktion beschreiben lässt. Jedoch besitzt die Beschreibung des Änderungsverhaltens einer Funktion mittels Ableitung zwei Schwachstellen (vgl. TIETZE 2010, S. 302):

– Der Wert der ersten Ableitung hängt maßgeblich von der verwendeten Einheit ab.

– Der Wert der ersten Ableitung sagt nichts darüber aus, ob es sich bezogen auf den Ausgangswert um eine verhältnismäßig kleine oder große Änderung handelt.

Betrachten wir dazu ein Beispiel.

Beispiel 38
Ein Unternehmen setze sein Gut mit der folgenden Nachfragefunktion ab:

$$x(p) = -2p + 4000.$$

Der Preis wird in € pro kg und die Menge in kg gemessen. Da der Grenzabsatz mit $x'(p) = -2$ konstant ist, verringert sich die abgesetzte Menge unabhängig vom gewählten Preis bei einer Preiserhöhung von einem Euro pro kg um 2 kg. Wird die Menge in Gramm gemessen, erhalten wir:

$$x'(p) = -2000.$$

Ohne Angabe der Maßeinheit kann die Interpretation der ersten Ableitung zu Fehlern führen. Weiterhin ist der Grenzabsatz unabhängig vom gewählten Preis immer gleich. So führt eine Erhöhung des Preises von z. B. €1000 pro kg auf €1001 pro kg zur gleichen absoluten Mengenänderung wie eine Preisänderung von €5 pro kg auf €6 pro kg. Die relativen Änderungen zeigen ein vollständig unterschiedliches Verhalten:

a) *Für die relativen Änderungen der Preise gilt: Eine Preiserhöhung von €5 pro kg auf €6 pro kg entspricht einer relativen Preissteigerung von* 20%. *Demgegenüber besitzt die Änderung des Preises von €1000 pro kg auf €1001 pro kg eine relative Änderung von* $0,1\%$. *Gleiche absolute Preissteigerungen um einen Euro führen je nach Ausgangswert auf eine unterschiedliche relative Preisänderungen.*

b) *Für die relativen Änderungen der nachgefragten Mengen gilt: Sinkt die Nachfrage von 3990 kg auf 3988 kg, entspricht dies einer relativen Änderung von ca.* $-0,05\%$. *Eine Abnahme der Nachfrage von 2000 kg auf 1998 kg stimmt mit einer relativen Änderung von* $-0,1\%$ *überein. Ein Nachfragerückgang um zwei kg führt je nach Ausgangswert auf eine unterschiedliche relative Änderung der nachgefragten Menge.*

Das obige Beispiel zeigt, dass gleiche absolute Änderungen von Mengen und Preisen verschiedene relative Änderungen zur Folge haben. In den Wirtschaftswissenschaften wird die relative Änderung einer Größe mittels einer Funktion, der so genannten Bogen-Elastizität, bestimmt (vgl. LUDERER und WÜRKER 2003, S. 308; TIETZE 2009, S. 1180).

Definition 16 (Bogen-Elastizität)
Gegeben sei die Funktion $f(x)$ (mit $x \neq 0, f(x) \neq 0$). Ändert sich x um Δx und f dementsprechend um $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ so heißt das Verhältnis $\varepsilon_f(x)$ der relativen Änderungen Bogen-Elastizität von f bzgl. x. Es gilt:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}. \tag{2.15}$$

Das Ergebnis des Quotienten der relativen Änderungen ist dimensionslos. Allgemein gibt der Zahlenwert aus Gleichung (2.15) an, um wie viel Prozent sich die abhängige Variable f durchschnittlich ändert, wenn die unabhängige Variable ausgehend vom Wert x um ein Prozent steigt. Für umfangreichere Berechnungen ist die Bestimmung der relativen Änderung über die Bogen-Elastizität sehr umständlich. Eine Alternative stellt der Grenzübergang für $\Delta x \to 0$ dar. Es gilt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{f} \cdot \frac{x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f} \overset{(2.1)}{=} f' \cdot \frac{x}{f}. \quad (2.16)$$

Am Ende steht in Gleichung (2.16) der in den Wirtschaftswissenschaften gebräuchliche Term zur näherungsweisen Berechnung der Bogen-Elastizität.

Definition 17 (Punkt-Elastizität)
Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion mit $f(x) \neq 0$. Dann heißt

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x \quad (2.17)$$

Punkt-Elastizität von f bzgl. x.

Die Punkt-Elastizität $\varepsilon_f(x)$ stellt eine Funktion dar und heißt auch **Elastizitätsfunktion** (vgl. DIETZ 2012, S. 300) von f. Zur Berechnung des Elastizitätswertes einer Funktion ist für die Variable eine Stelle einzusetzen. Der Zahlenwert der Punkt-Elastizität gibt eine momentane relative Änderung des Funktionswertes an. Da jedoch eine solche Betrachtungsweise ökonomisch nicht sinnvoll ist, wird er als Näherung betrachtet. Das Ergebnis aus Gleichung (2.17) gibt an, um wie viel Prozent sich die abhängige Variable f näherungsweise ändert, wenn sich die unabhängige Variable x bezogen auf den Ausgangswert um 1% erhöht (vgl. DIETZ 2012, S. 302).

Beispiel 39
Gegeben sei die Nachfragefunktion $x(p) = -2p + 4000$. Der Preis $p_0 = 1500$ wird um 2%, also um 30 $\frac{GE}{ME}$ erhöht. Für die Bogen-Elastizität gilt:

$$\varepsilon_x(1500) = \frac{\frac{-60}{1000}}{\frac{30}{1500}} = -3.$$

Das bedeutet: Steigt der Preis $p_0 = 1500$ um 2%, dann sinkt die nachgefragte Menge um durchschnittlich 3%. Die Punkt-Elastizität bestätigt das Ergebnis:

$$\varepsilon_x(1500) = \frac{x'(1500)}{x(1500)} \cdot 1500 = -3.$$

Steigt der Preis $p_0 = 1500$ um 1%, nimmt die Nachfrage um ca. 3% ab.

Im Folgenden arbeiten wir ausschließlich mit der Punkt-Elastizität. Dabei sei die Näherung nicht weiter erwähnt, sondern stets impliziert. Neben der „Elastizität von f bzgl. x“ wird im ökonomischen Kontext der Begriff der „x-Elastizität von f“ benutzt, wobei hier die unabhängige Variable zuerst genannt wird. Mit dem Zahlenwert der Elastizität[23] lässt sich eine Aussage über die Stärke einer Funktionswertänderung treffen. Für den Vergleich der Änderung von f zu einer 1%-igen Änderung der unabhängigen Variable haben sich in den Wirtschaftswissenschaften zugehörige Begriffe gebildet (vgl. TIETZE 2010, S. 308; WILDMANN 2007, S. 132). Wir geben diese in Tabelle 2.1 für eine Funktion f an. Für eine vereinfachte Schreibweise sei eine Steigerung der unabhängigen Variable x um 1% impliziert.

Zahlenwert	**Reaktion von f**	**Begriff**
$-1 < \varepsilon_f(x) < 1$	vergleichsweise geringere relative Änderung	f ist **unelastisch** bzgl. x
speziell: $\varepsilon_f(x) = 0$	keine Änderung	f ist **vollkommen unelastisch** bzgl. x
$\varepsilon_f(x) > 1$ oder $\varepsilon_f(x) < -1$	vergleichsweise starke relative Änderung	f ist **elastisch** bzgl. x
speziell: $\varepsilon_f(x) \to \pm\infty$	unendlich große Änderung	f ist **vollkomen elastisch** bzgl. x
$\varepsilon_f(x) = \pm 1$	betragsmäßig gleiche relative Änderung	f ist **proportional elastisch** bzgl. x

Tabelle 2.1: Ökonomische Begriffsbildung bei verschiedenen Werten der Elastizität

Im Falle einer Nachfragefunktion gibt die Elastizität eine Rückmeldung über das Verhalten der Nachfrager auf eine Preiserhöhung an. Für eine vollkommen unelastische Nachfrage findet selbst bei einer 1%-igen Erhöhung des Preises keine Reaktion der Nachfrager statt. Dies trifft z. B. auf lebensnotwendige Arzneimittel zu. Eine vollkommen elastische Nachfrage liegt vor, wenn eine 1%-ige Erhöhung des Preises zu einem unendlichen großen Rückgang der Nachfrage führt. Die unterschiedliche Reaktion der Nachfrager auf eine Preiserhöhung wird mit dem Begriff der **Reagibilität** (vgl. BLEICH 2012) bezeichnet. Betrachten wir dazu Beispiel 40.

[23]Wenn in der Literatur von Elastizität die Rede ist, dann ist üblicherweise die Punkt-Elastizität gemeint. Dem schließen wir uns im Folgenden an.

Beispiel 40
Gegeben sei die Nachfragefunktion $x(p) = -0,5p + 100$. *Für die Elastizitätsfunktion gilt:*

$$\varepsilon_x(p) = \frac{-0,5}{-0,5p + 100} \cdot p.$$

Tabelle 2.2 zeigt zu verschiedenen Preisen die Elastizitätswerte auf:

p_0	0	75	100	120	200
$\varepsilon_x(p_0)$	0	$-0,6$	-1	$-1,5$	$\to -\infty$

Tabelle 2.2: Preis-Elastizität der Nachfrage für verschiedene Preise

Wir erkennen, dass je nach Ausgangswert 1%-ige Preiserhöhungen unterschiedliche Auswirkungen auf die relative Änderung der Nachfrage besitzen. So liegt für Preise kleiner als 100 $\frac{GE}{ME}$ *eine unelastische Nachfrage vor, d. h. für diese Preise führt eine 1%-ige Steigerung des Preises auf einen vergleichsweise geringeren relativen Nachfragerückgang. Für Preise über 100* $\frac{GE}{ME}$ *ist die Nachfrage elastisch, d. h. in diesem Abschnitt führt eine 1%-ige Steigerung des Preises auf einen vergleichsweise stärkeren relativen Nachfragerückgang. Abbildung 2.9 verdeutlicht die unterschiedlichen Bereiche der Preis-Elastizität der Nachfrage.*

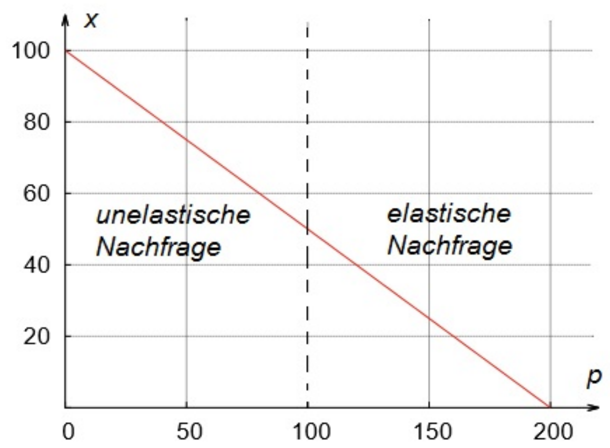


Abbildung 2.9: Elastische und unelastische Nachfrage

Für ein Unternehmen ist es wichtig die Auswirkungen von Preisänderungen auf die Käufer zu kennen: Geht die Nachfrage bei einer Preiserhöhung vergleichsweise stark oder schwach zurück? Welche Folgen besitzt dies für den Erlös? Im November 2011 fand sich bei HANDELSBLATT-ONLINE (2011) unter dem Titel „Campbell verbrennt sich an Preiserhöhung“ folgende Meldung:

> „Der Suppenhersteller, der in Deutschland mit Erasco und Heisse Tasse in den Supermärkten vertreten ist, konnte seine US-Kunden nicht von seinen höheren Preisen überzeugen. Zu viele Dosen blieben in den Regalen stehen. [...] US-Kunden haben dem weltgrößten Suppenhersteller Campbell nach Preisanhebungen die kalte Schulter gezeigt. Der Umsatz in der US-Suppensparte ging im ersten Geschäftsquartal um vier Prozent zurück[...]."

Die Preiserhöhung von Campbell hatte einen so starken Nachfragerückgang zur Folge, dass der Erlös spürbar sank. Kunden können bei zu hohen Preissteigerungen zu anderen Marken oder ähnlichen Produkten wechseln. Doch wie lässt sich aus dem Wissen über die Preis-Elastizität der Nachfrage eine Aussage über den Erlös bestimmen? Es gilt folgender Zusammenhang:

Satz 10
Gegeben sei eine streng monoton fallende Nachfragefunktion:

a) Liegt für einen Preis eine unelastische Nachfrage vor ($\varepsilon_x(p) > -1$), so steigt der Erlös bei einer (1%-igen) Preiserhöhung.

b) Liegt für einen Preis eine elastische Nachfrage vor ($\varepsilon_x(p) < -1$), so sinkt der Erlös bei einer (1%-igen) Preiserhöhung.

Bevor wir uns dem eigentlichen Beweis aus Satz 10 widmen, müssen wir einige Vorüberlegungen anstellen. Dazu gehört der folgende Satz:

Satz 11
Zwischen der Elastizität einer Funktion $f(x)$ und der Elastizität der zugehörigen Durchschnittsfunktion $\overline{f}(x)$ gilt:

$$\varepsilon_f(x) = \varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1. \tag{2.18}$$

Beweis. Für den Beweis von Satz 11 greifen wir auf die Durchschnittsfunktion aus Definition 14 zurück. Für diese gilt mit $x \neq 0$ und $f(x) \neq 0$:

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = \overline{f}(x) \cdot x. \tag{2.19}$$

Über die Produktregel erhalten wir aus Gleichung (2.19):

$$f'(x) = \left(\overline{f}(x) \cdot x\right)' = \overline{f}'(x) \cdot x + \overline{f}(x) \cdot 1 \Leftrightarrow f'(x) = \overline{f}(x) \cdot \left(\frac{\overline{f}'(x)}{\overline{f}(x)} \cdot x + 1\right).$$

Da es sich beim ersten Summanden in der Klammer um die x-Elastizität von $\overline{f}$ handelt, erhalten wir einen interessanten Zusammenhang zwischen Grenz-, Durchschnittsfunktion und Elastizität der Durchschnittsfunktion:

$$f'(x) = \overline{f}(x) \cdot (\varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\overline{f}(x)} = \varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1. \tag{2.20}$$

Aus der Definition der Elastizitätsfunktion (vgl. Gl. (2.17)) ergibt sich:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} \overset{(2.13)}{=} \frac{f'(x)}{\overline{f}(x)}. \tag{2.21}$$

Mit den Gleichungen (2.20) und (2.21) folgt die zu beweisende Gleichung (2.18):

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{\overline{f}(x)} = \varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1.$$

□

Wie zuvor erläutert, ist eine Preis-Absatz-Funktion die Durchschnittsfunktion einer Erlösfunktion. Für $p \neq 0$ gilt:

$$E(p) = x(p) \cdot p \Leftrightarrow x(p) = \frac{E(p)}{p}.$$

Mit Gleichung (2.18) folgt der Zusammenhang der Elastizitäten von Erlös- und Preis-Absatz-Funktion:

$$\varepsilon_E(p) = \varepsilon_x(p) + 1. \tag{2.22}$$

Dies können wir benutzen, um die in Satz 10 formulierten Zusammenhänge zum Verhalten des Erlöses in Bezug auf die Preis-Elastizität der Nachfrage nachzuweisen. Wir beschränken uns für den Beweis auf den ersten Teil, der zweite wird analog geführt.

Beweis.

$$\varepsilon_x(p) > -1 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) + 1 > 0 \overset{(2.22)}{\Leftrightarrow} \varepsilon_E(p) > 0.$$

□

Dabei spielt der Zahlenwert der Preis-Elastizität des Erlöses eine untergeordnete Rolle. Wichtig ist nur, dass im unelastischen Bereich der Nachfrage bei einer 1%-igen Erhöhung des Preises der Erlös um eine positive Prozentzahl steigt, in Analogie dazu im elastischen Bereich fällt. Nicht nur für Nachfrage- und Erlösfunktionen lassen sich Zusammenhänge im Umfeld der Elastizität finden. Auch Kostenfunktionen weisen interessante Verbindungen zur Elastizität auf. Es gilt:

Satz 12
Gegeben sei eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Es gelten die folgenden beiden Zusammenhänge:

*a) Im Minimum der gesamten Stückkosten (**Betriebsoptimum**) sind die Gesamtkosten proportional elastisch bzgl. der abgesetzten Menge.*

*b) Im Minimum der variablen Stückkosten (**Betriebsminimum**) sind die variablen Stückkosten proportional elastisch bzgl. der abgesetzten Menge.*

Beweis.
Für die Elastizitätsfunktion der Kosten gilt mit $K(x) \neq 0$ und $x \neq 0$:

$$\varepsilon_K(x) \overset{(2.17)}{=} \frac{K'(x)}{K(x)} \cdot x = \frac{K'(x)}{\frac{K(x)}{x}} \overset{(2.13)}{=} \frac{K'(x)}{k(x)}.$$

Im Betriebsoptimum sind nach Satz 8 Grenzkosten und Stückkosten an der Stelle x_{opt} identisch:

$$K'(x_{opt}) = k(x_{opt}).$$

Damit erhalten wir die geforderte Aussage:

$$\varepsilon_K(x_{opt}) = 1.$$

Für die Elastizitätsfunktion der variablen Kosten gilt mit $K_v(x) \neq 0$ und $x \neq 0$:

$$\varepsilon_{K_v}(x) \overset{(2.17)}{=} \frac{K_v'(x)}{K_v(x)} \cdot x = \frac{K_v'(x)}{\frac{K_v(x)}{x}} \overset{(2.13)}{=} \frac{K_v'(x)}{k_v(x)}.$$

Die ersten Ableitungen von $K(x)$ und $K_v(x)$ stimmen überein[24] und nach Satz 8 sind im Betriebsminimum Grenzkosten als auch variable Stückkosten an der Stelle x_{min} identisch:

$$K'(x_{min}) = k_v(x_{min}).$$

Damit folgt für das Betriebsminimum die Richtigkeit der Annahme:

$$\varepsilon_{K_v}(x_{min}) = 1.$$

□

[24] Es gilt: $K_v'(x) = K'(x)$, da die Fixkosten beim Ableiten wegfallen.

Die im Rahmen etwa des Beweises von Satz 12 auftretenden Elastizitätsfunktionen werden in der Ökonomie hauptsächlich zur Bestimmung eines Zahlenwertes herangezogen (vgl. LUDERER und WÜRKER 2003; TIETZE 2010). Eine eigenständige Betrachtung ist unüblich, daher ist dazu in den großen Standardwerken der Wirtschaftsmathematik und der Betriebswirtschaftslehre nichts zu finden. Wir zeigen auf, dass es sich durchaus lohnt diese Funktionen zu untersuchen. Es gilt folgender Zusammenhang:

Satz 13
Es sei die Funktion f im Intervall $[a,b]$ definiert und differenzierbar. Für ein $x_0 \in [a,b]$ ist weiterhin $(\varepsilon_f(x_0))' = 0$. Dann gilt:

$$\varepsilon_f(x_0) = \varepsilon_{f'}(x_0) + 1. \tag{2.23}$$

Beweis. Wir setzen voraus, dass die Elastizitätsfunktion $\varepsilon_f(x)$ differenzierbar ist. Mittels Ableitung erhalten wir für $x \neq 0, f(x) \neq 0$:

$$(\varepsilon_f(x) = 0)' \overset{(2.17)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}\right)' = 0 \overset{(2.13)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{f'(x)}{\overline{f}(x)}\right)' = 0$$

Aus der Quotientenregel folgt:

$$\left(\frac{f'(x)}{\overline{f}(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot \overline{f}(x) - f'(x) \cdot \overline{f}'(x)}{\left(\overline{f}(x)\right)^2} = 0. \tag{2.24}$$

Mit einigen elementaren Umformungen führt die Gleichung (2.24) zu:

$$f''(x) \cdot \overline{f}(x) = f'(x) \cdot \overline{f}'(x). \tag{2.25}$$

Für den Term $\overline{f}'(x)$ aus Gleichung (2.25) gilt nach Definition einer Durchschnittsfunktion:

$$\overline{f}'(x) \overset{(2.13)}{=} \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}. \tag{2.26}$$

Wir setzen Gleichung (2.26) in Gleichung (2.25) ein und verwenden die Definition der Durchschnittsfunktion:

$$f''(x) \cdot \frac{f(x)}{x} = f'(x) \cdot \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} - \frac{f(x)}{f(x)}. \tag{2.27}$$

Nach Gleichung (2.17) handelt es sich in Gleichung (2.27) auf der linken Seite um die Elastizität der Grenzfunktion f' und auf der rechten Seite um die Elastizität der Funktion f. Daraus folgt schließlich:

$$\varepsilon_{f'}(x) = \varepsilon_f(x) - 1 \Leftrightarrow \varepsilon_{f'}(x) + 1 = \varepsilon_f(x).$$

Sei x_0 die Stelle, an der die Ableitung der Elastizitätsfunktion verschwindet. Dann muss gelten:

$$(\varepsilon_f(x_0))' = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{f'}(x_0) + 1 = \varepsilon_f(x_0).$$

□

Satz 13 liefert einen Zusammenhang zwischen der Elastizität einer Funktion und der Elastizität der zugehörigen Grenzfunktion. In Verbindung mit Satz 11 erhalten wir:

Satz 14
Es sei die Funktion f im Intervall $[a, b]$ definiert und differenzierbar. Für ein $x_0 \in [a, b]$ ist $(\varepsilon_f(x_0))' = 0$. Dann gilt:

$$\varepsilon_{f'}(x_0) = \varepsilon_{\overline{f}}(x_0).$$

Beweis. Für ein x_0 mit $(\varepsilon_f(x_0))' = 0$ erhalten wir nach Satz 13:

$$\varepsilon_f(x_0) = \varepsilon_{f'}(x_0) + 1.$$

Aus Satz 11 ist folgender Zusammenhang bekannt:

$$\varepsilon_f(x) = \varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1.$$

Aus den beiden vorherigen Gleichungen folgt für ein x_0 mit $(\varepsilon_f(x_0))' = 0$:

$$\varepsilon_{f'}(x_0) = \varepsilon_{\overline{f}}(x_0).$$

□

Wir beziehen die erhaltenen Ergebnisse zur Veranschaulichung auf eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Mit $(\varepsilon_K(x_0))' = 0$ folgt aus den Sätzen 13 und 14:

a) $\varepsilon_K(x_0) = \varepsilon_{K'}(x_0) + 1$ und

b) $\varepsilon_{K'}(x_0) = \varepsilon_k(x_0)$.

In Worten: Verschwindet die Ableitung der Elastizitätsfunktion einer Kostenfunktion an der Stelle x_0, dann sind die Elastizitäten der Grenzkosten und der Stückkosten an dieser Stelle identisch und gleichzeitig um eins kleiner als die Elastizität der Kosten. Neben Aussagen über die Elastizität der Kosten und der Elastizität der Grenzkosten findet sich bei der Analyse der Elastizitätsfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion ein weiterer Zusammenhang.

Satz 15
Im unelastischen Bereich der Kosten sinken die Stückkosten.

Beweis. Da es sich bei den Stückkosten um die Durchschnittsfunktion der Kosten handelt, gilt[25]:

$$\varepsilon_K(x) < 1 \Leftrightarrow \varepsilon_K(x) - 1 < 0 \overset{(2.18)}{\Leftrightarrow} \varepsilon_k(x) < 0.$$

□

Beispiel 41 veranschaulicht die Zusammenhänge aus den Sätzen 14 und 15 anhand einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

Beispiel 41
Gegeben sei folgende ertragsgesetzliche Kostenfunktion für $x \geq 0$:

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100.$$

Die Elastizitätsfunktion der Kosten lautet:

$$\varepsilon_K(x) = \frac{3x^2 - 24x + 60}{x^3 - 12x^2 + 60x + 100} \cdot x.$$

Aus der Grenzkostenfunktion $K'(x) = 3x^2 - 24x + 60$ ergibt sich die Elastizitätsfunktion der Grenzkosten zu:

$$\varepsilon_{K'}(x) = \frac{6x - 24}{3x^2 - 24x + 60} \cdot x.$$

Wir betrachten die Stellen mit waagrechter Tangente von $\varepsilon_K(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 30$: Die Elastizitätsfunktion der Gesamtkosten besitzt im unelastischen Bereich zwei lokale Extrema bei x_1, x_2 und im elastischen Bereich ein lokales Extremum bei x_3, das gleichzeitig auf I globales Extremum ist. Wir erhalten (gerundet auf zwei Nachkommastellen):

- $x_1 \approx 1,48$ mit $\varepsilon_K(1,48) \approx 0,28$,
- $x_2 \approx 3,53$ mit $\varepsilon_K(3,53) \approx 0,22$,
- $x_3 \approx 19,80$ mit $\varepsilon_K(19,80) \approx 3,47$.

[25] Analog steigen im elastischen Bereich der Kosten die Stückkosten. Zum Beweis dieser Aussage ist lediglich das Ungleichheitszeichen zu drehen.

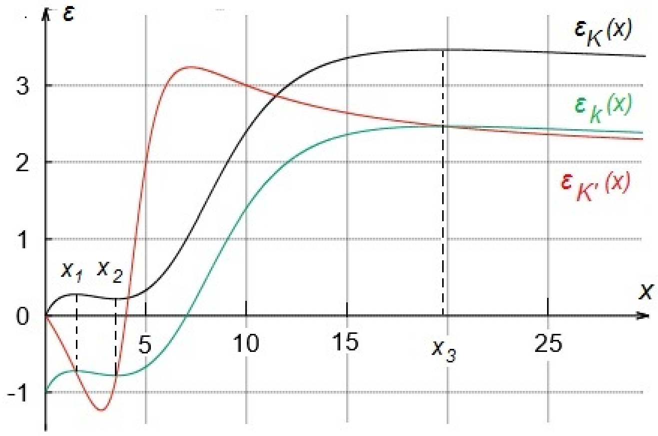


Abbildung 2.10: Graphen der Elastizitätsfunktionen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion sowie ihrer Grenz- und Stückkostenfunktion

Für den Zahlenwert von $\varepsilon_{K'}(x)$ an diesen Stellen gilt: $\varepsilon_{K'}(1,48) \approx -0,72$, $\varepsilon_{K'}(3,53) \approx -0,78$ und $\varepsilon_{K'}(19,80) \approx 2,47$.
Für die Stückkostenfunktion $k(x) = x^2 - 12x + 60 + \frac{100}{x}$ mit $x > 0$ betrachten wir zusätzlich deren Elastizitätsfunktion:

$$\varepsilon_k(x) = \frac{2x - 12 - \frac{100}{x^2}}{x^2 - 12x + 60 + \frac{100}{x}} \cdot x.$$

Die Zahlenwerte von $\varepsilon_k(x)$ sind an den Stellen x_1, x_2 und x_3 mit denen von $\varepsilon_{K'}(x)$ identisch. Es gilt: $\varepsilon_k(1,48) \approx -0,72$, $\varepsilon_k(3,53) \approx -0,78$ und $\varepsilon_k(19,80) \approx 2,47$. Für die Graphen der entsprechenden Elastizitätsfunktionen bedeutet dies: An den lokalen Extremstellen von ε_K liegt der Graph der Funktion $\varepsilon_{K'}$ genau um den Wert 1 nach unten versetzt und die Graphen von $\varepsilon_{K'}$ und ε_k schneiden sich (vgl. Abb. 2.10). Des Weiteren liegt im unelastischen Bereich der Kosten der Graph der Elastizität der Stückkosten unterhalb der Abszisse. Für die Elastizität der variablen Kosten ergeben sich analoge Sätze[26].

[26] Die in diesem Abschnitt vorgestellten Sätze zeigen im Umfeld der Elastizität mathematische Zusammenhänge, die nach Einschätzung mehrerer Professoren verschiedenster Universitäten unveröffentlicht blieben (vgl. Anhang B). Ein Grund für fehlende Publikationen zu dieser Thematik könnte darin liegen, dass die erhaltenen Ergebnisse ökonomisch nur schwer zu interpretieren sind. Während die Wirtschaftswissenschaften die Elastizität in erster Linie zur Berechnung relativer Funktionsänderungen verwenden, ist eine eigenständige Analyse von Elastizitätsfunktionen unüblich.

3 Funktionen mit zwei Variablen

Ein Unternehmen, das lediglich ein Gut verkauft, geht das Risiko ein, dass bei sinkender Nachfrage der Erlös einbricht. Um dies zu vermeiden, bietet es in der Regel diverse Güter zu verschiedenen Preisen an. Im Folgenden analysieren wir als Einstieg in die Analysis mehrerer Veränderlicher den Fall zweier Produkte (Abschn. 3.1). Darauf aufbauend schließen sich die Grundlagen der Differenzialrechnung im Raum an (Abschn. 3.2), bevor wir auf die Bestimmung von Extremstellen für Funktionen mit zwei Variablen (Abschn. 3.3) eingehen. Abschließend zeigen wir an ausgewählten ökonomischen Funktionen mit zwei Variablen auf, wie sich die Differenzialrechnung in diesem Umfeld umsetzen lässt (Abschn. 3.4).

Die mathematischen Inhalte beziehen sich auf DANCKWERTS und VOGEL (2006) sowie JÄGER und SCHUPP (2013). Die ökonomischen Inhalte orientieren sich an FRIEDL et al. (2013), MATTHÄUS und MATTHÄUS (2012) als auch TIETZE (2010).

3.1 Ökonomische Funktionen mit zwei Variablen

In Abschnitt 1.2 haben wir dargelegt, wie sich Nachfrager auf einem Markt bei diversen Preisen eines Gutes verhalten. Betrachten wir ein Beispiel zur Nachfrage nach zwei Produkten.

Beispiel 42
Auf einem Wochenmarkt erwerben die Käufer Äpfel und Birnen. Sei p der Preis eines Kilogramms an Äpfel und q derjenige eines Kilogramms an Birnen. Tabelle 3.1 zeigt die verkauften Äpfel, Tabelle 3.2 die abgesetzte Anzahl von Birnen zu diversen Preisen.

Preis für 1 kg Äpfel \ *Preis für 1 kg Birnen*	€2,00	€2,50	€3,00
€1,00	78	86	101
€1,50	68	72	85
€2,00	56	67	71
€2,50	35	44	53

Tabelle 3.1: Absatzzahlen von Äpfeln

Preis für 1 kg Äpfel \ *Preis für 1 kg Birnen*	€2,00	€2,50	€3,00
€1,00	61	48	41
€1,50	63	54	44
€2,00	66	55	46
€2,50	67	57	45

Tabelle 3.2: Absatzzahlen von Birnen

In beiden Tabellen ist zu erkennen, dass das Gesetz der Nachfrage (vgl. Abschn. 1.2) nach wie vor Gültigkeit besitzt: Tabelle 3.1 zeigt, dass mit steigendem Preis für ein Kilogramm Äpfel dessen Absatz sinkt (vertikal). Tabelle 3.2 bestätigt, dass auch für einen höheren Preis von Birnen deren Nachfrage abnimmt (horizontal). Jedoch beeinflussen sich die Preise von Äpfeln und Birnen gegenseitig. In Tabelle 3.2 etwa ist vertikal zu beobachten, dass unter Konstanthaltung des Preises für Birnen ein steigender Preis für Äpfel zu einem höheren Absatz von Birnen führt.

Beispiel 42 zeigt, dass sich zwei Produkte im Verkauf beeinflussen können. Steigt z. B. der Preis für Äpfel, sinkt die Nachfrage nach diesen. Im Gegenzug können die Käufer mehr Birnen erwerben, die die teureren Äpfel ersetzen. Führt eine Preissteigerung eines Gutes auf eine Erhöhung der Nachfrage eines weiteren Gutes, handelt es sich um **Substitutionsgüter** (vgl. PINDYCK und RUBINFELD 2009, S. 54). Beeinflussen sich die Absatzzahlen gegenseitig, ist zur Modellierung statt einer einfachen linearen Regression eine multiple Regression heranzuziehen.

Beispiel 43
Sei x die abgesetzte Menge an Äpfeln und y diejenige an Birnen. Mithilfe von z. B. Excel ergibt sich per multipler Regression für die Nachfrage aus Beispiel 42 (gerundet auf zwei Nachkommastellen):

$$x(p,q) = -28{,}67p + 18{,}25q + 72{,}54; \qquad y(p,q) = 4{,}2p - 20{,}25q + 97{,}19.$$

Die beiden Modelle der Nachfrage liefern ordentliche Schätzwerte. So werden in Beispiel 42 z. B. bei einem Preis in Höhe von €1 pro Kilogramm für Äpfel und €2 pro Kilogramm Birnen insgesamt 78 Äpfel und 61 Birnen abgesetzt. Durch das Modell erhalten wir dafür ordentliche Näherungen:

$$x(1,2) = 80{,}37; \qquad y(1,2) = 60{,}89.$$

Nach Definition 4 lässt sich aus einer Nachfragefunktion mittels Umkehrung die Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten ermitteln. Doch wie erfolgt das Vorgehen für zwei sich beeinflussende Güter? In diesem Fall sind die Nachfragefunktionen miteinander zu verrechnen.

Beispiel 44
Ein Monopolist verkaufe zwei Güter A und B. Sei p der Preis pro Stück und x die abgesetzte Menge von Gut A sowie q der Preis pro Stück und y die abgesetzte Menge von Gut B. Die Funktionen, die die Nachfrage der beiden Güter modellieren, lauten:

$$x(p,q) = 185 - p + \frac{1}{2}q; \qquad y(p,q) = 30 + p - q.$$

Wir lösen die Funktionsgleichung von y nach q auf:

$$y = 30 + p - q \Leftrightarrow q = 30 + p - y.$$

Einsetzen von q in die Funktionsgleichung von x liefert:

$$x = 185 - p + \frac{1}{2} \cdot (30 + p - y) \Leftrightarrow x = 200 - \frac{p}{2} - \frac{y}{2} \Leftrightarrow p = -2x - y + 400.$$

In Analogie dazu formen wir den Funktionsterm von x nach p um und setzen p in die Funktionsgleichung von y ein. Die Preis-Absatz-Funktionen der beiden Güter lauten folglich:

$$p(x,y) = -2x - y + 400; \qquad q(x,y) = -2x - 2y + 430.$$

Ein Monopolist orientiert sich beim Absatz seiner Güter an Preis-Absatz-Funktionen. Ein Polypolist sieht sich konstanten Marktpreisen gegenüber. Beide interessieren sich für den erzielten Erlös, der sich nach Definition 6 beim Verkauf eines Gutes als Produkt von Preis und Menge berechnet. Setzt ein Unternehmen zwei Güter ab, lässt sich der Erlös in Anlehnung an Gleichung (1.1) in Abhängigkeit von den Mengen zweier Güter als Funktion angeben.

Definition 18 (Erlösfunktion in Abhängigkeit von zwei Variablen)
Ein Unternehmen verkaufe ein Produkt zum Preis p und setze dabei die Menge x ab. Ein weiteres Produkt werde zu einem Preis von q mit der Menge y veräußert. Die Funktion $E : \left(\mathbb{R}_0^+\right)^2 \mapsto \mathbb{R}_0^+$ mit

$$E(x,y) = x \cdot p + y \cdot q \tag{3.1}$$

heißt Erlösfunktion in Abhängigkeit der Variablen x und y.

Beispiel 45
Ein polypolistisches Unternehmen verkaufe zwei Produkte. Der Preis für Produkt A liegt bei 3 $\frac{GE}{ME}$ und der Preis von Produkt B ist 5 $\frac{GE}{ME}$. Sei x die verkaufte Menge von Produkt A und y diejenige von Produkt B. Für die Erlösfunktion gilt:

$$E(x,y) \overset{(3.1)}{=} 3x + 5y.$$

Handelt es sich beim Verkäufer um einen Monopolisten, dessen Preise seiner Güter sich beeinflussen, sieht er sich beim Verkauf Preis-Absatz-Funktionen gegenüber (vgl. Bsp. 42). Die Gleichung (3.1) erweitert sich in diesem Fall zu:

$$E(x,y) = x \cdot p(x,y) + y \cdot q(x,y). \tag{3.2}$$

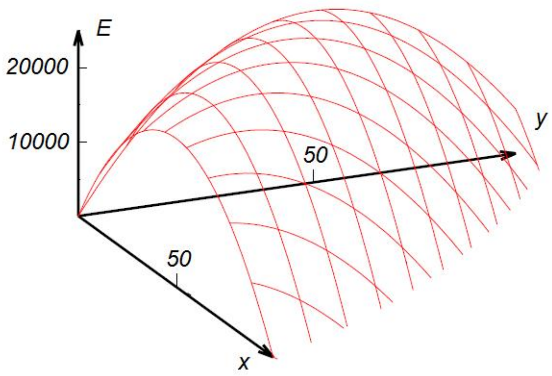


Abbildung 3.1: Graph einer Erlösfunktion in Abhängigkeit zweier Variablen

Beispiel 46
Aus den in Beispiel 44 aufgeführten Preis-Absatz-Funktionen folgt mit Gleichung (3.2) die Erlösfunktion zu:

$$\begin{aligned} E(x,y) &= x \cdot (-2x - y + 400) + y \cdot (-2x - 2y + 430) \\ &= -2x^2 - 3xy - 2y^2 + 400x + 430y. \end{aligned}$$

Eine Funktion zweier Variablen lässt sich in einem dreidimensionalen Koordinatensystem veranschaulichen. Der Graph der Erlösfunktion aus Beispiel 46 ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Dabei wird jedem Wertepaar[27] (x, y) ein eindeutiger Funktionswert E zugeordnet.

Neben dem Erlös sind auch die Kosten von Interesse, die bei der Produktion und dem Verkauf von zwei Gütern entstehen. Liegen dem Kostenplaner darüber ausreichend Daten vor, kann er sich zur Ermittlung einer Kostenfunktion für eine Regression entscheiden (vgl. Abschn. 1.3.3). Jedoch ist das Modell einer einfachen linearen Regression nicht immer sinnvoll: Fallen etwa bei der Saat, Pflege und Ernte von Obst verschiedene Bezugsgrößen für Kosten an, sind diese nur schwer zu einer gemeinsamen Kosteneinflussgröße kombinierbar. „Vielmehr ist in diesem Fall einer heterogenen Kostenverursachung“ (FRIEDL et al. 2013, S. 208 f.) auf eine Kostenfunktion mit zwei oder mehreren Variablen zurückzugreifen. In Anlehnung an die Zusammenhänge für eine Kostenfunktion mit einer Variablen aus Abschnitt 1.3.3 setzen sich Kosten aus einem variablen und einem fixen Anteil zusammen. Aus Definition 7 folgt für eine Kostenfunktion mit zwei Variablen:

[27] Eine analoge Schreibweise für x, y sind x_1, x_2 für die unabhängigen Variablen.

Definition 19 (Kostenfunktion in Abhängigkeit zweier Variablen)
Seien x und y die produzierten Mengen, die ein Unternehmen verkauft. Die Funktion $K : \left(\mathbb{R}_0^+\right)^2 \mapsto \mathbb{R}_0^+$ *mit*

$$K(x, y) = K_v(x, y) + K_f$$

heißt Kostenfunktion in Abhängigkeit der Variablen x und y.

Beispiel 47
Die variablen Kosten zur Herstellung von Produkt A betragen 80 $\frac{GE}{ME}$ und 120 $\frac{GE}{ME}$ für Produkt B. Weiterhin fallen fixe Kosten in Höhe von 300 GE an. Die lineare Kostenfunktion bei der Herstellung von x ME von A und y ME von B lautet:

$$K(x, y) = 80x + 120y + 300.$$

Zur Beschreibung ökonomischer Zusammenhänge sind lineare Kostenfunktionen zunächst ausreichend. Die geforderten Eigenschaften der Stetigkeit und der Monotonie können dadurch auf Kostenfunktionen mit einer Variablen zurückgeführt werden. Doch wie berechnet sich eine Gewinnfunktion mit zwei Variablen? Aus Gleichung (1.4) ist bekannt, dass die Differenz aus Erlös und Kosten auf den Gewinn führt. Dieses Vorgehen lässt sich auf Funktionen mit zwei Variablen übertragen.

Definition 20 (Gewinnfunktion in Abhängigkeit zweier Variablen)
Seien x und y die Mengen zweier Produkte, die ein Unternehmen absetzt. Die Funktion $G : \left(\mathbb{R}_0^+\right)^2 \mapsto \mathbb{R}$ *mit*

$$G(x, y) = E(x, y) - K(x, y) \tag{3.3}$$

heißt Gewinnfunktion in Abhängigkeit der Variablen x und y.

Beispiel 48
Wir greifen die Erlösfunktion aus Beispiel 46 und die Kostenfunktion aus Beispiel 47 auf. Für die Gewinnfunktion gilt:

$$\begin{aligned} G(x, y) &\overset{(3.3)}{=} -2x^2 - 3xy - 2y^2 + 400x + 430y - (80x + 120y + 300) \\ &= -2x^2 - 3xy - 2y^2 + 320x + 310y - 300. \end{aligned}$$

Für z. B. $x_0 = 20$ *und* $y_0 = 30$ *beträgt* $G(20, 30) = 11000$. *Beim Absatz von 20 ME von Gut A und 30 ME von Gut B wird ein Gewinn in Höhe von 11.000 GE erzielt.*

Bei der Ermittlung von Erlös- und Kostenfunktionen ist zu erkennen, dass die ökonomischen Beziehungen aus Abschnitt 1.3 erhalten bleiben. Es stellt sich die Frage nach dem größten Gewinn für eine Gewinnfunktion mit zwei Variablen. In Beispiel 48 liegt dieser bei $x_G = 50$ und $y_G = 40$ und beträgt 13.900 GE. In den folgenden Abschnitten untersuchen wir, in wie fern sich der Ableitungsbegriff von Funktionen mit einer Variablen auf Funktionen mit zwei Variablen übertragen lässt.

3.2 Differenzialrechnung für Funktionen mit zwei Variablen

In diesem Abschnitt erweitern wir den Begriff der Ableitung auf Funktionen mit zwei Variablen. Dazu betrachten wir den Differenzenquotienten aus Gleichung (2.1):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Dieser Ansatz führt nicht zum Erfolg, denn eine Division durch den Vektor Δx sowie der Übergang im Nenner von Δx zu $||\Delta x||$ ist nicht sinnvoll (vgl. DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 79). Die Idee der linearen Approximation (vgl. Abschn. 2.1) ist jedoch für einen Transfer geeignet. Dazu greifen wir die in Gleichung (2.6) eingeführte Fehlerfunktion δ auf. Mit dieser gilt:

Definition 21 (Totale Differenzierbarkeit)
Existieren die Funktionen $\delta_1(x,y)$, $\delta_2(x,y)$ und eine lineare Funktion T, dann heißt eine Funktion f in (a,b) total differenzierbar, wenn gilt:

$$f(x,y) = T(x,y) + \delta_1(x,y) \cdot (x-a) + \delta_2(x,y) \cdot (y-b)$$

mit

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \delta_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \delta_2(x,y) = 0.$$

Zur Herleitung der linearen Funktion T wählen wir ein analoges Vorgehen zu Funktionen mit einer Variablen. Zunächst betrachten wir eine lineare Funktion t, die mit f an der Stelle (a,b) den gleichen Funktionswert besitzt:

$$t(x,y) = f(a,b) + m \cdot (x-a) + n \cdot (y-b). \tag{3.4}$$

Die Differenz von f und t an der Stelle (x,y) führt auf den Approximationsfehler r. Dieser berechnet sich aus Gleichung (3.4) zu:

$$\begin{aligned} r(x,y) &= f(x,y) - t(x,y) \\ &= f(x,y) - f(a,b) - m \cdot (x-a) - n \cdot (y-b). \end{aligned}$$

Der Approximationsfehler r lässt sich nicht wie für Funktionen mit einer Variablen geeignet umformen. Für $x = a$ oder $y = b$ besteht dieser Nachteil nicht. Dies führt uns zu folgender Definition:

Definition 22 (Partielle Funktion)
Die Funktion g mit $g(x) := f(x,b)$ heißt partielle Funktion von f in Richtung x durch b.

Analog lässt sich auch $f(a,y)$ als partielle Funktion von f in Richtung y durch a bezeichnen. Für die lineare Funktion t aus Gleichung (3.4) erhalten wir mit $y = b$ die partielle Funktion t in Richtung x durch b:

$$t(x,b) = f(a,b) + m \cdot (x - a).$$

Daraus folgt für den Approximationsfehler als Differenz von f und t mit $x \neq a$:

$$\begin{aligned} r(x,b) &= f(x,b) - f(a,b) - m \cdot (x-a) \\ &= \left(\frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} - m \right) \cdot (x-a). \end{aligned}$$

Für die Differenz in der ersten Klammer setzen wir:

$$\left(\frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} - m \right) =: \delta_1(x,b).$$

Dies erlaubt eine Deutung des Approximationsfehlers analog zu Gleichung (2.4): Für $(x,y) \to (a,b)$ strebt der Approximationsfehler r für jede lineare Funktion gegen Null. Der relative Fehler $\frac{r(x,b)}{x-a}$ strebt aber nur gegen Null, wenn für $(x,y) \to (a,b)$ auch $\delta_1(x,y) = 0$ ist. Folglich gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} = m.$$

Dies führt uns auf den Begriff der partiellen Ableitung einer Funktion.

Definition 23 (Partielle Ableitung)
Die Funktion f sei an der Stelle (a,b) definiert. Existiert der Grenzwert

$$f_x(a,b) := \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a},$$

dann heißt dieser partielle Ableitung von f nach x an der Stelle (a,b).

Die partielle Ableitung von f nach x lässt sich somit auf die Ableitung einer Funktion mit einer Variablen zurückführen: Wir halten die Variable y

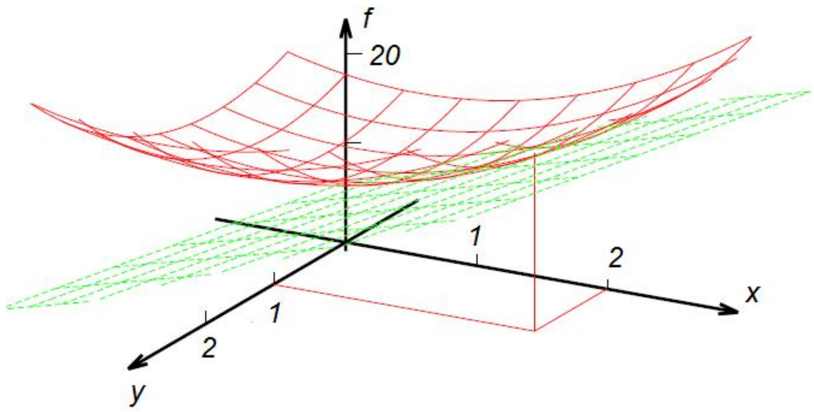


Abbildung 3.2: Tangentialebene an den Graphen einer Funktion mit zwei Variablen

konstant und leiten f nach x ab[28]. Mittels partieller Ableitungen erhalten wir eine lineare Funktion T, die f lokal am Besten approximiert:

$$T(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b) \cdot (x-a) + f_y(a,b) \cdot (y-b).$$

Geometrisch handelt es sich bei T um eine Tangentialebene, die eine vorgegebene Funktion f an der Stelle (a,b) berührt und die Steigung f_x in x-Achsenrichtung bzw. f_y in y-Achsenrichtung besitzt.

Beispiel 49
Gegeben sei die Funktion f mit $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 10$. Die partiellen Ableitungen von f nach x und nach y lauten:

$$f_x(x,y) = 4x; \qquad f_y(x,y) = 4y.$$

Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f z. B. an der Stelle $(a,b) = (2,1)$ lautet:

$$T(x,y) = 20 + 8 \cdot (x-2) + 4 \cdot (y-1).$$

Damit können wir eine Näherung des Funktionswertes z. B. an der Stelle $(3,1)$ angeben. Wir erhalten: $T(3,1) = 28$. Der korrekte Wert über f berechnet sich zu $f(3,1) = 30$. In Abbildung 3.2 ist der Graph der Funktion f und die Tangentialebene T an der Stelle $(2,1)$ zu sehen.

[28]Oft findet man in der Literatur auch die Schreibweise $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$. Wird nach der zweiten Variable y abgeleitet, dann lauten die entsprechenden Notationen für partielle Ableitungen von f nach y an der Stelle (a,b) entweder $f_y(a,b)$ oder $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

3.3 Extremwerte von Funktionen mit zwei Variablen

3.3.1 Notwendiges Kriterium zur Extremwertbestimmung

Die Definition von Extremwerten von Funktionen mit einer Variablen lässt sich auf Funktionen mit zwei Variablen übertragen. Es gilt:

Definition 24 (Lokales Maximum/Minimum)
Eine Funktion f besitzt an der Stelle (a, b) ein lokales Maximum, wenn für alle (x, y) in einer Umgebung von (a, b) gilt: $f(x, y) \leq f(a, b)$. Analog besitzt f an der Stelle (a, b) ein lokales Minimum, wenn für alle (x, y) in einer Umgebung von (a, b) gilt: $f(x, y) \geq f(a, b)$.

Analog heißt $f(a, b)$ **globales Maximum (Minimum)**, wenn auf ganz D_f nur kleinere (größere) Werte von f existieren. Die notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert $f(x_0)$ einer Funktion mit einer Variablen lautet:

$$f'(x_0) = 0.$$

Für lokale Extremwerte von Funktionen mit zwei Variablen sind die partiellen Ableitungen von f an der Stelle (a, b) zu betrachten. Es gilt:

Satz 16
Die Funktion f sei partiell differenzierbar und besitze an der Stelle (a, b) einen lokalen Extremwert, so gelten die notwendigen Bedingungen:

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f_y(a, b) = 0. \tag{3.5}$$

Beweis. Seien $g(x) := f(x, b)$ und $h(y) := f(a, y)$ die partiellen Funktionen von f durch a sowie b. Für ein lokales Extremum von f an der Stelle (a, b) erhalten wir die notwendige Bedingung $g'(a) = h'(b) = 0$. Da $g'(a) = f_x(a, b)$ und $h'(b) = f_y(a, b)$ gilt, ist der Satz bewiesen.

□

Beispiel 50
Wir greifen die Funktion f aus Beispiel 49 auf:

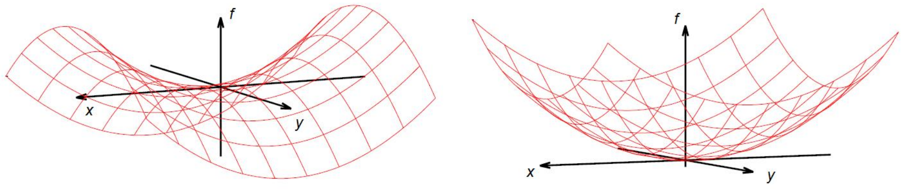
$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 10.$$

Aus der notwendigen Bedingung für einen lokalen Extremwert erhalten wir das lineare Gleichungssystem:

$$f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0$$
$$f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow 4y = 0.$$

Das LGS besitzt die Lösung $(a, b) = (0, 0)$ *mit* $f(0, 0) = 10$. *Es handelt sich um ein globales Minimum, da für* $x, y \to \pm\infty$ *gilt:* $f(x, y) \to +\infty$.

Eine Stelle, die die Gleichungen (3.5) erfüllt, heißt **stationär**. Jedoch ist diese Bedingung für eine lokale Extremstelle nicht hinreichend. Wir betrachten zwei verschiedene Fälle von Graphen von Funktionen mit der stationären Stelle $(0, 0)$: Der Graph in Abbildung 3.3 (a) besitzt einen Sattelpunkt, am Graphen in Abbildung 3.3 (b) ist ein Tiefpunkt zu sehen. Im nächsten Abschnitt beschreiben wir ein hinreichendes Kriterium zur Bestimmung lokaler Extremwerte.



(a) (b)

Abbildung 3.3: Darstellung eines (a) Sattelpunkts und eines (b) lokalen Minimums für Funktionen mit zwei Variablen

3.3.2 Hinreichendes Kriterium zur Extremwertbestimmung

Für ein hinreichendes Kriterium zur Bestimmung von lokalen Extremwerten von Funktionen mit zwei Variablen betrachten wir spezielle quadratische Funktionen der folgenden Form:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \quad (A \neq 0). \tag{3.6}$$

Die partiellen Ableitungen lauten:

$$f_x(x, y) = 2Ax + By; \quad f_y(x, y) = Bx + 2Cy.$$

Wir untersuchen f auf stationäre Stellen:

$$\begin{aligned} I. \qquad & f_x(x, y) = 0 \\ II. \qquad & f_y(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Das LGS besitzt an der Stelle $(0, 0)$ einen stationären Punkt mit $f(0, 0) = 0$, sofern $4AC - B^2 \neq 0$ ist. Für die Funktion f erhalten wir mittels quadratischer Ergänzung:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 \\
&= A \cdot \left(x^2 + \frac{By}{A} \cdot x + \frac{Cy^2}{A} \right) \\
&= A \cdot \left[x^2 + \frac{By}{A} \cdot x + \left(\frac{By}{2A} \right)^2 - \left(\frac{By}{2A} \right)^2 + \frac{Cy^2}{A} \right] \\
&= A \cdot \left[\left(x + \frac{By}{2A} \right)^2 + \frac{Cy^2}{A} - \frac{B^2y^2}{4A^2} \right] \\
&= A \cdot \left[\left(x + \frac{By}{2A} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2} \cdot y^2 \right].
\end{aligned}
$$

Für $4AC - B^2 > 0$ ist der Term in der Klammer positiv. Eine Fallunterscheidung zeigt:

- Für $A < 0$ ist $f(x,y) < 0$. Der stationäre Punkt $P(0,0,0)$ stellt ein lokales Maximum dar.
- Für $A > 0$ ist $f(x,y) > 0$. Der stationäre Punkt $P(0,0,0)$ stellt ein lokales Minimum dar.

Anschließend betrachten wir quadratische Funktionen der folgenden Form:

$$
g(x,y) = A \cdot (x-a)^2 + B \cdot (x-a) \cdot (y-b) + C \cdot (y-b)^2, \quad (A \neq 0). \quad (3.7)
$$

Ein Vergleich der Funktion g mit der Funktion f aus Gleichung (3.6) legt die Vermutung nahe, dass g durch Verschieben um a Einheiten in x-Achsenrichtung sowie b Einheiten in y-Achsenrichtung entsteht. Der stationäre Punkt P liegt folglich an der Stelle (a,b) mit $g(a,b) = 0$. Der algebraische Nachweis bestätigt diese Vermutung. Für die partiellen Ableitungen 1. Ordnung gilt:

$$
g_x(x,y) = 2A \cdot (x-a) + B \cdot (y-b); \quad g_y(x,y) = B \cdot (x-a) + 2C \cdot (y-b).
$$

Wir untersuchen g auf stationäre Stellen:

$$
\begin{aligned}
I. &\quad g_x(x,y) = 0 \\
II. &\quad g_y(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

Das lineare Gleichungssystem besitzt an der Stelle (a,b) einen stationären Punkt mit $g(a,b) = 0$, sofern $4AC - B^2 \neq 0$ ist. Die quadratische Ergänzung liefert in diesem Fall:

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= A \cdot \left[(x-a)^2 + \frac{B}{A} \cdot (x-a) \cdot (y-b) + \frac{C}{A} \cdot (y-b)^2 \right] \\
&= A \cdot \left[\left((x-a) + \frac{B}{2A} \cdot (y-b) \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2} \cdot (y-b)^2 \right].
\end{aligned}
$$

Für $4AC - B^2 > 0$ ist der Term in der Klammer positiv. Eine Fallunterscheidung zeigt:

- Für $A < 0$ ist $g(x, y) < 0$. Der stationäre Punkt $P(a, b, 0)$ stellt ein lokales Maximum dar.
- Für $A > 0$ ist $g(x, y) > 0$. Der stationäre Punkt $P(a, b, 0)$ stellt ein lokales Minimum dar.

Abschließend ergänzen wir die spezielle quadratische Funktion f aus Gleichung (3.6) um einen linearen Anteil zur quadratischen Funktion h mit:

$$h(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F, \qquad (A \neq 0). \tag{3.8}$$

In der Literatur zur Wirtschaftsmathematik werden die Koeffizienten A, B und C mittels höherer partieller Ableitungen angegeben: Das Ableiten einer Funktion mit mehreren Variablen führt auf **partielle Ableitungen erster Ordnung**. Wiederholtes Ableiten oder zweimaligen Ableiten von f führt auf **partielle Ableitungen zweiter Ordnung**. Es entstehen vier partielle Ableitungen zweiter Ordnung von h:

$$h_{xx}(x, y) = 2A; \quad h_{xy}(x, y) = B = h_{yx}(x, y); \quad h_{yy}(x, y) = 2C.$$

Dabei beschreibt $h_{xy}(x, y)$ die partielle Ableitung zweiter Ordnung von h, die zuerst nach x und anschließend nach y abgeleitet wurde. Mit den partiellen Ableitungen 2. Ordnung gilt:

Satz 17
Die Funktion h mit $h(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ sei zweimal partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen an der Stelle (a, b) verschwinden mit $h_x(a, b) = 0$ und $h_y(a, b) = 0$. Dann gilt:

Für $\Lambda := h_{xx}(a, b) \cdot h_{yy}(a, b) - h_{xy}^2(a, b) > 0$ besitzt h ein lokales Extremum und zwar

a) ein lokales Minimum für $h_{xx}(a, b) > 0$,

b) ein lokales Maximum für $h_{xx}(a, b) < 0$.

Beweis. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung lauten

$$h_x(x, y) = 2Ax + By + D; \quad h_y(x, y) = Bx + 2Cy + E.$$

Für spätere Zwecke geben wir die partiellen Ableitungen 2. Ordnung an:

$$h_{xx}(x, y) = 2A; \quad h_{xy}(x, y) = B = h_{yx}(x, y); \quad h_{yy}(x, y) = 2C. \tag{3.9}$$

Wir untersuchen h auf stationäre Stellen:

$$\begin{aligned} I. \qquad & h_x(x,y) = 0 \\ II. \qquad & h_y(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Das LGS besitzt die Lösung $(a,b) = \left(\frac{BE-2CD}{4AC-B^2}, \frac{BD-2AE}{4AC-B^2}\right)$ für $4AC-B^2 \neq 0$. Diese Stelle kennzeichnet den stationären Punkt. Um eine geeignete Aussage über die Funktionswerte von h zu treffen, ist es dienlich diese wie in Gleichung (3.7) zu schreiben:

$$h(x,y) = h(a,b) + \alpha(x-a)^2 + \beta(x-a)(y-b) + \gamma(y-b)^2 + \delta(x-a) + \epsilon(y-b).$$

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von h lauten:

$$h_x(x,y) = 2\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \delta; \quad h_y(x,y) = \beta(x-a) + 2\gamma(y-b) + \epsilon.$$

Wir betrachten die stationäre Stelle (a,b). Aus $h_x(a,b) = 0$ und $h_y(a,b) = 0$ resultiert, dass $\delta = \epsilon = 0$ sind. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung von h ergeben sich zu:

$$h_{xx}(x,y) = 2\alpha; \quad h_{xy}(x,y) = \beta = h_{yx}(x,y); \quad h_{yy}(x,y) = 2\gamma. \tag{3.10}$$

Aus den Gleichungen (3.9) und (3.10) folgen $\alpha = A, \beta = B, \gamma = C$. Dadurch lässt sich die Funktion h im stationären Punkt folgendermaßen schreiben:

$$h(x,y) = h(a,b) + A \cdot (x-a)^2 + B \cdot (x-a) \cdot (y-b) + C \cdot (y-b)^2.$$

Ein Vergleich der Funktion h mit derjenigen von g aus Gleichung (3.7) zeigt, dass diese sich nur durch den Term $h(a,b)$ unterscheiden. Mit den partiellen Ableitungen 2. Ordnung aus Gleichung (3.9) gilt:

$$4AC - B^2 \Leftrightarrow h_{xx}(a,b) \cdot h_{yy}(a,b) - h_{xy}^2(a,b) := \Lambda$$

Für $\Lambda > 0$ besitzt die Funktion h an der Stelle (a,b) ein lokales Extremum:

a) Ein lokales Minimum für $A > 0 \Leftrightarrow \frac{h_{xx}(a,b)}{2} > 0 \Leftrightarrow h_{xx}(a,b) > 0$.

b) Ein lokales Maximum für $A < 0 \Leftrightarrow \frac{h_{xx}(a,b)}{2} < 0 \Leftrightarrow h_{xx}(a,b) < 0$.

$\square$

Beispiel 51
Gegeben sei die Funktion f mit:

$$f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + 4x + 5y - 2.$$

Für die partiellen Ableitungen erster Ordnung gilt:

$$f_x(x, y) = -2x - y + 4; \quad f_y(x, y) = -x - 2y + 5.$$

Aus $f_x(1, 2) = 0$ *und* $f_y(1, 2) = 0$ *resultiert, dass die Funktion* $f(x, y)$ *an der Stelle* $(1, 2)$ *einen stationären Punkt besitzt. Die partiellen Ableitungen* 2. *Ordnung lauten:*

$$f_{xx}(x, y) = -2; \qquad f_{xy}(x, y) = -1; \qquad f_{yx}(x, y) = -1; \qquad f_{yy}(x, y) = -2.$$

Die notwendige Bedingung zum Vorhandensein einer Extremstelle aus Satz 17 ist erfüllt. Es gilt:

$$\Lambda = f_{xx}(1, 2) \cdot f_{yy}(1, 2) - f_{xy}^2(1, 2) = -2 \cdot (-2) - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Da $f_{xx}(1, 2) = -2 < 0$ *ist, besitzt die Funktion* $f(x, y)$ *an der Stelle* $(1, 2)$ *ein lokales (in diesem Fall auch globales) Maximum mit* $f(1, 2) = 5$.

Doch was passiert, wenn $\Lambda < 0$ oder $\Lambda = 0$ ist? Wir untersuchen beide Fälle anhand der Funktion $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy$.

a) Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung einer stationären Stelle:

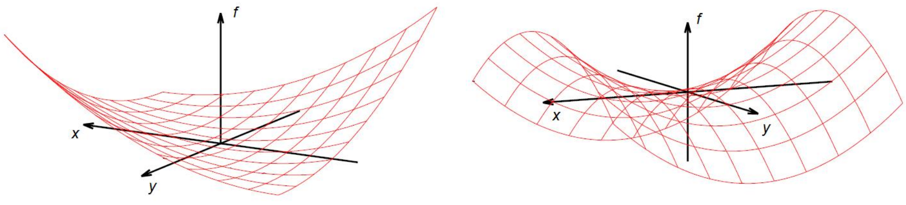
$$\begin{array}{rl} I. & f_x(x, y) = 0 \\ II. & f_y(x, y) = 0 \end{array}$$

Für $\Lambda = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 0 \overset{(3.9)}{\Leftrightarrow} 4AC - B^2 = 0$ ist das LGS nicht eindeutig lösbar. Folglich ist anhand der partiellen Ableitungen erster Ordnung keine Aussage über lokale Extremwerte von f möglich.

b) Gilt $\Lambda = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) < 0 \overset{(3.9)}{\Leftrightarrow} 4AC - B^2 < 0$, lässt sich die Gleichung $f(x, y) = 0$ als quadratische Gleichung in Abhängigkeit von x auffassen:

$$x^2 + \frac{By}{A}x + \frac{Cy^2}{A} = 0, \quad (A \neq 0).$$

Diese Gleichung besitzt die Lösungen $x_{1,2} = \frac{-By}{2A} \pm \frac{y}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}$. Die Diskriminante ist laut Voraussetzung positiv, ferner kann y jeden Wert beliebig nahe bei Null annehmen. Aus $y \to 0$ folgt $x_1, x_2 \to 0$, daher besitzt f in einer Umgebung von $(0, 0)$ verschiedene Vorzeichen und am Graphen von f ist hier ein Sattelpunkt zu finden.



(a) (b)

Abbildung 3.4: Graph einer Funktion mit zwei Variablen mit (a) unendlich vielen Tiefpunkten und (b) einem Sattelpunkt

Beispiel 52
Betrachten wir für $\Lambda = 0$ und $\Lambda < 0$ jeweils ein Beispiel:

a) *Gegeben sei $f(x, y) = (x + y)^2$. Das lineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} I. \quad & f_x(x, y) = 0 \\ II. \quad & f_y(x, y) = 0 \end{aligned}$$

besitzt unendlich viele Lösungen der Form $(a, -a)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung sind identisch. Es gilt:

$$\Lambda = f_{xx}(a, -a) \cdot f_{yy}(a, -a) - f_{xy}^2(a, -a) = 0.$$

Folglich ist keine Aussage über lokale Extremwerte von f möglich. Der Graph dieser Funktion verfügt über unendlich viele Tiefpunkte, wie in Abbildung 3.4 (a) zu sehen ist.

b) *Gegeben sei $g(x, y) = x^2 - y^2$. Der stationäre Punkt besitzt die Koordinaten $(0, 0, 0)$. Da jedoch $\Lambda = f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = -1$ ist, liegt an der Stelle $(0, 0)$ ein Sattelpunkt vor. Abbildung 3.4 (b) verdeutlicht diesen Sachverhalt.*

Alternativ zu Satz 17 geben wir eine weitere Darstellung nach LUDERER und WÜRKER (2003, S. 329 ff.) an, wie die Bestimmung von Extremwerten für Funktionen mit zwei Variablen erfolgen kann. Hierbei steht die Hesse-Matrix H_f, die sich aus den partiellen Ableitungen 2. Ordnung bildet, im Zentrum der Betrachtung. Es gilt:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Sei $det(H_f)$ die Determinante von H_f mit:

$$det(H_f) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y) \cdot f_{yx}(x, y).$$

Mittels Determinante der Hesse-Matrix wird folgender Satz zur Bestimmung lokaler Extremwerte gegeben:

Satz 18
Gegeben sei die Funktion $f(x, y)$. Die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung existieren und f besitzt an der Stelle (a, b) einen stationären Punkt, so gilt:

a) Für $det(H_f) > 0$ und $f_{xx}(a, b) > 0$ besitzt f an der Stelle (a, b) ein lokales Minimum.

b) Für $det(H_f) > 0$ und $f_{xx}(a, b) < 0$ besitzt f an der Stelle (a, b) ein lokales Maximum.

Ist in Satz 18 $det(H_f) < 0$, besitzt f an der Stelle (a, b) kein lokales Extremum. Für $det(H_f) = 0$ ist keine Aussage über lokale Extremwerte von f möglich. Es zeigt sich, dass für $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ Satz 17 einen Spezialfall von Satz 18 darstellt. Die beiden partiellen Ableitungen 2. Ordnung nach jeweils x und y sind in der Regel gleich. Es gibt zwar auch Ausnahmen, diese sind „aber für die in der Ökonomie bedeutsamen Funktionen nicht zu erwarten“ (MATTHÄUS und MATTHÄUS 2012, S. 70). Den interessierten Leser verweisen wir an dieser Stelle auf den Satz von Schwarz (vgl. HEUSER 2004, S. 251).

3.4 Anwendungen der Differenzialrechnung für ökonomische Funktionen mit zwei Variablen

Betrachten wir im Folgenden ein Beispiel zur Bestimmung von lokalen Extremwerten ökonomischer Funktionen.

Beispiel 53
Ein Monopolist verkaufe zwei Güter. Sei p der Preis pro Stück und x die abgesetzte Menge von Gut A. Weiterhin sei q der Preis pro Stück und y die abgesetzte Menge von Gut B. Die Preis-Absatz-Funktionen lauten:

$$p(x, y) = 300 - 4x - 3y; \qquad q(x, y) = 200 - x - 4y.$$

Für die Erlösfunktion gilt:

$$E(x, y) \overset{(3.2)}{=} (300-4x-3y)x+(200-x-4y)y = -4x^2-4xy-4y^2+300x+200x.$$

Die Kosten zur Produktion der beiden Güter lassen sich mit der Funktion $K(x, y) = 100x + 40y + 250$ beschreiben. Die Gewinnfunktion erhalten wir aus der Differenz von Erlös- und Kostenfunktion:

$$\begin{aligned} G(x, y) &\overset{(3.3)}{=} -4x^2 - 4xy - 4y^2 + 300x + 200x - (100x + 40y + 250) \\ &= -4x^2 - 4xy - 4y^2 + 200x + 160y - 250. \end{aligned}$$

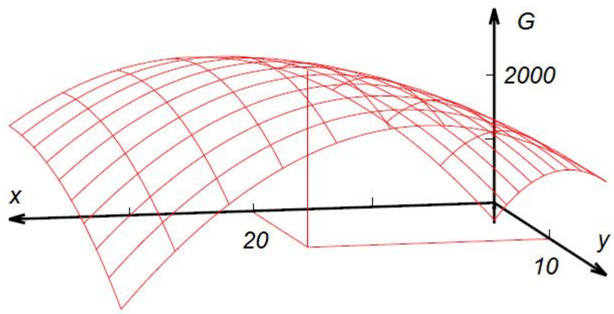


Abbildung 3.5: Gewinnmaximum am Graphen einer Gewinnfunktion mit zwei Variablen

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von G lauten:

$$G_x(x,y) = -8x - 4y + 200; \qquad G_y(x,y) = -4x - 8y + 160.$$

Aus den notwendigen Bedingungen $G_x(x,y) = 0$ und $G_y(x,y) = 0$ erhalten wir die Lösung $(20,10)$, die die stationäre Stelle kennzeichnet. Um zu prüfen, ob ein lokales Extremum existiert, benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

$$G_{xx}(x,y) = -8; \qquad G_{xy}(x,y) = -4 = G_{yx}(x,y); \qquad G_{yy}(x,y) = -8.$$

Nach Satz 17 ist die Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremwerts von G erfüllt, denn es gilt:

$$\Lambda = G_{xx}(20,10) \cdot G_{yy}(20,10) - G_{xy}^2(20,10) = -8 \cdot (-8) - (-4)^2 = 48 > 0.$$

Mit $G_{xx}(20,10) = -8 < 0$ ist die Extremstelle von G ein lokales Maximum mit $G(20,10) = 2550$, das auch das globale Maximum darstellt. Das Unternehmen erzielt den maximalen Gewinn in Höhe von 2550 GE, wenn es 20 ME von Gut A und 10 ME von Gut B verkauft. Abbildung 3.5 zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Gewinnfunktion sowie das Gewinnmaximum.

Jedoch liegt nicht für alle ökonomische Funktionen eine lokale Extremstelle nach Satz 17 vor. Betrachten wir dazu Beispiel 54.

Beispiel 54
Gegeben seien die Preis-Absatz-Funktionen $p(x,y) = -3x - 5y + 152$ und $q(x,y) = -3x - 5y + 196$ (mit $0 \leq x \leq 24$, $0 \leq y \leq 10$). Daraus folgt für die Erlösfunktion:

$$\begin{aligned} E(x,y) &\overset{(3.2)}{=} (-3x - 5y + 152) \cdot x + (-3x - 5y + 196) \cdot y \\ &= -3x^2 - 8xy - 5y^2 + 152x + 196y. \end{aligned}$$

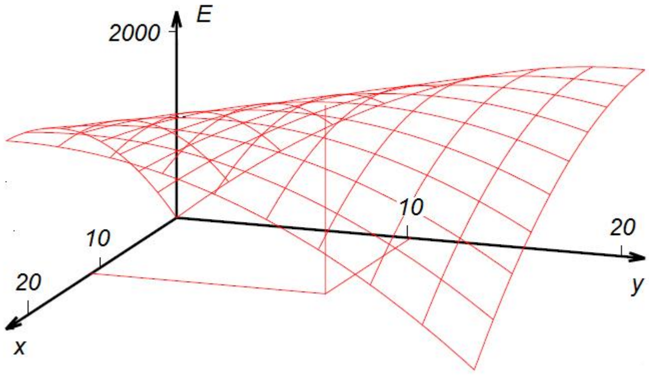


Abbildung 3.6: Graph einer Erlösfunktion mit zwei Variablen mit einem Sattelpunkt

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von E lauten:

$$E_x(x,y) = -6x - 8y + 152, \qquad E_y(x,y) = -8x - 10y + 196.$$

Das LGS mit $E_x(x,y) = 0$ und $E_y(x,y) = 0$ besitzt die Lösung $(12,10)$. Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung gilt:

$$E_{xx}(x,y) = -6, \qquad E_{xy}(x,y) = -8 = E_{yx}(x,y), \qquad E_{yy}(x,y) = -10.$$

Nach Satz 17 ist $\Lambda = -6 \cdot (-10) - (-8)^2 = -4$, folglich liegt ein Sattelpunkt an der Stelle $(12,10)$ vor. Es ist $E(12,10) = 1892$, jedoch finden sich am Rand größere Werte mit z. B. $E(24,0) = 1920$ sowie $E(0,20) = 1920$. Abbildung 3.6 zeigt den Graphen der Erlösfunktion im vorgegebenen Intervall mit dem zugehörigen Sattelpunkt.

II Wirtschaftsmathematik im Unterricht

4 Allgemeinbildender Mathematikunterricht

Allgemeinbildung ist die Antwort auf die Frage, „was den Heranwachsenden durch die öffentlichen Schulen vermittelt werden sollte“ (HEYMANN 1996, S. 43). Dieser Auftrag ist in den verschiedenen Lehrplänen der Länder niedergeschrieben und auch der einzelne Fachunterricht muss sich hinterfragen, welchen Beitrag er dazu leisten kann. Schüler sollen eine möglichst breit gefächerte Allgemeinbildung erhalten, die sie befähigt die unterschiedlichsten Studien- oder Ausbildungsanforderungen zu bewältigen und „die ihnen in einer sich verändernden Welt die nötige Orientierung gibt“ (STERN 2015, S. 165).

Insbesondere die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin sieht sich wiederholt der Kritik ausgesetzt, dass sie nur für einen begrenzten Teil der Bevölkerung wichtig und einsichtig ist. Sie stelle eine Art „höheres Schachspiel, schön und spannend für dafür eigens begabte Menschen“ (WINTER 1995, S. 43) mit eigenen Symbolen und Regeln dar. Oft wird daher die Frage aufgeworfen, worin der allgemeinbildende Charakter der Mathematik bestehe. Neben der mathematischen Allgemeinbildung steht auch die ökonomische im Fokus. Heranwachsende werden später mit immer komplexeren Problemen aus den Bereichen Wirtschaft und Finanzen konfrontiert. Sie müssen verantwortungsvoll mit ihrem Einkommen umgehen, sich mit Fragen der Geldanlage oder Altersvorsorge auseinandersetzen und als Arbeitnehmer oder -geber am Wirtschaftsleben teilnehmen. Aus diesem Grund möchten verschiedene Organisationen wie etwa die Deutsche Gesellschaft für ökonomische Bildung (DEGÖB) den Stellenwert des Faches Wirtschaft in Schulen verbessern.

Im Folgenden gehen wir auf wesentliche Aspekte von Mathematik und Allgemeinbildung ein (Abschn. 4.1). Daraufhin betrachten wir Zusammenhänge zwischen Mathematik und ökonomischer Allgemeinbildung (Abschn. 4.2). Aus den daraus gewonnenen Erkenntnissen erschließen wir Konsequenzen zur Entwicklung der Unterrichtseinheiten (Abschn. 4.3).

4.1 Mathematik und Allgemeinbildung

In den 90er Jahren entstand eine Vielzahl von Schriften zur allgemeinbildenden Aufgabe des Mathematikunterrichts. So formuliert HEYMANN (1996) in seinem Allgemeinbildungskonzept folgende Aufgaben eines allgemeinbildenden Unterrichts:

- Stiftung kultureller Kohärenz: Mathematik ist Teil unserer Kultur, die in der Schule erfahrbar gemacht werden soll.

- Lebensvorbereitung: Zur Lebensnotwendigkeit ersten Grades gehört ein direkter praktischer Nutzen wie etwa das Abschätzen von Größenordnungen oder das Vergleichen von Handytarifen. Zum zweiten Grad zählen mathematische Kenntnisse, die im Rahmen einer Ausbildung (z. B. Banken) oder eines Studiums (z. B. Chemie) erworben werden.

– Weltorientierung: Es geht um die Rolle der Mathematik im Alltag. Ohne Mathematik hebt kein Flugzeug ab oder funktioniert kein Handy.

– Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch: Schüler sollen z. B. Ergebnisse von Rechnungen hinterfragen. Insbesondere sollen sie den Rechenweg sowie andere Lösungsstrategien reflektieren.

Neben diesen eher kognitiv orientierten Zielen führt HEYMANN (1996) weitere sozial-affektive Aspekte auf, die ein allgemeinbildender Mathematikunterricht berücksichtigen soll. Es handelt sich um Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft, Einübung in Verständigung und Kooperation sowie Stärkung des Schüler-Ichs.

In Fachkreisen besonders geschätzt sind die drei Grunderfahrungen von WINTER (1995), die sich u. a. in den Bildungsstandards (vgl. KMK 2012) als Antwort der Mathematikdidaktik „auf den Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe“ (DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 7) wiederfinden. Ein allgemeinbildender Mathematikunterricht soll es ermöglichen,

(G1) „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten), die über die Mathematik hinausgehen, zu erwerben.“ (WINTER 1995, S. 37).

Die erste Grunderfahrung (G1) zielt auf den anwendungsorientierten Aspekt der Mathematik ab. Es ist unbestreitbar, dass „die Anwendung von Mathematik auf außermathematische Sachverhalte eine wichtige Rolle spielen muss“ (HEYMANN 1996, S. 185). In der zweiten Grunderfahrung (G2) betont WINTER (1995), dass die Mathematik eine Wissenschaft mit eigenen Begriffen, Symbolen und Zusammenhängen ist. Die dritte Grunderfahrung (G3) zielt auf die Förderung von Problemlösefähigkeiten ab, anstatt den Unterricht ausschließlich an Kalkülen auszurichten. Hilfreich ist etwa eine

„Reflexion auf das eigene Denkhandeln“ (WINTER 1995, S. 42), um verschiedene Argumentationsweisen zu erlernen. So führen Fragen nach dem individuellen Schwierigkeitsgrad der Aufgabe, nach sich wiederholenden Elementen, zum Rückwärtsarbeiten oder auch zur Einschätzung der Lösung zu einem tieferen Verständnis von Mathematik. Auch DAUME (2009) hebt den allgemeinbildenden Aspekt des Mathematikunterrichts hervor und greift die Grunderfahrungen von WINTER (1995) auf. Sie empfiehlt, mittels Modellierung von Aktienkursen einen Beitrag zur finanziellen Allgemeinbildung im Mathematikunterricht zu leisten (vgl. DAUME 2009, S. 27 ff.). Dadurch erhalten Schüler einen Zugang zur komplexen Finanzwelt, der in anderen Fächern kaum möglich ist. Die Orientierung an Anwendungsbezügen unterstützt auch HOLZÄPFEL (2013), indem er fordert, dass Allgemeinbildung im Mathematikunterricht die Fächergrenzen überwinden muss. Gründe sieht er etwa in „der Nützlichkeit mathematischen Denkens über das Fach hinaus“ (S. 4).

Den Ausführungen von DAUME (2009) und HOLZÄPFEL (2013) schließen wir uns an. Auch in der Ökonomie lassen sich vielfältige Beispiele finden, die besonders die Anwendungsmöglichkeiten von Mathematik aufzeigen. Dazu gehören etwa funktionale Abhängigkeiten zwischen Preis und Absatz. Diese Ansicht wird gestützt durch TIETZE et al. (2000). Sie befürworten die Forderung nach Anwendungsorientierung in den Wirtschaftswissenschaften:

> „Der Aspekt anwendungs- und erfahrungsbezogene Mathematik muss in angemessener Weise repräsentiert sein. Der Schüler sollte um den instrumentellen Charakter der Mathematik wissen, ihre Rolle als Sprache und Hilfsmittel in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft in Ansätzen kennen und kritisch einschätzen können.“ (TIETZE et al. 2000, S. 24).

TIETZE et al. (2000) greifen die Aufgabe des „kritischen Vernunftgebrauchs“ nach HEYMANN (1996) auf und sprechen sich für einen maßvollen Einsatz von Anwendungsthemen aus. Eine „durchgängige Orientierung des mathematischen Schulcurriculums an Anwendungsthemen“ (FÜHRER 1991, S. 115) ist nicht erstrebenswert. Folglich ist zu prüfen, welchen Relevanz Anwendungen im Mathematikunterricht besitzen. Aus den Bildungsstandards Mathematik für die allgemeine Hochschulreife geht hervor, dass anwendungsorientierte Aufgaben aus der Lebenswelt „die gleiche Wichtigkeit und Wertigkeit wie innermathematische Aufgaben“ (KMK 2012, S. 11) einnehmen. Diese Auffassung berücksichtigt die zweite Grunderfahrung (G2) nach WINTER (1995), die auch wir für wichtig erachten. Eine reine Orientierung an Anwendungsbezügen bildet das Wesen der Mathematik nur unzureichend ab. Es zeigt sich u. E. insbesondere im Zusammenspiel von außer- und innermathematischen Sachverhalten.

In der Sichtweise von Mathematik als eigene Wissenschaft geht es nicht nur um das Auswendiglernen von Formeln und das Anwenden mathematischer Verfahren, wie die Schulstudien TIMSS und PISA aufzeigen. Vielmehr sollen Schüler „zu einer flexiblen Anwendung von Mathematik in vielfältigen Kontexten befähigt werden“ (REISS und HAMMER 2013, S. 8). Dieser Aspekt liegt dem Begriff der mathematischen Grundbildung („mathematical literacy“) zu Grunde, der die Fähigkeit bezeichnet ...

> „[...] die Rolle, die die Mathematik in der Welt spielt, zu erkennen und zu verstehen, begründete mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht“ (BAUMERT et al. 2001, S. 141).

Eine mathematische Grundbildung mit zusätzlichen Anwendungen im Mathematikunterricht gleichzusetzen, gerät zu kurz. Vielmehr sollen Schüler mathematische Modelle auf alltägliche Probleme übertragen sowie „umgekehrt die einem Problem zugrunde liegende mathematische Struktur erkennen“ (DAUME 2016, S. 89).

4.2 Mathematik und ökonomische Allgemeinbildung

Der Mensch sieht sich im Alltag immer komplexer werdenden ökonomischen Situationen gegenüber. Sei es bei der Durchführung von Zahlungen oder dem Handeln in wirtschaftlichen Kontexten. Den erhöhten Anforderungen steht oft eine große Verunsicherung entgegen. Dies stößt die Diskussion über eine ökonomische Bildung in Schulen weiter an, unter der man Folgendes versteht:

> „Ökonomische Bildung kann als Qualifikation, das heißt als Ausstattung von Individuen mit Kenntnissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Verhaltensbereitschaften und Einstellungen, umschrieben werden, wirtschaftlich geprägte Lebenssituationen zu bewältigen.“ (MAY 2011, S. 3 f.).

In den verschiedenen Lebenssituationen nimmt der Mensch nach MAY (2011) unterschiedliche Rollen ein. Bereits in jungen Jahren tritt der Bürger als **Konsument** auf. So zeigt etwa die Studie „Jugend und Geld“, dass Jugendliche zwischen 13 und 14 Jahren im Schnitt €25 pro Monat für ihre Zwecke ausgeben (LANGE und FRIES 2006, S. 43). Das monatliche Taschengeld dieser Altersgruppe liegt im Schnitt bei €33. Weitere Einkünfte aus Geldgeschenken oder kleinen Arbeiten bleiben unberücksichtigt (TULLY und VAN SANTEN 2012, S. 202). Als **Arbeitnehmer** erhält der Bürger seinen Lohn. Dafür besitzt er gegenüber dem Arbeitgeber Pflichten, aber auch Rechte. In der Funktion des **Teilnehmers an der Wirtschaftsgesellschaft** befindet sich etwa ein Unternehmer beim Verkauf eines Produktes. Er kauft Ressourcen ein und versucht beim Absatz über den Preis einen ausreichenden Erlös zu erzielen (vgl. Abschn. 1.3.2), damit er Gewinn erzielt (vgl. Abschn. 1.3.4). In allen drei genannten wirtschaftlichen Rollen leistet der Bürger einen Beitrag zum Steuereinkommen: Ein Konsument zahlt Umsatz- bzw. Mehrwertsteuer, ein Arbeitnehmer führt Einkommenssteuer an den Fiskus ab und auf einen Gewerbebetrieb wird die Gewerbesteuer erhoben (vgl. DAUME 2016, S. 35 ff.). Zu den genannten Lebenssituationen gehört u. E. das Verstehen und Einordnen von Nachrichten aus dem Wirtschaftsgeschehen. Diese Urteilsfähigkeit ist notwendig, um sich in „Entwicklungen einer immer schneller sich verändernden Wirtschaftswelt zu orientieren“ (DEGÖB 2004, S. 4). Auch KAMINSKI und EGGERT (2008) unterscheiden zur ökonomischen Bildung eine private und berufliche sowie eine welt- und volkswirtschaftliche Ebene. Zur letzteren gehören etwa Preisbildungsprozesse, wie wir sie in Abschnitt 1.2 beschrieben haben. Das Verständnis ökonomischer Bildung nach MAY (2011), in der Bürger am Wirtschaftsgeschehen teilnehmen, sowie nach KAMINSKI und EGGERT (2008), die für die Vermittlung einer volkswirtschaftlichen Ebene plädieren, legitimiert nachhaltig die Wahl der Wirtschaftsmathematik als Unterrichtsinhalt.

Verschiedene Autoren (u. a. WEBER 2000 sowie BRANDLMAIER et al. 2006) sprechen sich zunehmend für eine ökonomische als auch finanzielle Bildung in Schulen aus, damit Heranwachsende den steigenden Anforderungen des Wirtschaftslebens gewachsen sind. Aktuelle Untersuchungen stützen die Einschätzung, dass das entsprechende Wissen bei Heranwachsenden nur unzureichend ausgeprägt ist: Ernüchternde Ergebnisse aus Umfragen zum Wirtschaftswissen führt ein Gutachten im Auftrag des Gemeinschaftsausschusses der Deutschen Gewerblichen Wirtschaft (GGW) an. Die Ergebnisse deuten auf einen „Ökonomischen Analphabetismus“ (GGW 2010, S. 81) hin. Eine Studie der Commerzbank zeigt, dass sich „nur zwei Prozent der Bürger „sehr gute“ und weitere 14 Prozent „gute“ Kenntnisse über Geld, Börse, Finanzmärkte und Wirtschaftsthemen“ (MAY 2011, S. 3) bescheinigen. Die Jugendstudie 2012 des Bundesverbandes der Bundesbanken macht darauf aufmerksam, dass jeder zweite Jugendliche „Defizite im Verständnis von Wirtschaft und Wissen über Wirtschaftsthemen“ (BUNDESVERBAND DEUTSCHER BANKEN 2012, S. 35) besitzt. Gleichzeitig wünschen sich aber mehr als drei von vier Befragten einen höheren Stellenwert von Wirtschaftsthemen in der schulischen Ausbildung. Ähnliche Ergebnisse zeigt eine frühere Studie, in der junge Heranwachsende im Alter zwischen 14 und 24 Jahren Fragen zu finanziellen und ökonomischen Themen gar nicht oder nur unzureichend beantworten konnten (vgl. BUNDESVERBAND DEUTSCHER BANKEN 2009).

Zur Verbesserung der ökonomischen Bildung bietet z. B. das Kölner Institut der deutschen Wirtschaft[29] oder das Institut für ökonomische Bildung[30] Materialien für den Wirtschaftsunterricht an. Eine Vermittlung von Wirtschaftswissen mittels dieser Materialien ist jedoch problematisch, da Wirtschaftsverbände diese Institute unterstützen (vgl. KRETZ 2012). Eine objektive und unabhängige ökonomische Bildung ist in diesem Fall fraglich.

Ein Beitrag zur ökonomischen Bildung ist in allen Bundesländern in den Lehrplänen verankert. Im Gegensatz zur Mathematik existieren für das Schulfach Wirtschaft jedoch keine einheitlichen Bildungsstandards, so dass deren Ausarbeitung den Ländern obliegt. Kontrovers ist die Diskussion über deren Umsetzung: Soll Ökonomie als eigenständiges Fach oder in einem Fächerverbund gelehrt werden? Zwar führt Baden-Württemberg ab dem Schuljahr 2016/2017 als erstes Bundesland das Schulfach Wirtschaft in der Mittelstufe ein (vgl. LANGE 2015), es ist jedoch die Ausnahme. Zumeist wird ein Fächerverbund unterrichtet, denn die „Auseinandersetzung mit ökonomischen Fragen ist mehrdimensional“ (FISCHER 2006, S. 5). Dies betrifft neben der Mathematik auch die Bereiche Politik, Ökologie, Geschichte sowie Philosophie.

> „Diese bessere ökonomische Bildung bettet ökonomische Fragen in gesellschaftliche, politische und kulturelle Zusammenhänge ein [...]. Sie steht für wissenschaftlichen, politischen und weltanschaulichen Pluralismus, ist multiperspektivisch und lehnt es ab, den Lernenden ein einseitiges Weltbild aufzuzwingen.“ (HEDTKE et al. 2010, S. 1)

Nach Ansicht von HEDTKE et al. (2010) braucht es zur Lösung eines ökonomischen Problems das Wissen aus weiteren Fachbereichen. Denn beim Erkennen und Verstehen der Welt können „auch ergänzende oder konträre Ergebnisse anderer Wissenschaften hilfreich sein“ (WEBER 2010, S. 104). Ein eigenes Fach Wirtschaft ist auch nach unserer Auffassung nicht notwendig, wenn ökonomische Inhalte mehrperspektivisch unterrichtet werden. Findet ökonomische Bildung im Fächerverbund statt und greift auch der Mathematikunterricht wirtschaftliche Themen auf, vermindert dies die Gefahr einer inhaltlichen Engführung. Dieses Risiko besteht auch in der Wirtschaftsmathematik, wenn sich die Inhalte zu stark an Kalkülen und Verfahren orientieren. Im Rahmen einer Gewinnmaximierung etwa bieten sich neben der mathematischen Lösung zusätzlich soziale oder ökologische Argumentationen an. Ähnlich sehen das FAMULLA et al. (2011) in der aktuellen Debatte zum Wirtschaftsunterricht:

[29]http://www.wirtschaftundschule.de/unterrichtsmaterialien/(Stand: 28.01.2016)
[30]http://www.ioeb.de/unterrichtsmaterialien (Stand: 28.01.2016)

> „Statt kritisches Nachfragen und selbstständiges Urteilsvermögen zu fördern, liegt der Schwerpunkt darauf, wirtschaftswissenschaftliche Modelle anzuwenden, volkswirtschaftliche Denkmuster zu reproduzieren und immer wieder Rechenaufgaben durchzuführen [...]. Ein Nachdenken über Kriterien eigener Konsumentscheidungen, die über das Kostenargument hinausgehen und etwa auch gesellschaftliche und politische Rahmenbedingungen des Konsums einbeziehen, ist kaum gefordert." (FAMULLA et al. 2011, S. 50).

Wie FAMULLA et al. (2011) sehen wir eine rein volkswirtschaftliche Betrachtung ökonomischer Fragen als problematisch an. Der Ansatz der Multiperspektivität bietet die Möglichkeit, den Gedanken zum kritischen Vernunftgebrauch nach HEYMANN (1996) in den Unterrichtseinheiten zu integrieren. Ein autonomes Fach Wirtschaft, das genau auf diese konträren Ergebnisse verzichtet und volkswirtschaftliche Denkmuster ins Zentrum stellt, ist u. E. kritisch einzuschätzen. Wir untersuchen wirtschaftliche Themen folglich aus mehreren Perspektiven und sehen die Chance, mittels Mathematik einen Beitrag zur ökonomischen Bildung zu leisten.

4.3 Konsequenzen für die Unterrichtsentwicklung

Die Grunderfahrungen von WINTER (1995) betrachten wir als maßgebend. Nicht zuletzt, da sie in den Bildungsstandards aufgeführt und für die Planung von Unterricht bindend sind. Außermathematische Inhalte (G1) sind durch den Bezug zur Ökonomie vorgegeben. Damit deren Umsetzung im Unterricht gelingt, orientieren wir uns an den drei Ebenen ökonomischer Bildung in Anlehnung an KAMINSKI und EGGERT (2008) sowie MAY (2011). Zur Unterstützung eines reflektierten Konsumverhaltens bieten sich neben Vergleichen von Stromtarifen auch Handytarife an, wie sie MAASS (2002) vorschlägt. Für den Bürger als Arbeitnehmer sind Unterrichtssequenzen zur Einkommensteuer von Interesse (vgl. DAUME 2016, S. 167 ff.). Zum Verständnis der Wirtschaftsgesellschaft möchten wir mit dieser Arbeit einen Beitrag leisten und uns an bestehenden Vorschlägen zum Wirtschaftsunterricht orientieren. Dabei sollen Schüler „das Zustandekommen des Preises für unterschiedliche Märkte" (GGW 2010, S. 33) beschreiben. Anschließend sind die ökonomischen Begrifflichkeiten zum Thema Preisbildung „entsprechend analytisch und wissenschaftsbezogen (z. B. Transaktionskosten, Elastizitäten)" (GGW 2010, S. 36) zu erweitern. In einem weiteren Entwurf sollen Schüler „Marktmechanismen anhand ökonomischer Modellannahmen erläutern und mithilfe mathematischer Darstellungen diskutieren (z. B. Grenznutzen-, Grenzkostenrechnung [...])" (DEGÖB 2009, S. 6). Die fachtheoretischen Grundlagen zu diesen Inhalten sind in den Abschnitten 1.1 bis 2.2 aufgeführt.

Zur Entwicklung der Unterrichtsvorschläge zur Wirtschaftsmathematik berücksichtigen wir, den Schülern nicht nur volkswirtschafliche Denkmuster zu vermitteln. Wir folgen der Forderungen von HEYMANN (1996) nach einer Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch im Mathematikunterricht und von HEDTKE et al. (2010) nach einem mehrperspektivischen Ansatz in der Ökonomie. Eine mögliche Aufgabe, die das berücksichtigt, lautet:

> *Ein Monopolist setze sein Gut mit der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -x + 16$ ab. Die anfallenden Kosten lassen sich mit $K(x) = 4x + 27$ beschreiben. Durch Einsparungen im Gehalt sowie dem Einkauf eines günstigeren Rohstoffs sinken die variablen Kosten um 2 $\frac{GE}{ME}$ und die fixen Kosten um 3 GE. Bestimmen Sie die Gewinnspanne und den maximalen Gewinn vor und nach der Kostensenkung. Diskutieren Sie mit einem Partner, ob die geringeren Kosten sozial und ökologisch zu rechtfertigen sind.*

Zunächst ist für diese Aufgabe eine mathematische Lösung zu bestimmen. Mit dem Auftrag die geringeren Kosten zu diskutieren, werden die Schüler aufgefordert auch soziale und ökologische Überlegungen zu reflektieren. In diesem Umfeld können die Schüler etwa folgenden Fragen nachgehen:

- Stammt der Rohstoff aus einem biologischen, regionalen Anbau oder wird er importiert?
- Welche Auswirkungen haben Gehaltseinsparungen auf die Mitarbeiter?

Für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht ist neben der Anwendungsorientierung die Bedeutung der Mathematik als eigene Wissenschaft zu betonen. Daher erachten wir die zweite Wintersche Grunderfahrung (G2) ebenfalls für unverzichtbar. Obwohl der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Wirtschaftsmathematik liegt, sehen wir diese als „Türöffner“ zu innermathematischen Themen. Ausgehend vom Verlauf ökonomischer Funktionen können Fragen zu allgemeinen Funktionen gestellt werden. So bietet sich etwa die Untersuchung der Koeffizienten einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion an:

> *Gegeben sei die Funktionenschar $K_a(x) = x^3 + ax^2 + 27x + 45$ (x in ME, K in GE). Für welche Werte von a ist $K_a(x)$ eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion?*

Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion liegt vor, wenn diese (streng) monoton steigt, keine Extremstellen und einen Wendepunkt für $x > 0$ besitzt. Die Schüler können zunächst durch Probieren verschiedene Verläufe des Graphen der Kostenfunktion vergleichen, bevor eine analytische Lösung mithilfe von Ableitungen erfolgt. Neben Aufgaben, die im Umfeld ökonomischer

Funktionen auf innermathematische Fragestellungen führen, möchten wir unabhängig davon mathematische Fragen diskutieren. Als sinnvoll gestaltet sich etwa ein Aufgreifen einer näherungsweisen Funktionsänderung mittels Grenzfunktion. Diese Idee lässt sich abseits ökonomischer Funktionen zur lokalen Approximation von beliebigen Funktionen mittels Tangente bis hin zu Taylorpolynomen erweitern. Eine mögliche Aufgabenstellung lautet:

> *Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + 5x^2 - x + 1$. Bestimmen Sie Polynomfunktionen vom Grad $1, 2$ oder 3, die mit $f(x)$ an der Stelle $a = 0$ mit dem Funktionswert und im Wert der Ableitungen identisch sind. Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$, $t_1(x)$ und $t_2(x)$ in einem Schaubild.*

Ausgehend von der Tangente als Polynomfunktion ersten Grades sollen die Schüler untersuchen, wie mittels höherer Ableitungen eine Verbesserung der lokalen Approximation einer Funktion möglich ist. Dies erfolgt unabhängig von ökonomischen Funktionen in einem Ergänzungsmodul. Gleiches gilt für Elastizitätsfunktionen: Während die Elastizität im ökonomischen Umfeld zur Berechnung einer relativen Funktionswertänderung verwendet wird, lassen sich davon ausgehend Elastizitätsfunktionen unter innermathematischen Aspekten betrachten. Die hier vorkommenden Zusammenhänge können ökonomisch nicht sinnvoll interpretiert werden (vgl. Abschn. 2.2.4). Sie zeigen jedoch eine Möglichkeit auf, wie aus einer Anwendung der Einstieg in ein innermathematisches Gebiet mit eigenen Sätzen und Definitionen gelingen kann. Dies beinhaltet die zweite Wintersche Grunderfahrung.

Zur Stärkung der dritten Grunderfahrung (G3) von Winter integrieren wir verschiedene Lösungsstrategien wie das Schätzen und Überschlagen, das Rückwärtsrechnen oder das Erkennen von Mustern in die Unterrichtsvorschläge. Eine mögliche Aufgabenstellung lautet:

> *Seien $x_1 = 4$ und $x_2 = 10$ die Nullstellen einer quadratischen Gewinnfunktion. Geben Sie zwei verschiedene Funktionsterme für $G(x)$ an.*

Es handelt sich um eine so genannte „Umkehraufgabe“ (BRUDER et al. 2015, S. 527). Zur Lösung können Schüler rückwärtsrechnen, sich an einer gelösten Aufgabe orientieren oder sich der Lösung durch Probieren nähern. Zum Überschlagen kann etwa bei Exponentialfunktionen mit dem Näherungswert $e \approx 3$ gearbeitet werden. Wir betonen, dass die Unterrichtsvorschläge kein Abbild universitärer Theorie sind. Vielmehr sollen sie unter präwissenschaftlichen und allgemeinbildenden Aspekten eine Einführung in volks- sowie betriebswirtschaftliche Grundlagen darstellen, wie es auch KAMINSKI und EGGERT (2008) fordern. Damit dies gelingt, nehmen wir Abstand von einer reinen Orientierung an mathematischen Verfahren. Vielmehr sollen Schüler ihre Fähigkeiten in unbekannten Situationen auch flexibel anwenden können, wie es eine mathematische Grundbildung verlangt. Um dies auf eine curriculare Grundlage zu stellen, beziehen wir im folgenden Abschnitt ausgewählte Kompetenzbereiche der Bildungsstandards Mathematik mit ein.

5 Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik waren unter anderem die Reaktion auf die PISA Studie aus dem Jahr 2000. Das unterdurchschnittliche Abschneiden[31] veranlasste die ständige Kultusministerkonferenz der Länder zu diesem Schritt und hatte Einfluss auf die Standards für den mittleren Schulabschluss (vgl. KMK 2004). Dabei greifen die Bildungsstandards „allgemeine Bildungsziele auf und benennen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an zentralen Inhalten erworben haben sollen“ (KMK 2004, S. 3). Es folgten die Standards für den Hauptschulabschluss, den Primarbereich und im Jahr 2012 für die allgemeine Hochschulreife (vgl. KMK 2012), um verbindliche Richtlinien für alle Länder im Abitur festzulegen.

Im Folgenden geben wir eine kurze Übersicht zu den Begriffen Kompetenz und Leitidee aus den Bildungsstandards Mathematik für die allgemeine Hochschulreife (Abschn. 5.1). Insbesondere die Leitidee funktionaler Zusammenhang liefert wichtige Anhaltspunkte zur Behandlung ökonomischer Funktionen im Unterricht (Abschn. 5.2). Von den Allgemeinen mathematischen Kompetenzen erachten wir das mathematische Modellieren als maßgebend. Die Schüler sollen erfahren, wie mittels realer Daten das mathematische Modell einer Preis-Absatz-Funktion aufgestellt wird (Abschn. 5.3). Abschließend wird untersucht, welche Konsequenzen sich aus den vorherigen Ausführungen für die Umsetzung der Wirtschaftsmathematik im Unterricht ergeben (Abschn. 5.4).

5.1 Zu den Begriffen Leitidee und Kompetenz

Der Grundgedanke einer Leitidee findet sich bereits Mitte des letzten Jahrhundert wieder:

> „Die hauptsächlichen Ideen, welche der Mathematik zugrunde liegen, sind durchaus nicht ausgefallen oder esoterisch. Sie sind abstrakt. Doch eines der wichtigsten Ziele, um derentwillen Mathematik in eine allgemeine Bildung aufgenommen wird, besteht ja gerade in der Schulung des Schülers im Umgang mit abstrakten Ideen.“ (WHITEHEAD 1962, S. 24).

Durch hauptsächliche Ideen kann „jedem Kind auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form gelehrt werden“ (BRUNER 1973, S. 44). BRUNER (1973) plädiert für die Aufnahme von

[31] In Relation zum OECD-Durchschnitt.

hauptsächlichen Ideen[32] auf einer höheren Stufe, um sie mit neuen Inhalten anzureichern. Dieses Spiralprinzip bildet die Grundlage der heutigen Leitideen in den Bildungsstandards. Doch was genau ist darunter zu verstehen? Leitideen sind „ein Bündel von Handlungen, Strategien und Techniken, die

(1) in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,

(2) tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,

(3) als Ideen zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, geeignet erscheinen,

(4) den mathematischen Unterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können,

(5) in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp besitzen.“ (SCHWEIGER 1992, S. 207).

Jedoch verweist SCHWEIGER (1992) darauf, dass der Begriff der Leitidee[33] vage ist und verschiedene didaktische und pädagogische Auffassungen von Mathematik einfließen. Von den genannten Punkten erachten wir den zweiten Aspekt als maßgebend und gehen daher in Kapitel 6 auf tragfähige Grundvorstellungen wichtiger Begriffe ein, die eine Verallgemeinerung im Sinne einer vertikalen Vernetzung ermöglichen.

In den 90er Jahren entstand ein Katalog von Leitideen, der demjenigen aus den Bildungsstandards sehr ähnelt. Im Einzelnen sind dies Zahl, Messen, räumliches Strukturieren, funktionaler Zusammenhang, Algorithmus und mathematisches Modellieren (vgl. HEYMANN 1996, S. 174). Ebenso wie die Leitideen der Bildungsstandards durchziehen sie verschiedenste Teilgebiete der Mathematik (z. B Analysis, Stochastik). Für diese Arbeit ist vor allem die Leitidee funktionaler Zusammenhang von Interesse, da in der Wirtschaftsmathematik eine ökonomische Größe in funktionaler Abhängigkeit zu einer weiteren Größe steht. So hängen z. B. die Kosten von der produzierten Menge ab. Die Leitidee funktionaler Zusammenhang „erweist sich als ein universelles Mittel, meßbare Veränderungen in unserer Welt theoretisch zueinander in Beziehung zu setzen und symbolisch zu verarbeiten“ (HEYMANN 1996, S. 178). Die Schüler können die Zusammenhänge zweier Größen zunächst umgangssprachlich erkannt haben (z. B. je mehr A, desto mehr B), bevor sie diese mathematisch präzise erfassen.

[32]Brunner selbst spricht von fundamentalen Ideen.
[33]Auch SCHWEIGER 1992 verwendet den Begriff der fundamentalen Idee.

Neben der Auseinandersetzung mit Leitideen sollen Schüler im Mathematikunterricht Kompetenzen erwerben. Doch was ist unter diesem Begriff zu verstehen? Nach WEINERT (2001) sind Kompetenzen...

> „[...] die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können." (WEINERT 2001, S. 27).

Allgemein lässt sich in den Bildungsstandards Mathematik eine deutliche Verschiebung der ehemaligen Input-Orientierung hin zur Ausbildung von überdauernden Kompetenzen festhalten. Schüler sollen nicht nur rechnerische Verfahren anwenden, sondern die „Mathematik als Werkzeug zur Modellierung und geistigen Gestaltung der Umwelt" (vgl. VOM HOFE 2003, S. 4) begreifen. Doch welche Kompetenzen sind für den Mathematikunterricht maßgebend? Die Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss (vgl. KMK 2004) und für die allgemeine Hochschulreife (vgl. KMK 2012) unterscheiden fünf nach Leitideen unterteilte, inhaltsbezogene Kompetenzen und sechs allgemeine mathematische Kompetenzen, wie Abbildung 5.1 zeigt.

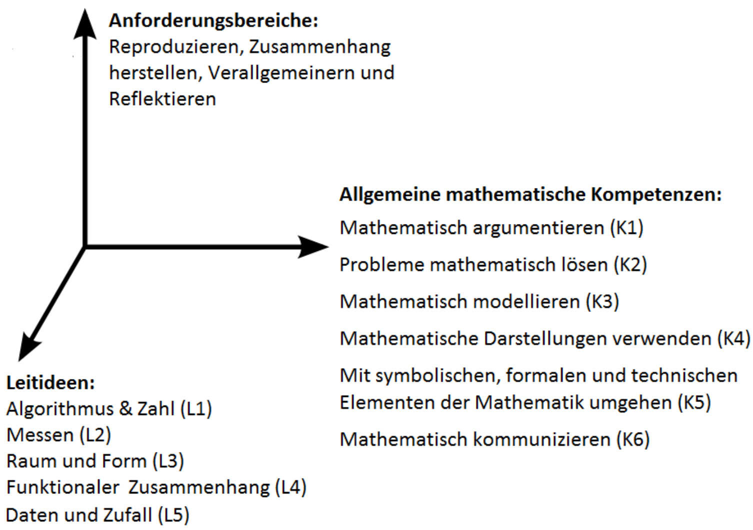


Abbildung 5.1: Kompetenzmodell der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (eigene Darstellung)

Von den inhaltsbezogenen Kompetenzen nimmt im Bereich der Wirtschaftsmathematik die Leitidee **funktionaler Zusammenhang (L4)** eine zentrale Stellung ein. Die dort aufgeführten Ziele passen u. E. am Besten zu den in den Kapiteln 1 bis 3 beschriebenen fachtheoretischen Inhalten. Daher betrachten wir die Leitidee funktionaler Zusammenhang in Abschnitt 5.2 genauer. Die weiteren Leitideen (Zahl, Messen, Raum und Form, Daten und Zufall) sind im Folgenden zu vernachlässigen. Von den allgemeinen mathematischen Kompetenzen[34] heben wir die Kompetenz **mathematisch modellieren (K3)** hervor, denn die Wirtschaftsmathematik stellt ein Anwendungsgebiet der Mathematik dar. Neben der Analyse ökonomischer Funktionen sollen Schüler verstehen, wie das Modell z. B. einer linearen Preis-Absatz-Funktion entsteht. Daher widmen wir dem Modellierungsprozess in 5.3 einen eigenen Abschnitt.

5.2 Die Leitidee funktionaler Zusammenhang

In den Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss sind unter der Leitidee funktionaler Zusammenhang einzelne Ziele formuliert, die insbesondere auf die Begriffe Funktionen und Gleichungen eingehen. Die Schüler sollen u. a. (vgl. KMK 2004, S. 11 f.)

- lineare, quadratische und exponentielle Funktionen zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge und realitätsnaher Probleme nutzen,
- verschiedene Darstellungen von Funktionen analysieren sowie interpretieren,
- charakteristische Merkmale von Funktionen auch anhand des Graphen bestimmen,
- Veränderungen von Größen mittels Funktionen beschreiben,
- zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen angeben,
- lineare Gleichungssysteme (LGS) graphisch interpretieren,
- lineare und quadratische Gleichungen kalkülmäßig lösen sowie auf ihre Lösbarkeit überprüfen.

Realitätsnahe Probleme im Umfeld linearer Funktionen sind z. B. die Analyse einfacher Handytarife. Sie stellen den funktionalen Zusammenhang zwischen der Zeit sowie den Kosten dar und können als Tabelle, als Graph oder auch als Funktionsterm angegeben werden. Ein Vergleich von Handytarifen führt auf ein lineares Gleichungssystem (LGS), dessen Lösung zum Vergleich von Gebühren dient. Parabeln dienen oft zur Beschreibung von Sprüngen oder Würfen. In diesem Kontext sind meist der Scheitel und Schnittpunkte mit den Achsen anzugeben. So führt z. B. die Berechnung der Nullstellen

[34] Auf die Unterteilung allgemeiner mathematischer Kompetenzen in Anforderungsbereiche gehen wir im Rahmen dieser Arbeit nicht ein.

einer Parabel auf eine quadratische Gleichung. Zinseszinseffekte lassen sich mit Exponentialfunktionen verdeutlichen.

Die Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife führen unter der Leitidee funktionaler Zusammenhang die Standards aus dem mittleren Schulabschluss fort. Die funktionalen Vorstellungen aus der Sekundarstufe I werden durch die Begriffe Ableitung und Integral ergänzt. Die Schüler sollen u. a. (vgl. KMK 2012, S. 20)

- die Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate, auf erhöhtem Anforderungsniveau auch als lokale Linearisierung deuten,
- die aus der Sekundarstufe I bekannten Funktionen mittels Summen- und Faktorregel ableiten,
- die Ableitung nutzen, um Funktionen auf Monotonie und Extrema zu untersuchen,
- die Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion vergleichen und interpretieren.

Um die Ableitung als lokale Änderungsrate zu interpretieren, wird oft die Momentangeschwindigkeit als Einstieg verwendet. Weitere Grundvorstellungen der Ableitung wie die lokale Linearisierung treten im Mathematikunterricht noch in den Hintergrund. In Abschnitt 6.3 gehen wir auf diese Problematik vertiefend ein. Mit dem Beherrschen grundlegender Ableitungsregeln lassen sich Aussagen über das Monotonieverhalten von Funktionen treffen. Lokale Extremstellen können mittels des Vorzeichenkriteriums der 1. Ableitung untersucht werden. An den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion lassen sich die Zusammenhänge zur Monotonie und zu lokalen Extremstellen veranschaulichen. Darüber hinaus sollen die Schüler Produkte und Verkettungen von Funktionen zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen. Dementsprechend sind sowohl die Produktregel als auch auf erhöhtem Anforderungsniveau die Kettenregel zu vermitteln. In vielen Schulbüchern wie etwa Lambacher Schweizer (vgl. FREUDIGMANN et al. 2009, S. 54 ff.) oder Elemente der Mathematik (vgl. GRIESEL et al. 2001, S. 30 ff.) findet parallel die Einführung der natürlichen Exponentialfunktion statt.

Es bleibt zu prüfen, welche Ziele unter der Leitidee funktionaler Zusammenhang mittels Wirtschaftsmathematik erreicht werden können. Da diese curricular vorgeschrieben sind, versuchen wir diese in die Unterrichtsvorschläge zu integrieren. Dabei spielt die allgemeine mathematische Kompetenz des Modellierens eine große Rolle, die wir im Folgenden genauer untersuchen.

5.3 Allgemeine mathematische Kompetenz Modellieren

Im Zuge der Anwendungsorientierung werden Schüler unausweichlich mit der Thematik des Modellierens konfrontiert. Das mathematische Modellbilden ist in Situationen geeignet, „in denen das Beziehungsgeflecht zwischen Mathematik auf der einen und „Wirklichkeit“ auf der anderen Seite nicht mehr ohne weiteres zu durchschauen ist“ (HEYMANN 1996, S. 181). Dies gilt auch für die Wirtschaftsmathematik:

> „Die Analysis hat [...] in den Wirtschaftswissenschaften an Bedeutung gewonnen. Beispiele für Modellierungen wirtschaftlicher Prozesse, die für den Analysisunterricht in Frage kommen, sind: Theorie der Marktpreisbildung, Kosten, Erlös- und Gewinntheorie [...].“ (TIETZE et al. 2000, S. 207).

Dies zeigt, dass die in Kapitel 1 bis 3 aufgeführten fachtheoretischen Inhalte für den Mathematikunterricht geeignet sind. Durch das Aufstellen eines Modells können die Schüler verstehen, wie etwa der Funktionsterm einer Nachfragefunktion entsteht. Nach den Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss beinhaltet ein Modellierungsprozess

– „den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,

– in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,

– Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.“ (KMK 2004, S. 8).

Die Ausgangssituation stellt ein reales Problem dar, das „in die Sprache der Mathematik übersetzt“ (GREEFRATH 2010, S. 228) wird. Dessen Bearbeitung führt zu einer mathematischen Lösung, die im Kontext der Ausgangssituation am Ende validiert und interpretiert wird. Eine im Allgemeinen sehr geschätzte Erweiterung dieses Konzeptes, ist bei BLUM und LEISS (2005) zu finden. Neben dem mathematischen Modell unterscheiden sie in ein reales Modell, wie Abbildung 5.2 zeigt. Zu Beginn steht das Verstehen der realen Situation (a). Es folgt die Vereinfachung und Strukturierung der Situation (b). Danach schließt sich die Übersetzung in das mathematische Modell (c) sowie dessen Bearbeitung (d) an. Abschließend erfolgt eine Rückinterpretation einschließlich einer Überprüfung (e) der erhaltenen Ergebnisse (vgl. BLUM et al. 2011, S. 41). Erscheinen die Resultate nicht sinnvoll, ist der Modellierungskreislauf durch eine Veränderung des Realmodells erneut zu durchlaufen. BLUM und LEISS (2005) beschränken sich nicht auf die Kompetenz des Modellierens. Bei der Übersetzung des Problems sollen die Schüler Mathematisch kommunizieren und bei der Arbeit im mathematischen Modell mit Mathematik symbolisch, formal und technisch umgehen.

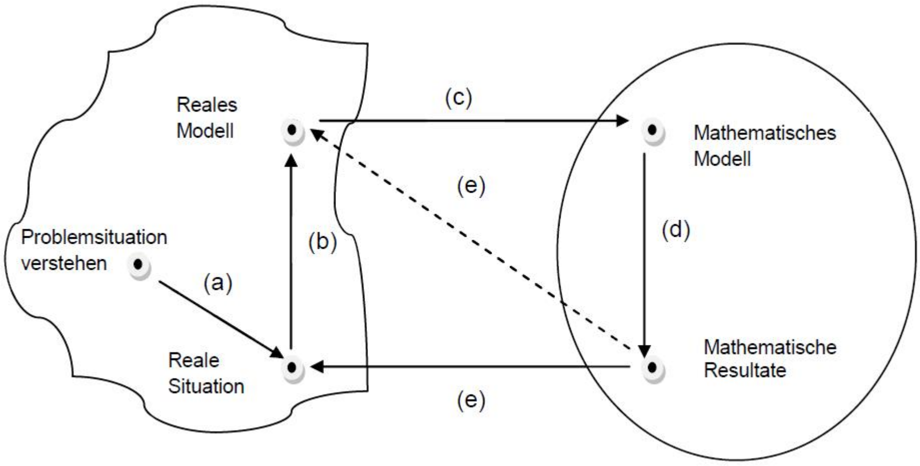


Abbildung 5.2: Modellierungskreislauf nach BLUM und LEISS (2005) (eigene Darstellung)

Zentral im Modellierungskrauslauf nach BLUM und LEISS (2005) ist die Unterscheidung von realem und mathematischem Modell. Ein analoges Vorgehen im Modellierungsprozess empfehlen TIETZE et al. (2000):

> „Das Entwickeln vereinfachter Modelle der Realität, das Übersetzen solcher Realmodelle in mathematische Sachverhalte (Mathematisieren), das Lösen eines Problems in einer mathematisierten Form und schließlich das kritische Interpretieren dieser Ergebnisse im Realmodell und damit das Überprüfen des Modells (Validieren).“ (TIETZE et al. 2000, S. 28).

TIETZE et al. (2000) greifen den Gedanken von HEYMANN (1996) zum kritischen Vernunftgebrauch auf, denn Modellbildungen können zu einem falschen Bild der Realität führen. Daher ist zu prüfen, zu welchen Ausblendungen „die Beschränkung auf Berechenbares, auf Mathematisierbares“ (vgl. HEYMANN 1996, S. 84) verleitet. Für eine sinnvolle Modellierung im Unterricht, die das vollständige Durchlaufen des Modellierungskreislaufs erfordert, sind Modellierungsaufgaben zu stellen. Diese bezeichnen „realitätsbezogene, authentische und häufig offene Problemstellungen [...], die es erfordern, einen vollständigen Modellierungsprozess auszuführen“ (ZÖTTEL und REISS 2010, S. 21). Damit eine Modellierungsaufgabe entsprechende Kompetenzen fördert, empfiehlt KUNZE (2000) diese an den Leitideen auszurichten. Es stellt sich jedoch die Frage, in wie fern einzelne Aufgaben für ein längerfristiges Verstehen und Handeln geeignet sind. Führt doch erst ein Üben, Wiederholen sowie ein Aufgreifen auf einer höheren Ebene zu einer tieferen Auseinandersetzung mit dem Lernstoff. Diese Ansicht findet Unterstützung:

> „Realitätsbezogene Anwendungskontexte können als Klammer für Vernetzungen im Sinne der Umwelterschließung mit mathematischen Mitteln dienen, insbesondere wenn sie öfters wieder aufgenommen und mit Hilfe neu erworbener oder zu erwerbenden Mitteln vertieft werden." (SILLER 2012, S. 46).

Dies gilt auch für Anwendungen wie der Wirtschaftsmathematik mit ihren eigenen Begriffen und Zusammenhängen. Einzelne Aufgaben erachten wir für einen längerfristigen Lernprozess als ungeeignet. Daher entwickeln wir aufeinander aufbauende Unterrichtseinheiten, die mathematische und ökonomische Inhalte auf höheren Ebenen wieder aufgreifen.

5.4 Konsequenzen für die Unterrichtsentwicklung

Die vorherigen Abschnitte geben einen Einblick in die Bildungsstandards Mathematik. Für den Erwerb überdauernder Kompetenzen erachten wir die Erstellung zusammenhängender Unterrichtseinheiten, wie sie auch SILLER (2012) fordert, geeigneter als die Angabe einzelner Aufgaben. Dabei orientieren wir uns an den Zielen der Leitidee funktionaler Zusammenhang aus den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (vgl. KMK 2004) und denjenigen für die allgemeine Hochschulreife (vgl. KMK 2012). So ist gewährleistet, dass die Unterrichtseinheiten (UE) curricular begründet sind und in den bestehenden Unterricht eingearbeitet werden können. Fachtheoretisch greifen wir die in Teil I aufgeführten Inhalte auf. Die Unterrichtseinheiten lauten wie folgt:

> *(UE1) Von Märkten und Unternehmen*: Modellierung von Angebot und Nachfrage mittels linearer Funktionen und Analyse grundlegender ökonomischer Funktionen zur optimalen Preisbestimmung
>
> *(UE2) Änderung ökonomischer Funktionen I*: Differenzialrechnung im Umfeld ökonomischer Funktionen und Bedeutung der 1. Ableitung als Grenzfunktion
>
> *(UE3) Änderung ökonomischer Funktionen II*: Weiterführung der Differenzialrechnung mittels der 2. Ableitung einer ökonomischen Funktion und mittels Analyse der natürlichen Exponentialfunktion im ökonomischen Kontext.

In der (UE1) greifen wir die Ziele der Leitidee funktionaler Zusammenhang der Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss auf. Zu den in Abschnitt 5.2 aufgeführten Zielen passen die fachtheoretischen Inhalte aus Kapitel 1. Als Einstieg bietet sich ein Preisfindungsprozess an. Anhand diesem lernen die Schüler verschiedene Marktformen und die Funktionen ökonomischer Größen wie Erlös, Kosten sowie Gewinn kennen. Dabei können folgende Ziele erreicht werden:

– Mittels linearer Funktionen lassen sich Nachfrage und Kosten modellieren. Daraus folgen quadratische Funktionen zur Beschreibung von Erlös und Gewinn eines monopolistischen Anbieters. Für einen polypolistischen Anbieter ergibt sich eine lineare Erlösfunktion.

– Eine Preis-Absatz-Funktion im Monopol kann z. B. als Graph in einer Tabelle oder auch als Funktionsterm dargestellt werden. Je nach Darstellungsform sind verschiedene Eigenschaften (z. B. Monotonie) zu analysieren.

– Eine Gewinnfunktion ist auf charakteristische Punkte zu untersuchen, wie das Gewinnmaximum, die Gewinnschwelle oder auch Gewinngrenze. Dabei entstehende lineare oder quadratische Gleichungen sind kalkülhaft zu lösen.

– Liegt z. B. der Erlös als Funktion in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge vor, so kann untersucht werden, welchen Einfluss die Veränderung des Absatzes auf den Erlös besitzt.

– Zu einer gegebenen quadratischen Funktion können die Schüler einen möglichen wirtschaftstheoretischen Sachverhalt angeben. Dabei ist darauf zu achten, dass die Funktion einen sinnvollen ökonomischen Verlauf besitzt.

– Der Vergleich von Angebots- und Nachfragefunktion führt auf ein lineares Gleichungssystem. Dessen Lösung kann als Marktgleichgewicht interpretiert werden.

Zusätzlich bieten wir ein Ergänzungsmodul an, mit dem die Schüler die einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufs reflektieren. Insbesondere Realmodell und mathematisches Modell sind zu unterscheiden. Ein weiteres Ergänzungsmodul beinhaltet den Preisfindungsprozesse in der Marktform der monopolistischen Konkurrenz, in dem die Schüler ihre Kenntnisse aus dem Basismodul vertiefen können.

In der (UE2) beziehen wir den Ableitungsbegriff zur Analyse ökonomischer Funktionen mit ein. Wir beschränken uns zunächst auf die erste Ableitung, um die neuen ökonomischen Inhalte nicht durch zu viele mathematische Themen zu behindern. Gleichzeitig hebt dieses Vorgehen die Bedeutung der ersten Ableitung hervor. Zu den in Abschnitt 5.2 aufgeführten Zielen der Leitidee funktionaler Zusammenhang zum Ableitungsbegriff passen die fachtheoretischen Inhalte aus dem Kapitel 2. Es können folgende Ziele erreicht werden:

– Ausgehend von der lokalen Änderungsrate ist die Ableitung ökonomischer Funktionen zu untersuchen.

– Mittels Grenzfunktion sind Erlös- und Gewinnfunktionen auf lokale Extremwerte zu untersuchen. Die Schüler sollen im Umfeld der Ableitung charakteristische Punkte von Funktionstermen bestimmen.

– Anhand des Graphen z. B. des Grenzgewinns sind Aussagen über den Graphen der Gewinnfunktion zu folgern und umgekehrt. Rechnerische Verfahren fußen damit auf anschaulichen Zusammenhängen.

Es bleibt zu prüfen, ob Grenzfunktionen zur Vermittlung zu der in den Bildungsstandards geforderten Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate geeignet sind (vgl. Abschn. 6.3). In Ergänzungsmodulen widmen wir uns im Umfeld der ersten Ableitung den Themen Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz und Preis-Elastizität der Nachfrage. Die Bedeutung der zweiten Ableitung ergänzen wir anschließend in (UE3). Fachwissenschaftlich orientieren wir uns dabei an den verbleibenden Inhalten aus den Kapiteln 2 und 3, die mittels erster und zweiter Ableitung beschrieben werden können. Im Einzelnen lassen sich folgende Ziele der Leitidee funktionaler Zusammenhang erreichen:

– Die Schüler sollen die Bedeutung der zweiten Ableitung z. B. mittels ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen erarbeiten. Das Minimum der Grenzkosten führt auf den Begriff des Wendepunkts einer Funktion.

– Ökonomische Problemstellungen wie etwa das Bestimmen des maximalen Erlöses lassen sich im Umfeld der natürlichen Exponentialfunktion analysieren. Dabei entstehende Gleichungen sind mittels höherer Ableitungsregeln (Ketten-, Produktregel) zu lösen.

Als Ergänzung zu dieser Unterrichtseinheit bieten sich die Inhalte Funktionen mit zwei Variablen sowie Elastizitätsfunktionen an. Insgesamt zeigt sich, dass mit der Wirtschaftsmathematik die unter der Leitidee funktionaler Zusammenhang in Abschnitt 5.2 aufgeführten Ziele weitestgehend erreicht werden können.

Die Aufgaben der Unterrichtseinheiten sollen für die Schüler vielfältige Lerngelegenheiten zum Erwerb von Kompetenzen bieten. Eine Beschränkung der Aufgaben auf die Operatoren „Berechne“ und „Bestimme“, wie dies in vielen Lehrbüchern zur Wirtschaftsmathematik der Fall ist, lehnen wir ab. Andererseits müssen Schüler eine Grundlage an mathematischen Werkzeugen beherrschen. Die folgende Aufgabe verdeutlicht die Differenzierung nach allgemeinen mathematischen Kompetenzen ausgerichtet an der Leitidee funktionaler Zusammenhang.

Ein Busunternehmen reserviert pro Wochenende 400 *Plätze für eine Fahrt in die Berge. In der Tabelle sind von den letzten drei Wochenenden jeweils der Preis pro Person und die Anzahl der zahlenden Mitfahrer aufgelistet. Modellieren Sie mittels Regression eine lineare, quadratische und exponentielle Nachfragefunktion* $x(p)$. *Was spricht für die exponentielle Funktion?*

Woche	**Preis pro Fahrkarte**	**Anzahl Reisender**
1	€20	125
2	€30	50
3	€60	6

Das Erstellen des Modells einer Regression fällt unter die Kompetenz Mathematisch modellieren. Zeichnen die Schüler die Funktionen oder geben sie die jeweilige Wertetabelle an, verwenden sie mathematische Darstellungen. Anschließend müssen sie kommunizieren, welches Modell am sinnvollsten zur Ausgangssituation passt. Dabei können sie mathematisch aber auch ökonomisch argumentieren. Die Aufgabe verdeutlicht, dass Kompetenzen nicht isoliert betrachtet, sondern gleichzeitig gefordert werden.

Die Bildungsstandards formulieren Ziele, die die Schüler erreichen sollen. Zwar ist damit der curriculare Rahmen der Unterrichtseinheiten gesteckt und legitimiert, es verbleibt jedoch die Wahl der Inhalte zu begründen sowie zu reihen. Vor allem zur Vermittlung des Ableitungsbegriffs existieren verschiedene Positionen. Die Bildungsstandards geben die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderung vor. Aber ist diese mit ökonomischen Funktionen überhaupt sinnvoll zu vermitteln? Weiterhin besteht das Problem, dass nicht jedes Thema im ökonomischen Kontext sinnvoll umzusetzen ist. So finden z. B. trigonometrische Funktionen nur schwerlich Anwendung zu den fachtheoretischen Inhalten dieser Arbeit. Daher werfen wir in Kapitel 6 einen Blick auf die Didaktik der Analysis, um unsere Unterrichtseinheiten nicht nur im Hinblick auf die Bildungsstandards, sondern auch didaktisch zu legitimieren.

6 Didaktik der Analysis

Zu Beginn dieses Kapitels erfolgt ein kurzer Überblick über die Geschichte der Analysis im Mathematikunterricht (Abschn. 6.1). Verschiedene Positionen der Zeit zeigen, wie sich der Analysisunterricht bis heute entwickelt hat. Anschließend geben wir eine Übersicht zu den fundamentalen Ideen der Analysis (Abschn. 6.2), an denen wir die Unterrichtsvorschläge orientieren. Insbesondere die fundamentale Idee der Approximation zeigt sich als tragfähig. Hierbei spielen Grundvorstellungen des Ableitungsbegriffes eine große Rolle. Es wird diskutiert, welche Zugänge es zu diesem Begriff gibt und welcher u. E. für die Wirtschaftsmathematik am geeignetsten ist (Abschn. 6.3). Aus den zuvor genannten Inhalten folgern wir Konsequenzen für die Unterrichtsvorschläge (Abschn. 6.4).

6.1 Historischer Überblick

In diesem Abschnitt zeichnen wir den Weg der Analysis in der Schulmathematik nach. Dabei interessiert vor allem deren frühere Umsetzung im Mathematikunterricht, um die zeitliche Entwicklung aktueller Positionen deutlicher aufzeigen zu können. In den 60er Jahren war die Mathematikdidaktik geprägt von der klassischen aufgabenorientierten Schulanalysis (vgl. BLUM 1995, S. 3), die als „Aufgabendidaktik" (LENNÉ 1969, S. 35) bezeichnet wird. Kennzeichen dieses „Stofforganisationsprinzips" (REZAT 2009, S. 95) ist die Einübung mathematischer Fertigkeiten anhand von unverbundenen Aufgabenserien. Durch die starke Gewichtung rechnerischer Aspekte beherrschten Schüler zwar zuverlässig mathematische Fertigkeiten, konnten diese aber nicht auf realitätsnahe Probleme übertragen (vgl. BRUDER et al. 2015, S. 24). Dadurch geriet die Aufgabendidaktik in die Kritik:

> „Die Aufgabendidaktik ist als Totalmethode von verschiedenen Gesichtspunkten aus unannehmbar; Fachlich gesehen läßt sie sowohl die prozeßhaften als auch die systematischen Züge der Mathematik weitgehend unberücksichtig. Psychologisch ist sie ähnlich einzuordnen wie die behavioristischen Ansätze [...]. Pädagogisch gesehen sind ihr eine Vernachlässigung kognitiver Strategien und der ungünstige Einfluß des mit ihr verbundenen Lernverfahrens auf die Persönlichkeitsentwicklung der Schüler anzulasten [...]." (WITTMANN 1981, S. 146).

In den 70er Jahren folgte die Neue Mathematik, die auf „modernere wissenschaftliche Entwicklungen reagierte und eine topologisch und mengentheoretisch geprägte, mathematisch präzise Schulanalysis forderte" (BRUDER et al. 2015, S. 167). Der Mathematikunterricht orientierte sich an den Anfängervorlesungen der Universitäten - Beweise wurden streng formal geführt und eine innermathematische Herangehensweise bevorzugt. Als axiomatisch, deduktiv geordnete Welt entwickelte sich die Analysis „endgültig zum dominanten Lernbereich der Oberstufenmathematik“ (DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 218). Jedoch zeigten sich in der universitären Vorgehensweise didaktische Schwierigkeiten:

> „[...] die Erarbeitung der Grundlagen erfordert eine längere Zeit schwieriger Begriffserklärungen, Anwendungen werden weit hinausgeschoben [...], das Verständnis der Begriffe bleibt den meisten Schülern dennoch verschlossen; zudem sind die Möglichkeiten für Motivationen beschränkt. Insgesamt wird das Bild der Mathematik durch eine rein systematische Vorgehensweise verfälscht, fundamentale Ideen und Methoden verdeckt.“ (TIETZE et al. 1982, S. 91).

Aufgrund der starken Kritik an der Neuen Mathematik entstand ab Mitte der 70er Jahre „eine Rückbesinnung auf Verknüpfungen des Mathematikunterrichts mit anderen Disziplinen“ (BÜLTMANN 2004, S. 3). Realitätsnaher und fächerübergreifender Unterricht war die Folge. An Stelle der vorherrschende Strenge der Neuen Mathematik trat eine größere Anschaulichkeit im Mathematikunterricht. Mit vielfältigen Anwendungen und der Orientierung an fundamentalen Ideen sollen „adäquate Grundverständnisse und Grundvorstellungen vermittelt werden, welche die Schüler zu einem verständigen Handhaben der wesentlichen Begriffe, Methoden und Regeln der Analysis befähigen“ (TIETZE et al. 1982, S. 91). Dies bekräftigt auch VOM HOFE (2003):

> „Wichtiger und grundlegender als Formalismen ist zunächst das Aufbauen von Grundvorstellungen zu neuen Inhalten, das durch eine zu frühe Schematisierung behindert werden kann.“
> (VOM HOFE 2003, S. 8).

Grundvorstellungen wichtiger Begriffe können dazu beitragen, dass Schüler diese Begriffe hinter einer Problemstellung identifizieren und mit den entsprechenden Werkzeugen bearbeiten. Die Tendenz zum Ausbau einer vorstellungsorientierten Analysis ist nach wie vor aktuell, denn Grundvorstellungen sind „Übersetzungsscharniere zwischen realen Situationen und mathematischen Konzepten“ (HUSSMANN und PREDIGER 2010, S. 35). Insbesondere tragfähige Vorstellungen von Ableitungs- und Integralbegriff stehen in der Diskussion. Immer leistungsfähigere Taschenrechner unterstützen dieses Vorgehen, da diese es dem Schüler ermöglichen, den Fokus weg vom Kalkül hin zum Anschaulichem zu lenken. In den folgenden Abschnitten gehen wir auf fundamentale Ideen der Analysis, tragfähige Vorstellungen sowie den Rechnereinsatz im Unterricht ein.

6.2 Fundamentale Ideen der Analysis

In Abschnitt 6.1 wird häufig der Begriff der fundamentalen Idee genannt. SCHWEIGER (1992) unterscheidet in fundamentale Ideen der Mathematik und eines Teilgebiets wie der Analysis[35]. Die in den Bildungsstandards Mathematik aufgeführten Leitideen sind unter fundamentalen Ideen der Mathematik einzuordnen. Sie vereinigen „Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete“ (KMK 2004, S. 9), die ein mathematisches Curriculum spiralförmig durchziehen. Eine Orientierung der Unterrichtsvorschläge an den Leitideen ist u. E. aber wenig sinnvoll. Diese sind für die Wirtschaftsmathematik zu allgemein gefasst und finden dort nicht alle Verwendung. Daher suchen wir im Bereich der Analysis nach nach einer Liste fundamentaler Ideen, wie sie etwa TIETZE et al. (1982) angeben[36]. Sie unterscheiden:

1) Fundamentale Ideen mit vorbereitendem Charakter: Hierzu gehören reelle Zahlen, reelle Funktionen, Grenzwerte sowie Stetigkeit.

2) Fundamentale Ideen mit Bezug zur Differenzial- und Integralrechnung: Diese sind Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit, Differenzialgleichungen, der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Ableitungsregeln sowie zentrale globale Sätze wie z. B. der Monotoniesatz (vgl. TIETZE et al. 1982, S. 102).

Die Auflistung orientiert sich jedoch stark an Inhalten und besitzt fast schon Lehrbuchcharakter. Dies ist problematisch, da sich Inhalte im Mathematikunterricht ändern. So ist etwa der Grenzwertbegriff kein fester Bestandteil aktueller Bildungsstandards. Es wird lediglich auf die Verwendung eines „propädeutischen Grenzwertbegriffs“ (KMK 2012, S. 18) hingewiesen. Geeigneter erscheint uns der Kanon fundamentaler Ideen von DANCKWERTS und VOGEL (2006). Er lautet:

> **Messen, funktionaler Zusammenhang, Änderungsrate, Approximieren und Optimieren.**

Diese Auswahl besitzt den Vorteil, dass sie weitestgehend unabhängig von Inhalten ist. Wir sehen darin die Chance, einen curricularen Entwurf der Wirtschaftsmathematik vertikal zu gliedern sowie unsere Unterrichtsvorschläge daran auszurichten, wie dies auch SCHWEIGER (1992) fordert. Im weiteren Verlauf gehen wir im Rahmen dieser Arbeit insbesondere auf die fundamentale Idee der Approximation ein. Die fundamentalen Ideen der Analysis durchziehen somit ein Spiralcurriculum, so dass sie auf höherer Ebene erneut aufgegriffen und mit weiteren Inhalten angereichert werden.

---

[35] SCHWEIGER (1992) führt dazu die Begriffe „universelle“ sowie „zentrale Ideen“ein.

[36] TIETZE et al. (1982) sprechen an dieser Stelle noch von Leitideen.

Ein entscheidender Moment dieses Prozesses ist „die Entwicklung und Veränderung von Grundvorstellungen“ (VOHNS 2005, S. 62). Erst dadurch werden fundamentale Ideen im Unterricht konkretisiert. Insbesondere sollen Schüler „adäquate und tragfähige Grundvorstellungen von den wesentlichen Begriffen und Methoden der Analysis aktiv und kohärent aufbauen“ (BLUM 1995, S. 4), was auch wir unterstützen. Er spricht sich für die Grundvorstellung der Ableitung als Änderungsrate, etwa in Form des Grenzsteuersatzes als lokale Änderungsrate der Einkommensteuer aus. HUSSMANN und PREDIGER (2010) schließen sich BLUM (1995) an, erweitern jedoch dessen Konzept. Sie betonen die Grundvorstellung der Ableitung als (vgl. HUSSMANN und PREDIGER 2010, S. 36):

- lokale Änderungsrate
- lokale lineare Approximation
- Tangentensteigung.

Von den genannten tragfähigen Grundvorstellungen ist im Analysisunterricht die Ableitung als lokale Änderungsrate fest verankert. Die lokale lineare Approximation findet jedoch wenig Verwendung. Daher prüfen wir in Abschnitt 6.3, welche der genannten Grundvorstellungen zur Vermittlung des Ableitungsbegriffs im Analysisunterricht im Umfeld ökonomischer Funktionen in Frage kommen. Denn Differenzieren stellt einen der „wichtigsten infinitesimalen Prozesse“ (TIETZE et al. 1982, S. 86) der Analysis dar.

Eine Orientierung curricularer Entwürfe an fundamentalen Ideen, die durch tragfähige Grundvorstellungen konkretisiert werden, führt nach DANCKWERTS und VOGEL (2006) zu einer Integration der drei Grunderfahrungen nach WINTER (1995) (vgl. Abschn. 4.1). Zur Unterstützung empfehlen sie, Möglichkeiten zur horizontalen und vertikalen Vernetzung bereitzustellen sowie echte Anwendungen zu behandeln (S. 9). Eine vertikale Vernetzung findet durch den Begriff der Fläche statt. Sie findet Anwendung von der Berechnung einfacher Flächeninhalte geometrischer Objekte bis hin zum Integral. Horizontal können Geraden vernetzt werden, die sowohl in der Analysis als auch in der Vektorgeometrie Bestandteil sind. Während der Schnitt zweier Geraden sich an der zweiten Grunderfahrung von WINTER (1995) orientiert, zielt die Frage nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden der Darstellungsform in beiden Teilgebieten auf die dritte ab. Echte Anwendungen finden sich z. B. in den Finanzwissenschaften. So modellieren LUDERER und DENNHARD (2011) mittels Differenzial- und Integralrechnung Beiträge von Risikolebensversicherungen. Bei DAUME (2016) findet sich ein Unterrichtsgang zur Einkommenssteuer, was insbesondere die erste Grunderfahrung von WINTER (1995) integriert.

6.3 Zur Vermittlung des Ableitungsbegriffs im Mathematikunterricht

Ein klassischer Zugang zum Ableitungsbegriff im Mathematikunterricht erfolgt über die Suche nach einer Tangente als Grenzlage von Sekanten an einen Funktionsgraphen (vgl. DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 45). Die Steigung m_s einer Sekante lässt sich für eine auf dem Intervall $I = [a, x]$ definierte Funktion f über den Differenzenquotienten berechnen. Es gilt:

$$m_s = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{6.1}$$

Strebt in Gleichung (6.1) $x \to a$, geht anschaulich die Sekante in die Tangente über. Für eine Funktion f, die an einer Stelle a definiert ist, heißt der Grenzwert aus Gleichung (6.1) **Ableitung** von f an der Stelle a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet[37] mit:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{6.2}$$

Eine Funktion, für die der Grenzwert aus Gleichung (6.2) existiert heißt **differenzierbar** an der Stelle a. Mittels Ableitung können wir eine exakte Definition der Tangente an einem Funktionsgraphen angeben. Die Gerade durch $P\,(a|f(a))$ mit der Steigung $f'(a)$ heißt Tangente an den Graphen von f in P. Es gilt:

$$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \tag{6.3}$$

Die Bestimmung der Tangente ist in den Wirtschaftswissenschaften bis auf wenige Ausnahmen (vgl. Kap. 2.2.2) nicht gefordert. Dies ist bedauerlich, da Tangenten in Schulbüchern wie etwa Lambacher Schweizer (vgl. BRANDT et al. 2008, S. 31) als auch in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife (vgl. KMK 2012, S. 28) aufgeführt sind. Doch ist dieser geometrische Ansatz zur Bestimmung der Tangentensteigung im Mathematikunterricht überhaupt geeignet, um den Ableitungsbegriff zu vermitteln? Zwar liefert der Übergang von der Sekante zur Tangente einen anschaulichen Einstieg zum Ableitungsbegriff, problematisch ist jedoch die „Vermischung geometrischer, analytischer und algebraischer Argumente und Sichtweisen“ (DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 50). Daher ist dieser Einstieg für den schulischen Unterricht nicht ratsam. Diese Aussage wird durch die mehrjährige praktische Erfahrung des Autors der vorliegenden Arbeit gestützt: Der Übergang von der Sekante zur Tangente ist anschaulich nachvollziehbar. Jedoch zeigen sich in der anschließenden algebraischen Bestimmung der Tangentensteigung mittels Differenzenquotienten in der Praxis

[37] Zu (6.2) exisitieren analoge Schreibweise für f' an der Stelle x_0 mit $\frac{df}{dx}\mid_{x=x_0}$ oder auch $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Probleme. Grund sind die in Gleichung (6.2) durchzuführenden Termumformungen, die eine Grenzwertbetrachtung überhaupt ermöglichen. Trotzdem finden sich in Schulbüchern wie etwa Elemente der Mathematik (vgl. GRIESEL et al. 2004, S. 91) weiterhin Ansätze, die Tangentensteigung als Grenzlage der Sekantensteigung zu bestimmen.

Ein weiterer in der Schule üblicher Zugang zum Ableitungsbegriff erfolgt über die lokale oder auch momentane Änderungsrate etwa beim Übergang von der mittleren zur momentanen Geschwindigkeit (vgl. HENN 2000, DANCKWERTS und VOGEL 2006). Lässt sich diese Idee auf die Wirtschaftsmathematik übertragen? Betrachten wir dazu Beispiel 55.

Beispiel 55
Gegeben sei die Erlösfunktion $E(x) = 160x - 2x^2$ eines Unternehmens. Es interessiert sich für die Änderung des durchschnittlichen oder auch mittleren Erlöses bei einer Produktionssteigerung von 20 ME um weniger als 5 ME. Dazu reduziert es die Mengenänderung schrittweise um jeweils eine Einheit. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.1 dargestellt.

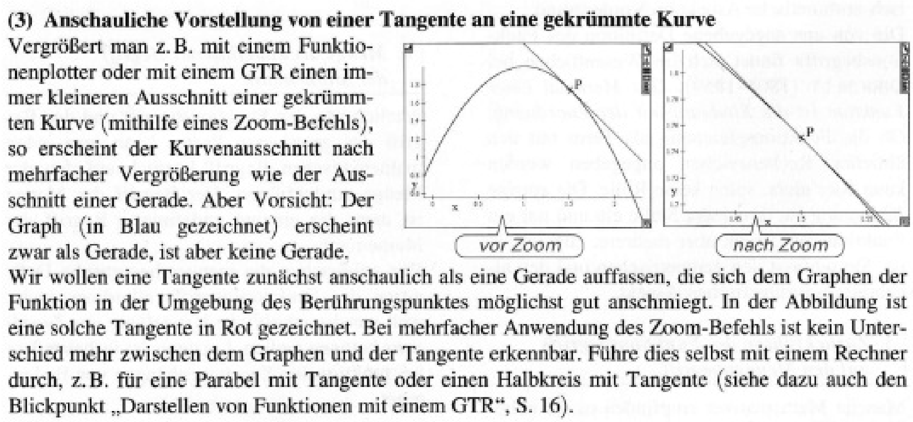
Δx	5	4	3	2
$\frac{\Delta E}{\Delta x}$	70	72	74	76

Tabelle 6.1: Durchschnittliche Erlössteigerung bei einer Änderung von 20 ME um Δx

Aber schon die Frage nach der durchschnittlichen Änderung des Erlöses bei einer Steigerung der Produktion um eine Einheit ist mathematisch wenig sinnvoll und nicht aussagekräftig. Gedanklich lässt sich die Änderung weiter gegen Null verringern, wodurch der Differenzenquotient sich dem Wert 80 annähert. Dies entspricht der Ableitung nach Gleichung (6.2).

Jedoch ist der Grenzübergang für $x \to 20$ in Beispiel 55 durch den Sachkontext nicht gedeckt, da es sich bei der Menge meist um eine diskrete Größe (z. B. Stückanzahl) handelt. Zwar lässt sich diese zum Beispiel auch in kg angeben, was den Grenzübergang mathematisch zu rechtfertigen scheint. Das erhaltene Ergebnis einer momentanen Erlösänderung ist aber ökonomisch nur schwer interpretierbar. Obwohl dieser Nachteil besteht, bedienen sich die Wirtschaftswissenschaften dieser theoretischen Vorgehensweise, um „in den Genuss der Leistungsfähigkeit des analytischen Kalküls“ (DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 60) zu kommen. Jedoch findet dies in den Standardwerken zur Wirtschaftsmathematik ohne analytische Legitimation statt. Es wird lediglich auf die Bequemlichkeit der Näherung der Funktionswertänderung über die Ableitung hingewiesen. Warum die anschauliche Approximation über die Tangente und keine andere Gerade erfolgt, bleibt offen.

Eine dritte Möglichkeit[38] den Ableitungsbegriff einzuführen stellt die lokale Linearisierung dar. Deren fachtheoretische Grundlagen haben wir in Abschnitt 2.1 beschrieben. Dieser Zugang zum Ableitungsbegriff fördert die Vorstellung der Tangente als lokale lineare Approximation an einen Funktionsgraphen. Im Gegensatz zur lokalen Änderungsrate tritt dieser Aspekt im Mathematikunterricht jedoch in den Hintergrund. Obgleich in den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im erhöhten Anforderungsniveau als Ziel steht, dass Schüler „die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten“ (KMK 2012, S. 20) können, fehlt es an didaktisch aufbereiteten Unterrichtsvorschlägen zu diesem Thema. Gründe für die Vernachlässigung liegen vor allem in den algebraischen Schwierigkeiten. Denn der Aspekt der linearen Approximation erweist sich „bei der Anwendung auf nicht-rationale Funktionen als so sperrig“ (VOM HOFE et al. 2015, S. 168), dass er in heutigen Schulbüchern selten zu finden ist. Falls doch beschränkt sich die Vorgehensweise auf die anschauliche Vorstellung im Sinne eines „Funktionenmikroskopes“ (BLUM und KIRSCH 1979, S. 11). Abbildung 6.1 zeigt den Ausschnitt für ein derartiges Beispiel aus den Schulbuch Elemente der Mathematik.


(3) Anschauliche Vorstellung von einer Tangente an eine gekrümmte Kurve

Vergrößert man z. B. mit einem Funktionenplotter oder mit einem GTR einen immer kleineren Ausschnitt einer gekrümmten Kurve (mithilfe eines Zoom-Befehls), so erscheint der Kurvenausschnitt nach mehrfacher Vergrößerung wie der Ausschnitt einer Gerade. Aber Vorsicht: Der Graph (in Blau gezeichnet) erscheint zwar als Gerade, ist aber keine Gerade.

Wir wollen eine Tangente zunächst anschaulich als eine Gerade auffassen, die sich dem Graphen der Funktion in der Umgebung des Berührungspunktes möglichst gut anschmiegt. In der Abbildung ist eine solche Tangente in Rot gezeichnet. Bei mehrfacher Anwendung des Zoom-Befehls ist kein Unterschied mehr zwischen dem Graphen und der Tangente erkennbar. Führe dies selbst mit einem Rechner durch, z. B. für eine Parabel mit Tangente oder einen Halbkreis mit Tangente (siehe dazu auch den Blickpunkt „Darstellen von Funktionen mit einem GTR“, S. 16).

Abbildung 6.1: Grundvorstellung der Tangente als lokale Linearisierung einer Funktion. Quelle: GRIESEL et al. (2004, S. 86)

Ohne jedoch auf analytische Aspekte oder Begriffe der lokalen Linearisierung näher einzugehen wird u. E. auf eine Möglichkeit verzichtet, eine weitere tragfähige Vorstellung des Ableitungsbegriffs zu implementieren. Eine Einschränkung auf die Vorstellung der Ableitung als lokale Änderung halten wir für fragwürdig. Eine tragfähige Begriffsbildung zeichnet sich durch verschiedene Zugänge aus, soweit diese sinnvoll für das unterrichtliche Handeln sind:

[38] Für weitere Zugänge, z. B. über die stetige Fortsetzung der Differenzenquotientenfunktion, verweisen wir auf TIETZE et al. (1982, S. 123 ff.).

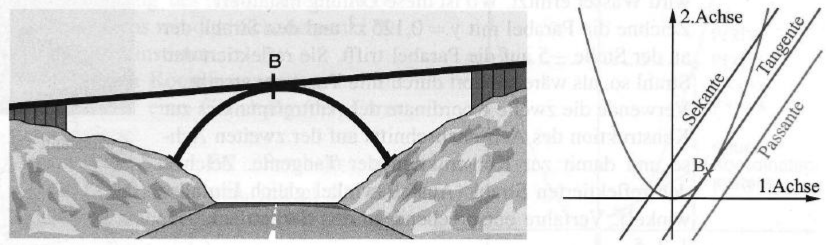
> „Insgesamt lässt sich feststellen, dass für den Ableitungsbegriff die funktionale Deutung (lokale Änderungsrate) und die geometrische Deutung (lokale Linearität) wesentliche Grundvorstellungen für das kompetente mathematische Arbeiten sind. Wenn Schülerinnen und Schüler eine der beiden Facetten nicht kennenlernen, resultiert hieraus eine eingeschränkte Begriffsbildung.[...] Dementsprechend muss zu den Zielvorstellungen einer Einführung in die Differenzialrechnung in der gymnasialen Oberstufe auch die entsprechende Verallgemeinerung des Tangentenbegriffs gehören.“ (BÜCHTER 2014, S. 44).

Neben einem Beitrag zur Verwirklichung der Mehrperspektivität zum Ableitungsbegriff besitzt die lokale Linearisierung weitere Vorteile: Sie bietet Möglichkeiten zur vertikalen Vernetzung (Funktionen mit zwei Variablen, Taylorpolynome u. a.), ist im ökonomischen Kontext interpretierbar und stärkt die fundamentale Idee der Approximation indem sie einen Übergang von einer Anwendung (G1) zu einem innermathematischen Thema (G2) ermöglicht: Sie führt auf das Aufstellen der Tangentengleichung zur näherungsweisen Funktionswertberechnung. Nach unserer Auffassung gehört daher die lokale Linearisierung als tragfähige Grundvorstellung zum Ableitungsbegriff in den Analysisunterricht. Zur Umsetzung bietet sich die Wirtschaftsmathematik an.

Diese Aussage begründen wir im Folgenden: Die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate ist nach unserer Auffassung für eine Verallgemeinerung nicht geeignet. Zwar führt eine damit einhergehende Begriffsbildung rasch zum Ableitungsbegriff und trägt diesen eine Zeit lang. Problematisch ist jedoch, dass dieser Aspekt nicht auf dem in der Kreis- und Koordinatengeometrie erlernten Wissen aufbaut und auch keine weitere vertikale Vernetzung ermöglicht. Aktuelle Studien unterstützen diese Ansicht. Trotz einer Einführung in die Differenzialrechnung ordnen Schüler den Tangentenbegriff in erster Linie Kreisen sowie Parabeln zu. Bezüge zur Differenzierbarkeit oder auch zur linearen Approximation fehlen. In wenigen Fällen ist von der Ableitung als momentane Änderungsrate die Rede (vgl. BÜCHTER 2014). Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt auch WITZKE (2014):

> „Bemerkenswerterweise scheint die in allen modernen Schulbüchern vorhandene alternative Einführungsweise des Differenzenquotienten über die Idee der Änderungsrate, keinen besonders nachhaltigen Effekt auf die Schüler zu haben. Aktuelle Studien [. . .] zeigen, dass nur wenige Abiturienten den Ableitungsbegriff mit Änderungsraten verbinden. Und kaum ein Studienanfänger [. . .] kann etwas mit dem Begriff der Momentangeschwindigkeit anfangen [...].“ (WITZKE 2014, S. 27).

Gründe für die Verbindung des Tangentenbegriffs mit der Kreis- und Koordinatengeometrie liegen nach Ansicht von WITZKE (2014) und BÜCHTER (2014) in der prägenden Erstbegegnung an Kreis und Parabel. Abbildung 6.2 zeigt ein Beispiel aus der Koordinatengeometrie zur Entwicklung des Tangentenbegriffs aus dem Schulbuch Elemente der Mathematik.



(1) Tangente – Sekante

Ein ansteigender Wirtschaftsweg wurde über eine Straße geführt. Die Fahrbahnplatte liegt dem parabelförmigen Brückenbogen auf, berührt ihn also im Punkt B.
Die entsprechende Gerade ist somit eine *Tangente* an die Parabel. Sie hat mit ihr nur einen Punkt gemeinsam.
Eine Gerade, die mit der Parabel zwei gemeinsame Punkte (Schnittpunkte) hat, ist eine *Sekante*. Denkt man sich die Sekante parallel zu sich selbst verschoben, sodass die beiden Schnittpunkte mit der Parabel aufeinander zuwandern, erhält man schließlich eine Tangente.

Abbildung 6.2: Entwicklung des Tangentenbegriffs in der Koordinatengeometrie. Quelle: GRIESEL et al. (2004, S. 35)

Problematisch ist die Grundvorstellung der Tangente als Gerade, die einen Punkt mit der Parabel gemeinsam hat. Auch wenn diese Aussage in diesem Kontext korrekt ist, erschwert sie u. E. die Verallgemeinerung des Tangentenbegriffs auf die Differenzialrechnung. Stattdessen plädieren wir dafür, zusätzlich „die Schmiegeigenschaft der Tangente“ (DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 72) an Parabel als auch am Kreis zu betonen. Ein Aufbau der lokalen Linearisierung beginnend in der Kreisgeometrie über die Koordinatengeometrie bis hin zur analytischen Beschreibung im Umfeld der Ableitung ermöglicht Schülern eine durchgehende Orientierung. Es muss keine Grundvorstellung verändert werden. Zusätzlich eröffnet dieser Aspekt eine weitere Verallgemeinerung der Differenzialrechnung auf Funktionen mit mehreren Variablen und stellt den Grundgedanken der Approximation von Funktionen mittels Taylorpolynomen dar.

Neben der Möglichkeit der vertikalen Vernetzung ist die Ableitung als lokale Linearisierung im Gegensatz zur lokalen Änderung im ökonomischen Kontext interpretierbar. Der Wert einer Ableitung wird in den Wirtschaftswissenschaften explizit als Näherung zum Funktionswert gesehen. Die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Linearisierung ist in diesem Zusammenhang u. E. sinnvoll umzusetzen. Zusätzlich ermöglicht sie einen nahtlosen

Übergang zur Tangente: Zwar trägt die Vorstellung der Momentangeschwindigkeit die Ableitung und damit anschaulich die Tangentensteigung. Jedoch beinhaltet nach unserer Auffassung diese Herangehensweise einen Bruch, wenn daraufhin im Unterricht die Tangentengleichung behandelt werden soll. Warum soll ein Schüler die ganze Gleichung bestimmen, wenn er nur deren Steigung braucht? Im Konzept der lokalen Linearisierung sehen wir diese Problematik nicht. Die Tangente approximiert anschaulich den Graphen der Funktion und für lokale Näherungen ist die Tangentengleichung zu bestimmen. Aus einem anwendungsorientierten Zugang (G1) über die Wirtschaftsmathematik folgt ein reibungsloser Übergang zu innermathematischen Fragestellungen (G2) im Umfeld der Tangente.

6.4 Konsequenzen für die Unterrichtsentwicklung

Wie in Abschnitt 6.2 beschrieben, orientieren wir unsere Unterrichtsvorschläge an fundamentalen Ideen sowie tragfähige Grundvorstellungen wesentlicher Begriffe. Zur Unterstützung geben wir ein Spiralcurriculum an, das die fundamentalen Ideen der Analysis Messen, funktionaler Zusammenhang, Änderungsrate, Approximieren sowie Optimieren (vgl. Abschn. 6.2) durchzieht. Ein vergleichbarer Aufbau ist auch bei DAUME (2016) zu finden, die ein Spiralcurriculum zur finanziellen Allgemeinbildung im Mathematikunterricht vorschlägt. Wir orientieren uns an diesem und sehen die Wirtschaftsmathematik als geeignete Ergänzung. Insbesondere die fundamentale Idee der Approximation und die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Linearisierung erachten wir als zentral, da die Ableitung im ökonomischen Kontext explizit als Näherung zur Funktionswertänderung aufgefasst wird. Als Einstieg zum Ableitungsbegriff sehen wir die lokale Änderung weiterhin als geeignet an, da dieses Vorgehen curricular vorgeschrieben ist. In einem sinnvollen Anwendungskontext führt dies z. B. auf die Frage der Momentangeschwindigkeit. Die lokale Änderungsrate ist im ökonomischen Kontext jedoch nicht sinnvoll zu interpretieren und erschwert eine spätere Verallgemeinerung sowie einen nahtlosen Übergang zur Tangentengleichung. Daher sprechen wir uns zusätzlich für eine anschließende Behandlung der Ableitung als lineare Approximation im Analysisunterricht aus. Folglich plädieren wir dafür, die bisherige Rolle des Ableitungsbegriffs neu zu überdenken.

Abbildung 6.3 zeigt den Aufbau sowie die zeitliche Einordnung der Unterrichtseinheiten. Weitere Inhalte sind möglich, die aufgeführten stellen lediglich eine erste Auswahl dar. Am Beispiel der fundamentalen Idee des Approximierens möchten wir die Idee des Spiralcurriculums verdeutlichen: Aus dem Aspekt der näherungsweisen Funktionswertänderung mittels Grenzfunktion erschließt sich die lokale Linearisierung. Dies stellt den Ausgangspunkt zur Approximation von Funktionen durch Taylorpolynome dar. Auf höherer Ebene findet dies bei Funktionen mit zwei Variablen in Gestalt von

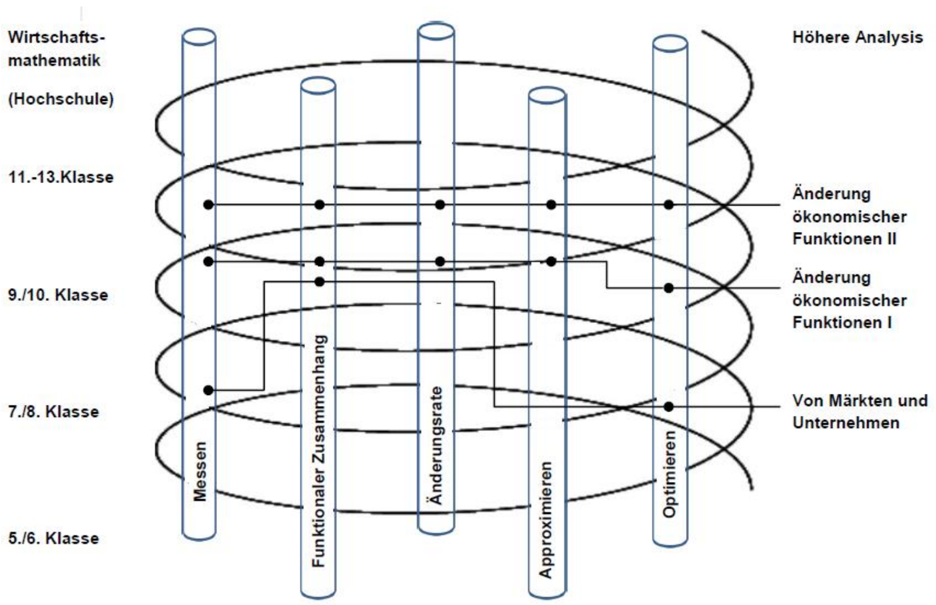


Abbildung 6.3: Vorschlag eines Spiralcurriculums zur Wirtschaftsmathematik im Analysisunterricht

Tangentialebenen seine Fortsetzung. Auch der Übergang von der Bogen- zur Punkt-Elastizität lässt sich unter dem Aspekt der Näherung einordnen. Dieser Aufbau stärkt die fundamentale Idee des Approximierens, die im Mathematikunterricht in den letzten Jahren durch die Verwendung leistungsfähigerer Rechner in den Hintergrund trat.

In der Unterrichtseinheit (UE2) zur Wirtschaftsmathematik knüpfen wir an die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate an, die in den Bildungsstandards (vgl. KMK 2012) vorgeschlagen wird. Der Unterschied zur lokalen Linearisierung soll thematisiert werden, um beiden Grundvorstellungen Rechnung zu tragen. Eine mögliche Aufgabenstellung sieht folgendermaßen aus:

Gegeben sei folgende Erlösfunktion:

$$E(x) = -x^2 + 30x.$$

a) *Bestimmen Sie die Erlösänderung, wenn der Absatz von* 10 *auf* 11 *Stück erhöht wird.*

b) *Vergleichen Sie den unter Aufgabe a) berechneten Wert mit der Ableitung von* E *für* $x_0 = 10$*. Wie lässt sich die 1. Ableitung in diesem Fall interpretieren?*

In der Wirtschaftsmathematik findet die Änderung von Funktionswerten aus Teilaufgabe a) mittels Ableitung statt (vgl. Teilaufgabe b). Daher eröffnet sich hier eine Chance, die Grundvorstellung der lokalen Linearisierung im Analysisunterricht zu implementieren. Ausgehend von der Grenzfunktion orientieren wir uns in den Unterrichtseinheiten an folgender Fragestellung:

> „*Was unterscheidet die Tangente von einer beliebigen Gerade zur Näherung des Funktionswertes?*“

Diese Herangehensweise integriert die erste Wintersche Grunderfahrung, indem aus einem Anwendungsbezug die Ableitung als Näherung der Funktionswertänderung gesehen wird. Eine Veranschaulichung dieses Vorgangs schließt die Heuristik der dritten Grunderfahrung mit ein und trägt zur Ausbildung eines propädeutischen Grenzwertbegriffs bei. Losgelöst vom Anwendungskontext ist für die zweite Wintersche Grunderfahrung der Nachweis zu führen, dass die Tangente von allen möglichen Geraden lokal die beste Approximation an einen Funktionsgraphen ist (vgl. Abschn. 2.1). Damit beziehen wir automatisch die Grundvorstellung der Ableitung als Tangentensteigung mit ein. Gleichzeitig sehen wir wie BRUDER et al. (2015) aber die technischen Hürden, die auf die Schüler zukommen. Mithilfe der Wirtschaftsmathematik ließe sich jedoch ein anschaulicher Zugang gestalten, der eine spätere Algebraisierung erlaubt. So kann der Aspekt der linearen Approximation dem jeweiligen mathematischen Kenntnisstand der Schüler mit steigendem Anforderungsniveau vermittelt werden.

Die Forderung von DANCKWERTS und VOGEL (2006) nach echten Anwendungen sowie nach horizontaler als auch vertikaler Vernetzung erachten wir als weitere sinnvolle Ergänzung zu den tragfähigen Grundvorstellungen. Die Wirtschaftsmathematik eignet sich in besonderem Maße dafür, echte Anwendungen in den Analysisunterricht einzubinden. Die Konzeption der Unterrichtseinheit „Von Märkten und Unternehmen“ modelliert einen Preisfindungsprozess mithilfe linearer und quadratischer Funktionen. In mehreren Schritten können die Schüler erfahren, wie sich der Preis eines Produktes bestimmen lässt. Betrachten wir das Beispiel eines Kuchenverkaufs: Neben einem Preis, der zum maximalen Gewinn oder Erlös führt, können auch soziale oder ökologische Faktoren mit einfließen. Eine mögliche Aufgabenstellung lautet:

> *Bei einem Kuchenverkauf geht es vor allem um einen angemessenen Preis für ein Stück Kuchen. Überlegen Sie gemeinsam mit einem Partner, welche weiteren außermathematischen Kriterien den Preis beeinflussen sollen. Legen Sie einen angemessenen Preis fest und begründen Sie Ihre Entscheidung.*

Über die mathematischen und ökonomischen Inhalte hinaus führen Fragen nach der Höhe der Gehälter, nach dem Kauf von regionalen oder Bio-Produkten zu weiteren Überlegungen für einen angemessenen Preis. Mathematisch bietet insbesondere das Spannungsverhältnis zwischen diskreten Ausgangsproblemen und deren Übersetzung in ein stetiges Modell für Schüler große Lernmöglichkeiten (vgl. DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 14). Zusätzlich ermöglicht die Wirtschaftsmathematik sowohl eine horizontale als auch vertikale Vernetzung zu benachbarten Themen. Die lokale Linearisierung etwa erlaubt eine vertikale Vernetzung des Ableitungsbegriffs auf Funktionen zweier Variablen, die in den Unterrichtseinheiten ihren Platz finden sollen. Aufgrund der Tatsache, dass diese Thematik aktuell nicht curricular vorgeschrieben ist, fügen wir diese in einem Ergänzungsmodul hinzu.

7 Der Rechner im Mathematikunterricht

Mit zunehmender Technologisierung hielten Rechner Einzug in den Mathematikunterricht. Im Bereich der angewandten Stochastik werden z. B. Computer zur Simulation von Aktienkursen (vgl. DAUME 2009) herangezogen. Im Analysisunterricht untersuchen Schüler z. B. mittels grafikfähiger Taschenrechner (GTR) den Einfluss von Parametern auf Funktionen (vgl. VOLLRATH und ROTH 2012). Weit verbreitet sind auch wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) sowie Computer-Algebra-Systeme (CAS). Unter dem Begriff des Rechners fassen wir im Folgenden Computer und Taschenrechner zusammen.

In diesem Kapitel gehen wir zunächst auf mögliche Verwendungen des Rechners im Mathematikunterricht ein (Abschn. 7). Auf Grundlage der Bildungsstandards werden dessen Einsatzmöglichkeiten im Unterricht aufgezeigt, bevor wir einen Einblick in die aktuelle Diskussion zu dessen Einsatz geben (Abschn. 7.2). Aus den Ergebnissen der vorherigen Abschnitte folgern wir abschließend Konsequenzen für die Unterrichtsentwicklung (Abschn. 7.3).

7.1 Einsatz von Rechnern im Mathematikunterricht

TIETZE et al. (2000, S. 45) unterscheiden vier methodische Aspekte für einen möglichen Einsatz des Rechners im Mathematikunterricht: Der **Rechner als Werkzeug** kann zu einer Verlagerung weg vom kalkülorientierten Arbeiten hin zum Problemlösen führen. HARSKAMP et al. (2000, S. 37) unterstützen diese Verwendung, denn dies verringert bei zeitraubenden Aufgaben den Aufwand. Schüler können die frei werdenden Kapazitäten zur Entwicklung prozessorientierter Kompetenzen nutzen. Ähnlich sehen das TIETZE et al. (2000):

> „Im anwendungsorientierten Mathematikunterricht erlaubt der Rechner, realitätsnahe Anwendungsaufgaben zu behandeln. Beim mathematischen Modellbilden kann man sich auf die Problemformulierung und die Übersetzung in ein mathematisches Modell konzentrieren [...].“ (TIETZE et al. 2000, S. 45).

Liegen etwa Datenpaare vor, so kann der Rechner die Gleichung einer Regressionsgeraden bestimmen. Auch BLUM (1995, S. 11 f.) erkennt den Rechner[39] als Werkzeug zur Unterstützung des Unterrichts und empfiehlt Routineaufgaben wie die Bestimmung von Nullstellen oder Extremstellen an den Rechner zu delegieren. Dies darf u. E. jedoch nicht zu Lasten händischer Fertigkeiten im Bereich der Funktionskompetenz führen. Der **Rechner als**

[39]Die Ausführungen von BLUM (1995) beziehen sich zwar auf den Computer, lassen sich aber auch auf den GTR und ein CAS übertragen.

Medium zeichnet sich nach HARSKAMP et al. (2000, S. 38) insbesondere durch seine Fähigkeit aus, die Darstellungsform zu wechseln. Schüler können zwischen dem Funktionsterm, dem Funktionsgraphen und der Wertetabelle wählen, was ihnen ein umfangreicheres Repertoire an Lösungsmöglichkeiten verschafft. Diese wichtige Rolle im Mathematikunterricht erkannte schon HEYMANN (1996):

> „Offensichtlich steht im herkömmlichen Mathematikunterricht der operative Aspekt, der Werkzeuggebrauch also, im Vordergrund. [...] Das ist problematisch, weil in alltagspraktischen bedeutsamen Verwendungssituationen eine zunehmende Verschiebung zu erkennen ist: Weg vom Gebrauch als Werkzeug, hin zum Gebrauch als Medium.“ (HEYMANN 1996, S. 141).

BLUM (1995) empfiehlt in diesem Umfeld den Rechner als „Funktionenmikroskop“ (S. 11) einzusetzen, um die lokale Approximationseigenschaft der Tangente zu visualisieren. Die Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen mit Hilfe des Rechners unterstützen auch BRUDER et al. (2010). Eine weitere Verwendung stellt der **Rechner als Entdecker** im experimentellen Unterricht dar. Nach HENTSCHEL und PRUZINA (1995, S. 204) fördert mathematisches Experimentieren entdeckendes Lernen. Anhand etwa der graphischen Darstellung von Funktion und Ableitungsfunktion lassen sich erste Aussagen über deren Zusammenhänge treffen. Mit der Funktion des **Rechners als Tutor** für spezielle Lernprozesse können Schüler mit geeigneten Lernprogrammen ihr Lernen selbst steuern. Da diese noch am Anfang stehen und für diese Arbeit keine Rolle spielen, gehen wir darauf im Weiteren nicht ein.

Die genannten Einsatzmöglichkeiten des Rechners treffen auf einen WTR nur bedingt zu, da dieser im Gegensatz zu einem GTR und einem CAS über weniger Funktionen verfügt. So fehlen mitunter Möglichkeiten zur graphischen Darstellung einer Funktion, zur Berechnungen von Nullstellen, Extremstellen oder auch Integralen. Dieser Unterschied ist auch Gegenstand der aktuellen didaktischen und politischen Diskussion zum Einsatz von Rechnern im Mathematikunterricht.

7.2 Diskussion zum Einsatz von Rechnern im Mathematikunterricht

Verbindlich sind die Vorgaben der Bildungsstandards Mathematik. In den Ausführungen zum mittleren Schulabschluss findet sich der Zusatz, dass „mathematische Werkzeuge (wie Formelsammlungen, Taschenrechner, Software) sinnvoll und verständig“ (KMK 2004, S. 9) einzusetzen sind. Die Bildungsstandards Mathematik für die allgemeine Hochschulreife (KMK 2012,

S. 13) legen fest, dass auf die Verwendung digitaler Werkzeuge im Unterricht auch deren Einsatz in der Prüfung zu erfolgen hat. Da die Umsetzung dieses Passus den einzelnen Ländern obliegt, sind in Deutschland derzeit unterschiedliche Modelle denkbar, wie die folgenden drei Beispiele zeigen. Die Behörde für Schule und Berufsbildung (BSB) in Hamburg erlaubt für 2015 zum Abitur einen WTR, an bestimmten Schulen dürfen Schüler auch ein CAS verwenden, ein GTR hingegen ist verboten (vgl. BSB 2013). In Nordrhein-Westfalen führt das Ministerium für Schule und Weiterbildung (MSW) zum Abitur 2017 einen GTR oder ein CAS ein. Ein WTR wie zum Abitur 2015 ist nicht mehr erlaubt (vgl. MSW 2015). Gleichzeitig verbietet das Kultusministerium in Baden-Württemberg (KM) die Verwendung der GTR ab 2017 im Abitur. Stattdessen soll ein WTR zum Einsatz kommen.

Die unterschiedliche Handhabung der Länder zeigt, dass es derzeit kontroverse Diskussionen über den Einsatz eines Rechners im Abitur gibt. Gegner befürchten, dass bei Verwendung von GTR und CAS eine Chancengleichheit nicht zu gewährleisten sei und plädieren für einen einheitlichen Einsatz des WTR. Zusätzlich werden an den Hochschulen „von den Abiturienten vor allem mathematische Grundkenntnisse und Fertigkeiten“ (KM 2013) ohne Hilfsmittel verlangt. Ein GTR oder CAS verhindere jedoch die Ausbildung dieser wichtigen Routinen. Befürworter von GTR und CAS entgegnen:

> „Mit der Beschränkung des Einsatzes digitaler Mathematikwerkzeuge auf wissenschaftliche Taschenrechner ist zu erwarten, dass die seit Jahren verfolgte Orientierung an Prozesskompetenzen (z.B. Argumentieren, Problemlösen, Modellieren), die auch in den aktuellen Bildungsstandards festgeschrieben ist, erheblich behindert wird.“ (Mathematik-Kommission Übergang Schule – Hochschule 2013, S. 1).

Nach Ansicht der Kommission ist durch eine Abschaffung der Rechner ein Rückschritt zur Kalkülorientierung zu befürchten. Obwohl in Einstellungstests von Hochschulen vornehmlich mathematische Grundkenntnisse aus der Sekundarstufe I abgefragt werden, sind auch Problemlösefähigkeiten und Modellierungskompetenzen relevant. MOLDENHAUER (2007) zeigt, dass durch die Verwendung eines CAS-Rechners im Thüringer Abitur von 2006 „ein durchschnittlich höherer Punktestand von den Schülern erreicht“ (S. 27) wurde, als dies bei Kontrollgruppen unter gleichem Anforderungsniveau ohne dessen Verwendung der Fall war. Ein Grund für dieses Ergebnis ist, dass Schüler von langwierigen Rechnungen befreit werden und mehr Zeit für „die Analyse von Zusammenhängen, für Modellierungsaufgaben oder Problemdiskussionen“ (MOLDENHAUER 2007, S. 28) haben. Auch PINKERNELL (2010) betont, „dass der Einsatz von CAS nicht notwendigerweise zu schlechteren Leistungen in rechnerfreien Tests führen muss“ (S. 668). Gleiches gilt natürlich auch für den GTR. Mängel, die an Hochschulen zu Tage treten, sind nicht eindeutig auf den gehäuften Rechnereinsatz in Schulen zurückzuführen. Entscheidender für das erfolgreiche Bestehen eines Studiums ist nach KRAMER (2010, S. 82) das Durchhaltevermögen in Problemsituationen. Ein vollständiges Verbot von Rechnern wäre „kontraproduktiv – vorausgesetzt natürlich, dass CAS und GTR nicht nur als Kalkülersatz verwendet werden, sondern im Rahmen sinnvoller Unterrichtskonzepte auch ihre Stärken entfalten können“ (vgl. PINKERNELL 2010, S. 666).

7.3 Konsequenzen für die Unterrichtsentwicklung

Die unterschiedliche Haltung der Länder zum Einsatz eines Rechners erschwert einen einheitlichen Unterrichtsgang. Einen kompletten Verzicht lehnen wir jedoch ab, da dieser dem von WINTER (1995) geforderten Allgemeinbildungscharakter der Mathematik widerspricht. Der Rechner soll in unseren Vorschlägen begleitend eingesetzt werden, um die wirtschaftsmathematischen Inhalte in den Vordergrund zu stellen. Zusätzlich unterstützt er die Integration der Grunderfahrungen (vgl. Abschn. 4.1). Besonders geeignet ist der Rechner als Werkzeug zur Verringerung des Rechenaufwands (G2), etwa um aus der Zuordnung „Preis pro Stück $\mapsto$ verkaufte Anzahl“ eine Regressionsgerade zu bestimmen. Der Aufwand bei der händischen Berechnung über die Methode der kleinsten Quadrate ist um ein Vielfaches höher. Die Schüler können sich durch die Delegation der Rechnungen an den Computer auf den Modellierungsprozess konzentrieren (G1). Gleichzeitig erlaubt z. B. ein Tabellenkalkulationsprogramm die Darstellung der Punktwolke und des Graphen der Regressiongeraden, wie Abbildung 7.1 zeigt.

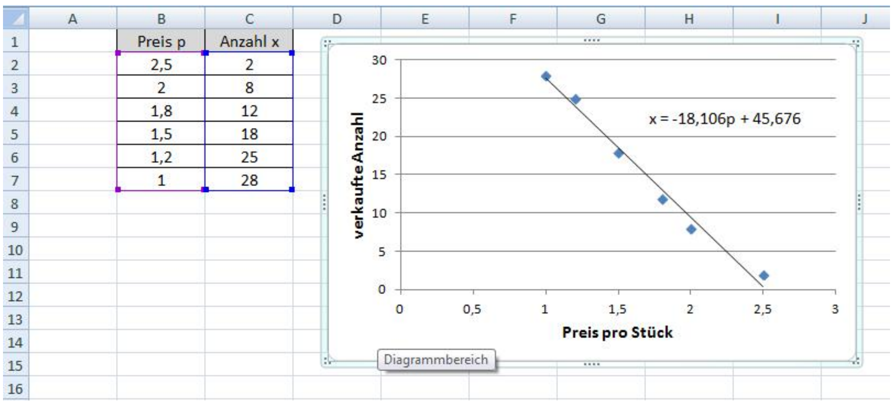


Abbildung 7.1: Auszug aus einem Excel-Tabellenblatt zur Berechnung und Darstellung einer Regressionsgeraden

Abbildung 7.1 verdeutlicht, dass die Verwendung des Rechners als Werkzeug und als Medium mitunter fließend sind, da im Schaubild Graph und Funktionsterm der Nachfragefunktion zu sehen sind. Jedoch erfüllt der Rechner als Medium zur reinen Darstellung von Funktionen u. E. seinen Zweck. Ein

Funktionsplotter etwa erlaubt die Veranschaulichung von Zusammenhängen ökonomischer Funktionen (G1). Abbildung 7.2 zeigt dies am Beispiel der Graphen von Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktion.

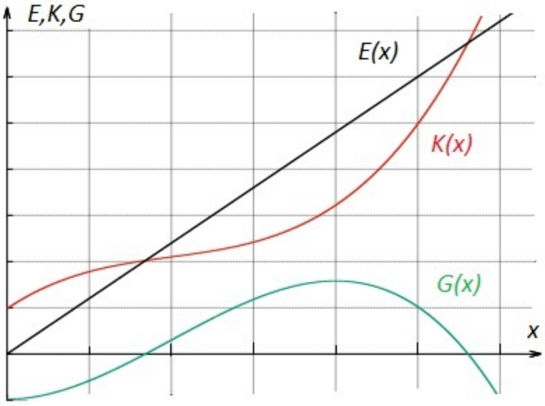


Abbildung 7.2: Graphen von Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktion eines monopolistischen Anbieters

Im Schaubild ist etwa die Gewinnzone an den Schnittpunkten der Graphen von Erlös- und Kostenfunktion zu erkennen. Eine weitere Möglichkeit den Rechner als Medium einzusetzen, sehen wir in der Demonstration der lokalen linearen Approximation einer Funktion über ihre Tangente (G2). Abbildung 7.3 zeigt das schrittweise Hineinzoomen am Graphen einer Erlösfunktion und seiner Tangente unter dem „Funktionenmikroskop“ (BLUM und KIRSCH 1979, S. 11). Mit zunehmendem Zoom schmiegt sich die Tangente dem Graphen der Funktion an, bis beide nur unmerklich zu unterscheiden sind.

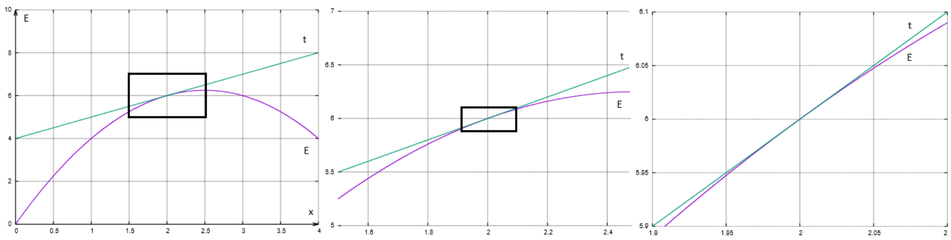


Abbildung 7.3: Funktionenmikroskop zur Veranschaulichung der lokalen Linearisierung

Der Rechner als Entdecker im experimentellen Unterricht erlaubt in ökonomischen Anwendungen eine weitere sinnvolle Verwendung. Insbesondere der Vergleich der Graphen von Funktion und Ableitung veranschaulicht den Schülern erste Zusammenhänge in diesem Umfeld (G3). Vermutungen zwischen ökonomischer Funktion und zugehöriger Durchschnittsfunktion können formuliert werden, bevor eine rechnerische Prüfung erfolgt. Eine mögliche Fragestellung lautet:

Die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 30x^2 + 310x + 1000$ *beschreibt die Kosten eines Unternehmens beim Absatz seines Produktes. Die Kapazitätsgrenze liegt bei* 22 *Stück.*

a) Zeichnen Sie die Graphen der Stückkosten, der variablen Stückkosten sowie der Grenzkosten mithilfe eines grafikfähigen Taschenrechners in ein gemeinsames Schaubild.

b) Formulieren Sie mögliche Zusammenhänge zwischen den Funktionen und prüfen Sie diese anhand weiterer Beispiele.

Zusätzlich empfehlen wir das Internet als Informationsquelle zu aktuellen ökonomischen Themen. Die Schüler können den Rechner somit vielfältig in den Unterrichtseinheiten zur Wirtschaftsmathematik einbauen. Dies soll aber wie in diesem Abschnitt aufgeführt lediglich an einigen wenigen Stellen geschehen, wenn der Einsatz des Rechners als Werkzeug, Medium oder Entdecker hilfreich ist. Ansonsten sind die Aufgabenstellungen so zu wählen, dass die Schüler genügend Möglichkeit zur händischen Berechnung haben, um entsprechende Fertigkeiten einzuüben. Daher sind Aufgaben, die für den Einsatz von GTR, CAS oder einem Computerprogramm geeignet sind, in den Unterrichtsvorschlägen entsprechend gekennzeichnet. Der Rechner als Tutor entfällt, da im Bereich der Wirtschaftsmathematik noch keine zweckdienlichen Lernprogramme für den Analysisunterricht vorhanden sind.

8 Analyse ausgewählter Aufgaben

In diesem Kapitel untersuchen wir unter fachtheoretischen und fachdidaktischen Aspekten ausgewählte Aufgaben zur Wirtschaftsmathematik aus verschiedenen Schulbüchern allgemeinbildender Gymnasien. Zum Vergleich betrachten wir ein Schulbuch für berufliche Gymnasien mit dem Schwerpunkt Wirtschaft (Abschn. 8.1). Zusätzlich sind einzelne Abituraufgaben zum Thema Wirtschaftsmathematik aufgeführt (Abschn. 8.2). Aus den Erkenntnissen dieser beiden Abschnitte folgern wir weitere Konsequenzen für die Unterrichtsgestaltung (Abschn. 8.3).

8.1 Analyse ausgewählter Aufgaben aus Schulbüchern

Das Schulbuch Lambacher Schweizer beinhaltet eine Aufgabe zur Analyse einer Gewinnfunktion (FREUDIGMANN et al. 2009, S. 27).

> „Die Herstellungskosten einer Produktionseinheit (100 Packungen) eines Arzneimittels pro Tag werden durch die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 200x + 50$ (x in Produktionseinheiten, $f(x)$ in Euro) dargestellt. Eine Packung wird für 19,95 € verkauft.
>
> a) Stellen Sie die Gewinnfunktion pro Tag G(x) auf (x in Produktionseinheiten, G(x) in Euro).
>
> b) Wie viele Produktionseinheiten muss die Firma pro Tag herstellen, um bei vollständigem Verkauf den optimalen Gewinn zu erzielen?
>
> c) Bei welchen Produktionsmengen macht die Firma trotz vollständigen Verkaufs einen Verlust?“

Es fällt auf, dass die Kostenfunktion mit f bezeichnet wird und nicht, wie es in der Wirtschaftsmathematik üblich ist, mit K. Es handelt sich um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion, denn für die Koeffizienten gelten die in Satz 9 aufgestellten Zusammenhänge. Die Kosten lassen sich in variable und fixe Kosten unterscheiden. Da der Preis konstant ist, liegt ein Polypol vor. Für Aufgabe a) ist die Erlösfunktion zu bestimmen mit:

$$E(x) \overset{(1.1)}{=} p_M \cdot x.$$

Aus der Differenz von Erlös- und Kostenfunktion lässt sich die Gewinnfunktion aufstellen:

$$G(x) \overset{(1.4)}{=} E(x) - K(x).$$

Diese grundlegenden ökonomischen Zusammenhänge sind impliziert, werden jedoch nicht thematisiert. Das Gewinnmaximum in Aufgabe b) können die

Schüler mithilfe des Grenzgewinns oder über den Vergleich von Grenzkosten und Preis bestimmen (vgl. Satz 5). In Aufgabe c) sind die untere Gewinnschwelle sowie die obere Gewinngrenze auszurechnen. Außerhalb dieses Intervalls erzielt das Unternehmen Verlust. Es ist zu erkennen, dass anhand dieser Aufgabe viele ökonomische Grundbegriffe im Zuge einer ökonomischen Bildung vermittelt werden können. Tatsächlich steht die rechnerische Lösung im Vordergrund. Im gleichen Lehrbuch findet sich eine Aufgabe zur Analyse einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion (FREUDIGMANN et al. 2009, S. 46):

> „Ein Unternehmen stellt chirurgische Instrumente her. Dabei wird zur Kostenermittlung die Funktion K mit
>
> $$K(x) = x^3 - 20x^2 + 150x + 200$$
>
> ($x \in [0; 25], K(x)$ in Euro) verwendet.
>
> a) Stellen Sie den Graphen der Kostenfunktion in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
> b) Die Ableitung K' von K nennt man Grenzkosten. Zeichnen Sie den Graphen von K' in das vorhandene Koordinatensystem. Welche anschauliche Bedeutung haben die Grenzkosten?
> c) Geben Sie die Funktion D für die durchschnittlichen Herstellungskosten pro Stück an. Zeigen Sie, dass sich der Graph von D und K' im Tiefpunkt schneiden. Welche Bedeutung hat dies?“

An dieser Stelle ließen sich die Begriffe variable und fixe Kosten einführen. In Aufgabe a) wird der für den Graphen einer ertragsgesetzliche Kostenfunktion typische Verlauf gezeichnet, ohne näher auf diesen einzugehen. Ökonomisch sind die zuerst unterproportional und danach überproportional steigenden Kosten von großem Interesse. Am Minimum der Grenzkosten lässt sich die kleinste Kostenänderung zur nächsten Einheit ablesen. Der Graph von K besitzt an dieser Stelle einen Wendepunkt. Folgende Aufgaben können als Anregung zur Öffnung der Aufgabe dienen:

- Beschreiben Sie den Graphen der Kostenfunktion.
- Wie lässt sich der Verlauf einer Kostenfunktion mittels erster Ableitung erklären?
- Welchen Verlauf können Kostenfunktionen noch annehmen? Geben Sie einen zugehörigen Funktionsterm an.

Mittels dieser Aufgaben können Schüler zu tiefergehenden ökonomischen Begriffen und mathematischen Zusammenhängen gelangen. In Aufgabe b) wird die Definition der Grenzkosten als erste Ableitung der Kosten vorgegeben. Im zugehörigen Lösungsbuch ist lediglich aufgeführt, dass die Grenzkosten den Zuwachs der Kosten für die nächste Einheit darstellen. Ein Verweis auf die Ableitung als lokale lineare Approximation findet nicht statt. Wir erachten die Darstellung der Graphen von K und K' in einem Schaubild als problematisch: Zwar verdeutlicht diese Darstellung den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion, jedoch besitzen Kosten und Grenzkosten unterschiedliche Einheiten. Aufgabe c) führt die „durchschnittlichen Herstellungskosten pro Stück“ ein. Ausreichend ist der Ausdruck „durchschnittliche Kosten“ oder „Kosten pro Stück“ (vgl. TIETZE 2010, S. 138). Des Weiteren ist die in der Literatur übliche Bezeichnung nicht D sondern k. Da $k(x)$ aus dem Quotienten von $K(x)$ und x entsteht, ist die Einschränkung $x \neq 0$ zu beachten. Der Begriff des Betriebsoptimums als Minimum der Stückkostenfunktion (vgl. Abschn. 2.2.2) findet keine Erwähnung. Im zugehörigen Lösungsbuch wird die Frage folgendermaßen beantwortet: „In diesem Schnittpunkt sind die Durchschnittskosten genauso hoch wie die Grenzkosten.“ Für die ökonomische Interpretation gerät dies jedoch zu kurz. Deutlich aussagekräftiger ist der Begriff der langfristigen Preisuntergrenze (vgl. Abschn. 2.2.2).

Im Schulbuch Elemente der Mathematik findet sich eine Aufgabe zu einer Preis-Absatz-Funktion (GRIESEL et al. 2001, S. 91):

> „Zwischen dem Verkaufspreis p für ein Produkt und der nachgefragten Menge x bestehe folgende Beziehung $p = 30 - \frac{1}{2}x$. Der Umsatz ist das Produkt aus dem Verkaufspreis und der zu diesem Preis abgesetzten Menge. Gib den Umsatz als Funktion in Abhängigkeit vom Preis an. Zeichne den Graphen dieser Funktion in einem ökonomisch sinnvollen Bereich.“

Im Zuge einer ökonomischen Bildung ist von Interesse, dass hier mit der Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten gearbeitet wird. Im gleichen Lehrbuch ist auch eine Aufgabe mit einem konstanten Marktpreis im Polypol aufgeführt (S. 99), eine Unterscheidung fehlt jedoch. Auffällig ist, dass in der Aufgabenstellung die Information zur Bestimmung des Umsatzes erfolgt. Der ökonomische Zusammenhang tritt hier hinter eine vorgegebene Arbeitsanweisung zurück. Ähnlich verhält es sich mit einer Aufgabe zur Gewinnmaximierung: Es wird vorgegeben, dass „der Gewinn die Differenz zwischen dem Erlös und den Kosten“ (GRIESEL et al. 2001, S. 100) ist. Es ist zu erkennen, dass die Synonyme Erlös und Umsatz in einem Lehrbuch genannt werden.

Das Schulbuch Lambacher Schweizer für berufliche Gymnasien mit dem Schwerpunkt Wirtschaft behandelt verstärkt ökonomische Fragestellungen, jedoch erfolgt die Einführung in die Differenzialrechnung ohne deren Verwendung. Vielmehr steht der Gang von der mittleren zur momentanen Änderungsrate am Beispiel der Momentangeschwindigkeit im Fokus (BRAUN et al. 2012, S. 241 f.). Erste ökonomische Inhalte folgen später unter dem Aspekt der Anwendung zur Differenzialrechnung am Ende des Kapitels. Die Ableitung einer ökonomischen Funktion wird als Grenzfunktion definiert. Sie beschreibt die Funktionswertänderung bei einer Steigerung der produzierten Menge um eine Einheit. Es bleibt jedoch offen, warum dies unter Verwendung der Ableitung erfolgt. Unter der Vielzahl an ökonomischen Fragestellungen findet sich eine Aufgabe zur folgenden ertragsgesetzlichen Kostenfunktion (vgl. S. 270):

$$K_v(x) = 0,8x^3 - 4,9x^2 + 10x.$$

Aus mathematischer Sicht handelt es sich um eine ungünstige Wahl für eine Kostenfunktion, da K für $x > 0$ nicht monoton steigt. Das Minimum von K' ist negativ und besitzt den Wert $y \approx -0,004$. Der Grund liegt darin, dass die Koeffizienten von K nicht die einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion sind. Nach Satz 9 muss gelten:

$$b^2 \leq 3ac.$$

Dies ist jedoch nicht der Fall, da $4,9^2 > 3 \cdot 0,8 \cdot 10$ ist. Aus diskreter Sicht ist K jedoch streng monoton steigend, so dass die Ungenauigkeit auf den Modellierungsaspekt zurückzuführen ist.

8.2 Analyse ausgewählter Abituraufgaben

In diesem Abschnitt gehen wir auf Abiturarbeiten zu ökonomische Funktionen ein. Als Beispiel dienen die Abituraufgaben Baden-Württemberg 2007 (Abschn. 8.2.1) und Hamburg 2011 (Abschn. 8.2.2).

8.2.1 Baden-Württemberg 2007

Die Abituraufgabe I 1 zur Analysis aus dem Wahlteil[40] 2007 ist auszugsweise in Anhang C dargestellt. Die Aufgabe enthält folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{30x + 800}{x + 5}.$$

Mit $x \geq 0$ gibt f die Kosten in 10.000 Euro für die x-te Produktionseinheit eines Rheumamittels an. Wir konzentrieren uns auf den zweiten Teil der

[40] Im so genannten Wahlteil dürfen die Schüler Hilfsmittel wie eine Formelsammlung oder einen GTR verwenden. Dagegen ist der Pflichtteil hilfsmittelfrei.

Aufgabe b), in der der Verkaufspreis für eine Packung gesucht ist, für den die Einnahmen aus den ersten 100 verkauften Produktionseinheiten ihren Herstellungskosten entsprechen. GRUBER und NEUMANN (2009) schlagen zur Lösung dieser Aufgabe die Verwendung der Integralrechnung vor. Die Herstellungskosten für die ersten 100 Einheiten ergeben sich zu:

$$\int_0^{100} f(x)\ dx = 4978,94. \tag{8.1}$$

Eine Produktionseinheit kostet im Schnitt ca. 49,79 (in €10.000). Insgesamt belaufen sich die Ausgaben auf €497.900. Da eine Einheit aus 10.000 Packungen besteht, kostet eine Packung in etwa €49,79. Dies entspricht dem Verkaufspreis einer Packung, damit das absetzende Unternehmen Break-Even ist. Der Zahlenwert aus Gleichung (8.1) ist lediglich eine Näherung für die Kosten der ersten hundert Einheiten, da es sich bei den Kosten um eine diskrete Größe handelt. Eine genaue Berechnung erfolgt mittels Addition:

$$\sum_{x=1}^{100} f(x) = 4919,19. \tag{8.2}$$

Wir erkennen, dass das Ergebnis aus Gleichung (8.1) um ca. €60 von der genauen Lösung in Gleichung (8.2) abweicht. Der Unterschied ist in der Wahl der Integrationsgrenzen des Integrals aus Gleichung (8.1) zu suchen. Wir veranschaulichen dies: Diskrete Größen lassen sich als Histogramm darstellen, dessen Rechtecke die Breite 1 haben und die jeweilige Höhe $f(x)$. Abbildung 8.1 zeigt das Schaubild der Kosten für die erste bis zehnte Einheit.

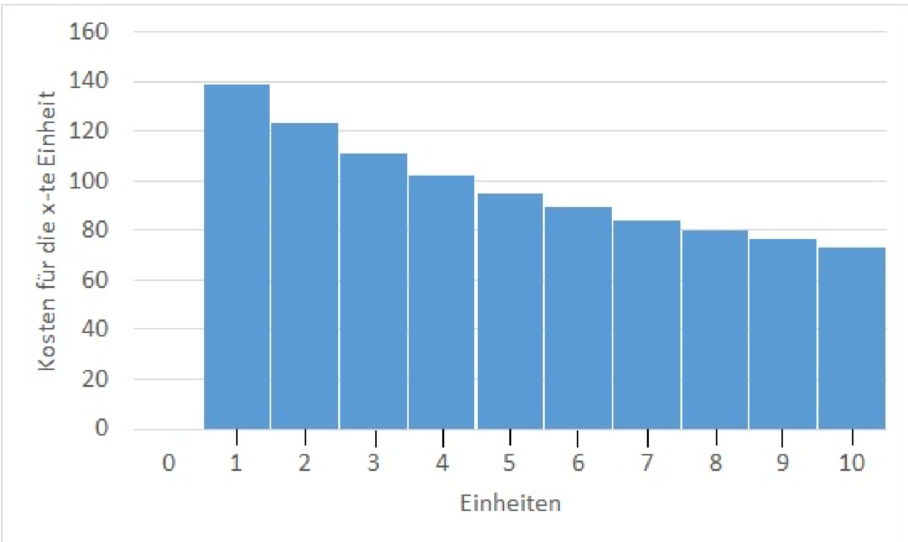


Abbildung 8.1: Kosten für die erste bis zehnte Einheit

In Abbildung 8.1 ist zu erkennen, dass das Rechteck für die erste Einheit im Intervall $[0,5;1,5)$, das Rechteck für die zehnte Einheit im Intervall $(9,5;10,5]$ liegt. Die Rechtecke stehen folglich um $0,5$ Einheiten über. Mit diesen neuen Grenzen verbessert sich die Näherung über das Integral zu:

$$\int_{0,5}^{100,5} f(x)\ dx = 4920. \tag{8.3}$$

Die Differenz der Ergebnisse der Gleichungen (8.3) und (8.2) fällt mit den neuen Grenzen geringer aus und ist lediglich in der Modellierung einer diskreten Größe mit einer stetigen Funktion begründet. Insbesondere zur Rückinterpretation im Modellierungskreislauf (vgl. Abschn. 5.3) ist dies von Bedeutung. Der mit dem Integral aus Gleichung (8.3) modellierte Preis pro Packung liegt somit bei €49,20 und weicht um €0,01 vom genauen Preis ab.

Anhand dieser Aufgabe zeigt sich das Lernpotenzial, dass in der Modellierung einer diskreten durch eine stetige Größe liegt. In der Aufgabenstellung wird zwar darauf hingewiesen, dass es sich bei f um ein Modell handelt, zur Lösung der Aufgabe ist dies nicht mehr relevant. Gerade im Mathematikunterricht sehen wir interessante Anwendungsmöglichkeiten auch unter dem Aspekt des kritischen Vernunftgebrauchs nach HEYMANN (1996). Auffällig in der Aufgabenstellung ist weiterhin, dass kaum wirtschaftsmathematische Begriffe verwendet werden. Bei der Funktion f handelt es sich um eine Grenzkostenfunktion K'. Anstelle der Kosten für die nächste produzierte Einheit, stellt f eine Näherung die Kosten für die x-te Einheit dar. Die Grenzkosten nehmen für jede weitere Einheit ab, daher handelt es sich um unterproportional ansteigende Kosten. Auf diese Begriffe wird jedoch nicht eingegangen, was zu Lasten einer ökonomischen Bildung geht.

8.2.2 Hamburg 2011

In der Hansestadt Hamburg wurden in den Jahren 2011 oder 2012 explizit Abituraufgaben zum Thema Wirtschaftsmathematik gestellt. Wir betrachten die Abituraufgabe aus dem Jahr 2011 aus dem Grundkurs (vgl. BSB 2011), um zu zeigen, in wie fern ökonomische Inhalte auch in Abiturarbeiten behandelt werden. Die Aufgabenstellung ist in Anhang D aufgeführt. Mit den vorgegebenen Datenpaaren zur Anzahl der produzierten Notebooks und der daraus entstehenden Gesamtkosten sollen die Schüler in Aufgabe a) den Funktionsterm einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion bestätigen, was den Modellcharakter unterstreicht. Es soll die inhaltliche Bedeutung von $K'(80)$ beschrieben werden, was auf die Interpretation der Grenzkosten als Näherung des Funktionswertes (vgl. Satz 1) abzielt. Auffällig ist, dass mit dem Begriff der Grenzkosten gearbeitet wird. Dies setzt voraus, dass die Schüler diesen im Unterricht kennengelernt haben. In Aufgabe b) ist das Minimum der Grenzkosten zu bestimmen und dessen Bedeutung zu erläutern.

Dies beinhaltet die Grundvorstellung des Wendepunktes als Ort der kleinsten Kostenänderung (vgl. Abschn. 2.2.3). Er kennzeichnet den Übergang von unter- zu überproportional ansteigenden Kosten. In Aufgabe c) ist ein konstanter Preis in Höhe von €599 je Netbook gegeben. Mit diesem Preis und der gegebenen ertragsgesetzlichen Kostenfunktion soll die Gewinnfunktion aufgestellt werden. Die Schüler müssen an dieser Stelle wissen, wie sich Erlös (vgl. Abschn. 1.3.2) und Gewinn (vgl. Abschn. 1.3.4) bestimmen lassen. Da der Marktpreis konstant ist, handelt es sich um ein Polypol, worauf nicht näher eingegangen wird. In Aufgabe d) ist zu bestätigen, dass zwischen zwei vorgegebenen Mengen das Unternehmen Gewinn erzielt. Zusätzlich ist der größte Gewinn zu bestimmen. Abschließend ist eine Stückkostenfunktion k gegeben. Inhaltlich wird hier die Thematik des Betriebsoptimums (vgl. Abschn. 2.2.2) angesprochen, ohne jedoch den Begriff der langfristigen Preisuntergrenze zu nennen.

Allgemein zeigt sich, dass diese Aufgabenstellung sehr stark auf die Verbindung mathematischer und ökonomischer Inhalte abzielt. Ökonomische Begrifflichkeiten werden, soweit sie eine mathematische Bedeutung haben, genannt und müssen teilweise erklärt werden. Zur Vorbereitung greifen die Lehrkräfte auf externe Handreichungen und Aufgaben zurück, zusammenhängende Unterrichtseinheiten fehlen jedoch (vgl. DAUME 2016, S. 97).

8.3 Konsequenzen aus der Analyse ausgewählter Aufgaben

Die Analyse von Aufgaben zur Wirtschaftsmathematik in Schulbüchern zeigt u. E, dass das Potenzial ökonomischer Funktionen im Mathematikunterricht nur unzureichend ausgeschöpft ist. Im Wesentlichen beziehen wir uns auf folgende Kritikpunkte:

- Die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Linearisierung wird nicht thematisiert.
- Einzelne Aufgaben erschweren einen nachhaltigen Lernprozess sowie eine ökonomische Bildung.
- Schüler werden mit ökonomischen Funktionen konfrontiert und beschränken sich aufs Abarbeiten der Aufgaben, ohne die mathematischen und ökonomischen Hintergründe zu untersuchen.
- Im Zentrum steht die mathematische Lösung. Reflexionen und mehrperspektivische Ansätze fehlen gänzlich.
- Grundlegende ökonomische Zusammenhänge werden in der Aufgabenstellung vorgegeben, anstatt von den Schülern herausgearbeitet.
- Verschiedene Notationen erschweren den Lernprozess.

Obwohl Aufgaben zur Wirtschaftsmathematik in aktuellen Schulbüchern für allgemeinbildende und berufliche Gymnasien unter der Rubrik „Vertiefen und Anwenden" von Gelerntem zu finden sind, existieren u. E. Möglichkeiten in der Erarbeitung neuer mathematischer Inhalte. Im Bereich der Differenzialrechnung sehen wir großes Potenzial in der anschaulichen Erarbeitung der Grundvorstellung der Ableitung als lokale Linearisierung. Wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, führt eine Analyse der Ableitung im Umfeld ökonomischer Funktionen auf den Begriff der lokalen linearen Approximation einer Funktion. Unregelmäßige, einzelne Aufgaben erachten wir als problematisch, denn sie erschweren eine nachhaltige ökonomische Bildung. Insbesondere vor dem Hintergrund, dass Abiturarbeiten von allgemeinbildenden Gymnasien wie etwa in Hamburg inzwischen ökonomische Funktionen beinhalten (vgl. BSB 2011). Dies unterstützt unsere Forderung nach einem durchgängigen Spiralcurriculum, das ökonomische Inhalte auf einer höheren Stufe wieder aufgreift und mit neuen Elementen anreichert (vgl. Abschn. 6.4). Die Entwicklung von Unterrichtseinheiten zur Wirtschaftsmathematik erhält nach unserer Auffassung damit nachhaltig ihre Berechtigung.

In der Aufgabenstellung in Schulbüchern fällt auf, dass Schüler oft mit ökonomischen Funktionen konfrontiert werden. Eine Erklärung, warum etwa ein konstanter Preis oder eine Preis-Absatz-Funktion vorgegeben ist, fehlt. Gleiches gilt auch für Kostenfunktionen: Während lineare Kostenfunktionen noch allgemein nachvollziehbar sind, wird auf ertragsgesetzliche Kostenfunktionen nicht näher eingegangen. Dies ist umso bedauerlicher, da neben den ökonomischen Hintergründen deren Verlauf großes Lernpotenzial besitzt.

Zumeist beschränken sich Aufgaben aus der Wirtschaftsmathematik in den vorliegenden Schulbüchern auf eine kalkülhafte Lösung. Die Schüler sollen mathematische Verfahren anwenden, um zur Lösung zu gelangen. Ökonomische Begriffe dienen eher als Verkleidung der Aufgabe. Reflexionen über eine Gewinnmaximierung hinaus, wie etwa soziale oder ökologische Aspekte, fehlen. Auch wenn dies weitere Zeit einfordert, so ist für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht an geeigneter Stelle darauf einzugehen. Wir betonen jedoch, dass dies nicht zu Lasten mathematischer Inhalte gehen darf. Grundlegende Zusammenhänge sollten im Zuge einer ökonomischen Bildung nicht in einer Aufgabenstellung erklärt, sondern von den Schülern herausgearbeitet werden. Die zusätzliche Zeit hält sich in Grenzen, da u. E. schon wenige Begriffe ausreichen, um wirtschaftsmathematische Zusammenhänge zu beschreiben. Anders verhält es sich mit ökonomischen Definitionen. Deren Bedeutung ist den Schülern vorzugeben. Wir empfehlen die verschiedenen Notationen in Schulbüchern für ökonomische Größen zu vereinheitlichen. Am geeignetsten erscheint uns die in der Wirtschaftsmathematik gebräuchliche Schreibweise: E für Erlös, K für Kosten und G für Gewinn.

Wir sehen jedoch ein Problem darin, dass in der Mathematiklehrerausbildung die Wirtschaftsmathematik nicht verankert ist. Eine Begegnung mit dieser Thematik findet zumeist erst während der aktiven Schulzeit statt. Daher empfehlen wir grundlegende Begriffe und Zusammenhänge in der Ausbildung zu implementieren. Dies trägt der ersten Grunderfahrung von WINTER (1995) Rechnung: Fächerübergreifend geschulte Lehrer können im Mathematikunterricht ein anwendungsorientiertes Thema vermitteln und einen (zeitlich überschaubaren) Beitrag zur ökonomischen Allgemeinbildung leisten. Umgekehrt kann der Mathematikunterricht von der Anschaulichkeit sowie dem Anwendungsbezug ökonomischer Themen profitieren. Insbesondere der Vergleich verschiedenster Zugänge zum Ableitungsbegriff in der didaktischen Ausbildung angehender Mathematiklehrer ist Pflicht. Während die lokale Änderungsrate z. B. in Form der Momentangeschwindigkeit ihren Platz findet, fehlt es noch an konkreten Unterrichtsgängen zur lokalen Linearisierung. Auch diese Lücke möchten wir mit den folgenden Unterrichtsvorschlägen schließen.

III Unterrichtseinheiten

9 Von Märkten und Unternehmen

Im Folgenden stellen wir eine erste Unterrichtseinheit zur Wirtschaftsmathematik vor, die sich schwerpunktmäßig den Themen lineare und quadratische Funktionen widmet. Deren Einsatz ist zum Ende der Sekundarstufe I vorgesehen. Bei der Konzeption orientieren wir uns an den Zielen der Leitidee „funktionaler Zusammenhang“ aus den Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss (vgl. KMK 2004, S. 10 ff.). Diese Leitidee ist auch Bestandteil der in Abschnitt 6.4 aufgeführten fundamentalen Ideen der Analysis, von denen wir in der Unterrichtseinheit zusätzlich „Messen“ und „Optimieren“ berücksichtigen. Inhaltlich beziehen wir uns auf das Kapitel 1 dieser Arbeit.

9.1 Inhaltliche und konzeptionelle Zusammenfassung

Die Unterrichtseinheit ist in ein Basismodul und zwei inhaltlich passende Ergänzungsmodule aufgeteilt. Das Basismodul bildet die Grundlage für die weiteren Unterrichtseinheiten und gliedert sich in folgende vier Abschnitte:

1. Ökonomische Grundlagen
2. Preisbildung im Monopol
3. Preisbildung im Polypol
4. Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung.

Die einzelnen Abschnitte sind inhaltlich aufeinander abgestimmt und sollten chronologisch unterrichtet werden. Die Schüler lernen grundlegende ökonomische Größen (Preis, Absatz, Erlös, Kosten, Gewinn) kennen und analysieren diese mittels linearer und quadratischer Funktionen. Zur weiteren Vertiefung stellen wir zwei Ergänzungsmodule bereit:

1. Modellierungskreislauf
2. Preisbildung unter monopolistischer Konkurrenz.

Abbildung 9.1 zeigt einen möglichen zeitlichen Ablauf der Unterrichtseinheit. Die Ergänzungsmodule wurden an zeitlich passender Stelle eingefügt und besitzen für das inhaltliche Verständnis der Abschnitte des Basismoduls unterstützenden Charakter.

9.2 Das Basismodul

9.2.1 Ökonomische Grundlagen

Dieser Abschnitt führt in die wichtigsten ökonomischen Grundbegriffe ein, die im Folgenden verwendet werden. Als Einstieg eignen sich aktuelle Zei-

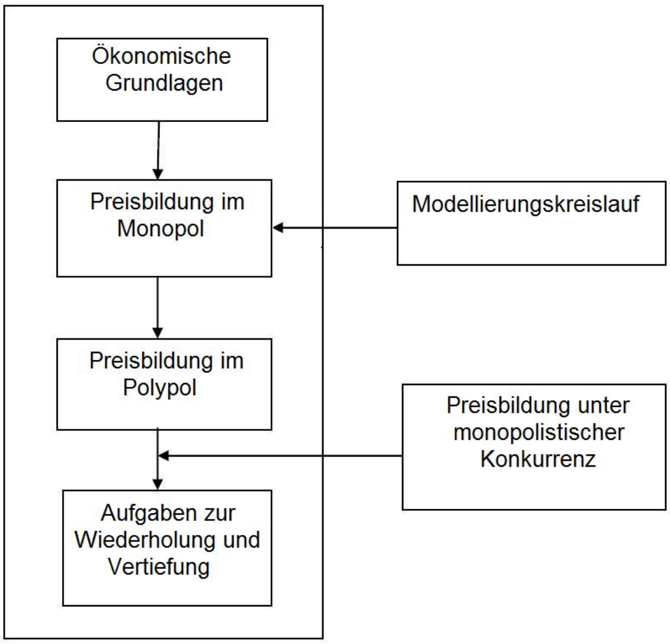


Abbildung 9.1: Vorschlag zum zeitlichen Ablauf der Unterrichtseinheit „Von Märkten und Unternehmen"

tungsartikel zum Wirtschaftsgeschehen von Tageszeitungen. Bei der Auswahl ist zu berücksichtigen, dass nicht etwa aktienspezifische Ausdrücke das Verständnis zusätzlich erschweren. Ziel ist die Klärung der für diese Einheit grundlegenden Begriffe: Preis, Absatz, Umsatz (synonym: Erlös), Kosten und Gewinn. In Aufgabe 9.1 verwenden wir einen Auszug eines Zeitungsartikels aus dem Hamburger Abendblatt.

Aufgabe 9.1
Bearbeiten Sie die folgenden Fragen zum Zeitungsartikel „Leer gekauft! Keine freien Plätze mehr!".

a) *Geben Sie an, wie sich der Umsatz eines Unternehmens zusammensetzt. Erklären Sie den Unterschied zwischen variablen und fixen Kosten.*

b) *Erläutern Sie den Begriff „Break-even".*

c) *Erarbeiten Sie mit Hilfe einer Internetrecherche[41] die ökonomischen Begriffe Monopol, Polypol und polypolistische Konkurrenz. Ordnen Sie den im Artikel beschriebenen Feinkostladen ein.*

[41] Nutzen Sie ggf. ein Online-Wirtschaftslexikon wie http://wirtschaftslexikon.gabler.de/

Leer gekauft! Keine freien Plätze mehr!

Vier Wochen nach der Eröffnung brummt der vegane Feinkostladen mit angeschlossenem Café in Eimsbüttel. Nun plant Jennifer Hinze sogar eine eigene Produktlinie mit selbst gemachten Chutneys, Marmeladen und anderen Brotaufstrichen

Schluss! Aus! Ende! Kaum hat Jennifer Hinze ihren Laden aufgemacht, da ist auch schon wieder Schluss. Grete Schulz, der vegane Feinkostladen mit angeschlossenem Café, schließt heute – nach nur viereinhalb Stunden. Ein Einzelfall, eine Ausnahme, wegen Silvester. Aus diesem Grund öffnet Jennifer Hinze ihr Geschäft nur bis 12 Uhr – und nicht wie sonst bis 17 oder 19 Uhr. Und morgen, am Neujahrstag, bleibt der Laden ganz zu. Es gibt kein Frühstück. Und damit keinen Umsatz. Die Entscheidung ist nicht leicht gefallen. Doch seit der Eröffnung vor vier Wochen musste Jennifer Hinze, 34, lernen, dass sie den Laden auch mal schließen darf. Oder sogar muss.

Dass sie nicht jeden Tag 15 oder 16 Stunden arbeiten kann. Dass es ok ist, einen Ruhetag pro Woche einzulegen. Und dass das Geschäft trotzdem läuft. Besser, als sie es kalkuliert hat.

Als die Jungunternehmerin vor ein paar Monaten ihren Businessplan aufgestellt und einen Gründerkredit beantragt hat, war sie davon ausgegangen, irgendwann im nächsten Jahr ihr Ziel zu erreichen. In ein paar Monaten vielleicht, frühestens in einigen Wochen. Ihr Ziel: so viel Umsatz zu machen, dass sie ihre Fixkosten von 5500 Euro monatlich sowie die variablen Kosten für den Wareneinsatz decken kann, umgerechnet 400 Euro pro Tag. Und dann das! Nachdem Jennifer Hinze in den ersten Tagen nach der Eröffnung gerade einmal 150 Euro täglich eingenommen hat, schnellen die Umsätze hoch. Nach einer Woche waren es schon 200 Euro pro Tag, an einem Mittwoch sogar 300 – und am Wochenende dann 400 Euro. Täglich! Der Break-even!

Hamburger Abendblatt vom 15.12.15

Nach der Besprechung der Ergebnisse aus Aufgabe 9.1 sollten die Schüler mit nachfolgenden Begriffen und Zusammenhängen vertraut sein: Jedes Produkt hat seinen **Preis**. Je mehr davon verkauft wird, desto größer ist der **Umsatz**, der sich als Produkt aus Menge und Preis berechnet. Wir verwenden im Folgenden für den Begriff Umsatz den in der Literatur ebenfalls gebräuchlichen Begriff des **Erlöses**. **Fixe Kosten** fallen an, wenn kein Erlös erzielt wird. Dazu zählen z. B. die Mietkosten. Zu den **variablen Kosten** gehören etwa Einkaufskosten oder Strom, da diese von der verkauften Menge abhängen. Decken sich Erlös und Kosten, ist die Unternehmerin **Break-even**. Erwirtschaftet ein Unternehmen höhere Einnahmen als Kosten, arbeitet es mit **Gewinn**. Andernfalls erzielt es **Verlust**. Der Gewinn berechnet sich als Differenz von Erlös und Kosten. Wäre der Feinkostladen der einzige seiner Art und die Inhaberin könnte den Preis für ihre Güter beliebig festsetzen, so läge ein **Monopol** vor. Bei sehr vielen Läden, die das selbe Angebot und vergleichbare Preise haben, spricht man von einem **Polypol**. Beides ist in der Realität jedoch selten anzutreffen. Häufiger und zutreffender ist die Marktform der **polypolistischen Konkurrenz**. Neben dem Feinkostladen gibt es noch weitere Verkäufer, die Nahrungsmittel anbieten. Jedoch unterscheiden diese sich im Angebot, so dass die Besitzerin des Feinkostladens sich innerhalb eines gewissen Preisspielraumes wie ein Monopolist verhalten kann. Dies trifft auch auf Unternehmen bekannter Marken wie etwa Apple, Adidas oder Coca Cola zu. Sie werden als polypolistische Anbieter mit monopolistischem Preisspielraum bezeichnet.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Ökonomische Grundlagen“ ergeben sich folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... kennen die grundlegenden Begriffe und Zusammenhänge von Erlös (Umsatz), Kosten sowie Gewinn.
- ... grenzen fixe und variable Kosten voneinander ab.
- ... unterscheiden die Marktformen Monopol, Polypol und monopolistische Konkurrenz.

9.2.2 Preisbildung im Monopol

Dieser Abschnitt zeigt einen Unterrichtsgang zur Modellierung eines Preisbildungsprozesses im Monopol. Zunächst steht eine Abfrage nach der individuellen Zahlungsbereitschaft von Kunden an, die eine erste Vorstellung zum funktionalen Zusammenhang zwischen Preis und verkaufter Menge liefert. Die Daten[42] z. B. zum Preis eines Kuchenverkaufs können wie in Aufgabe 9.2 tabellarisch erfasst und ausgewertet werden.

Aufgabe 9.2
Eine Klasse verkauft zur Aufbesserung der Klassenkasse Kuchen. Für ein Stück Kuchen wurden je nach Preis die abgesetzten Mengen erfragt. Die Ergebnisse der Befragung sind in Tabelle 9.1 aufgeführt.

a) *Stellen Sie eine Vermutung auf, welchen Einfluss der Preis auf die Anzahl der verkauften Kuchenstücke hat.*

b) *Tragen Sie die Zuordnung „Preis $\mapsto$ Anzahl verkaufter Kuchenstücke“ in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Achten Sie dabei auf eine geeignete Skalierung. Überprüfen Sie Ihre Vermutung aus a).*

[42]Steht genügend Zeit zur Verfügung, ist es möglich eigene Daten z. B. anhand eines Kuchen- oder Waffelverkaufs zu erheben. Dabei ist beim Ausfüllen der Tabelle darauf zu achten, dass diejenigen, die einen höheren Preis bereit sind zu zahlen, auch bei einem niedrigeren Preis kaufen würden und daher mitgezählt werden.

Preis in € pro Stück	abgesetzte Menge
$2,50$	3
$2,00$	5
$1,50$	13
$1,00$	20
$0,50$	25

Tabelle 9.1: Tabelle zur Umfrage der Absatzzahlen bei verschiedenen Preisen

c) *In der Wirtschaftsmathematik beschreibt man die Punktwolke in der Regel mit einer linearen Funktion. Erstellen Sie eine Schätzgerade mithilfe eines Computerprogramms (z. B. Excel) oder einem geeigneten Taschenrechner. Benutzten Sie die Funktion „lineare Regression“.*

d) *Die unter c) erhaltene Funktion heißt* ***Nachfragefunktion*** *und wird mit $x(p)$ bezeichnet. Erläutern Sie, was man unter dieser Funktion versteht und welche Aussagen wir aus dieser Funktion gewinnen können. Welche Bedeutungen besitzen die Steigung und die Schnittpunkte der Funktion mit den Koordinatenachsen?*

Anhand der Tabelle 9.1 liegt folgende Vermutung nahe: „Je höher der Preis ist, desto weniger wird verkauft“. Dieser Zusammenhang, der als das **Gesetz der Nachfrage** bezeichnet wird, rechtfertigt die Verwendung des Preises als unabhängige Variable zu Beginn. Die Abbildung 9.2 zeigt die Punktwolke der Datenpaare und die Regressionsgerade mit der Gleichung:

$$x(p) = -11,8p + 30,9.$$

Der Schnittpunkt mit der Ordinate liegt bei $x(0) = 30,90$. Für einen Preis von €0 pro Stück ergibt sich eine verkaufte bzw. verschenkte Menge von ungefähr 31 Stück Kuchen[43]. Es lassen sich also theoretisch höchstens 31 Stück Kuchen absetzen. Diese maximal absetzbare Menge wird in der Ökonomie als **Sättigungsmenge** bezeichnet. Sie wird erreicht, wenn der Konsument kein weiteres Stück mehr zu kaufen bereit ist. Mit der Gleichung $x(p) = 0$ lässt sich der **Prohibitivpreis** berechnen. Dieser liegt in unserem Beispiel bei ungefähr €2,62 pro Stück und gibt die maximale Preisobergrenze an. Ab diesem Preis findet sich kein Käufer mehr, da dieser als zu teuer empfunden wird. Somit liefert die Funktion $x(p)$ nur für $0 \leq p \leq 2,62$ sinnvolle Ergebnisse. Die Steigung lässt sich mithilfe eines Steigungsdreiecks erläutern. Es gilt: Sinkt (Steigt) der Preis um €1 pro Stück, dann erhöht (verringert) sich die abgesetzte Menge um ungefähr zwölf Stück. Hier bietet es sich an, eine

[43]Da es sich um Stückzahlen handelt, bietet sich ein Runden der Ergebnisse auf Einer an.

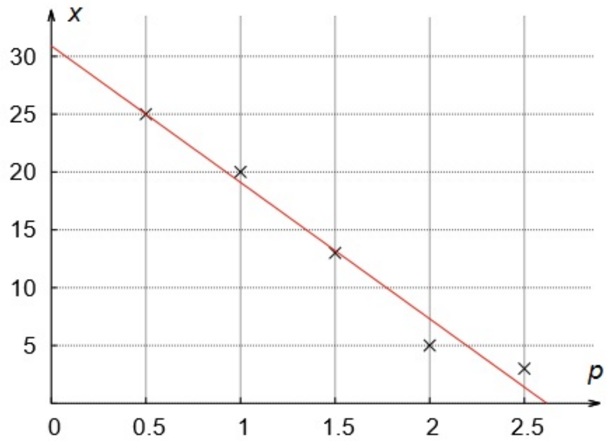


Abbildung 9.2: Graphische Darstellung der Datenpaare als Schätzgerade

kleinere Einheit zu wählen: Sinkt (steigt) der Preis um €0,10 pro Stück, so erhöht (verringert) sich die abgesetzte Menge um ca. ein Stück.

Diese Einführung der Nachfrage nach den Preisvorstellungen der Schüler besitzt den Vorteil, dass sie die Modellierung einer Nachfragefunktion selbst durchführen und nicht nur mit dem Funktionsterm konfrontiert werden. Aus der Nachfragefunktion resultiert eine weitere ökonomische Funktion, die Preis-Absatz-Funktion. Zu deren Bestimmung dient Aufgabe 9.3.

Aufgabe 9.3

Wir gehen davon aus, dass der Kuchenverkauf nur von einer Klasse stattfindet und sonst kein weiterer Kuchen in der Schule erhältlich ist. Als monopolistisches Unternehmen können die Schüler den Preis setzen. Die Nachfrage nach dem Kuchen lässt sich mit der Nachfragefunktion $x(p)$ modellieren. In der Wirtschaftsmathematik möchte man aber häufig Aussagen in Abhängigkeit von der (theoretisch) absetzbaren Menge treffen. Diese Funktion $p(x)$ eines Unternehmens heißt ***Preis-Absatz-Funktion****. Sie ist die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion $x(p)$.*

a) *Bestimmen Sie mit der Nachfragefunktion $x(p) = -11,8p + 30,9$ aus Aufgabe 9.2 die Preis-Absatz-Funktion.*

b) *Bestimmen Sie die Sättigungsmenge und den Prohibitivpreis.*

c) *Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Steigung besitzt.*

Für die Preis-Absatz-Funktion gilt (auf zwei Nachkommastellen gerundet):

$$x = -11,8p + 30,9 \Leftrightarrow p = -0,08x + 2,62.$$

Die Preis-Absatz-Funktion lautet $p(x) = -0,08x+2,62$. Der Prohibitivpreis liegt bei €2,62 pro Stück und die Sättigungsmenge bei ca. 33 Stück. Für die Steigung gilt: Möchte die Klasse eine Einheit mehr verkaufen, dann ist der Preis pro Stück um €0,08 Euro zu senken. Allgemein beschreibt eine Preis-Absatz-Funktion den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Preis p und der abgesetzten Menge x. Sofern keine Maßeinheiten gegeben sind, wird die nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME) und der Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit ($\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$) gemessen. In Aufgabe 9.4 können die Schüler untersuchen, wie mittels einer Preis-Absatz-Funktion eine Erlösfunktion bestimmt wird.

Aufgabe 9.4
Die Schüler möchten nun wissen, wie hoch ihre Einnahmen beim Kuchenverkauf bei den jeweiligen Preisen sind. Zur Berechnung des Erlöses verwenden sie die Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -0,08x + 2,62$.

a) *Ergänzen Sie die Tabelle 9.2. Geben Sie in der letzten Zeile einen allgemeinen Funktionsterm $E(x)$ für den Erlös in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge an.*

Menge	**Preis in € pro Stück**	**Erlös in €**
0		
5		
10		
15		
x		

Tabelle 9.2: Tabelle zur Berechnung des Erlöses

b) *Die unter a) bestimmte Funktion $E(x)$ heißt* ***Erlösfunktion****. Bestimmen Sie deren Nullstellen und Scheitel. Interpretieren Sie die ökonomische Bedeutung der erhaltenen Ergebnisse hinsichtlich des Verkaufs.*

Sofern im vorherigen Abschnitt „ökonomische Grundlagen" noch nicht thematisiert, müssen die Schüler erkennen, dass sich der Erlös als Produkt von Preis und Menge („Preis mal Menge") berechnet. Tabelle 9.3 zeigt die Lösung. Für die Erlösfunktion erhalten wir:

$$E(x) = (-0,08x + 2,62) \cdot x = -0,08x^2 + 2,62x.$$

Die Erlösfunktion besitzt die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 32,75$. Für den Verkauf sind die Preise zu berechnen. Mit $p_1(0) = 2,62$ und $p_2(32,75) = 0$ gilt: Für den Prohibitivpreis in Höhe von €2,62 pro Stück sowie einem Preis

Menge	Preis in € pro Stück	Erlös in €
0	$2,62$	0
5	$2,22$	$11,10$
10	$1,82$	$18,20$
15	$1,42$	$21,30$
x	$-0,08x+2,62$	$(-0,08x+2,62)\cdot x$

Tabelle 9.3: Berechnung des Erlöses

von €0 pro Stück wird kein Erlös erzielt. Analog ließe sich über das Produkt aus Menge und Preis argumentieren: Der Erlös ist genau dann Null, wenn entweder der Preis oder die abgesetzte Menge Null ist. Der Scheitel[44] von E liegt ungefähr bei $S(16,38|21,45)$ und liefert den größten Erlös in Höhe von €21,45. Mit $p(16,38) \approx 1,31$ wird dieser für einen Preis von ca. €1,31 pro Stück erzielt. Wir halten fest:

Sei x die Menge und $p(x)$ die Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten. Der Erlös lässt sich als Funktion in Abhängigkeit der Menge darstellen:

$$E(x) = p(x)\cdot x.$$

Nachdem die Schüler sich mit der Bestimmung des Erlöses vertraut gemacht haben, erfolgt in Aufgabe 9.5 die Einbeziehung der Kosten[45].

Aufgabe 9.5

Die Klasse hat bisher nicht berücksichtigt, dass bei der Produktion und dem Verkauf des Apfelkuchens auch Kosten anfallen. So müssen z. B. Zutaten eingekauft oder Gehälter bezahlt werden.

a) *Abbildung 9.3 zeigt die Summe der Einkaufskosten für die Produktion von 48 Stücken. Bestimmen Sie die Kosten, die bei der Herstellung von 0, 5, 10, 15 bzw. x Stück Kuchen anfallen.*

b) *Die in Aufgabe a) bestimmte Funktion heißt variable* ***Kostenfunktion****. Begründen Sie diese Einordnung.*

[44] Schüler zeigen sich oft verwundert über den parabelförmigen Verlauf der Erlösfunktion. Ein Blick in Tabelle 9.3 kann Abhilfe schaffen: Der Erlös steigt mit zunehmender abgesetzter Menge an und fällt danach wieder. Dies sollte sich auch im Funktionsterm widerspiegeln.

[45] Liegen eigene Daten vor, so sind diese analog zu verwenden.

			EUR
Obst&Gemüse			
Apfel 3kg rot			3,99 B
Molkerei / Käse / Eier / Fette			
Pflanzenmargarine			
2x	0,75=	1,50	1,50 B
H-Milch			0,65 B
Eier Freilandhalt.			0,95 B
Nährmittel			
Weizenmehl			
3x	0,45=	1,35	1,35 B
Backhefe			0,99 B
Raffinade			0,65 B
Vanillin Zucker			0,25 B
Summe		**EUR**	**10,33**

Abbildung 9.3: Kosten beim Einkauf

c) *Wir gehen nun davon aus, dass für den Kuchenverkauf drei Verkäufer eingeplant sind, die jeder €1 pro Schicht erhalten. Geben Sie einen allgemeinen Funktionsterm für die Gesamtkosten $K(x)$ in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge x an.*

Aus den Einkaufskosten in Höhe von €10,33 für 48 Stück Kuchen folgen Ausgaben in Höhe von ungefähr €0,22 pro Kuchen. Daraus ergeben sich die in Tabelle 9.4 aufgeführten Werte. Für die **variablen Kosten** erhalten wir die allgemeine Funktionsvorschrift:

$$K_v(x) = 0,22x.$$

Herstellungskosten steigen mit zunehmender produzierter Menge, folglich lassen sich diese unter variablen Kosten einordnen, was die Verwendung einer entsprechenden Funktion rechtfertigt. Die Gehälter fallen unabhängig von den Produktionskosten an und gehören zu den **fixen Kosten**. Die lineare

Menge	**Variable Kosten in €**
0	0
5	$1,10$
10	$2,20$
15	$3,30$
x	$0,22x$

Tabelle 9.4: Berechnung der variablen Kosten

Kostenfunktion, die die Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge beschreibt, lautet:

$$K(x) = 0,22x + 3.$$

Sind die Größen Erlös und Kosten sowie ihre Funktionen untersucht, ist in Aufgabe 9.6 der Gewinn zu untersuchen.

Aufgabe 9.6
Die Klasse interessiert mit Hinblick auf ihre Abschlussfahrt der Gewinn, der sich aus Erlös und Kosten bestimmen lässt.

*a) Berechnen Sie mit der Erlösfunktion $E(x) = -0,08x^2 + 2,62x$ und der Kostenfunktion $K(x) = 0,22x + 3$ den Gewinn für 0, 5, 10, 15 abgesetzte Kuchenstücke. Geben Sie einen Funktionsterm für die **Gewinnfunktion** $G(x)$ an.*

*b) Die Schüler möchten einen positiven Gewinn erzielen. Das Intervall, in dem $G(x) > 0$ ist, heißt **Gewinnzone**. Die erste Nullstelle der Gewinnfunktion, nach der der Gewinn zum ersten Mal positiv wird, heißt **untere Gewinnschwelle**. Bestimmen Sie die Gewinnzone und die untere Gewinnschwelle mit den zugehörigen Preisen.*

c) Die Menge des größten Gewinns heißt gewinnmaximale Menge. Bestimmen Sie die gewinnmaximale Menge und den maximalen Gewinn.

*d) Der Preis, für den der Gewinn am größten wird, heißt gewinnmaximaler Preis. Der Punkt auf der Preis-Absatz-Funktion der gewinnmaximalen Menge und dem gewinnmaximalen Preis heißt **Cournotscher Punkt**. Bestimmen Sie dessen Koordinaten.*

Zur Berechnung des Gewinns sind die Kosten vom Erlös abzuziehen. Aus den vorherigen Ergebnissen erhalten wir für den Gewinn[46] die in Tabelle 9.5 aufgeführten Lösungen. Der Funktionsterm der Gewinnfunktion berechnet sich als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion[47]:

$$G(x) = E(x) - K(x) = -0,08x^2 + 2,62x - (0,22x + 3) = -0,08x^2 + 2,4x - 3.$$

Die Nullstellen von G befinden sich bei $x_1 \approx 1,31$ und $x_2 \approx 28,69$. Damit liegt die Gewinnzone zwischen 2 und 28 Stücken. Die untere Gewinnschwelle wird bei $x_1 \approx 1,31$ angenommen. Der zugehörige Punkt $P(1,31|0)$ heißt **Break-Even-Point**. Die Preise lassen sich über die Preis-Absatz-Funktion bestimmen. Aus $p_1(1,31) \approx 2,52$ und $p_2(28,69) \approx 0,32$ folgt: Ab einem

[46] Allgemein werden Erlös, Kosten und Gewinn in Geldeinheiten (GE) gemessen.

[47] Schüler begehen beim Aufstellen der Gewinnfunktion oft den Fehler, dass nur die variablen Kosten vom Erlös subtrahiert werden. Neben einer mathematischen Begründung lässt sich auch ökonomisch argumentieren, dass die Fixkosten nicht zum Gewinn hinzu addiert werden dürfen.

Menge	Gewinn in €
0	-3
5	7
10	13
15	15
x	$-0,08x^2 + 2,4x - 3$

Tabelle 9.5: Berechnung des Gewinns

Preis von ca. €0,32 bis €2,52 pro Stück erzielt das Unternehmen Gewinn. Der Scheitel besitzt die Koordinaten $S(15|15)$. Für den maximalen Gewinn in Höhe von €15 sind folglich 15 Stücke zu verkaufen. Mit $p_3(15) = 1,42$ gilt: Bei einem Stückpreis von €1,42 liegt der höchste Gewinn mit €15. Der **Cournotsche Punkt** besitzt die Koordinaten $C(15|1,42)$. Wir halten fest:

Gegeben seien die Erlösfunktion $E(x)$ und die Kostenfunktion $K(x)$. Für die Gewinnfunktion $G(x)$ gilt:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

Sind die Größen Erlös, Kosten und Gewinn sowie ihre Funktionen untersucht, bietet es sich an, deren Zusammenhänge graphisch zu verdeutlichen. Hierzu eignet sich Aufgabe 9.7.

Aufgabe 9.7
Zeichnen Sie die Funktionsgraphen der bisher bestimmten Erlös-, Kosten und Gewinnfunktion mithilfe eines GTRs oder eines Funktionenplotters in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Beschreiben Sie alle erkennbaren Zusammenhänge zwischen dem Erlös, den Kosten und dem Gewinn.

Die Abbildung 9.4 zeigt die Graphen der ökonomischen Funktionen von Erlös, Kosten und Gewinn. Dabei ergeben sich folgende Zusammenhänge, die sich auch mit der Gleichung $G(x) = E(x) - K(x)$ bestätigen lassen:

a) Wenn die Kosten größer sind als der Erlös, genau dann ist der Gewinn negativ.

b) Wenn der Erlös größer ist als die Kosten, genau dann ist der Gewinn positiv.

c) Wenn Erlös und Kosten gleich hoch sind, genau dann ist der Gewinn gleich Null.

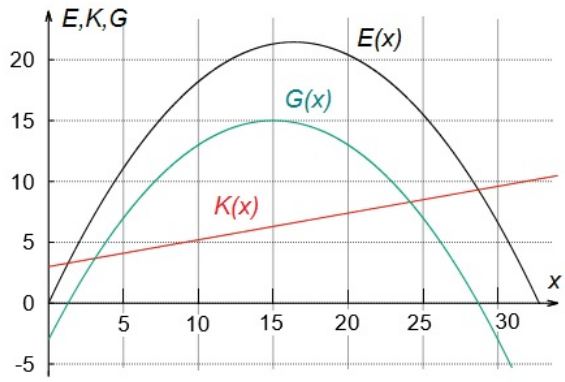


Abbildung 9.4: Graphen von Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktion

Im bisherigen Preisfindungsprozess haben wir bisher ausschließlich ökonomische Aspekte verwendet, soziale und ökologische Aspekte blieben außen vor. Damit die Schüler die Gelegenheit zu einer mehrperspektivischen Betrachtung des Preises haben, ist Aufgabe 9.8 zu bearbeiten.

Aufgabe 9.8
Bei einem Kuchenverkauf geht es insbesondere um einen angemessenen Preis für ein Stück Kuchen. Überlegen Sie gemeinsam mit einem Partner, welche weiteren außermathematischen Kriterien den Preis beeinflussen sollen. Legen Sie einen Preis fest und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Neben den mathematischen Ergebnissen, die auf den größten Gewinn oder Erlös abzielen, können an dieser Stelle auch soziale oder ökologische Argumente diskutiert werden. Damit betrachten wir die Preismodellierung aus verschiedenen Perspektiven und zeigen, dass der mathematische Aspekt nur einer von vielen ist. Anhand der folgenden Auflistung geben wir dazu Anregungen:

- Bei einem niedrigen Preis können auch diejenigen Schüler ein Stück kaufen, die wenig Geld dabei haben.
- Bei einem hohen Gewinn können die Verkäufer mehr Gehalt erhalten.
- Sollte beim Einkauf auf regionale oder Bio-Produkte Wert gelegt werden, auch wenn dadurch die Kosten steigen?
- Ist für einen gewinnmaximalen Preis in Höhe von €1,42 pro Stück ausreichend Wechselgeld vorhanden?
- Was passiert mit übriggebliebenen Kuchenstücken?

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Preisbildung im Monopol“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... erfahren einen Modellierungsprozess zur Preisbildung im Monopol.
- ... stellen die Funktionen von Erlös, Kosten und Gewinn auf.
- ... berechnen charakteristische Punkte ökonomischer Funktionen.
- ... begründen mehrperspektivisch die Wahl eines optimalen Preises.

9.2.3 Preisbildung im Polypol

Im Monopol liegt der Fokus auf einem alleinigen Anbieter eines Gutes, der sich an der Marktnachfrage orientiert. Im Polypol existieren sehr viele Anbieter. Deren Rolle im Preisfindungsprozess betrachten wir im Folgenden genauer. Ein polypolistischer Anbieter handelt nach dem **Gesetz des Angebots**: „Je höher der Preis eines Gutes, desto mehr lohnt es sich davon anzubieten“, da für höhere Verkaufspreise die Einnahmen steigen. Das Verhalten der Anbieter lässt sich mit einer Funktion modellieren, der **Angebotsfunktion**. Aufgrund des Gesetzes des Angebots gehen wir von einer streng monoton steigenden, stetigen Funktion aus. Die Aufgabe 9.9 führt in die Thematik des Preisfindungsprozesses im Polypol ein. Eine Verwendung des Taschenrechners ist für die Aufgaben in diesem Unterabschnitt nicht notwendig.

Aufgabe 9.9
Auf einem Markt treffen viele Anbieter und Nachfrager aufeinander. Das Verhalten der Nachfrager lässt sich über die Funktion $x_N(p) = 28 - 2p$ *beschreiben. Die Reaktion der Anbieter folgt der Funktion* $x_A(p) = 3 + 0,5p$.

a) *Liegt das Angebot zu einem bestimmten Preis über der Nachfrage, dann wird dies als* ***Angebotsüberschuss*** *bezeichnet. Berechnen Sie den Angebotsüberschuss für* $p_1 = 12$.

b) *Ist zu einem bestimmten Preis die Nachfrage höher als das Angebot, so heißt dies* ***Nachfrageüberschuss***. *Wie groß ist dieser für* $p_2 = 6$*?*

c) *Geben Sie den Schnittpunkt der Geraden von Angebots- und Nachfragefunktion an und interpretieren Sie dessen ökonomische Bedeutung.*

d) *Zeichnen Sie die Geraden von Angebots- und Nachfragefunktion in ein Koordinatensystem ein. Markieren Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben a) bis c).*

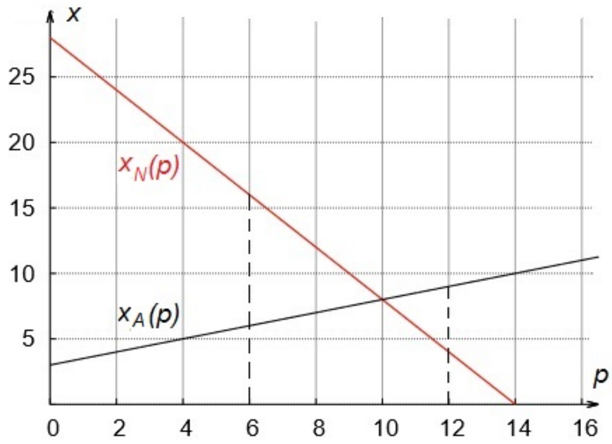


Abbildung 9.5: Graphische Darstellung von Angebots- und Nachfragefunktion

Der Angebotsüberschuss ergibt sich als Differenz der angebotenen und nachgefragten Menge für $p_1 = 12$. Es gilt:

$$x_A(12) - x_N(12) = 9 - 4 = 5.$$

Für einen Preis in Höhe von 12 $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$ bieten die Verkäufer 5 ME mehr an, als die Nachfrager zu kaufen bereit sind. Der Nachfrageüberschuss für $p_2 = 6$ berechnet sich zu:

$$x_N(6) - x_A(6) = 16 - 6 = 10.$$

Für einen Preis von 6 $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$ werden 10 ME mehr nachgefragt, als die Verkäufer anbieten. Der Schnittpunkt, den wir aus den Geraden von Angebots- und Nachfragefunktion erhalten, besitzt die Koordinaten $S(10|8)$. Langfristig stellt sich dieses Gleichgewicht am Markt ein (vgl. Abschn. 1.2). Am Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion können wir mit 10 $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$ den Preis ablesen, für den das Angebot mit der Nachfrage übereinstimmt. Dieser entspricht dem Marktpreis, dem sich ein polypolistischer Anbieter gegenüber sieht. Das Schaubild der Geraden und die Ergebnisse aus a) bis c) sind in Abbildung 9.5 zu sehen. Wir halten fest:

Der Schnittpunkt $S(p_M|x_M)$ der Graphen von Nachfrage- und Angebotsfunktion heißt **Marktgleichgewicht**. Dabei stellt p_M den Gleichgewichtspreis und x_M die Gleichgewichtsmenge dar.

Anschließend geben wir die Umkehraufgabe 9.10 vor. Die Schüler können mit dieser die Begriffe und ökonomischen Zusammenhänge im Umfeld des Marktgleichgewichts reflektieren und durch Rückwärtsarbeiten einen heuristischen Lösungsansatz verfolgen.

Aufgabe 9.10
Geben Sie jeweils zwei verschiedene Angebots- und Nachfragefunktionen an, so dass das Marktgleichgewicht bei $p_M = 4$ und $x_M = 10$ liegt.

Da hier verschiedene Schülerlösungen möglich sind, skizzieren wir beispielhaft eine Lösung. Der Graph einer Angebotsfunktion besitzt nach dem „Gesetz des Angebots“ eine positive Steigung. Die Ordinate ist nicht negativ zu wählen, da die Einheit eine Menge ist. Eine Gleichung, die diese Bedingungen berücksichtigt und für die $S(4|10)$ eine Lösung ist, lautet:

$$x_A(p) = 2p + 2.$$

Der Graph einer Nachfragefunktion hat nach dem „Gesetz der Nachfrage“ einen negativen Anstieg. Der Ordinatenschnittpunkt, der den Prohibitivpreis darstellt, ist positiv. Eine Gleichung, die diese Bedingungen erfüllt und für die $S(4|10)$ eine Lösung ist, lautet:

$$x_N(p) = -0,5p + 12.$$

Nachdem die Schüler die Entstehung eines Preises im Polypol kennengelernt haben, ist es sinnvoll, die Themen Erlös, Kosten und Gewinn aufzugreifen. Zur Orientierung bietet sich folgende Frage an:

> Was ändert sich beim Aufstellen von Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktion eines polypolistischen Unternehmens im Vergleich zu einem Monopolisten?

Die zuvor bearbeiteten Aufgaben verdeutlichen, dass ein Polypolist sich keiner dem Monopolisten vergleichbaren fallenden Preis-Absatz-Funktion gegenüber sieht, denn die Fähigkeit den Preis zu setzen ist eingeschränkt. Vielmehr führt das Marktgleichgewicht auf den Verkaufspreis, aus dem wir die Preis-Absatz-Funktion eines Polypolisten erhalten. Aufgabe 9.11 verdeutlicht dies.

Aufgabe 9.11
Auf einem Polypol lässt sich das Angebot über die Funktion $x_A(p) = 12{+}0,1p$ beschreiben. Die Nachfrage folgt der Funktion $x_N(p) = 60 - 0,5p$.

a) Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht.

b) Geben Sie die Erlösfunktion an.

Das Marktgleichgewicht erhalten wir als Schnittpunkt der Geraden von Nachfrage- und Angebotsfunktion. Die Gleichung $x_A(p) = x_N(p)$ besitzt die Lösung $p_M = 80$. Mit $x_A(80) = x_N(80) = 20$ liegt das Marktgleichgewicht bei $S(80|20)$. Das polypolistische Unternehmen sieht sich dem konstanten

Marktpreis $p_M = 80$ gegenüber. Der Erlös berechnet sich als Produkt aus Preis und Menge. Folglich lautet die Erlösfunktion:

$$E(x) = 80x.$$

Wir halten die allgemeine Vorschrift zur Bestimmung einer Erlösfunktion im Polypol fest:

Sei p_M der Marktpreis eines Polypolisten. Dann lässt sich der Erlös als Funktion in Abhängigkeit der Menge darstellen:

$$E(x) = p_M \cdot x.$$

Aus den Zusammenhängen im Monopol aus Abschnitt 9.2.2 können die Schüler die Gewinnmaximierung im Polypol in Aufgabe 9.12 untersuchen.

Aufgabe 9.12
Die Firma Pepple verkauft ihre Regenschirme für einen konstanten Preis in Höhe von €4 pro Stück. Es fallen variable Kosten in Höhe von €2 pro Stück an und die fixen Kosten betragen €10. Dabei können höchstens 12 Regenschirme hergestellt werden. Diese maximale Produktion heißt ***Kapazitätsgrenze****.*

a) *Stellen Sie die Erlös- und die Kostenfunktion auf.*

b) *Zeichnen Sie die Erlösfunktion und die Kostenfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem.*

c) *Geben Sie anhand des Schaubilds die untere Gewinnschwelle und den maximalen Gewinn an.*

d) *Bestätigen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe c) rechnerisch.*

Der Erlös berechnet sich als Produkt von Preis und abgesetzter Menge. Da der Preis konstant ist, ergibt sich die Erlösfunktion zu:

$$E(x) = 4x.$$

Für die Kosten als Summe der variablen und fixen Kosten gilt:

$$K(x) = 2x + 10.$$

Mithilfe des Schaubilds der beiden Funktionen (vgl. Abb. 9.6) können wir Teil c) der Frage beantworten. Die Graphen von Erlös und Kosten schneiden sich bei $x_0 = 5$. Da für $x < 5$ der Erlös geringer und für $x > 5$ der Erlös

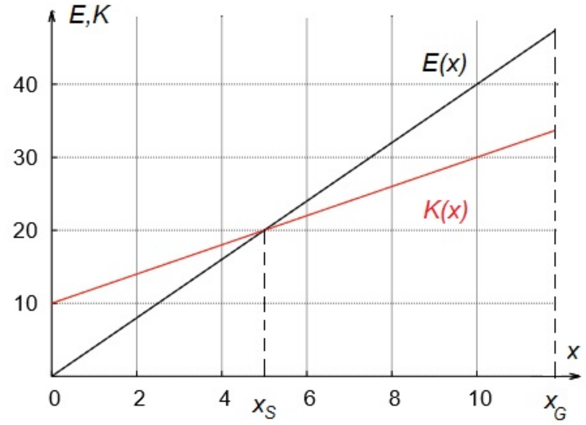


Abbildung 9.6: Schaubilder von Erlös- und Kostenfunktion

größer als die Kosten ist, befindet sich bei $x_0 = 5$ die untere Gewinnschwelle. Dies lässt sich auch rechnerisch bestätigen. Die Gewinnfunktion lautet:

$$G(x) = 4x - (2x + 10) = 2x - 10.$$

Die Gleichung $G(x) = 0$ besitzt die Lösung $x_0 = 5$. Die Gewinnfunktion nimmt ihren größten Wert am Rand für $x_G = 12$ an mit $G(12) = 14$. Den größten Gewinn in Höhe von 14 GE erzielt das Unternehmen beim Absatz von 12 ME. Abbildung 9.6 verdeutlicht, dass an der Kapazitätsgrenze die Differenz von E und K am größten ist. Wir halten fest:

Bei linearem Kostenverlauf produziert ein polypolistischer Anbieter zur Gewinnmaximierung an der Kapazitätsgrenze, sofern im Kapazitätsbereich die untere Gewinnschwelle überschritten wird.

Abschließend bietet es sich mit den Schülern an, die Gewinnmaximierung bei linearer Kostenfunktion im Polypol mit der aus dem Monopol zu vergleichen.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Preisbildung im Polypol“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... ermitteln auf einem polypolistischen Markt das Marktgleichgewicht als Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion.
- ... identifizieren die Preis-Absatz-Funktion eines Polypolisten aus dem Marktgleichgewichtspreis.
- ... bestimmen anschaulich und rechnerisch die untere Gewinnschwelle und das Gewinnmaximum eines Polypolisten.

9.2.4 Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung

In diesem Abschnitt stellen wir eine Vielzahl von Aufgaben zur Wiederholung vor, die einerseits die Inhalte aus der Unterrichtseinheit „Von Märkten und Unternehmen“ wiederholen. Andererseits beziehen wir auch Aufgaben mit ein, die zur Reflexion der bisher aufgeführten ökonomischen Funktionen führen[48]. Mit Aufgabe 9.13 können die Schüler den Funktionsterm einer linearen Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten untersuchen.

Aufgabe 9.13
Geben Sie an, welche der folgenden Funktionen eine Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten darstellt. Begründen Sie anschließend, welche linearen Funktionen allgemein dafür in Frage kommen.

a) $p(x) = -0,5x + 10$ *b)* $p(x) = 1,5x + 30$

c) $p(x) = 20 - 4x$ *d)* $p(x) = -2 \cdot (5 - x) + 20$

e) $p(x) = -0,2x - 10$ *f)* $p(x) = 5 \cdot (x + 6) - 8x$

Die Schüler sollen mit der Aufgabe zu der Erkenntnis gelangen, dass sich alle linearen Funktionen mit negativer Steigung und positivem Ordinatenabschnitt als Preis-Absatz-Funktionen eignen. So stellen die Funktionen aus b), d) und e) keine Preis-Absatz-Funktion dar. Erlösfunktionen zeigen je nach zugrundeliegender Marktform ebenfalls einen charakteristischen Verlauf. Daher bietet es sich an, deren Funktionsterm in Aufgabe 9.14 zu reflektieren.

Aufgabe 9.14
Begründen Sie, welche der folgenden Funktionen eine Erlösfunktion darstellen. Geben Sie die jeweils zugrunde liegende Marktform an.

a) $E(x) = -0,5x^2 + 12x$ *b)* $E(x) = 5x$

c) $E(x) = -0,5x^2 + 10x + 20$ *d)* $E(x) = (x + 4)^2 - 16$

Die Erlösfunktion aus a) besitzt die Form $E(x) = x \cdot (-0,5x + 12)$. Dabei stellt $p(x) = -0,5x+12$ eine Preis-Absatz-Funktion eines Monopolisten dar. Der Funktionsterm in Aufgabe b) kann zur Erlösfunktion eines Polypolisten gehören. Der Marktpreis liegt bei $p_M = 5$. In Aufgabe c) gilt $E(0) \neq 0$, daher ist dies keine geeignete Erlösfunktion. Für die Funktion in Aufgabe d) ist zwar $E(0) = 0$, aber es handelt sich um keinen Funktionsterm einer Erlösfunktion. Nach einigen Umformungen ergibt sich $E(x) = x \cdot (x + 8)$,

[48] Die Aufgaben können auch an passender Stelle in den Abschnitten „Preisbildung im Monopol“ sowie „Preisbildung im Polypol“ angeboten werden.

der Term in der Klammer kann keine Preis-Absatz-Funktion aufgrund des positiven Anstiegs darstellen.

Auch Kostenfunktionen weisen typische Verläufe auf. Neben einem gleichmäßigen Kostenanstieg mit zunehmender produzierter Menge sind auch nicht lineare Kostenverläufe möglich. Die Art des Anstiegs kann mit Aufgabe 9.15 untersucht werden. Zur Verringerung des Rechenaufwands empfehlen wir einen Taschenrechner.

Aufgabe 9.15

Von drei Unternehmen sind die Kostenfunktionen bekannt. Die Kapazitätsgrenze liegt für alle drei bei 20 *ME. Es gilt:*

- *Die Produktionskosten von Unternehmen A betragen pro Stück 2 GE. Wird nichts produziert, fallen Kosten in Höhe von 10 GE an.*
- *Die Produktionskosten von Unternehmen B lassen sich näherungsweise mit der Funktion* $K(x) = 0,1x^2 + 2x + 5$ *beschreiben.*
- *Die Produktionskosten von Unternehmen C werden näherungsweise mit der Funktion* $K(x) = -0,25x^2 + 20x + 10$ *modelliert.*

a) *Skizzieren Sie die Graphen der Kostenfunktionen jeweils in ein separates Schaubild.*

b) *Überlegen Sie, welche Ursachen die unterschiedlichen Verläufe haben können. Ordnen Sie dabei die Begriffe* ***proportionale, unterproportionale und überproportionale Kosten*** *zu.*

c) *Was haben die Graphen der drei Kostenfunktionen gemeinsam?*

Abbildung 9.7 verdeutlicht die verschiedenen Kostenverläufe. Gemein ist allen drei Kostenarten, dass der Ordinatenabschnitt nicht negativ ist und mit zunehmender produzierter Menge die Kosten ansteigen.

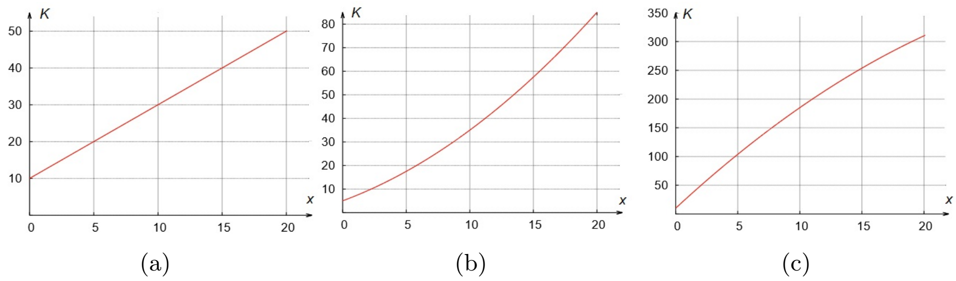


Abbildung 9.7: Graphische Darstellung von (a) proportionalen, (b) überproportionalen und (c) unterproportionalen Kosten

Die Kostenfunktion von Unternehmen A lautet $K(x) = 2x + 10$. Es handelt sich um **proportionale Kosten**, da sich die variablen Kosten proportional zur produzierten Menge erhöhen. Unternehmen B sieht sich einem **überproportionalen Kostenanstieg** gegenüber. Dieser kann etwa durch Überstunden oder höherem Materialverschleiß entstehen. Der Anstieg der variablen Kosten für die nächste zu produzierende Einheit fällt dabei höher aus. Unternehmen C operiert mit einem **unterproportionalen Kostenanstieg**. Dieser basiert auf der Tatsache, dass die variablen Kosten in $[0, 20]$ langsamer als proportional ansteigen, d. h. der Anstieg für die nächste zu produzierende Einheit ist geringer als zuvor. Dazu können etwa Lerneffekte bei Mitarbeitern oder auch Mengenrabatte beim Einkauf beitragen. Nachdem sich die Schüler mit den drei möglichen Verläufen der Graphen von Kostenfunktionen auseinandergesetzt haben, können sie in Aufgabe 9.16 untersuchen, welche Funktionen als Kostenfunktionen in Frage kommen. Dabei gilt der Grundsatz, dass mit zunehmender produzierter Menge auch die Kosten ansteigen.

Aufgabe 9.16
Begründen Sie, welche der folgenden Funktionen eine Kostenfunktion darstellt.

a) $K(x) = 1000 + 0,01x$ *b)* $K(x) = 0,5x^2 + x + 10$

c) $K(x) = 2 \cdot (x - 5) + 8$ *d)* $K(x) = ax + b$

Die Schüler sollen erkennen, dass bei linearen Kostenfunktionen sowohl die Steigung als auch der Schnitt mit der Ordinate nicht negativ sind. Dies ist in Aufgabe a), jedoch nicht in Aufgabe c) der Fall. Die quadratische Funktion in Aufgabe b) lässt sich zur Beschreibung von Kosten heranziehen: Die nach oben geöffnete Parabel besitzt den Scheitelpunkt $S(-1|9,5)$, so dass für jede weitere Einheit $x > 0$ die Kosten steigen. In Aufgabe d) sind die Parameter a und b positiv zu wählen. Nach dem Vergleich verschiedener Kostenverläufe ist die Entwicklung des Gewinns zu untersuchen. Während ein polypolistischer Anbieter mit linearer Kostenfunktion zur Gewinnmaximierung an der Kapazitätsgrenze operiert, ändert sich sein Verhalten bei einer quadratischen Kostenfunktion. Zur Verdeutlichung dient Aufgabe 9.17.

Aufgabe 9.17
Ein polypolistisches Unternehmen verkaufe sein Gut am Markt zu einem Preis von $p_M = 16$. Die Kosten K für die Produktion von x Mengeneinheiten lassen sich mit der Funktion $K(x) = x^2 + 2x + 24$ angeben.

a) Ermitteln Sie die untere Gewinnschwelle und den maximalen Gewinn.

b) Welchen Betrag dürfen die Fixkosten nicht übersteigen, damit das Unternehmen keinen Verlust erzielt?

Für die Gewinnfunktion gilt:

$$G(x) = E(x) - K(x) = 16x - (x^2 + 2x + 24) = -x^2 + 14x - 24.$$

Zur Ermittlung der unteren Gewinnschwelle ist die Gleichung $G(x) = 0$ zu lösen. Wir erhalten die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 12$. Die untere Gewinnschwelle liegt bei $x_1 = 2$. Der größte Gewinn wird aus Symmetriegründen für $x_G = 7$ angenommen und beträgt $G(7) = 25$. Für die Teilaufgabe b) können die Koordinaten des Scheitels mit $S(7|25)$ herangezogen werden. Bei einer Verschiebung des Graphen von G um mehr als 25 LE in negative Ordinatenrichtung liegt der Scheitel von G unterhalb der Abszisse. Der größte Gewinn wäre in diesem Fall negativ. Folglich dürfen die Fixkosten von ursprünglich 24 GE auf maximal 49 GE erhöht werden, ansonsten erzielt das Unternehmen für jede produzierte Menge Verlust[49]. Die nächsten Aufgaben wiederholen die Thematik der Gewinnmaximierung auf den beiden Marktformen Monopol und Polypol.

Aufgabe 9.18
Ein monopolistisches Unternehmen verkaufe sein Gut mit der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -3x + 150$. *Die anfallenden Kosten bei der Produktion lassen sich mit* $K(x) = 30x + 900$ *beschreiben.*

a) *Zeigen Sie, dass beim Absatz von 10 ME und 30 ME das Unternehmen keinen Gewinn erzielt.*

b) *Berechnen Sie die gewinnmaximale Menge und den zugehörigen maximalen Gewinn.*

c) *Wie lauten die Koordinaten des Cournotschen Punktes?*

Zunächst ist die Gewinnfunktion zu bestimmen, die wir aus der Differenz von Erlös- und Kostenfunktion erhalten:

$$G(x) = (-3x + 150) \cdot x - (30x + 900) = -3x^2 + 120x - 900.$$

Es gilt $G(10) = 0$ und $G(30) = 0$. Aufgrund der Symmetrie des Graphen der quadratischen Gewinnfunktion ergibt sich die gewinnmaximale Menge zu $x_G = \frac{10+30}{2} = 20$ mit $G(20) = 300$. Beim Absatz von 20 ME erzielt das Unternehmen den größten Gewinn in Höhe von 300 GE. Zur Berechnung des Cournotschen Punktes ist der gewinnmaximale Preis mit $p(20) = 90$ zu bestimmen, so dass $C(20|90)$ der gesuchte Punkt ist.

[49] Die Gleichung $G(x) = 0$ führt auf die selbe Aussage: Aus einer quadratischen Lösungsformel folgt:

$$x_{1,2} = -7 \pm \sqrt{49 - 24}.$$

Für $K_f > 49$ wäre die Diskriminante negativ und die Gleichung besitzt keine Lösung.

In den vorherigen Aufgaben untersuchten die Schüler der Frage nach dem maximalen Gewinn. Eine alleinige Orientierung am maximalen Gewinn ist jedoch problematisch, da dieses Vorgehen den Schülern eine eingeschränkte Sichtweise aufzwingt. Vielmehr existieren weitere unternehmerische Ziele sowie soziale oder ökologische Faktoren, die in die Überlegungen einfließen sollen. Dazu dient Aufgabe 9.19.

Aufgabe 9.19
Beim Absatz seines Gutes sehe sich ein monopolistischer Anbieter der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -x + 16$ *gegenüber. Die anfallenden Kosten bei der Produktion lassen sich mit* $K(x) = 4x + 27$ *beschreiben. Durch Einsparungen im Gehalt sowie dem Einkauf eines günstigeren Rohstoffs sinken die variablen Kosten um 2* $\frac{GE}{ME}$ *und die fixen Kosten um 3 GE. Bestimmen Sie die Gewinnzone und den maximalen Gewinn vor und nach der Kostensenkung. Diskutieren Sie mit einem Partner, ob die geringeren Kosten sozial und ökologisch zu rechtfertigen sind.*

Die Differenz von Erlös- und Kostenfunktion führt auf die Gewinnfunktion. Vor den Einsparungen lautet diese:

$$G(x) = (-x + 16) \cdot x - (4x + 27) = G(x) = -x^2 + 12x - 27.$$

Die Koordinaten des Scheitels von G liegen bei $S(6|9)$. Das Unternehmen erzielt für 6 ME den maximalen Gewinn in Höhe von 9 GE. Nach Verringerung der variablen und fixen Kosten ändert sich die Gewinnfunktion zu:

$$G(x) = -x^2 + 14x - 24.$$

Der maximale Gewinn steigt auf 25 GE beim Absatz von 7 ME und verdreifacht sich mit den niedrigeren Kosten beinahe. Zur Unterstützung der Diskussion kann der Lehrer folgende Fragen vorgeben:

> Der teurere Rohstoff stammt aus einem biologischen oder regionalen Anbau, der günstigere wird importiert. Ist der Wechsel gerechtfertigt? Welche Auswirkungen haben Gehaltseinsparungen auf die Mitarbeiter?

Mit diesem Denkanstoß sollen die Schüler reflektieren, dass neben der mathematischen Lösung bei Preisfindungsprozessen auch ökologische und soziale Aspekte zu berücksichtigen sind. Zusätzlich möchten wir heuristische Lösungsstrategien wie etwa das Rückwärtsrechnen unterstützen. Dies kann mit Aufgabe 9.20 erfolgen.

Aufgabe 9.20
Seien $x_1 = 4$ *und* $x_2 = 10$ *die Nullstellen einer quadratischen Gewinnfunktion. Geben Sie zwei verschiedene Funktionsterme für* $G(x)$ *an.*

Die Schüler können sich zur Lösung der Aufgabe an vorherigen Lösungswegen orientieren oder durch Probieren auf eine Gewinnfunktion mit den gesuchten Nullstellen gelangen. Eine mögliche Lösung lautet:

$$G(x) = -x^2 + 14x - 40.$$

Diese Aufgabenstellung stärkt die dritte Grunderfahrung von Winter (G3). Im Zuge eines vorstellungsorientierten Analysisunterrichts rückt die Interpretation von Schaubildern in den Mittelpunkt. Dies wollen wir mit Aufgabe 9.21 aufgreifen.

Aufgabe 9.21
Abbildung 9.8 zeigt die Graphen einer Erlösfunktion E und einer Kostenfunktion K. Ermitteln Sie, so gut es die Darstellung erlaubt,

a) die Menge für die der Gewinn am größten ist.

b) die Mengen, für die der Erlös 200 GE beträgt.

c) die Gewinnzone.

d) die Koordinaten des Cournotschen Punktes.

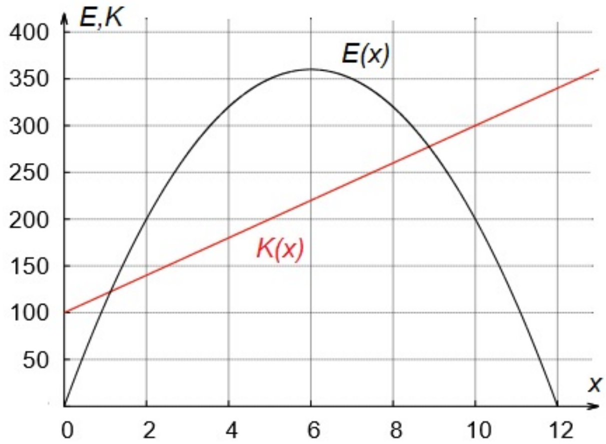


Abbildung 9.8: Graphen von Erlös- und Kostenfunktion

Die gewinnmaximale Menge befindet sich an der Stelle, an der die Differenz zwischen der Erlösfunktion und der Kostenfunktion am größten ist. Dies trifft auf $x_G \approx 5$ zu. Der Erlös beträgt 200 GE, wenn der Graph von E eine zur Abszisse parallele Gerade mit $y = 200$ schneidet. Für $x_1 = 2$ und $x_2 = 10$ nimmt der Erlös diesen Betrag an. Der Gewinn ist positiv, sobald die untere Gewinnschwelle erreicht und die obere Gewinngrenze nicht überschritten wird. Dies ist der Fall, wenn der Graph der Erlösfunktion über dem Graphen der Kostenfunktion liegt. Die beiden Schnittpunkte von E und K liegen bei

$x_3 \approx 1$ und $x_4 \approx 9$, dazwischen befindet sich die Gewinnzone. Zur Lösung von Aufgabe d) sind mehrere Schritte notwendig. Wir greifen die Lösung von Aufgabe a) auf, dass der maximale Gewinn bei $x_G \approx 5$ angenommen wird. Aus der Gleichung der Erlösfunktion erhalten wir:

$$E(x) = x \cdot p(x) \Leftrightarrow p(x) = \frac{E(x)}{x}.$$

Mit $x_G \approx 5$ gilt $p(5) \approx \frac{350}{5} = 70$. Der Cournotsche Punkte besitzt somit die ungefähren Koordinaten $C(5|70)$.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... nutzen mathematische Zusammenhänge zur Beschreibung ökonomischer Funktionen.
- ... ordnen die Begriffe proportionale, unter- und überproportionale Kosten unterschiedlichen Anstiegen von Kostenfunktionen zu.
- ... bestimmen den maximalen Gewinn im Monopol und Polypol.
- ... interpretieren mathematische und ökonomische Zusammenhänge anhand von Graphen ökonomischer Funktionen.

9.3 Die Ergänzungsmodule

9.3.1 Modellierungskreislauf

Die Unterrichtseinheit zur Preisfindung im Monopol aus Abschnitt 9.2.2 eignet sich, um den Schülern wesentliche Schritte des Modellierungskreislaufs nach BLUM und LEISS (2005) zu verdeutlichen. Zukünftige Modellierungen können sich an diesem Schema orientieren. Ein möglicher Einstieg lautet:

> Modellbildungen spielen in der Mathematik eine große Rolle. Beschreiben Sie die einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufs (a) bis (e) aus Abbildung 9.9 anhand eines Preisbildungsprozesses.

Wir skizzieren die Vorgehensweise:

(a) Verstehen der realen Situation: Zu Beginn steht die Frage nach dem optimalen Preis z. B. für Kuchen während eines Pausenverkaufs. Damit der Verkauf sich lohnt, sollten die Einnahmen mindestens die Kosten decken.

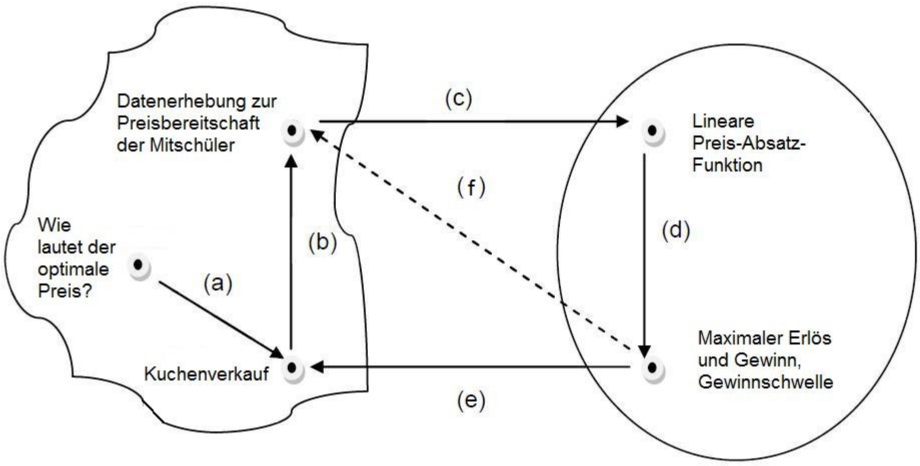


Abbildung 9.9: Modellierungskreislauf zum Kuchenverkauf nach BLUM und LEISS 2005

(b) Vereinfachung und Strukturierung der Situation: Für einen ersten Überblick eignet sich eine stichprobenartige Umfrage zur Preisbereitschaft bei Mitschülern. Alternativ können mehrere Verkäufe mit unterschiedlichen Preisen stattfinden, jedoch kostet dies mehr Zeit. Neben dem Erlös fallen Kosten an. Zusätzlich zu den Einkaufskosten sollen die Verkäufer ein Gehalt beziehen, was den Bezug zur Realität erhöht. Weitere Kosten eines Unternehmens (z. B. Miete, Strom etc.) fallen bei einem Pausenverkauf nicht an.

(c) Übersetzung ins mathematische Modell: Aus den erhobenen Daten kann mittels linearer Regression das Modell einer Nachfragefunktion erstellt werden. Die Ausgaben für Einkauf und Lohn führen auf eine Kostenfunktion.

(d) Bearbeitung im mathematischen Modell: Die Umkehrfunktion der Nachfragefunktion führt auf die Preis-Absatz-Funktion. Mittels Erlös- und Kostenfunktion lässt sich die Gewinnfunktion bestimmen, die die Schüler auf den maximalen Gewinn untersuchen können. Aus der Preis-Absatz-Funktion ist der gewinnmaximale Preis zu berechnen.

(e) Rückinterpretation der Ergebnisse: Es erfolgt die Rückführung der gewonnenen Ergebnisse ins Realmodell. Neben der mathematischen Lösung sind soziale und ökologische Fragestellungen zu diskutieren. Darunter fallen etwa Gehaltserhöhungen der Verkäufer, niedrige Preise für die Käufer oder der Kauf beim Discounter bzw. Bauern. Ökologische Aspekte beziehen die Produktauswahl (Bio, regional) mit ein.

(f) **Überprüfung der Ergebnisse:** Die Schüler können den erlösmaximalen Preis aus dem mathematischen Modell mit den realen Daten der Umfrage vergleichen. Liegt ein zu großer Unterschied vor, stellt sich z. B. die Frage, ob das gewählte Modell eines linearen Zusammenhangs zwischen den Größen Preis und Absatz sinnvoll gewählt ist. Ein Blick auf die Punktwolke der Zuordnung „Preis $\mapsto$ Absatz" liefert mögliche Ansätze zur Verbesserung. Daraufhin kann der Modellierungskreislauf wiederholt durchlaufen werden. Auch die Modellierung der Kostenfunktion ist kritisch zu hinterfragen: Zwar sind die variablen Stückkosten rechnerisch zu bestimmen, die genauen benötigten Mengen zum Verkauf sind jedoch nur schwerlich zu besorgen. Es entstehen Reste, die beim nächsten Verkauf verwendet werden können. Auch die Preise beim Einkauf der Zutaten sind nicht immer konstant.

Besitzen die Schüler wenig Erfahrung mit Modellierungen, ist es u. E. im Sinne einer didaktischen Reduktion sinnvoll, mit der Vereinfachung von ZÖTTEL und REISS (2010) auf drei Teilschritte zu beginnen. Diese beinhalten die Frage nach dem optimalen Preis, das Berechnen einzelner Größen mittels linearer Preis-Absatz-Funktion und das mehrperspektivische Reflektieren der Ergebnisse.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Modellierungskreislauf" ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

– ... erläutern die Phasen des Modellierungskreislaufs nach BLUM und LEISS (2005).

– ... unterscheiden zwischen realem und mathematischem Modell.

– ... beziehen bei der Rückinterpretation der Ergebnisse Argumente aus anderen Fachwissenschaften mit ein.

9.3.2 Preisbildung unter monopolistischer Konkurrenz

Die Marktformen Monopol und Polypol stellen zwei theoretische Konstrukte dar, die in der Realität in ihrer reinen Form selten anzutreffen sind. Daher betrachten wir als weitere Marktform die **monopolistische Konkurrenz** als Mischform von Monopol und Polypol. Ein Unternehmen, das auf einem derartigen Markt operiert, findet sich auf einem polypolistischen Markt wieder, kann sich jedoch innerhalb eines Preisbereichs wie ein Monopolist verhalten. Das Unternehmen besitzt einen **monopolistischen Preisspielraum**, was in der Realität auf bekannte Marken zutrifft. Um die Marktform der monopolistischen Konkurrenz zu untersuchen, bietet sich Aufgabe 9.22 an.

Aufgabe 9.22
Ein polypolistischer Anbieter mit monopolistischem Preisspielraum sehe sich folgender Nachfrage gegenüber:

- *Der Prohibitivpreis beträgt 50* $\frac{GE}{ME}$.
- *Die Sättigungsmenge liegt bei 150* ME.
- *Die Preisobergrenze des monopolistischen Bereichs liegt bei 30* $\frac{GE}{ME}$, *dabei setzt das Unternehmen 40* ME *ab.*
- *Bei 20* $\frac{GE}{ME}$ *befindet sich die Preisuntergrenze des monopolistischen Bereichs, hier werden 50* ME *verkauft.*

Zwischen den genannten Werten verläuft die Preis-Absatz-Funktion jeweils linear. Geben Sie die nach Gutenberg bezeichnete ***doppelt geknickte Preis-Absatz-Funktion*** *für die Zuordnung „Menge ↦ Preis“ an und skizzieren Sie deren Verlauf.*

Sei $p(x) = mx+c$ die Gleichung eines Abschnitts der Preis-Absatz-Funktion. Aus den Vorgaben der Aufgabe erhalten wir den folgenden Funktionsterm:

$$p(x) = \begin{cases} 50 - 0,5x, & 0 \leq x < 40 \\ 70 - x, & 40 \leq x < 50 \\ 30 - 0,2x, & 50 \leq x \leq 150. \end{cases}$$

Abbildung 9.10 zeigt den Graphen der doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion. In Analogie zum bisherigen Vorgehen sollen die Schüler darauf aufbauend den Verlauf einer Erlösfunktion unter monopolistischer Konkurrenz untersuchen, wie dies in Aufgabe 9.23 der Fall ist.

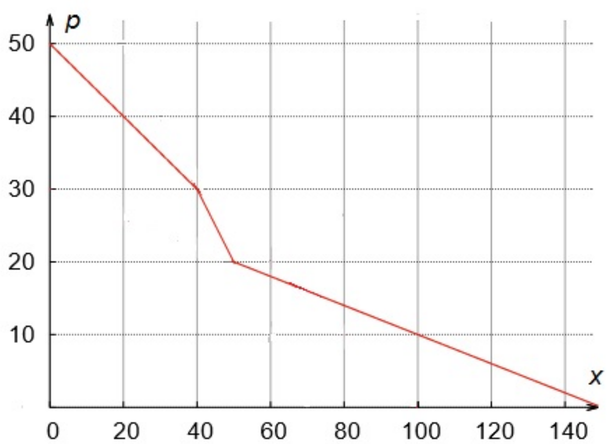


Abbildung 9.10: Graph einer doppelt geknickte Preis-Absatz-Funktion nach GUTENBERG (1984)

Aufgabe 9.23
Für die doppelt geknickte Preis-Absatz-Funktion eines polypolistischen Anbieters mit monopolistischem Preisspielraum gilt:

$$p(x) = \begin{cases} 80 - x, & 0 \quad \leq x < 10 \\ 120 - 5x, & 10 \leq x < 20 \\ 40 - x, & 20 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

a) *Bestimmen Sie die Erlösfunktion.*

b) *Für welche Mengen ist der Erlös gleich Null?*

c) *Geben Sie die Menge an, für die der Erlös am größten ist.*

d) *Skizzieren Sie den Graphen der Erlösfunktion.*

Der Erlös errechnet sich als Produkt aus Preis und abgesetzter Menge:

$$E(x) = \begin{cases} 80x - x^2, & 0 \quad \leq x < 10 \\ 120x - 5x^2, & 10 \leq x < 20 \\ 40x - x^2, & 20 \leq x \leq 40. \end{cases}$$

Es sind alle Lösungen der Gleichung $E(x) = 0$ zu bestimmen. Diese lauten $x_1 = 0$, $x_2 = 80$, $x_3 = 24$ und $x_4 = 40$. Davon liegen lediglich x_1 und x_4 im vorgegebenen Definitionsbereich. Für 0 ME und 40 ME ist der Erlös null. Aufgrund der abschnittsweisen quadratischen Erlösfunktion sind für den größten Erlös die Scheitel der einzelnen Parabeln zu bestimmen. Für den ersten Abschnitt liegt der Scheitel bei $S_1(40|1600)$, der sich jedoch nicht im Intervall $[0; 10)$ befindet. Die Koordinaten des Scheitels der quadratische Funktion im zweiten Abschnitt lauten $S_2(12|720)$ und liegen im Intervall $[10; 20)$. Der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion im dritten Abschnitt besitzt die Koordinaten $S_3(20|400)$ und befindet sich im Intervall $[20; 40]$. Folglich wird beim Absatz von 12 ME der Erlös mit 720 GE am größten. Abbildung 9.11 zeigt den Graphen der Erlösfunktion. In Aufgabe 9.24 können die Schüler die Gewinnermittlung am Beispiel der monopolistischen Konkurrenz untersuchen. Wir empfehlen zur Berechnung einen Taschenrechner.

Aufgabe 9.24
Die Preis-Absatz-Funktion eines polypolistischen Anbieters mit monopolistischem Preisspielraum lautet:

$$p(x) = \begin{cases} -x + 100, & 0 \quad \leq x < 20 \\ -2x + 120, & 20 \leq x < 40 \\ -0,8x + 72, & 40 \leq x \leq 90. \end{cases}$$

Die Produktionskosten lassen sich mit der Funktion $K(x) = 4x + 704$ *beschreiben. Bestimmen Sie die untere Gewinnschwelle und den größten Gewinn. Für welchen Preis wird der Gewinn maximal?*

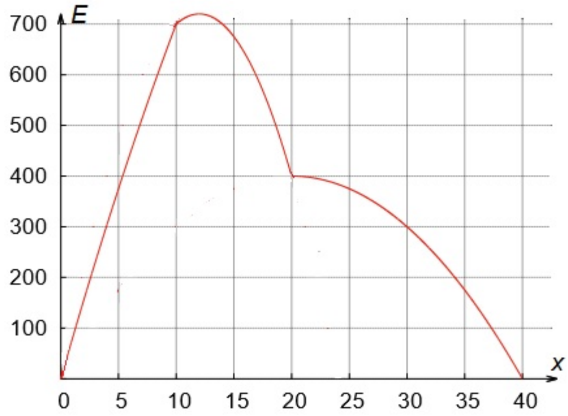


Abbildung 9.11: Graph einer Erlösfunktion eines Polypolisten mit monopolistischem Preisspielraum

Zunächst ist die Erlösfunktion wie in der vorherigen Aufgabe zu bestimmen:

$$E(x) = \begin{cases} -x^2 + 100x, & 0 \leq x < 20 \\ -2x^2 + 120x, & 20 \leq x < 40 \\ -0,8x^2 + 72x, & 40 \leq x \leq 90. \end{cases}$$

Der Gewinn ergibt sich als Differenz aus Erlös und Kosten:

$$G(x) = \begin{cases} -x^2 + 96x - 704, & 0 \leq x < 20 \\ -2x^2 + 116x - 704, & 20 \leq x < 40 \\ -0,8x^2 + 68x - 704, & 40 \leq x \leq 90. \end{cases}$$

Die untere Gewinnschwelle erhalten wir aus Gleichung $G(x) = 0$ für $x_0 = 8$. Für den ersten Abschnitt liegt der Scheitel $S_1(48|1600)$ außerhalb des Intervalls $[0; 20)$. Der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion in $[20; 40)$ besitzt die Koordinaten $S_2(29|978)$. Auch der Scheitel der quadratischen Funktion im dritten Abschnitt mit $S_3(42,5|741)$ befindet sich im vorgegebenen Intervall, besitzt jedoch einen kleineren Funktionswert als S_2. Mit $p(29) = 62$ gilt: Den maximalen Gewinn in Höhe von 978 GE erzielt das Unternehmen für einen Preis von 62 $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Preisbildung unter monopolistischer Konkurrenz“ ergeben sich folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... führen Berechnungen im Umfeld abschnittsweise definierter Funktionen durch.
- ... erstellen und erläutern den Graphen einer doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion nach Gutenberg.

10 Änderung ökonomischer Funktionen I

Im Folgenden stellen wir die Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“ vor, mit der eine anwendungsorientierte Vertiefung oder Wiederholung der Differenzialrechnung im Rahmen ökonomischer Funktionen möglich ist. Die Einheit richtet sich an Schüler der Sekundarstufe II. Bei der Konzeption orientieren wir uns an den Zielen der Leitidee „funktionaler Zusammenhang“ aus den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (vgl. KMK 2012, S. 20). Die Leitidee „funktionaler Zusammenhang“ findet sich auch in den in Abschnitt 6.4 aufgeführten fundamentalen Ideen der Analysis wieder, auf die wir uns beziehen. Der Entwurf baut inhaltlich auf Kapitel 2 auf.

10.1 Inhaltliche und konzeptionelle Zusammenfassung

Die Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“ greift den Begriff der Ableitung auf und behandelt dessen Anwendung in der Ökonomie. Die Einheit ist nicht als Einstieg in die Differenzialrechnung gedacht, sondern als deren Weiterführung konzipiert. Den Schülern sollten zur Bearbeitung dieses Abschnitts folgende Inhalte bekannt sein:

– Die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderung.

– Das Bilden von Ableitungsfunktionen mithilfe grundlegender Ableitungsregeln (Potenz-, Faktor-, Summenregel).

– Das Bestimmen von Extremwerten mittels erster Ableitung.

Die Unterrichtseinheit beinhaltet ein Basismodul mit drei thematisch passenden Ergänzungsmodulen. Das Basismodul ist in folgende Abschnitte unterteilt:

1. Ableitung ökonomischer Funktionen
2. *Erlös- und Gewinnmaximierung*
3. Betriebsminimum und -optimum
4. Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung.

Das Modul „Erlös- und Gewinnmaximierung“ ist kursiv gesetzt, da einzelne Inhalte aus der vorherigen Unterrichtseinheit bekannt sind. Die Problemstellung wird hier aufgegriffen, nur dass jetzt mit der Ableitung ein weiteres Werkzeug zur Berechnung zur Verfügung steht. Die einzelnen Abschnitte sind inhaltlich aufeinander abgestimmt und sollten chronologisch unterrichtet werden. Unterstützung erhält das Basismodul durch die drei Ergänzungsmodule:

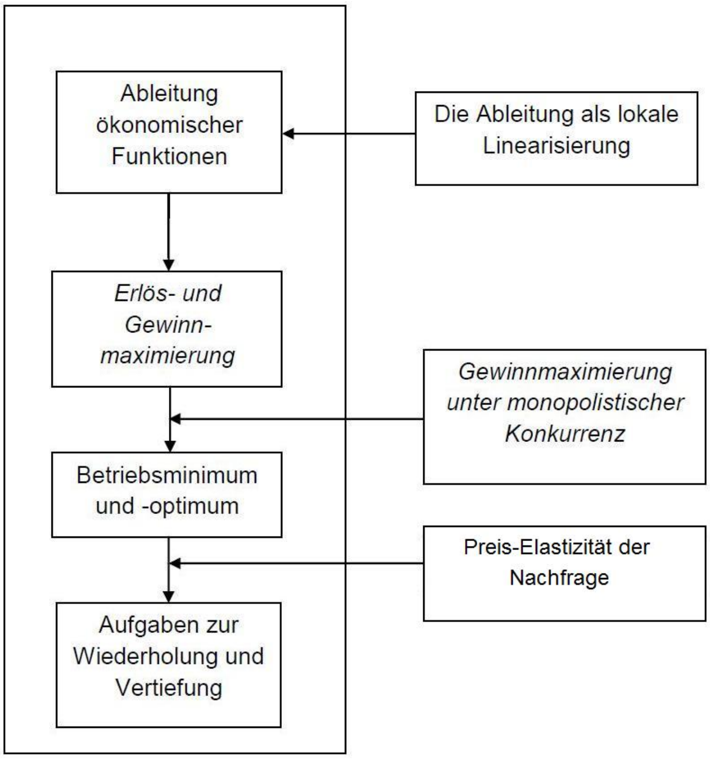


Abbildung 10.1: Möglicher zeitlicher Ablauf der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“

1. Die Ableitung als lokale Linearisierung
2. *Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz*
3. Preis-Elastizität der Nachfrage.

Die „Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz“ ist in Teilen aus dem Ergänzungsmodul „Preisbildung unter monopolistischer Konkurrenz“ aus der ersten Unterrichtseinheit bekannt. Auch hier steht mit der Differenzialrechnung ein zusätzliches Werkzeug zur Verfügung. Abbildung 10.1 zeigt einen möglichen zeitlichen Ablauf der Unterrichtseinheit. Die Ergänzungsmodule wurden an zeitlich passender Stelle eingefügt und besitzen für das inhaltliche Verständnis unterstützenden Charakter.

10.2 Das Basismodul

10.2.1 Ableitung ökonomischer Funktionen

Ein Einstieg in die Unterrichtseinheit kann mit dem folgenden Zeitungsartikel über Apple erfolgen. Anhand des Artikels lassen sich mit den Schülern die Begriffe Gewinnsteigerung und Umsatzeinbruch diskutieren. Zentral ist die Unterscheidung zwischen einer ökonomischen Größe und ihrer Änderung.

Die Konkurrenz hat zu gut von Apple gelernt

Für Apple ist die Zeit der einfachen Umsatzrekorde vorbei. Trotz Gewinnsteigerung des Konzerns muss er Einbußen im Smartphonegeschäft hinnehmen. Die Android-Konkurrenz ist zu stark geworden.

Apple spürt erstmals deutlich den Druck der Konkurrenz auf dem Smartphonemarkt: Der kalifornische Elektronikhersteller übertraf mit seinen jüngsten Quartalszahlen immerhin die eigene Prognose, verfehlte jedoch die Erwartungen der Analysten. Zwar steigerte der Konzern Umsatz und Gewinn um jeweils mehr als 20 Prozent auf 35 Milliarden und 8,8 Milliarden Dollar.

Doch der Erfolg basiert vor allem auf den Rekord-Absatzzahlen von Apples Tablet-Computern iPad 2 und 3. Beide Versionen zusammen gingen im April, Mai und Juni insgesamt 17 Millionen mal über die Ladentheke – gegenüber dem Vorjahresquartal eine Steigerung von über 80 Prozent.

Doch bei Apples wichtigstem Umsatzbringer, dem iPhone, muss der Konzern im Vergleich zum Vorquartal erstmals einen deutlichen Umsatzeinbruch von 26 Prozent diagnostizieren, 26 Millionen Stück fanden ihren Kunden.

DIE WELT kompakt vom 2.11.11

In der Mathematik lässt sich die lokale Änderung mittels Ableitung beschreiben, z. B. der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit der Zeit und die Geschwindigkeit. Die Aufgabe 10.1 behandelt die Bedeutung der ersten Ableitung einer ökonomischen Funktion.

Aufgabe 10.1
Gegeben sei folgende Erlösfunktion E:

$$E(x) = -x^2 + 30x.$$

a) *Bestimmen Sie die Erlösänderung, wenn der Absatz von 10 auf 11 (von 20 auf 21) ME erhöht wird.*

b) *Vergleichen Sie den unter Aufgabe a) berechneten Wert mit der Ableitung von E für $x = 10$ ($x = 20$). Wie lässt sich die erste Ableitung in diesem Fall interpretieren?*

Mit $E(10) = 200$ und $E(11) = 209$ ändert sich der Erlös bei einer Steigerung des Absatzes von 10 ME auf 11 ME um 9 GE. Für eine Erhöhung von 20 ME um eine Einheit geht der Erlös um 11 GE von 200 GE auf 189 GE zurück. Die Ableitung liefert die Werte $E'(10) = 10$ und $E'(20) = -10$. Doch was bedeuten diese Ergebnisse? Eine momentane Erlösänderung erscheint im ökonomischen Kontext nicht sinnvoll. Ein Vergleich der absoluten Erlösänderung zum Wert der Ableitung legt die Vermutung nahe, dass sich die Ableitung als Näherung zur Funktionswertänderung interpretieren lässt, wenn der Absatz um eine Einheit steigt. Diese Eigenschaft ist zentral im Umfeld ökonomischer Funktionen und wird daher festgehalten:

Der Wert der ersten Ableitung einer ökonomischen Funktion an einer beliebigen Stelle gibt näherungsweise an, um wie viel sich der Funktionswert (Erlös, Kosten, Gewinn etc.) ändert, wenn die unabhängige Variable (Menge, Preis etc.) um eine Einheit erhöht wird.

Anschaulich nähert die Tangentensteigung die Sekantensteigung einer Funktion im Intervall $[a, a+1]$ an. Um die Schüler auf die Eigenschaft der lokalen linearen Approximation einer Funktion durch die Tangente zu führen, bietet sich Aufgabe 10.2 an. Zur Bearbeitung der Aufgabe ist die Kenntnis der allgemeinen Tangentengleichung an eine Funktion f im Punkt $P(a|f(a))$ hilfreich. Für diese gilt:

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Zur Herleitung der allgemeinen Tangentengleichung verweisen wir auf das Ergänzungsmodul „Die Ableitung als lokale Linearisierung“.

Aufgabe 10.2
Gegeben sei die Erlösfunktion $E(x) = 10x - x^2$.

a) *Stellen Sie die Gleichung der Tangente an* E *an der Stelle* $a = 4$ *auf.*

b) *Berechnen Sie die Erlösänderung bei einer Produktionssteigerung von 4 ME auf 5 ME genau und näherungsweise über die Tangente.*

b) *Bestimmen Sie die Gleichung einer linearen Funktion, die die Erlösänderung bei einer Produktionssteigerung von 4 ME auf 5 ME genau abbildet.*

Aus $E'(4) = 2$ folgt für die Tangente t:

$$t(x) = E(4) + E'(4) \cdot (x - 4) = 24 + 2 \cdot (x - 4) = 2x + 16.$$

Mit $E(4) = 24$ und $E(5) = 25$ gilt: Für eine Ausweitung der Produktion von 4 ME auf 5 ME steigt der Erlös um 1 GE. Aus $t(4) = 24$ und $t(5) = 26$

erhalten wir die Näherung dieser Änderung zu 2 GE. Eine lineare Funktion g mit $g(4) = 24$ und $g(5) = 25$, die die Erlösänderung genau abbildet, lautet:

$$g(x) = 24 + 1 \cdot (x - 4) = x - 20.$$

Damit stellt sich die Frage, warum die Tangente unter allen Geraden durch den Punkt $P(4|E(4))$ den Vorzug zur Näherung erhält. Die Schüler können dies mit Aufgabe 10.3 untersuchen.

Aufgabe 10.3

Gegeben sei die Erlösfunktion $E(x) = 10x - x^2$. An der Stelle $a = 4$ soll E lokal durch eine lineare Funktion approximiert werden. Neben einer beliebigen Gerade g kann dies durch die Tangente t erfolgen. Dabei gilt $E(4) = g(4) = t(4)$. Doch welche Gerade nähert E lokal am besten an? Betrachten Sie dazu in Abbildung 10.2 die Abweichungen von der Geraden g bzw. Tangenten t zum Graphen von E an einer beliebigen Stelle $x \neq a$.

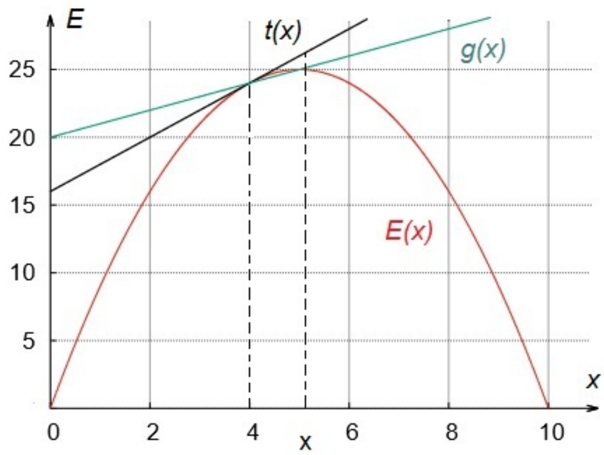


Abbildung 10.2: Lokale lineare Näherung einer Erlösfunktion

a) Bestimmen Sie für eine beliebige Gerade g mit der Steigung $m \neq E'(4)$ den absoluten Fehler an einer Stelle x mit $r(x) = g(x) - E(x)$. Zeigen Sie: Für $x \to 4$ strebt $r \to 0$.

b) Bestimmen Sie für die Tangente mit der Steigung $E'(4)$ den absoluten Fehler an einer Stelle x mit $r(x) = t(x) - E(x)$. Zeigen Sie, dass auch in diesem Fall gilt: Für $x \to 4$ strebt $r \to 0$.

c) Betrachten Sie für die beliebige Gerade aus a) und die Tangente aus b) zusätzlich den relativen Fehler $\frac{r(x)}{(x-4)}$ für $x \to 4$. Bestimmen Sie diesen.

d) Beurteilen Sie anhand des absoluten und relativen Fehlers von Tangente t und beliebiger Gerade g, welche von beiden eine bessere lokale Approximation der Erlösfunktion darstellt.

Für eine beliebige Gerade g gilt für den Fehler[50] r in Abhängigkeit von x.

$$\begin{aligned} r(x) &= g(x) - E(x) \\ &= m \cdot (x-4) + E(4) - \left(10 \cdot x - x^2\right) \\ &= m \cdot (x-4) + x^2 - 10x + 24 \\ &= m \cdot (x-4) + (x-4)(x-6). \end{aligned}$$

Für die Tangente t lautet der Fehler r:

$$\begin{aligned} r(x) &= t(x) - E(x) \\ &= E'(4) \cdot (x-4) + E(4) - \left(10 \cdot x - x^2\right) \\ &= x^2 - 8x + 16 \\ &= (x-4)^2. \end{aligned}$$

Aus der faktorisierten Darstellung wird deutlich, dass sowohl für die Tangente als auch für eine beliebige Gerade an der Stelle $a = 4$ für den absoluten Fehler gilt:

$$\lim_{x \to 4} r(x) = 0.$$

Der relative Fehler $\frac{r(x)}{(x-4)}$ strebt aber nur für die Tangente gegen Null. Dieser ist ein Ausdruck für die lokale Schmiegeigenschaft der Tangente und stellt einen weiteren Zugang zum Ableitungsbegriff dar. Diesen Zusammenhang halten wir fest:

Eine Funktion f heißt in a differenzierbar, wenn es eine Gerade t durch den Punkt $P\,(a|f(a))$ gibt, so dass der Approximationsfehler $r(x) = t(x) - f(x)$ der Bedingung

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)} = 0$$

genügt. Die Steigung von t heißt Ableitung von f an der Stelle a.

Diese Schmiegeigenschaft der Tangente ist verantwortlich, dass die Näherung der Funktionswertänderung anhand der Ableitung erfolgt. Allgemein gilt für den absoluten Fehler zwischen der Tangente t und einer Funktion f:

$$\begin{aligned} r(x) &= t(x) - f(x) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) - f(x). \end{aligned}$$

[50] Die Aufgabe ist auch mit der so genannten h-Methode lösbar. Statt einer Stelle x wird eine Stelle $4 + h$ betrachtet und später der Grenzübergang für $h \to 0$ vollzogen.

Die näherungsweise Funktionswertänderung im Umfeld ökonomischer Funktionen bezieht sich auf eine Erhöhung der unabhängigen Variablen um eine Einheit. Wir setzten $x = a + 1$ und erhalten für den absoluten Fehler:

$$r(a + 1) = f(a) + f'(a) - f(a + 1) \Leftrightarrow f(a + 1) - f(a) = f'(a) - r(a + 1).$$

Die Differenz der Funktionswerte im Intervall $[a, a + 1]$ stimmt mit der Ableitung an der Stelle a bis auf den Rest $r(a + 1)$ überein. Zur Näherung einer Funktionswertänderung wird dieser in der Wirtschaftsmathematik vernachlässigt. Es gilt:

$$f(a + 1) - f(a) \approx f'(a).$$

Die Ableitung wird im Umfeld ökonomischer Funktionen als **Grenzfunktion** bezeichnet. Daraus ergeben sich weitere Begriffe, die den Schülern anzugeben sind. Die für diese Arbeit wichtigen sind:

Die erste Ableitung einer Erlösfunktion heißt Grenzerlösfunktion, die einer Kostenfunktion Grenzkostenfunktion und die einer Gewinnfunktion Grenzgewinnfunktion.

Zur Vertiefung dieser Bezeichnungen dient Aufgabe 10.4. Für das Zeichnen des Graphen empfehlen wir die Verwendung eines Taschenrechners.

Aufgabe 10.4
Ein Unternehmen modelliere die anfallenden Kosten für Produktion und Verkauf seines Produktes mit der Funktion $K(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 5$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Kostenfunktion K für $0 \leq x \leq 5$.

b) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von K. Woraus kann dieser resultieren?

*c) Eine Kostenfunktion dieser Form heißt **ertragsgesetzliche Kostenfunktion**. Begründen Sie anhand der Funktion der Grenzkosten, dass $K(x)$ als Kostenfunktion geeignet ist.*

d) Bestimmen Sie die Grenzkosten für $a = 1$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Abbildung 10.3 zeigt den Graphen der Kostenfunktion. Er stellt eine Kombination aus einem unterproportionalen und überproportionalen Kostenanstieg dar. Eine mögliche Begründung für diesen Kostenverlauf lautet: Unterstützen sich Arbeitskräfte bei niedrigen Produktionsmengen gegenseitig, fällt der Kostenanstieg für die nächste Einheit geringer aus. Bei der Produktion vieler Einheiten ist der Verschleiß größer und Arbeiter machen Überstunden. Dadurch steigen die Kosten mit der nächsten zu produzierenden Einheit schneller an.

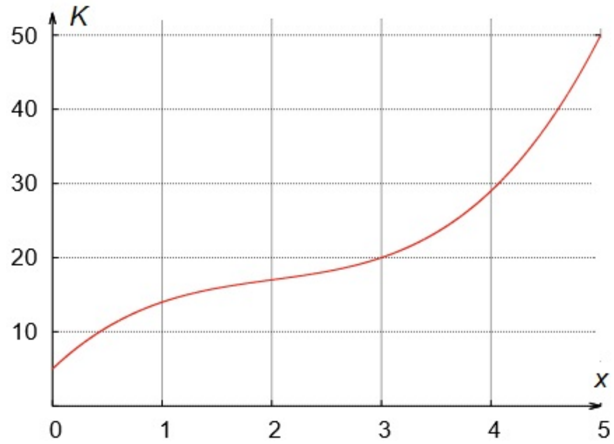


Abbildung 10.3: Graph einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

Um zu zeigen, dass K eine Kostenfunktion darstellt, sind die Grenzkosten mit $K'(x) = 3x^2 - 12x + 14$ zu betrachten. Der Graph der Grenzkostenfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(2|2)$. Es ist $K'(x) > 0$ für jedes beliebige x und folglich nehmen die Kosten mit steigender produzierter Menge zu. Weiterhin gilt $K'(1) = 5$: Erhöht sich die Produktion von 1 ME auf 2 ME, dann steigen die Kosten um ca. 5 GE. Der genaue Anstieg beträgt 3 GE.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Ableitung ökonomischer Funktionen" ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... deuten die Ableitung als lokale Linearisierung.
- ... begründen, dass die Tangente eine Funktion lokal am besten approximiert.
- ... kennen den Begriff der Grenzfunktion und können einzelne Werte von Grenzfunktionen berechnen als auch interpretieren.

10.2.2 Erlös- und Gewinnmaximierung

In der Unterrichtseinheit „Von Märkten und Unternehmen" erfolgte die Bestimmung des maximalen Gewinns ohne die Differenzialrechnung. Die Hinzunahme des Ableitungsbegriffs erlaubt eine vertiefte Auseinandersetzung mit diesem Thema. Zur Lösung der Aufgaben in diesem Abschnitt ist die Verwendung eines Taschenrechners nicht notwendig. Zunächst greifen wir in Aufgabe 10.5 die Gewinnmaxmierung eines Monopolisten auf.

Aufgabe 10.5
Ein monopolistisches Unternehmen setzte sein Produkt mit der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = 20 - x$ ab. Die dabei entstehenden Kosten lassen sich mit der Kostenfunktion $K(x) = 4x + 15$ beschreiben.

a) *Zeigen Sie, dass für die Gleichung der Gewinnfunktion gilt:*

$$G(x) = -x^2 + 16x - 15.$$

b) *Berechnen Sie die untere Gewinnschwelle.*

c) *Für welche Stückzahl wird der Gewinn maximal? Wie hoch ist dieser? Lösen Sie diese Aufgabe mit und ohne Differenzialrechnung.*

d) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Cournotschen Punktes.*

e) *Zeigen Sie allgemein: Sei x_G die gewinnmaximale Menge. Im Maximum der Gewinnfunktion des Monopolisten gilt: $E'(x_G) = K'(x_G)$.*

Die Gewinnfunktion resultiert aus der Differenz von Erlös- und Kostenfunktion:

$$G(x) = (20 - x) \cdot x - (4x + 15) = -x^2 + 16x - 15.$$

Die untere Gewinnschwelle ergibt sich aus der Gleichung $G(x) = 0$. Mithilfe einer quadratischen Lösungsformel lauten die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 15$, wobei erstere die untere Gewinnschwelle (Break-Even) darstellt. Der Scheitel der Gewinnfunktion liegt an der Stelle $x_G = \frac{1+15}{2} = 8$ mit $G(8) = 49$. Die nach unten geöffnete Parabel der quadratischen Gewinnfunktion besitzt den Scheitel $S(8|49)$. Beim Absatz von 8 ME erzielt das Unternehmen den größten Gewinn in Höhe von 49 GE. Die gleichen Ergebnisse erhalten wir mittels Differenzialrechnung: Die Nullstelle des Grenzgewinns $G'(x) = -2x + 16$ liegt bei $x_G = 8$. Da G' in einer Umgebung von x_G einen VZW von $+ \to -$ besitzt, liegt ein lokales Maximum vor. Aus $p(8) = 12$ folgen die Koordinaten des Cournotschen Punktes zu $C(8|12)$. Für die Teilaufgabe e) erhalten wir aus der notwendige Bedingung für das Gewinnmaximum $G'(x) = 0$ mit der Definition des Gewinns:

$$G'(x) = (E(x) - K(x))' = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x).$$

Folglich gilt für die gewinnmaximale Menge x_G:

$$G'(x_G) = 0 \Leftrightarrow E'(x_G) = K'(x_G).$$

Wie lässt sich dieser Zusammenhang interpretieren? Im Gewinnmaximum sind Grenzerlös und Grenzkosten identisch. Das bedeutet, dass der Absatz einer weiteren Einheit die gleiche Erlös- wie auch Kostenänderung zur Folge hat. Analog lässt sich der maximale Gewinn im Polypol berechnen. Zum konstanten Marktpreis nehmen wir in der folgenden Aufgabe einen ertragsgesetzlichen Kostenverlauf an.

Aufgabe 10.6
Ein polypolistisches Unternehmen setzte sein einziges Produkt zum konstanten Marktpreis in Höhe von €80 pro Stück ab. Die Kosten berechnen sich über die Funktion $K(x) = x^3 - 12x^2 + 53x + 100$ (Kosten in €). Die Kapazitätsgrenze liegt bei 14 Stück.

a) *Zeigen Sie, dass die Gewinnfunktion $G(x) = -x^3 + 12x^2 + 27x - 100$ lautet.*

b) *Bestätigen Sie, dass das Unternehmen beim Absatz von 3 Stücken zum ersten Mal Gewinn erzielt.*

c) *Für welche Stückzahl wird der Gewinn maximal?*

d) *Zeigen Sie, dass für die gewinnmaximale Menge x_G eines polypolistischen Anbieters $p_M = K'(x_G)$ gilt.*

Die Gewinnfunktion ergibt sich als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion. Aus $G(0) = -100$, $G(1) = -62$, $G(2) = -6$ und $G(3) = 62$ folgt: Für drei abgesetzte Stücke erzielt das Unternehmen erstmalig Gewinn. Aus $G'(x) = 0$ erhalten wir mögliche Extremstellen zu $x_1 = -1$ und $x_2 = 9$. Die Lösung x_1 entfällt, da sie nicht im ökonomischen Definitionsbereich liegt ($x \geq 0$). G' besitzt in einer kleinen Umgebung von $x_2 = 9$ einen VZW von $+ \to -$. Beim Absatz von 9 Stücken erwirtschaftet das Unternehmen den maximalen Gewinn. Für den Beweis aus Teilaufgabe d) gilt: Aus Aufgabe 10.5 ist für das Gewinnmaximum der Zusammenhang $E'(x_G) = K'(x_G)$ bekannt. Da ein polypolistischer Anbieter mit dem konstanten Preis p_M operiert, berechnet sich die Erlösfunktion zu $E(x) = p_M \cdot x$. Aus dem Grenzerlös $E'(x) = p_M$ folgt der geforderte Zusammenhang im Gewinnmaximum:

$$p_M = K'(x_G).$$

Nach der Bestimmung des Gewinnmaximums mittels erster Ableitung ist eine graphische Interpretation von Grenzfunktionen durchzuführen. Aufgabe 10.7 zeigt dies am Beispiel einer Grenzerlösfunktion.

Aufgabe 10.7
Abbildung 10.4 zeigt den Ausschnitt des Graphen einer Grenzerlösfunktion E' in Abhängigkeit von der produzierten und abgesetzten Menge x. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) *Der Erlös steigt bei Absatzerhöhungen für Mengen zwischen 20 ME und 30 ME.*

b) *Der Erlös ist für eine abgesetzte Menge von 10 ME am größten.*

c) *Für $5 \leq x \leq 20$ ist der Erlös nicht negativ.*

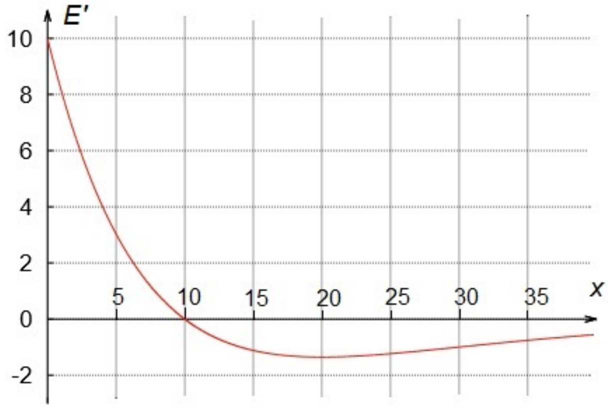


Abbildung 10.4: Graph einer Grenzerlösfunktion

Aussage a) ist falsch. Der Grenzerlös ist im vorgegebenen Intervall negativ, folglich fällt der Erlös. Die Aussage von Teilaufgabe b) ist richtig, da erstens $E'(10) = 0$ ist und zweitens E' einen VZW von $+ \longrightarrow -$ an dieser Stelle besitzt. Teilaufgabe c) ist ebenfalls korrekt, da der Erlös nicht negativ wird. Er kann den Wert Null annehmen, wenn entweder die Menge oder der Preis null ist. Jedoch gilt dies lediglich für den Erlös. Im Allgemeinen lässt sich anhand der Grenzfunktion keine Aussage über positive oder negative Funktionswerte treffen, wie dies am Beispiel einer Gewinnfunktion zu erkennen ist.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Erlös- und Gewinnmaximierung“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... nutzen die erste Ableitung zur Bestimmung des maximalen Gewinns.
- ... begründen mittels erster Ableitung ökonomische Zusammenhänge im Gewinnmaximum.
- ... interpretieren den Verlauf des Graphen einer Grenzfunktion.

10.2.3 Betriebsminimum und -optimum

Neben einer ökonomischen Größe (Erlös, Kosten, Gewinn) interessiert sich ein Unternehmen auch für dessen Stückgröße, denn daran kann sich der Preis eines Produktes orientieren. Dabei setzen wir uns schwerpunktmäßig mit den Kosten pro Stück auseinander. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die fachtheoretischen Inhalten aus Abschnitt 2.2.2. Als Einstieg in die Problematik und zur Motivation kann der Auszug aus dem Artikel „Volkswagen verabschiedet sich vom Größenwahn“ dienen.

Volkswagen verabschiedet sich vom Größenwahn

[...] „Es geht aber nicht darum, 100.000 Fahrzeuge mehr oder weniger als ein großer Wettbewerber zu verkaufen", so Müller. „Es geht vielmehr um qualitatives Wachstum." Natürlich werde Volkswagen weiterhin versuchen, so viele Autos wie möglich zu verkaufen. „Aber Produktionsqualität und Produktivität haben Vorrang." [...] Die Absatzzahlen sind eine entscheidende Maßzahl in der Autoindustrie, weil der Fahrzeugbau ein Massengeschäft ist und Skaleneffekte, also Kostenvorteile aufgrund hoher Stückzahlen, wichtig sind, um möglichst profitabel produzieren zu können. Bei Volkswagen hatte man sich mit dem Baukastenprinzip, auf dem immer mehr Modelle basieren, ganz dem Faktor Größe verschrieben. Und auch das Anschwellen des Konzerns auf zwölf Marken ist Teil dieser Denke. Denn je mehr unterschiedliche Modelle verschiedenster Marken auf den gleichen Teilen basieren und je mehr davon gebaut werden, desto geringer fallen die Stückkosten aus und desto höher der Gewinn. [...]

DIE WELT Online vom 28.10.15

Aus dem Artikel wird deutlich, dass eine Minimierung der Stückkosten zu höheren Gewinnen führen kann. Zur Bestimmung von Stückkosten untersuchen wir deren Funktion, wofür wir den Begriff der Durchschnittsfunktion benötigen. Da dieser üblicherweise in der Schulmathematik keine Verwendung findet, erhalten die Schüler folgende Definition:

Gegeben sei die Funktion f. Der Quotient

$$\overline{f}(x) := \frac{f(x)}{x}, \qquad (x \neq 0)$$

heißt Durchschnittsfunktion von f.

In Aufgabe 10.8 können die Schüler Durchschnittsfunktionen von Kostenfunktionen untersuchen. Zur Verringerung des Rechenaufwands empfehlen wir einen Taschenrechner.

Aufgabe 10.8

Gegeben sei die folgende ertragsgesetzliche Kostenfunktion K in Abhängigkeit der produzierten Menge x (x in Stück, K in €):

$$K(x) = 0,01x^3 - 9x^2 + 3000x + 250000.$$

a) Die Durchschnittsfunktion der variablen Kosten $K_v(x)$ heißt variable Stückkostenfunktion $k_v(x)$. Bestimmen Sie das Minimum von k_v und interpretieren Sie die Bedeutung dieses Wertes für ein Unternehmen.

b) Die Durchschnittsfunktion der gesamten Kosten $K(x)$ heißt Stückkostenfunktion $k(x)$. Zeigen Sie, dass für 500 Stücke die Stückkosten minimal sind und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an. Welche Information liefert dieser Wert einem Unternehmen?

Die Funktion der variablen Stückkosten ergibt sich als Durchschnittsfunktion der variablen Kosten zu:

$$k_v(x) = 0,01x^2 - 9x + 3000.$$

Der Graph von $k_v(x)$ besitzt einen Tiefpunkt bei $T_1(450|975)$. Bei der Produktion von 450 Stücken deckt ein Stückpreis von €975 gerade noch die variablen Kosten, aber nicht die fixen Kosten. Daher ist dieser Preis als **kurzfristige Preisuntergrenze** zu verstehen. Wir erhalten für die Stückkostenfunktion:

$$k(x) = 0,01x^2 - 9x + 3000 + 250000 \cdot x^{-1}.$$

Der Graph von $k(x)$ besitzt einen Tiefpunkt bei $T_2(500|1500)$. Ein Preis pro Stück in Höhe von €1500 deckt bei einer produzierten Menge von 500 Stücken die gesamten Kosten. Er kann als **langfristige Preisuntergrenze** interpretiert werden. Im Anschluss an die Aufgabe erhalten die Schüler folgende Definitionen:

a) Das Minimum der variablen Kosten pro Stück heißt **Betriebsminimum** und kennzeichnet die kurzfristige Preisuntergrenze eines Gutes.

b) Das Minimum der gesamten Kosten pro Stück heißt **Betriebsoptimum** und kennzeichnet die langfristige Preisuntergrenze eines Gutes.

Anschließend können die Schüler einen ökonomischen Zusammenhang im Umfeld von Betriebsminimum sowie Betriebsoptimum anhand der Funktionsgraphen untersuchen. Zum Berechnen der Funktionswerte empfehlen wir einen Taschenrechner.

Aufgabe 10.9

Wir greifen die Kostenfunktion mit $K(x) = 0,01x^3 - 9x^2 + 3000x + 250000$ aus der vorherigen Aufgabe auf. Zeichnen Sie die Graphen der variablen Stückkosten und der Stückkosten in ein Schaubild für $0 < x \leq 900$. Fügen Sie anschließend den Graphen der Grenzkosten hinzu. Was fällt Ihnen beim Verlauf des Graphen der Grenzkosten auf? Überprüfen Sie Ihre Vermutung rechnerisch.

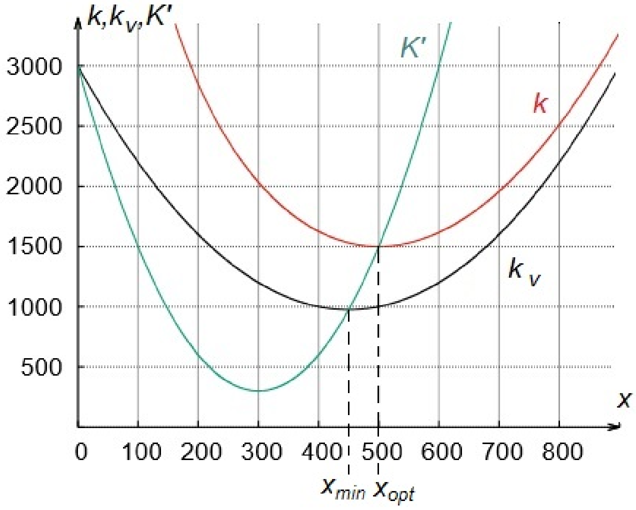


Abbildung 10.5: Graphen der Funktionen von Grenz- und Stückkosten

Für die Grenzkostenfunktion gilt:

$$K'(x) = 0,03x^2 - 18x + 3000.$$

Abbildung 10.5 zeigt die Graphen der variablen und gesamten Stückkostenfunktionen sowie der Grenzkostenfunktion. Es ist zu erkennen, dass der Graph der Grenzkostenfunktion die Graphen von variablen und gesamten Stückkosten in deren Minimum schneidet. Die Vermutung kann rechnerisch bestätigt werden: Das Betriebsminimum liegt bei $x_{min} = 450$ mit $k_v(450) = K'(450)$. Das Betriebsoptimum wird für $x_{opt} = 500$ angenommen. Auch hier erhalten wir $k(500) = K'(500)$. Wir empfehlen die gefunden Zusammenhänge zwischen Grenzkosten und Stückkosten an weiteren ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen zu bestätigen. Anschließend bleibt festzuhalten:

Sei K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion.

a) Im Betriebsminimum sind Grenzkosten und variable Stückkosten identisch.

b) Im Betriebsoptimum sind Grenzkosten und gesamte Stückkosten identisch.

Wir beschränken uns beim Beweis auf das Betriebsminimum. Der Nachweis für das Betriebsoptimum vollzieht sich analog, es ist lediglich K_v durch K zu ersetzen. Zum Verständnis des Beweises ist die Produkt- oder Quotientenregel notwendig.

Beweis. Für das Betriebsminimum gilt als notwendige Bedingung $k_v'(x) = 0$. Über die Definition der variablen Stückkosten erhalten wir für $x \neq 0$:

$$(k_v(x))' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{K_v(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(K_v(x) \cdot x^{-1}\right)' = 0.$$

Anwenden der Produktregel liefert:

$$K_v'(x) \cdot x^{-1} + K_v(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = 0.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $x^2 \neq 0$:

$$K_v'(x) \cdot x - K_v(x) = 0 \Leftrightarrow K_v'(x) = \frac{K_v(x)}{x}.$$

Da die Ableitungen von K und K_v übereinstimmen (die Fixkosten verschwinden beim Ableiten) und $\frac{K_v(x)}{x} = k_v(x)$ ist, ergibt sich letztendlich:

$$K'(x) = k_v(x)$$

Sei x_{min} die Stelle des Betriebsminimums, folglich gilt:

$$(k_v(x_{min}))' = 0 \Leftrightarrow K'(x_{min}) = k_v(x_{min}).$$

□

Neben der rechnerischen Bestimmung von Betriebsminimum und -optimum bietet sich zum tieferen Verständnis die Interpretation von Schaubildern an. Dazu dient Aufgabe 10.10.

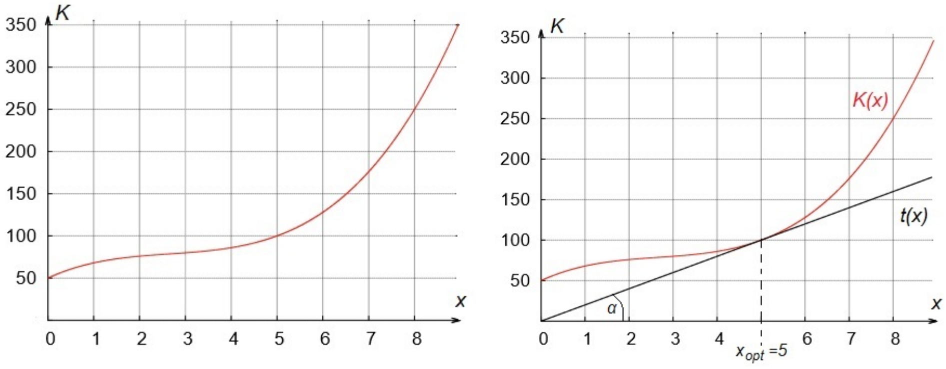
Aufgabe 10.10
Alina behauptet: „Wenn ich vom Ursprung aus eine Tangente an die Kostenfunktion zeichne, kann ich am Berührpunkt das Betriebsoptimum ablesen“.

a) *Begründen Sie mittels einer Zeichnung in Abbildung 10.6 (a), dass sie Recht hat. Bestimmen Sie (so genau wie möglich) die zu produzierende Menge, zu der die Stückkosten minimal werden. Geben Sie die langfristige Preisuntergrenze an.*

b) *Führen Sie analoge Überlegungen zur graphischen Bestimmung des Betriebsminimums durch.*

Abbildung 10.6 (b) zeigt die Tangente durch den Ursprung, die den Graphen der Kostenfunktion K bei $x_{opt} \approx 5$ mit $K(5) \approx 100$ berührt. Es gilt:

$$tan(\alpha) = \frac{K(5)}{5} = k(5).$$



(a) (b)

Abbildung 10.6: (a) Graph einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K und (b) Tangente vom Ursprung an den Graphen von K

Gleichzeitig erhalten wir mit $tan(\alpha)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von K an der Stelle $x_{opt} \approx 5$. Somit sind K' und k für $x_{opt} \approx 5$ identisch. Die langfristige Preisuntergrenze liegt mit $k(5) \approx \frac{100}{5} = 20$ bei ungefähr 20 $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$. Analog lässt sich in Teilaufgabe b) vorgehen, wenn die Tangente von $P(0|K_f)$ an die Kostenfunktion gezeichnet wird. Das Betriebsminimum liegt bei $x_{min} \approx 4$, die kurzfristige Preisuntergrenze beträgt etwa 4 $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$. Eine weitere Möglichkeit zum Vertiefen des graphischen Verständnisses bietet Aufgabe 10.11 an.

Aufgabe 10.11

Abbildung 10.7 zeigt einen Ausschnitt der Graphen der variablen Stückkosten k_v, der Stückkosten k und der Grenzkosten K'. Prüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit und begründen Sie Ihre Antworten.

a) *Das Betriebsminimum liegt an der Stelle $x_1 = 3$.*

b) *Das Unternehmen kann sein Gut für $p_1 = 10$ langfristig am Markt verkaufen.*

c) *Das Betriebsoptimum liegt über 10 $\frac{GE}{ME}$.*

d) *Je mehr ME des Gutes produziert werden, desto geringer werden die Stückkosten.*

e) *Die Kosten für 2 produzierte Einheiten sind größer als 40 GE.*

Die erste Aussage ist korrekt, da das Betriebsminimum das Minimum der variablen Kosten ist. Aussage b) hingegen ist falsch: Die langfristige Preisuntergrenze entspricht dem Minimum von k, das jedoch größer als 10 $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$

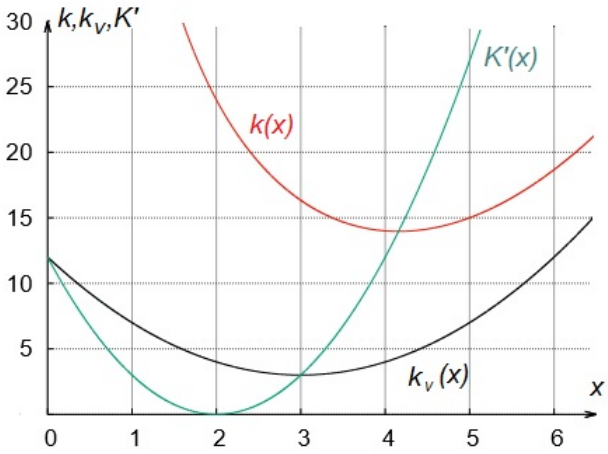


Abbildung 10.7: Interpretation eines Schaubildes zum Betriebsminimum und -optimum

ist. Im Betriebsoptimum gilt $K'(x) = k(x)$, folglich ist c) korrekt. Aussage d) ist falsch, da der Graph von k für $x > 5$ streng monoton steigt. Die Aussage in Aufgabe e) ist richtig: Produziert das Unternehmen zwei Einheiten, dann kostet jedes Stück ca. 24 GE. Aus $k(2) = \frac{K(2)}{2}$ folgt daher: $K(2) = k(2) \cdot 2 \approx 48$.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Betriebsminimum und -optimum“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... bestimmen anhand der Stückkosten die kurz- und langfristigen Preisuntergrenzen eines Produktes.
- ... kennen die Bedeutung der Begriffe Betriebsminimum und -optimum und können diese rechnerisch sowie graphisch bestimmen.
- ... weisen den Zusammenhang von (variablen) Stückkosten und Grenzkosten im Betriebsminimum oder Betriebsoptimum nach.

10.2.4 Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung

In diesem Abschnitt stellen wir weitere Aufgaben zur Wiederholung der Inhalte aus der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“ vor. Wir empfehlen die Aufgaben zum Ende des Basismoduls zu bearbeiten, es ist aber auch eine entsprechende Reihung innerhalb der vorherigen Abschnitte möglich. Zunächst greifen wir die Interpretation von Graphen ökonomischer Funktionen auf, denn ein vorstellungsorientiertes Arbeiten erachten wir zum Verstehen rechnerischer Verfahren als hilfreich. Aufgabe 10.12 bezieht sich auf die Zusammenhänge zwischen Erlös- und Kostenfunktion.

Aufgabe 10.12
Abbildung 10.8 zeigt die Graphen einer Erlösfunktion E und einer Kostenfunktion K in Abhängigkeit von der produzierten und abgesetzten Menge x in Stück. Geben Sie - sofern dies möglich ist - (näherungsweise) jeweils diejenige Menge an, für die gilt:

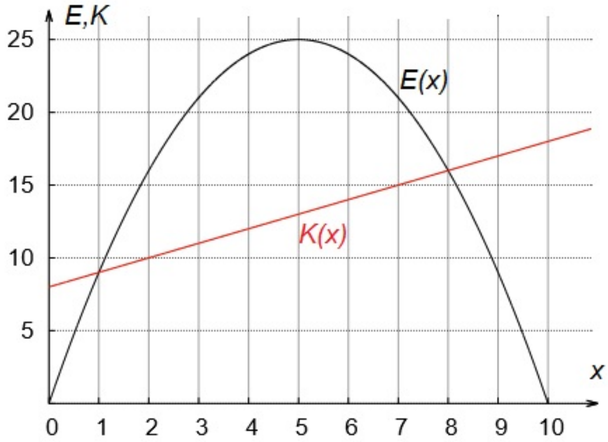


Abbildung 10.8: Schaubild einer Erlös- und Kostenfunktion

a) *Der Erlös ist maximal.*

b) *Der Grenzerlös ist am größten.*

c) *Die Grenzkosten sind am kleinsten.*

d) *Die untere Gewinnschwelle wird angenommen.*

e) *Der Gewinn ist am größten.*

Der maximale Erlös kann direkt am Graphen der Erlösfunktion abgelesen werden und liegt bei einer Menge von 5 Stück. Der maximale Grenzerlös ist als größter Anstieg des Erlöses bei einer Steigerung der Menge um eine Einheit zu interpretieren. Dies ist für $x_1 = 0$ der Fall. Im Gegensatz zum Grenzerlös werden die Grenzkosten nicht extremal, denn eine lineare Kostenfunktion besitzt einen konstanten Anstieg. Die untere Gewinnschwelle liegt bei $x_2 = 1$, da an dieser Stelle die Graphen von Erlös- und Kostenfunktion sich schneiden. Der maximale Gewinn ist zwischen $x_3 = 4$ und $x_4 = 5$ zu finden, da hier die Differenz zwischen Erlös und Kosten am größten ist.

Neben einer graphischen Analyse bieten wir im Folgenden Aufgaben zur Aufstellung ökonomischer Funktionen an. Aufgabe 10.13 zeigt dies am Beispiel einer Gewinnfunktion. Zur Lösung der Aufgabe können die Schüler einen Taschenrechner verwenden.

Aufgabe 10.13
Bestimmen Sie eine quadratische Gewinnfunktion, über die folgende Angaben bekannt sind:

a) Die untere Gewinnschwelle liegt bei 10 ME.

b) Der maximale Gewinn wird für 45 ME angenommen.

c) Der Gewinn für 60 ME liegt bei 200 GE.

Die Funktionsgleichung einer quadratischen Gewinnfunktion ergibt sich zu $G(x) = ax^2+bx+c$. Der Grenzgewinn lautet $G'(x) = 2ax+b$. Aus $G(10) = 0$, $G'(45) = 0$ und $G(60) = 200$ folgt das LGS:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 100a & + & 10b & + & c & = & 0 \\ 90a & + & b & & & = & 0 \\ 3600a & + & 60b & + & c & = & 200 \end{array}$$

Die Lösungen des LGS ergeben sich zu $a = -0,2$, $b = 18$ und $c = -160$. Somit lautet die Gewinnfunktion $G(x) = -0,2x^2 + 18x - 160$. Eine analoge Aufgabenstellung lässt sich auch für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion betrachten. Zur Lösung der Aufgabe können die Schüler einen Taschenrechner verwenden.

Aufgabe 10.14
Für die Produktion eines Gutes fallen Fixkosten in Höhe von 12 GE an und für 4 ME entstehen Grenzkosten in Höhe von 27 $\frac{GE}{ME}$. Die kurzfristige Preisuntergrenze liegt bei 0,75 $\frac{GE}{ME}$ und wird bei einem Verkauf von 1,5 ME erreicht. Bestimmen Sie den Funktionsterm der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ besitzt die Grenzkostenfunktion $K'(x) = 3ax^2+2bx+c$. Die Funktion der variablen Stückkosten lautet $k_v(x) = ax^2+bx+c$, die der variablen Grenzstückkosten $k_v'(x) = 2ax + b$. Aus den Fixkosten folgt $d = K(0) = 12$, aus den Grenzkosten $K'(4) = 27$. Aus dem Betriebsminimum $B_{min}(1,5|0,75)$ erhalten wir $k_v(1,5) = 0,75$ und $k_v'(1,5) = 0$. Für das LGS gilt:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 48a & + & 8b & + & c & = & 27 \\ 2,25a & + & 1,5b & + & c & = & 0,75 \\ 3a & + & b & & & = & 0 \end{array}$$

Das LGS besitzt die Lösungen $a = 1$, $b = -3$ und $c = 3$. Für die ertragsgesetzliche Kostenfunktion erhalten wir:

$$K(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 12.$$

.

Neben dem Aufstellen ökonomischer Funktionen erachten wir es für sinnvoll, wenn Schüler deren Koeffizienten untersuchen. Die speziellen ökonomischen Verläufe und die damit verbundenen Einschränkungen führen auf vertiefende mathematische Zusammenhänge. In Aufgabe 10.15 können die Schüler die Parameter einer quadratischen Kostenfunktion untersuchen.

Aufgabe 10.15
Wie sind die Parameter a, b und c einer quadratischen Kostenfunktion K der Form $K(x) = ax^2 + bx + c$ zu wählen?

Für eine quadratische Kostenfunktion gelten folgende Überlegungen:

a) Die Fixkosten sind größer oder gleich null.

b) Die variablen Kosten sind monoton steigend. Der Graph von K darf keinen Tiefpunkt für $x > 0$ besitzen.

Aus Bedingung a) folgt $c \geq 0$. Um die Monotonie aus Bedingung b) zu erfüllen, muss die Parabel nach oben geöffnet sein. Folglich ist $a > 0$ zu wählen. Für den Extremwert von K an der Stelle x_0 gilt mit $K'(x_0) = 0$:

$$2ax_0 + b = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Mit $a > 0$ gilt: Für $b < 0$ ist $x_0 > 0$. Die Kostenfunktion besitzt in diesem Fall einen lokalen Extremwert für $x > 0$. Für $b \geq 0$ ist $x_0 \leq 0$ und der Graph von K ist für alle $x > 0$ monoton steigend. Für eine quadratische Kostenfunktion der Form $K(x) = ax^2 + bx + c$ gilt folglich: $a > 0$, $b \geq 0$ und $c \geq 0$.

Die folgenden Aufgaben können nur bearbeitet werden, wenn die Schüler aus dem Ergänzungsmodul „Preis-Elastizität der Nachfrage“ die Berechnung von Elastizitätswerten erlernt haben. Die Analyse von ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen im Umfeld der Elastizität führt auf interessante ökonomische Gesetzmäßigkeiten. Eine erste Hinführung zur Thematik kann durch Aufgabe 10.16 erfolgen. Zur Verringerung des Rechenaufwands empfehlen wir einen Taschenrechner.

Aufgabe 10.16
Gegeben sei eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K:

$$K(x) = x^3 - 30x^2 + 310x + 1156; \qquad x \in [0 : 40].$$

Das Betriebsminimum wird für eine Menge von $x_{min} = 15$, das Betriebsoptimum für eine Menge von $x_{opt} = 17$ angenommen. Bestimmen Sie jeweils die x-Elastizität der Kosten im Betriebsminimum und -optimum. Interpretieren Sie die erhaltenen Werte.

Wir erhalten z. B. für die Elastizität der Kosten im Betriebsoptimum:

$$\varepsilon_K(x) = \frac{K'(17)}{K(17)} \cdot 17 = 1.$$

Eine 1%-ige Erhöhung der Menge führt im Betriebsotimum zu einer 1%-igen Steigerung der Kosten. Das gleiche Ergebnis liefert die x-Elastizität der variablen Kosten im Betriebsminimum. Diese Zusammenhänge sind an weiteren ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen zu bestätigen. Wir halten fest:

a) Im Betriebsminimum führt eine 1%-ige Erhöhung der Menge zu einem 1%-igen Anstieg der variablen Kosten.

b) Im Betriebsoptimum führt eine 1%-ige Erhöhung der Menge zu einem 1%-igen Anstieg der gesamten Kosten.

Beweis.
Für die Elastizitätsfunktion der Kosten gilt:

$$\varepsilon_K(x) = \frac{K'(x)}{K(x)} \cdot x = \frac{K'(x)}{\frac{K(x)}{x}} = \frac{K'(x)}{k(x)}.$$

Im Betriebsoptimum sind Grenzkosten und Stückkosten identisch. Wir erhalten mit $K'(x_{opt}) = k(x_{opt})$ die geforderte Aussage:

$$\varepsilon_K(x_{opt}) = 1.$$

Für die Elastizitätsfunktion der variablen Kosten gilt:

$$\varepsilon_{K_v}(x) = \frac{K_v'(x)}{K_v(x)} \cdot x = \frac{K_v'(x)}{\frac{K_v(x)}{x}} = \frac{K_v'(x)}{k_v(x)}$$

Die erste Ableitung von $K(x)$ und $K_v(x)$ stimmen überein ($K_v'(x) = K'(x)$) und im Betriebsminimum sind Grenzkosten sowie variable Stückkosten identisch. Mit $K'(x_{min}) = k_v(x_{min})$ folgt auch hier die Richtigkeit der Annahme:

$$\varepsilon_{K_v}(x_{min}) = 1.$$

□

Da die Schüler den Beweis nur schwerlich alleine führen können, empfehlen wir diesen im Unterrichtsgespräch zu behandeln. Aufgrund seines geringen Umfangs und der Verbindung außer- und innermathematischer Inhalte halten wir diesen für den Mathematikunterricht sehr geeignet. Ein weiterer ökonomischer Zusammenhang, der sich mittels Elastizität herleiten lässt, betrifft Kosten sowie Stückkosten. Die Schüler können dies in Aufgabe 10.17 behandeln.

Aufgabe 10.17
Zeigen Sie: Im unelastischen Bereich der Kosten sinken die Stückkosten bei einer 1%-igen Preiserhöhung.

Beweis.
Der unelastische Bereich der Kosten liegt aufgrund der Monotonie von Kostenfunktionen im Intervall $0 < \varepsilon_K(x) < 1$. Die Stückkosten entsprechen der Durchschnittsfunktion der Kosten, folglich gilt für deren Elastizitäten:

$$\varepsilon_K(x) = \varepsilon_k(x) + 1.$$

Daraus folgt der Nachweis der Aussage in Aufgabe 10.17 mit:

$$\varepsilon_K(x) < 1 \Leftrightarrow \varepsilon_K(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow \varepsilon_k(x) < 0.$$

□

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... interpretieren die Graphen ökonomischer Funktionen und treffen Aussagen über deren Änderungsverhalten.
- ... stellen Funktionsgleichungen ökonomischer Funktionen auf.
- ... untersuchen die Parameter einer quadratischen Kostenfunktion.
- ... erfahren weitere Zusammenhänge im Umfeld der Elastizität.

10.3 Die Ergänzungsmodule

10.3.1 Die Ableitung als lokale Linearisierung

Die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Linearisierung findet in Schulbüchern wenig Verwendung. Daher unterbreiten wir mit diesem Ergänzungsmodul Vorschläge zu deren Umsetzung im Unterricht. Als Einstieg dient Aufgabe 10.18.

Aufgabe 10.18
Gegeben sei die Funktion $f(x) = 5x - x^2$.

a) *Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an f an der Stelle $a = 2$.*

b) *Zeichnen Sie die Graphen von f und t mithilfe eines Funktionenplotters oder eines grafikfähigen Taschenrechners.*

c) *Vergrößern Sie das Schaubild im Punkt $P(2|f(2))$ durch Hineinzoomen oder durch verändern des Fensters. Erläutern Sie Ihre Beobachtungen.*

Die Gleichung der Tangente lautet $t(x) = x+4$. Die Schüler sollen erkennen, dass bei einer Vergrößerung der Graphen von Funktion und Tangente im Punkt $P(2|f(2))$ beide kaum zu unterscheiden sind, wie Abbildung 10.9 zeigt. Dies führt auf die Vermutung, dass sich die Tangente an eine Funktion als lokale lineare Approximation eignet. Mit der Aufgabe 10.19 lässt sich diese Annahme näher untersuchen.

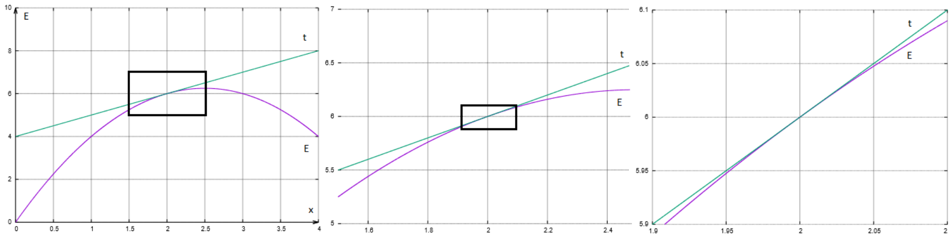


Abbildung 10.9: Schmiegeigenschaft der Tangente an einen Funktionsgraphen unter dem so genannten Funktionenmikroskop

Aufgabe 10.19
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion für $x \in [0; 4]$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an f an der Stelle $a_1 = 1$. Zeichnen Sie die Tangente zum Graphen von f.

c) Nähern Sie den Wert von $f(1,4)$ mithilfe von t an.

d) Die Differenz zwischen dem genauen und dem näherungsweise bestimmten Funktionswert heißt Approximationsfehler r. Geben Sie mit einem Taschenrechner den Approximationsfehler aus c) an.

d) Für welche Werte von x ist der Approximationsfehler zwischen f und t kleiner als 0,005?

Abbildung 10.10 zeigt die Graphen von f und t. Die Gleichung der Tangente t an f in $P(1|1)$ lautet:

$$t(x) = 0,5x + 0,5$$

Mit der Tangentengleichung gilt: $f(1,4) \approx t(1,4) = 1,2$. Der Approximationsfehler r berechnet sich aus der Differenz von t und f an der Stelle $a_2 = 1,4$:

$$r(1,4) = t(1,4) - f(1,4) \approx 0,0168.$$

Für die letzte Teilaufgabe ist die Ungleichung $t(x) - f(x) < 0,005$ zu lösen mit:

$$0,5x + 0,5 - \sqrt{x} < 0,005.$$

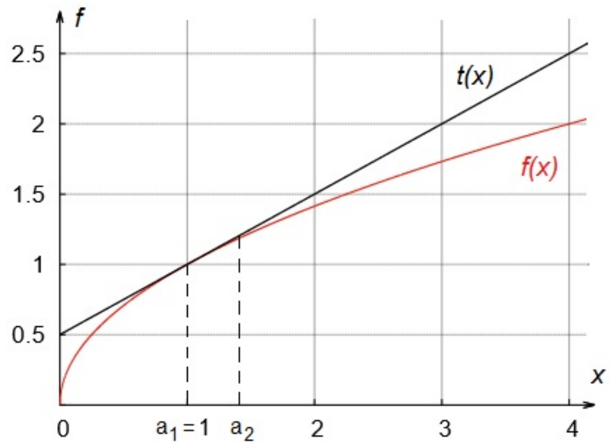


Abbildung 10.10: Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ und Tangente an der Stelle $a_1 = 1$

Mittels Substitution $\sqrt{x} = z$ und einiger Äquivalenzumformungen erhalten wir:

$$0,5z^2 - z + 0,495 < 0.$$

Die Lösungen dieser Ungleichung können mit einer quadratischen Lösungsformel bestimmt werden. Eine Resubstitution liefert das Ergebnis, dass für $x \in (0,81; 1,21)$ der Approximationsfehler zwischen f und t kleiner als 0,005 ist.

Abschließend bietet es sich an, ein allgemeines Verfahren zur lokalen Linearisierung mittels Tangente anhand einer Funktion f zu entwickeln. Dabei beziehen wir die Approximation zunächst auf die Stelle $a = 0$, bevor wir das Verfahren auf eine beliebige Stelle verallgemeinern. In der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen II" greifen wir diesen Gedanken im Sinne einer vertikalen Vernetzung auf und approximieren eine Funktion mittels Polynomfunktionen höheren Grades.

Aufgabe 10.20

Gegeben sei eine Funktion f. Die Tangente t an f an der Stelle a besitzt den gleichen Funktionswert und dieselbe Steigung wie f.

a) *Zeigen Sie, dass die Tangente t an f an der Stelle $a = 0$ die Form $t(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$ besitzt.*

b) *Bestimmen Sie eine allgemeine Gleichung der Tangente t an f an einer beliebigen Stelle a. Setzen Sie dafür $t(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - a)$ und bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 und a_1 der Tangente t.*

c) *Überlegen Sie, welche Voraussetzungen f erfüllen muss, damit die Gleichung der Tangente t existiert.*

Für die Tangente gilt $t(x) = a_0 + a_1 \cdot x$ mit reellen Koeffizienten a_0 und a_1. Da f und t an der Stelle $a = 0$ im Funktionswert und der Ableitung übereinstimmen, folgt $t(0) = a_0 = f(0)$ und $t'(0) = a_1 = f'(0)$. Die Gleichung der Tangente an f an der Stelle $a = 0$ lautet $t(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$. Für die Gleichung von t an f an einer beliebigen Stelle a ist das Vorgehen ähnlich. Aus $t(a) = a_0 = f(a)$ und $t'(a) = a_1 = f'(a)$ folgt:

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Das Aufstellen der Tangente ist aber nur dann möglich, wenn f an der Stelle a definiert ist und $f'(a)$ existiert.

Lehrziele:
Angesichts der beschriebenen Unterrichtsinhalte ergeben sich für den Abschnitt „Die Ableitung als lokale Linearisierung" die folgenden Lehrziele. Die Schüler...

- ... berechnen Funktionswerte näherungsweise mittels Tangente.
- ... nutzen die Tangente als lokale Linearisierung einer Funktion.
- ... leiten die allgemeine Tangentengleichung mittels der fundamentalen Idee der Approximation her.

10.3.2 Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz. Im Vergleich zum Ergänzungsmodul „Preisbildung unter monopolistischer Konkurrenz" aus der Unterrichtseinheit „Von Märkten und Unternehmen" erfolgt die Analyse der Gewinnfunktion mittels Differenzialrechnung. Als Einstieg dient Aufgabe 10.21. Zur Verringerung des Rechenaufwands können die Schüler einen Taschenrechner verwenden.

Aufgabe 10.21
Ein polypolistischer Anbieter mit monopolistischem Preisspielraum sieht sich beim Absatz seines Produktes der folgenden doppelt geknickten Preis-Absatz-Funktion gegenüber:

$$p(x) = \begin{cases} -x + 55, & 0 \leq x < 10 \\ -2x + 65, & 10 \leq x < 20 \\ -0,5x + 35, & 20 \leq x \leq 70. \end{cases}$$

Die Kosten lassen sich mit $K(x) = 9x + 200$ beschreiben.

a) Geben Sie die Gleichung der Erlös- und der Gewinnfunktion an.

b) Ermitteln Sie die gewinnmaximale Menge. Wie hoch ist der maximale Gewinn?

Der Erlös berechnet sich aus dem Produkt von Menge und Preis. Folglich gilt für die Erlösfunktion:

$$E(x) = \begin{cases} -x^2 + 55x, & 0 \leq x < 10 \\ -2x^2 + 65x, & 10 \leq x < 20 \\ -0,5x^2 + 35x, & 20 \leq x \leq 70. \end{cases}$$

Die Differenz aus Erlös- und Kostenfunktion führt zur Gewinnfunktion:

$$G(x) = \begin{cases} -x^2 + 46x - 200, & 0 \leq x < 10 \\ -2x^2 + 56x - 200, & 10 \leq x < 20 \\ -0,5x^2 + 26x - 200, & 20 \leq x \leq 70. \end{cases}$$

Aus der Gewinnfunktion erfolgt der Grenzgewinn zu:

$$G'(x) = \begin{cases} -2x + 46, & 0 \leq x < 10 \\ -4x + 56, & 10 \leq x < 20 \\ -x + 26, & 20 \leq x \leq 70. \end{cases}$$

Aus der Gleichung $G'(x) = 0$ erhalten wir für den ersten Abschnitt die Lösung $x_1 = 23$, die außerhalb des geforderten Intervalls liegt. Der zweite Abschnitt besitzt die Lösung $x_2 = 14$, der dritte die Lösung $x_3 = 26$. Beide liegen im vorgegebenen Intervall und besitzen für G' einen VZW von $+ \to -$. Mit $G(14) = 192$ und $G(26) = 138$ existiert an der Stelle x_2 ein globales Maximum. Für 14 ME wird der Gewinn mit 192 GE am größten. In Aufgabe 10.22 können die Schüler das Vorgehen zur Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz reflektieren.

Aufgabe 10.22

Gegeben ist die Gewinnfunktion eines Unternehmens mit monopolistischem Preisspielraum. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen zur Bestimmung des maximalen Gewinns über den Grenzgewinn mithilfe von Abbildung 10.11.

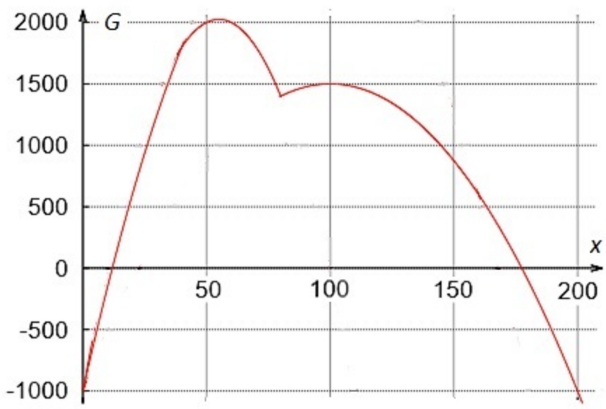


Abbildung 10.11: Graph einer Gewinnfunktion unter monopolistischer Konkurrenz

Für die Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz ist zu beachten, dass die Gleichung $G'(x) = 0$ mehrere Lösungen für lokale Extremstellen liefert. Neben dem Überprüfen der hinreichenden Bedingung müssen die Lösungen im jeweiligen Definitionsbereich liegen. Abschließend können die Schüler durch Einsetzen vergleichen, welche Stelle das globale Maximum darstellt. An dieser Stelle liegt der maximale Gewinn.

Lehrziele:
Angesichts der beschriebenen Unterrichtsinhalte ergeben sich für den Abschnitt „Gewinnmaximierung unter monopolistischer Konkurrenz“ die folgenden Lehrziele. Die Schüler...

- ... unterscheiden zwischen lokalem und globalem Maximum.
- ... analysieren abschnittsweise definierte Funktionen mittels Ableitung.

10.3.3 Preis-Elastizität der Nachfrage

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Auswirkungen von Preiserhöhungen auf den Erlös. Für einen motivierenden Einstieg eignet sich der Zeitungsartikel über den Suppenhersteller Campbell.

Campbell verbrennt sich an Preiserhöhung

Der Suppenhersteller, der in Deutschland mit Erasco und Heisse Tasse in den Supermärkten vertreten ist, konnte seine US-Kunden nicht von seinen höheren Preisen überzeugen. Zu viele Dosen blieben in den Regalen stehen.

New York. Von hoher Arbeitslosigkeit und Wirtschaftsproblemen verunsicherte US-Kunden haben dem weltgrößten Suppenhersteller Campbell nach Preisanhebungen die kalte Schulter gezeigt. Der Umsatz in der US-Suppensparte ging im ersten Geschäftsquartal um vier Prozent zurück, teilte der Konzern am Dienstag mit. [...] Dank guter Geschäfte mit Getränken, Soßen und Crackern fielen die Gesamterlöse jedoch nur um ein Prozent auf 2,16 Milliarden Dollar.

Der Gewinn ging um fünf Prozent auf 265 Millionen Dollar zurück. Die Aktie verlor an der Wall Street mehr als sechs Prozent.

Campbell hat auf den verschärften Wettbewerb bereits mit Stellenabbau, Kürzungen bei den Werbeausgaben und dem kompletten Rückzug aus dem Russland-Geschäft reagiert. Im laufenden Geschäftsjahr rechnet der Konzern, der durch die berühmte Stilisierung seiner schlichten Dose für Tomatensuppe durch den Künstler Andy Warhol 1962 weltweit bekannt wurde, mit Problemen. Der bereinigte Gewinn je Aktie werde um fünf bis sieben Prozent nachgeben, hieß es. In Deutschland gehören die Suppenmarken Erasco und Heisse Tasse zum Sortiment.

Handelsblatt Online vom 22.11.11

Es stellt sich die Frage, inwiefern der Umsatzeinbruch vorausgesagt werden konnte. Wir greifen die Problematik am Ende dieses Ergänzungsmoduls auf. Zunächst wenden wir uns dem Änderungsverhalten einer ökonomischen Funktion zu, das bisher mit der Grenzfunktion beschrieben wurde. Dieser Wert ist jedoch nur bedingt aussagekräftig, da er erstens von der verwendeten Einheit abhängt und zweitens keine Aussage über den zugrundeliegenden Ausgangswert zulässt. Um die Schüler für diese Problematik zu sensibilisieren, kann die Aufgabe 10.23 bearbeitet werden. Zur Verringerung des Rechenaufwands empfehlen wir einen Taschenrechner.

Aufgabe 10.23
Die Nachfrage eines Produktes auf einem Markt lässt sich mit der Funktion $x(p) = -0,1p + 5$ *(p in € pro kg und x in kg) beschreiben.*

a) *Vergleichen Sie die absolute und relative Änderung der nachgefragten Menge, wenn der Preis €5 pro kg (€25 pro kg) um €1 pro kg steigt.*

b) *Welche Information liefert der Grenzabsatz?*

c) *Untersuchen Sie, wie sich der Grenzabsatz ändert, wenn die abgesetzte Menge statt in kg in g gemessen wird.*

Eine Preiserhöhung um €1 pro kg führt für alle Preise auf einen Nachfragerückgang von 0,1 kg. Die relativen Änderungen fallen unterschiedlich aus: Steigt der Preis von €5 pro kg auf €6 pro kg, sinkt die Nachfrage um ungefähr $2,2\%$. Für eine Preissteigerung von €25 pro kg auf €26 pro kg fällt die Nachfrage um 4%. Der Grenzabsatz mit $x'(p) = -0,1$ bestätigt, dass für eine Preiserhöhung von €1 pro kg die Nachfrage um 0,1 kg zurückgeht. Ein Wechsel von kg in g entspricht einem Grenzabsatz von 100 g. Diese Ergebnisse zeigen, dass die absolute Änderung keine Information über den zugrunde liegenden Ausgangswert liefert. Zusätzlich hängt die Beschreibung der Änderung des Absatzes von der verwendeten Einheit ab. Mit der relativen Änderung in Form von Elastizitäten lassen sich diese Nachteile vermeiden. Zunächst wird mit der folgenden Aufgabe eine Hinführung zur Berechnung der so genannten Bogen-Elastizität gegeben.

Aufgabe 10.24
Gegeben sei die Nachfragefunktion x mit $x(p) = -2p + 1000$ *(p in € pro Stück, x in Stück). Bestimmen Sie die durchschnittliche relative Änderung (bezogen auf eine 1%-ige Preissteigerung) der nachgefragten Menge, wenn der Preis ausgehend von €50 pro Stück bzw. €300 pro Stück um €1 pro Stück steigt.*

Es ergeben sich die Werte $x(50) = 900$ und $x(51) = 898$. Die Nachfrage sinkt um ungefähr $0,22\%$, wenn der Preis von €50 pro Stück um €1 pro Stück steigt, was einer relativen Preissteigerung von 2% entspricht. Daraus resultiert eine durchschnittliche relative Nachfrageänderung von $-0,11\%$, wenn der Preis um 1% erhöht wird. Analog ergibt sich ein Nachfragerückgang von $0,5\%$, wenn der Stückpreis von €300 um ungefähr $0,33\%$ steigt. Dies entspricht einer durchschnittlichen Änderung von $-1,5\%$ der nachgefragten Menge, wenn der Preis um 1% erhöht wird. Die Werte verdeutlichen, dass eine 1%-ige Änderung des Preises unterschiedliche Auswirkungen auf die Nachfrage besitzt. Diese Änderung wird in den Wirtschaftswissenschaften mit der Bogen-Elastizität bestimmt:

Es sei die Funktion f in Abhängigkeit der Variablen x gegeben. Ändert sich x um Δx und f dementsprechend um Δf, so heißt das Verhältnis $\varepsilon_f(x)$ der relativen Veränderungen Bogen-Elastizität von f bzgl. x. Es gilt:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Anhand der Aufgabe 10.24 kann die Funktionsweise der Bogen-Elastizität aufgezeigt werden. Für $p_0 = 300$ erhalten wir:

$$\varepsilon_x(p) = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{x(301)-x(300)}{x(300)}}{\frac{1}{300}} = -1,5.$$

Die Schüler sollten darauf aufmerksam gemacht werden, dass der erhaltene Zahlenwert ohne Dimension ist. Die Bogen-Elastizität liefert allgemein die genaue relative Änderung des Funktionswertes, wenn sich die abhängige Variable bezogen auf den Ausgangswert um 1% erhöht.

Über weitere Beispiele lässt sich rasch erkennen, dass die Berechnung der Bogenelastizität sehr zeitaufwändig ist. Eine Möglichkeit zur Vereinfachung stellt der Grenzübergang für $\Delta x \to 0$ dar. Wir greifen die Definition der Ableitung an der Stelle x_0 auf:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Mit dieser gilt für den Grenzwert der Bogen-Elastizität:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{f} \cdot \frac{x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f}\right) = f' \cdot \frac{x}{f}.$$

Der durch den Grenzübergang gewonnene Term wird in den Wirtschaftswissenschaften als Punkt-Elastizität bezeichnet. Er ist wie folgt definiert:

Sei f eine differenzierbare Funktion. Dann heißt

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$$

Punkt-Elastizität von f bzgl. x. Die dabei entstehende Funktion $\varepsilon_f(x)$ wird als Elastizitätsfunktion von f bezeichnet.

Der Zahlenwert der Punkt-Elastizität gibt an, um wie viel Prozent sich der Wert der abhängigen Variable f näherungsweise ändert, wenn sich der Wert der unabhängigen Variable x bezogen auf den Ausgangswert um 1% erhöht. Ist im Folgenden von der Elastizität die Rede, so bezieht sich dies immer auf die Punkt-Elastizität, andernfalls ist dies gesondert gekennzeichnet. In der Ökonomie ist die folgende Sprechweise üblich: Anstelle von der „Elastizität von f bzgl. x“ zu sprechen, wird der Begriff der „x-Elastizität von f“ verwendet, wobei hier die unabhängige Variable zuerst genannt wird. Anstelle der „Elastizität der Nachfrage bzgl. des Preises“ ist folglich von der „Preis-Elastizität der Nachfrage“ die Rede. Diese Begriffe können die Schüler anhand der Aufgabe 10.25 üben.

Aufgabe 10.25
Gegeben sei die Nachfragefunktion $x(p) = -0,2p + 10$ (x in Stück, p in € pro Stück). Bestimmen und interpretieren Sie die Preis-Elastizität

a) der Nachfrage bei einem Preis von €10,

b) der Nachfrage bei einem Preis von €40,

c) des Erlöses bei einem Preis von €30.

Für die Elastizitätsfunktion der Nachfrage gilt:

$$\varepsilon_x(p) = \frac{x'(p)}{x(p)} \cdot p = \frac{-0,2}{-0,2p + 10} \cdot p.$$

Mit $p_1 = 10$ erhalten wir:

$$\varepsilon_x(10) = \frac{x'(10)}{x(10)} \cdot 10 = -0,25.$$

Steigt der Preis $p_1 = 10$ um ein Prozent, so sinkt die Nachfrage um ca. $0,25\%$. Für eine 1%-ige Erhöhung von $p_2 = 40$ geht die Nachfrage um ca. 4% zurück. Die Elastizitätsfunktion des Erlöses lautet:

$$\varepsilon_E(p) = \frac{E'(p)}{E(p)} \cdot p = \frac{-0,4p + 10}{-0,2p^2 + 10p} \cdot p$$

Wir erhalten bei einem Preis von $p_3 = 30$ für die Preis-Elastizität des Erlöses:

$$\varepsilon_E(30) = \frac{E'(30)}{E(30)} \cdot 30 = -0,5.$$

Der Zahlenwert der Preis-Elastizität der Nachfrage bedeutet: Erhöht sich der Stückpreis in Höhe von €30 um ein Prozent, dann sinkt der Erlös um ungefähr $0,5\%$. An dieser Stelle kann nochmals der Hinweis erfolgen, dass es sich bei dem Ergebnis um einen Schätzwert handelt.

Anschließend sind ökonomische Funktionen unter dem Aspekt der Elastizität zu untersuchen. Insbesondere der Zahlenwert der Elastizität deutet auf eine kleine oder große Änderung der abhängigen Variable hin. Das Vorzeichen erlaubt eine Aussage über die Richtung der Veränderung. In ökonomischen Fragestellungen steht die Untersuchung von Preis-Absatz-Funktionen an erster Stelle. Um sich diesem Thema zu nähern, erhalten die Schüler Aufgabe 10.26.

Aufgabe 10.26
Ein monopolistisches Unternehmen sehe sich beim Absatz seines Produktes der folgenden Nachfragefunktion (p in € pro Stück, x in Stück) gegenüber:

$$x(p) = -0,5p + 100, \qquad p \in [0; 200]$$

Bestimmen Sie die Preis-Elastizität der Nachfrage für Preise von €0 pro Stück bis €200 pro Stück in Schritten von jeweils €25 pro Stück.

Die Elastizitätsfunktion der Nachfrage lautet:

$$\varepsilon_x(p) = \frac{-0,5p}{-0,5p + 100}$$

Mit dieser erhalten wir die in der Tabelle 10.1 dargestellten Ergebnisse. So führt zum Beispiel eine 1%-ige Steigerung des Preises von €100 pro Stück auf einen Rückgang der Nachfrage um ebenfalls ca. 1%. Während die Erhöhung niedrigerer Preise eine vergleichsweise geringe Reaktion der Nachfrager hervoruft, fällt diese für Preise über €100 pro Stück stärker aus.

p_i	0	25	50	75	100	125	150	175	200
$\varepsilon_x(p_i)$	0	-0,14	-0,33	-0,6	-1	-1,67	-3	-7	$\to -\infty$

Tabelle 10.1: Lösungen zur Aufgabe der Preiselastizität

Der unterschiedlichen Reaktionen der Nachfrager sind die Begriffe aus Tabelle 10.2 zugeordnet. Sie kennzeichnen den **Grad der Elastizität**. Dabei ist ein Grad mit dem entsprechenden Zahlenwert zu verknüpfen. Dies kann anhand der Aufgabe 10.27 geübt werden.

Zahlenwert	Reaktion von f	Begriff
$-1 < \varepsilon_f(x) < 1$	vergleichsweise geringere relative Änderung	f ist **unelastisch** bzgl. x
speziell: $\varepsilon_f(x) = 0$	keine Änderung	f ist **vollkommen unelastisch** bzgl. x
$\varepsilon_f(x) > 1$ oder $\varepsilon_f(x) < -1$	vergleichsweise starke relative Änderung	f ist **elastisch** bzgl. x
speziell: $\varepsilon_f(x) \to \pm\infty$	unendlich große Änderung	f ist **vollkomen elastisch** bzgl. x
$\varepsilon_f(x) = \pm 1$	betragsmäßig gleiche relative Änderung	f ist **proportional elastisch** bzgl. x

Tabelle 10.2: Ökonomische Begriffsbildung bei verschiedenen Werten der Elastizität

Aufgabe 10.27
Ein monopolistisches Unternehmen sehe sich der folgenden Nachfragefunktion (x in Stück; p in € pro Stück) gegenüber:

$$x(p) = -0,2p + 50, \qquad p \in [0; 250].$$

Für welche Preise ist die Nachfrage elastisch?

Die Schüler können sich durch Probieren einen ersten Überblick verschaffen. Möglich ist auch ein allgemeiner Nachweis. Da es sich um eine streng monoton fallende Preis-Absatz-Funktion handelt, nimmt $\varepsilon_x(p)$ negative Werte an. Im elastischen Bereich reagieren die Nachfrager vergleichsweise stärker auf eine Preiserhöhung. Somit lautet der Ansatz: $\varepsilon_x(p) < -1$. Durch Einsetzen der Elastizitätsfunktion $\varepsilon_x(p)$ ergibt sich:

$$\frac{-0,2p}{-0,2p + 50} < -1 \Leftrightarrow -0,2p < 0,2p - 50 \Leftrightarrow p > 125.$$

Folglich ist für höhere Preise als €125 pro Stück die Nachfrage elastisch. Anschließend sollen die Schüler den Zusammenhang zwischen der Preis-Elastizität der Nachfrage und der zugehörigen Preis-Elastizität des Erlöses untersuchen. Hierzu ist die Aufgabe 10.28 zu bearbeiten.

Aufgabe 10.28
Bestimmen Sie zur Nachfragefunktion x mit $x(p) = -0,5p+100$ *(x in Stück; p in € pro Stück) aus Aufgabe 10.26 für die angegebenen Preise die Elastizitätswerte des Erlöses. Vergleichen Sie diese mit der Preis-Elastizität der Nachfrage.*

Die Elastizitätsfunktion des Erlöses unter Berücksichtigung der Erlösfunktion $E(p) = -0,5p^2 + 100p$ lautet:

$$\varepsilon_E(p) = \frac{-p + 100}{-0,5p^2 + 100p} \cdot p.$$

Aus der Elastizitätsfunktion lassen sich die Elastizitätswerte des Erlöses analog zu denen in Aufgabe 10.26 berechnen. In der Tabelle 10.3 sind diese zur besseren Übersicht gemeinsam aufgeführt.

p_i	0	25	50	75	100	125	150	175	200
$\varepsilon_x(p_i)$	0	$-0,14$	$-0,33$	$-0,6$	-1	$-1,67$	-3	-7	$\to -\infty$
$\varepsilon_E(p_i)$	$\to 1$	$0,86$	$0,67$	$0,4$	0	$-0,67$	-2	-6	$\to -\infty$

Tabelle 10.3: Lösungen zum Vergleich der Preis-Elastizität von Nachfrage und Erlös

Offensichtlich existiert zwischen den Elastizitäten der Nachfrage und des Erlöses folgender Zusammenhang:

Die Preis-Elastizität des Erlöses ist um 1 größer als die Preis-Elastizität der Nachfrage. Es gilt:

$$\varepsilon_E(p) = \varepsilon_x(p) + 1.$$

Der Satz ist ein Spezialfall der folgenden Beziehung: Die Elastizität einer Funktion ist um eins größer ist, als die ihrer Durchschnittsfunktion. Es gilt:

$$\varepsilon_f(x) = \varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1.$$

Zum Beweis dieser Gleichung, benötigen wir einen weiteren Zusammenhang im Rahmen der Elastizität:

$$f'(x) = \overline{f}(x) \cdot \left(\varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1\right). \tag{10.1}$$

Beweis.
Aus der Definition der Durchschnittsfunktion (vgl. Abschnitt 10.2.3) erhalten wir für ($x \neq 0$):

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = \overline{f}(x) \cdot x.$$

Ableiten von $f(x)$ mittels Produktregel und anschließendem Umformen ergibt:

$$f'(x) = \left(\overline{f}(x) \cdot x\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \overline{f}'(x) \cdot x + \overline{f}(x) \cdot 1.$$

Wir erweitern den ersten Summanden auf der rechten Seite der Gleichung mit $\overline{f}(x) \neq 0$:

$$f'(x) = \overline{f}'(x) \cdot x \cdot \frac{\overline{f}(x)}{\overline{f}(x)} + \overline{f}(x) \cdot 1 \Leftrightarrow f'(x) = \overline{f}(x) \cdot \left(\frac{\overline{f}'(x)}{\overline{f}(x)} \cdot x + 1 \right).$$

Der erste Term in der Klammer ist per Definition die Elastizität der Durchschnittsfunktion und der geforderte Zusammenhang aus Gleichung (10.1) ist nachgewiesen.

$\square$

Eine Division durch $\overline{f}(x)$ (mit $\overline{f}(x) \neq 0$) in Gleichung (10.1) liefert die folgende Beziehung:

$$f'(x) = \overline{f}(x) \cdot (\varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\overline{f}(x)} = \varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1. \tag{10.2}$$

Zusätzlich ergibt sich aus der Definition der Elastizitätsfunktion von f:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f'(x)}{\overline{f}(x)}. \tag{10.3}$$

Da die Quotienten in den Gleichungen (10.2) und (10.3) identisch sind, können wir diese zusammenfügen und halten fest:

Zwischen der Elastizität einer Funktion f und der Elastizität der zugehörigen Durchschnittsfunktion $\overline{f}$ gilt:

$$\varepsilon_f(x) = \varepsilon_{\overline{f}}(x) + 1.$$

Damit kann die ursprüngliche Vermutung aus Aufgabe 10.28 bestätigt werden, denn laut Definition ist die Nachfragefunktion die Durchschnittsfunktion der Erlösfunktion. Für $p \neq 0$ gilt:

$$E(p) = p \cdot x(p) \Leftrightarrow x(p) = \frac{E(p)}{p}.$$

Aus dem Zusammenhang der Elastizitäten von Funktion und Durchschnittsfunktion lassen sich weitere ökonomische Zusammenhänge erschließen. Wir verweisen dazu auf die Einstiegsfrage dieses Abschnitts, welche Auswirkungen Preiserhöhungen auf den Erlös besitzen. Über den Elastizitätsbegriff können wir Konsequenzen über die Richtung der Erlösänderung abschätzen. Aufgabe 10.29 behandelt den Zusammenhang zwischen der Preis-Elastizität der Nachfrage und dem Erlös.

Aufgabe 10.29
Zeigen Sie die folgenden Zusammenhänge:

a) *Im unelastischen Bereich der Nachfrage steigt der Erlös bei einer Preiserhöhung um 1%.*

b) *Im elastischen Bereich der Nachfrage sinkt der Erlös bei einer Preiserhöhung um 1%.*

Beweis.
Wir beschränken uns auf den Beweis des ersten Satzes, der zweite wird analog mit umgekehrtem Ungleichheitszeichen geführt. Für eine unelastische Nachfrage gilt:

$$\varepsilon_x(p) > -1 \Leftrightarrow \varepsilon_x(p) + 1 > 0 \Leftrightarrow \varepsilon_E(p) > 0$$

□

An dieser Stelle kann nochmals auf den in diesem Abschnitt zu Beginn erwähnten Artikel des Suppenherstellers Campbell eingegangen werden. Dieser befand sich demnach im elastischen Bereich der Nachfrage, in dem der Erlös bei Preissteigerungen sinkt.

Lehrziele:
Aus den beschriebenen Unterrichtsinhalten erhalten wir für den Abschnitt „Preis-Elastizität der Nachfrage“ die folgenden Lehrziele. Die Schüler...

- ... unterscheiden zwischen der absoluten und der relativen Änderung einer Größe.
- ... ordnen einen Grad der Elastizität ihrem Zahlenwert zu und umgekehrt.
- ... berechnen und interpretieren die Preis-Elastizität der Nachfrage und des Erlöses.
- ... erkennen und beweisen ökonomische Zusammenhänge im Umfeld der Preis-Elastizität der Nachfrage.

11 Änderung ökonomischer Funktionen II

Die Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen II" greift den Begriff der Ableitung auf und erweitert die Analyse ökonomischer Funktionen mittels zweiter Ableitung. Die Einheit richtet sich an Schüler der Sekundarstufe II. Bei der Konzeption orientieren wir uns an den Zielen der Leitidee „funktionaler Zusammenhang", die sich in den Bildungsstandards Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (vgl. KMK 2012, S. 20) und den in Abschnitt 6.4 aufgeführten fundamentalen Ideen der Analysis wiederfinden. Die fachtheoretischen Grundlagen der Konzeption sind in den Kapiteln 2 und 3 aufgeführt. Die Unterrichtseinheit baut auf der vorherigen auf und setzt voraus, dass die Schüler die Bedeutung der ersten Ableitung einer Funktion als Grenzfunktion kennen.

11.1 Inhaltliche und konzeptionelle Zusammenfassung

Die Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen II" umfasst ein Basismodul und drei inhaltlich passende Ergänzungsmodule. Das Basismodul ist in drei Abschnitte unterteilt:

1. Analyse ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen mittels zweiter Ableitung
2. Die natürliche Exponentialfunktion als ökonomische Funktion
3. Wiederholungs- und Vertiefungsaufgaben.

Die einzelnen Abschnitte sind inhaltlich aufeinander abgestimmt und sollten chronologisch unterrichtet werden. Unterstützung erhält das Basismodul durch folgende Ergänzungsmodule:

1. Analyse von Elastizitätsfunktionen (GTR)
2. Approximation von Funktionen
3. Ökonomische Funktionen mit zwei Variablen.

Abbildung 11.1 zeigt einen möglichen zeitlichen Ablauf der Unterrichtseinheit. Die Ergänzungsmodule wurden an zeitlich passender Stelle eingefügt und erweitern die Inhalte aus dem Basismodul. Zur Analyse von Elastizitätsfunktionen empfehlen wir die Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners[51]. Das Ergänzungsmodul zur Approximation von Funktionen führt die lineare Approximation von Funktionen mittels Tangente auf höherer Ebene fort. Die Analyse von ökonomischen Funktionen mit zwei Variablen kann als Einstieg in die Analysis mehrerer Veränderlicher dienen.

[51] Alternativ lässt sich das Ergänzungsmodul mit einem geeigneten Computerprogramm bearbeiten.

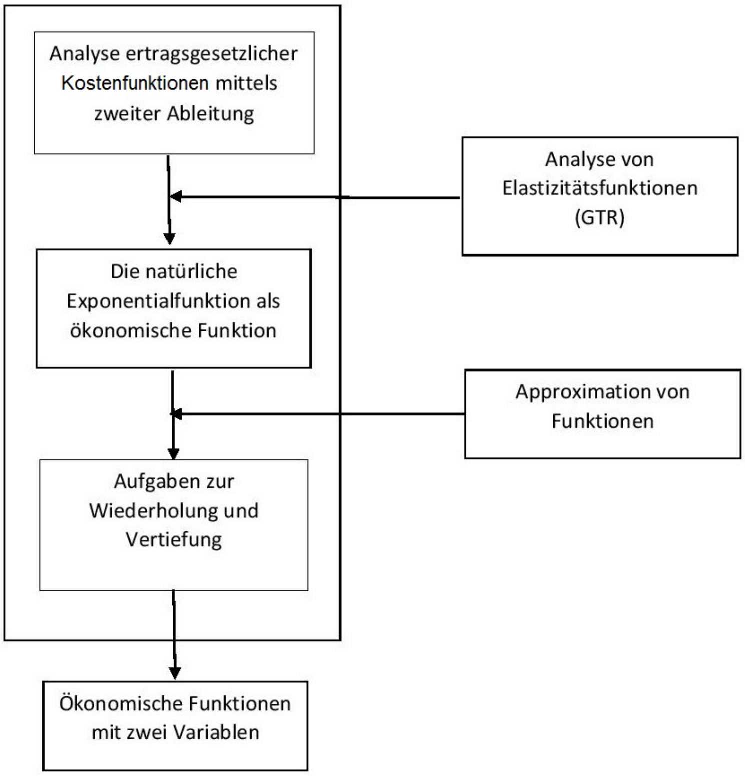


Abbildung 11.1: Möglicher zeitlicher Ablauf der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen II"

11.2 Das Basismodul

11.2.1 Analyse ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen mittels zweiter Ableitung

In den vorherigen Unterrichtseinheiten haben wir charakteristische Punkte ökonomischer Funktionen wie etwa den maximalen Erlös oder den maximalen Gewinn mittels erster Ableitung bestimmt. Ertragsgesetzliche Kostenfunktionen besitzen aufgrund ihres Monotonieverhaltens keine lokalen Extremstellen, was sie aus mathematischer Sicht interessant macht. Die Hinzunahme der zweiten Ableitung erlaubt uns, das Krümmungsverhalten dieser Funktionen zu untersuchen: Es führt auf eine Stelle, bei der fallende Grenzkosten in steigende übergehen. Im Fall einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion nehmen die Grenzkosten ein Minimum an, das den kleinsten Kostenanstieg kennzeichnet. Der Graph der Funktion wechselt an dieser Stelle von einer Rechts- in eine Linkskrümmung. Aufgabe 11.1 kann als Hinführung zur Bedeutung der zweiten Ableitung im ökonomischen Umfeld dienen.

Aufgabe 11.1
Bestimmen Sie das Minimum der Grenzkosten folgender Kostenfunktionen.

a) $K(x) = x^3 - 6x^2 + 16x + 20$

b) $K(x) = 0,1x^3 - 3x^2 + 180x + 100$

Die Grenzkostenfunktion in Teilaufgabe a) lautet $K'(x) = 3x^2 - 12x + 16$. Sie besitzt ein lokales Minimum[52] an der Stelle $x_1 = 2$, das gleichzeitig das globale Minimum darstellt. Es gilt: $K''(2) = 0$ und $K''(x)$ wechselt an der Stelle $x_1 = 2$ das Vorzeichen von $- \rightarrow +$ mit z. B. $K''(1) = -6$ sowie $K''(3) = 6$. Aus $K'(2) = 4$ folgt, dass der Kostenanstieg von 2 auf 3 produzierte Mengeneinheiten mit ca. 4 GE am geringsten ausfällt. Die Kostenfunktion besitzt somit für $x < 2$ fallende Grenzkosten und für $x > 2$ steigende Grenzkosten. Ein analoges Vorgehen in Teilaufgabe b) führt auf die Lösung $x_2 = 10$ mit $K'(10) = 150$. Das Minimum der Grenzkosten besitzt in der Regel einen positiven Funktionswert, da von einer streng monoton steigenden Kostenfunktion ausgegangen wird. Jedoch ist es u. E. für schulische Zwecke dienlich, wenn wir eine monoton steigende Funktion voraussetzen, da dies die Existenz eines Sattelpunktes erlaubt. Zwar ist das Minimum der Grenzkosten in diesem Fall gleich null, die genaue Änderung bleibt positiv. Aufgabe 11.2 greift diese Thematik auf.

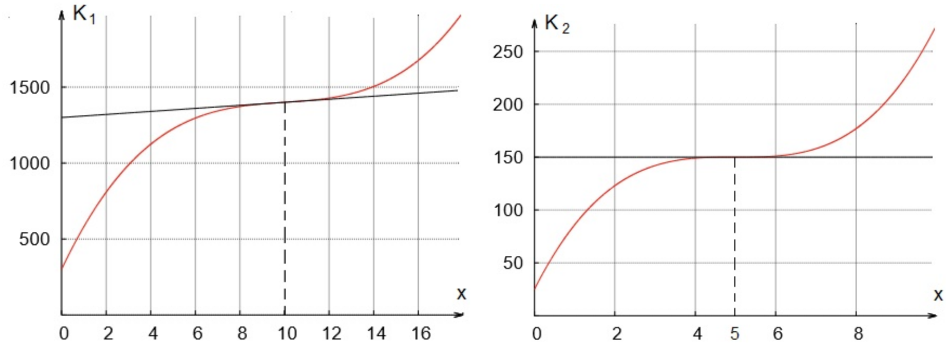
Aufgabe 11.2
Gegeben sind zwei ertragsgesetzliche Kostenfunktionen mit:
$K_1(x) = x^3 - 30x^2 + 310x + 300$ *und* $K_2(x) = x^3 - 15x^2 + 75x + 25$.

a) Bestimmen Sie das Minimum der Grenzkosten von $K_1(x)$ *und* $K_2(x)$.

b) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

Für $K_1(x)$ erhalten wir aus der Gleichung $K_1''(x) = 0$ die Lösung $x_1 = 10$. $K_1''(x)$ besitzt in einer Umgebung von x_1 einen VZW von $- \rightarrow +$, folglich liegt für $K_1'(10) = 10$ ein lokales Minimum vor, das gleichzeitig global ist. Die geringste Kostenzunahme für $K_1(x)$ fällt bei einer Steigerung der Produktion von 10 ME auf 11 ME an und beträgt ca. 10 $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$. Für $K_2(x)$ ergibt sich analog die Lösung $x_2 = 5$ mit $K_2'(5) = 0$. Die geringste Kostenzunahme findet bei einer Ausweitung der Produktion von 5 ME auf 6 ME statt und beträgt ca. 0 $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$. Es ist zu betonen, dass $K_2'(5)$ eine Näherung darstellt. Die genaue Änderung ist positiv und beträgt $K_2(6) - K_2(5) = 1$. Abbildung 11.2 (a) zeigt, dass der Graph von $K_1(x)$ an der Stelle $x_1 = 10$ eine positive Tangentensteigung besitzt. Abbildung 11.2 (b) veranschaulicht, dass die Tangente an den Graphen von $K_2(x)$ an der Stelle $x_2 = 5$ parallel zur x–Achse ist.

[52] Bei der Bearbeitung der Aufgabe machen Schüler oft den Fehler, dass sie nach einer lokalen Extremstelle der Kostenfunktion suchen. Dies ist jedoch aufgrund des ökonomischen Verlaufs von Kostenfunktionen nicht sinnvoll, da Kosten (streng) monoton ansteigen.



(a) (b)

Abbildung 11.2: Graph einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion mit (a) einem Wendepunkt ohne waagrechte Tangente und (b) einem Sattelpunkt

Die Aufgabe 11.2 führt auf die Definition eines Sattelpunktes. Für diesen gilt:

> Der Wendepunkt $W(x_W|f(x_W))$ einer Funktion f heißt **Sattelpunkt**, wenn zusätzlich gilt:
> $$f'(x_W) = 0.$$

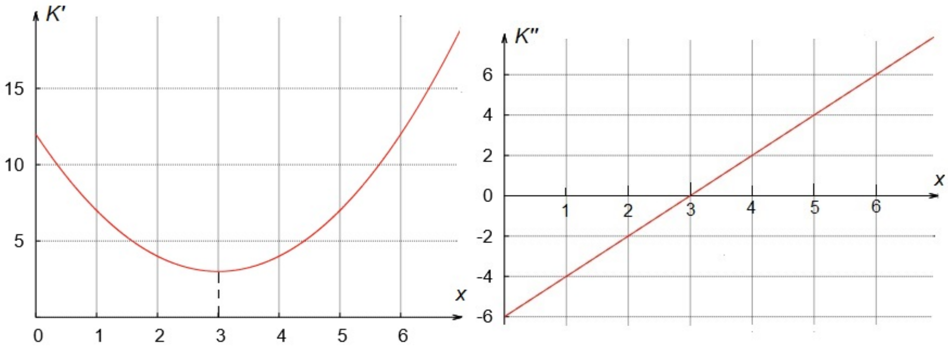
Anschließend bietet sich eine Aufgabe zum vorstellungsorientierten Arbeiten an.

Aufgabe 11.3
Gegeben sei eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. An der Stelle $x_0 = 3$ liege das Minimum der Grenzkosten. Skizzieren Sie die Graphen einer Grenzfunktion K' sowie von K''.

Für eine streng monoton steigende Kostenfunktion, sind die Grenzkosten positiv[53]. Aufgrund fallender Grenzkosten für $x < 3$ ist $K''(x)$ negativ. Für $x > 3$ steigen die Grenzkosten, wodurch $K''(x)$ positiv ist. Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist von der Form $K(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Folglich ist der Funktionsterm von $K'(x)$ eine quadratische Funktion und von $K''(x)$ eine lineare Funktion. Abbildung 11.3 zeigt eine mögliche Darstellung[54].

[53] Für eine monoton steigende Kostenfunktion reicht es aus zu fordern, dass die Grenzkosten nicht negativ sind.

[54] In der Literatur findet man oft den Graphen einer Kostenfunktion und deren Ableitung in einem Schaubild. Dies ist zur besseren Veranschaulichung der Stelle des Wendepunktes von K und dem Minimum von K' durchaus geeignet. Wir bevorzugen eine separate Darstellung, da K, K' und K'' unterschiedliche Einheiten besitzen. Z. B. werden Kosten in GE, Grenzkosten in $\frac{\text{GE}}{\text{ME}}$ gemessen.



(a) (b)

Abbildung 11.3: Graph einer (a) Grenzkostenfunktion und (b) der Ableitung einer Grenzkostenfunktion

An dieser Stelle bietet es sich an die Koeffizienten ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen näher zu untersuchen. Wir beginnen mit der Aufgabe 11.4, in der lediglich ein Parameter zu bestimmen ist.

Aufgabe 11.4
Gegeben sei die folgende Funktionenschar K_a:

$$K_a(x) = x^3 + ax^2 + 27x + 45.$$

Bestimmen Sie alle Werte von a, für die K_a eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist.

Der Parameter a ist derart anzugeben, dass der Graph von K im 1. Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems einen Wendepunkt aber keine Hoch- und Tiefpunkte besitzt. Betrachten wir zuerst die Monotonie von K_a. Die Gleichung $K_a'(x) = 0$ führt mittels einer quadratischen Lösungsformel auf:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - 9}.$$

Die Gleichung $K_a'(x) = 0$ besitzt für $a_{1,2} = \pm 9$ jeweils eine Lösung und für $a \in (-9; 9)$ keine Lösung. Folglich ist $K_a(x)$ für $a \in [-9; 9]$ monoton steigend. Die Wendestelle von $K_a(x)$ ist für $K_a''(x_W) = 0$ bei $x_W = -\frac{a}{3}$ zu finden. Für $a \geq 0$ ist $x_W \leq 0$. Damit ist $K_a(x)$ für $-9 \leq a < 0$ eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Im Anschluss an diese Aufgabe bietet es sich an, alle Parameter einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion zu untersuchen.

Aufgabe 11.5
Gegeben sei die Funktion $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Bestimmen Sie die Parameter a, b, c und d derart, dass es sich bei $K(x)$ um eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion handelt.

Es ergeben sich folgende Überlegungen: Die Fixkosten sind größer oder gleich null, folglich ist $d \geq 0$. Die Kosten sind für zunehmende Mengen monoton steigend[55]. Daraus folgt:

$$K'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c \geq 0.$$

Speziell für $x_0 = 0$ ist $K'(0) = c$ und somit $c \geq 0$ zu wählen. Im ersten Quadranten eines kartesischen Koordinatensystems besitzt $K(x)$ einen Wendepunkt. Bei diesem geht der Graph von $K(x)$ von einer Rechts- in eine Linkskrümmung über. Hier liegt das Minimum der Grenzkosten. Die Wendestelle x_W erhalten wir mittels zweiter Ableitung:

$$K''(x_W) = 0 \Leftrightarrow 6ax_W + 2b = 0 \Leftrightarrow x_W = -\frac{b}{3a}.$$

Aus $K'''(x) = 6a > 0$ (Minimum von K') folgt $a > 0$. Folglich ist $b < 0$ zu wählen, da x_W nur positive Werte annehmen kann. Da $K(x)$ monoton steigend ist, existieren keine Extremwerte. Ansonsten fallen die Kosten in einem Intervall, was ökonomisch nicht sinnvoll ist. Wir betrachten die Gleichung $K'(x) = 0$:

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

Diese Gleichung darf keine zwei Lösungen besitzen. Mithilfe einer quadratischen Lösungsformel erhalten wir:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a}}.$$

Damit diese Gleichung höchstens eine Lösung besitzt, muss die Diskriminante kleiner oder gleich null sein. Für $a > 0$ gilt[56]:

$$\frac{b^2}{9a^2} - \frac{c}{3a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{9a^2} \leq \frac{c}{3a} \Leftrightarrow 3ab^2 \leq 9a^2c \Leftrightarrow b^2 \leq 3ac.$$

Für $b^2 = 3ac$ besitzt der Graph der Kostenfunktion einen Sattelpunkt. Ist $b^2 > 3ac$, dann besitzt die Funktion $K(x)$ für $x > 0$ lokale Extremstellen und ist aufgrund der Monotonie keine Kostenfunktion. Wir halten fest:

Für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion der Form

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

gilt: $a > 0$, $b < 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, $b^2 \leq 3ac$.

[55] Wir lassen die Existenz eines Sattelpunktes zu.

[56] Die quadratische Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$ führt zur gleichen Aussage.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Analyse ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen mittels zweiter Ableitung" ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Sie...

- ... bestimmen und interpretieren das Minimum der Grenzkosten.
- ... identifizieren am Beispiel einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion eine Extremstelle der Ableitung als Wendestelle der Funktion.
- ... bestimmen die Koeffizienten einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion mittels erster und zweiter Ableitung.

11.2.2 Die natürliche Exponentialfunktion als ökonomische Funktion

Zur Beschreibung ökonomischer Zusammenhänge eignen sich neben ganzrationalen Funktionen auch Exponentialfunktionen. Zum Einstieg dient die Aufgabe 11.6, für die wir zur Bestimmung der Regressionsmodelle die Verwendung eines Rechners[57] mit entsprechender Funktion empfehlen.

Aufgabe 11.6
Ein Busunternehmen reserviere pro Wochenende 400 Plätze für eine Fahrt in die Berge. In der Tabelle 11.1 sind von den letzten drei Wochenenden jeweils der Preis pro Person und die Anzahl der zahlenden Mitfahrer aufgelistet. Modellieren Sie mittels Regression eine lineare, quadratische und exponentielle Nachfragefunktion $x(p)$. Nennen Sie Gründe, die für eine exponentielle Nachfragefunktion sprechen.

Woche	Preis in € pro Fahrkarte	Anzahl Reisender
1	20	125
2	30	50
3	60	6

Tabelle 11.1: Anzahl der Reisenden in Abhängigkeit vom Fahrkartenpreis

Abbildung 11.4 (a) zeigt die Graphen der linearen und quadratischen Regression. Für die lineare Nachfragefunktion gilt (gerundet auf zwei Nachkommastellen):

$$x_1(p) = -2,63p + 165,65.$$

Der Graph von x_1 liegt anschaulich am weitesten von den Punkten entfernt und liefert für Preise über ca. €63 pro Fahrkarte keine sinnvollen Werte

[57] Alternativ können die Berechnungen auch mit einem Computerprogramm wie Excel durchgeführt werden.

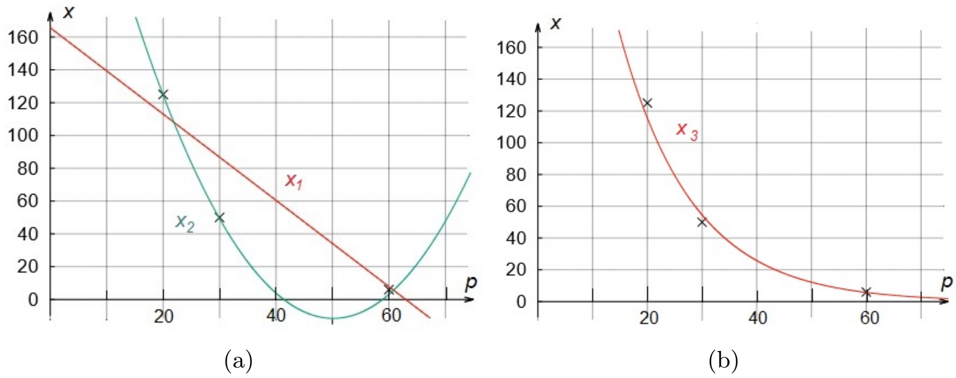


Abbildung 11.4: Graphen von (a) linearer und quadratischer sowie (b) exponentieller Regression zur Fahrkartenaufgabe

mehr. Der Funktionsterm der quadratischen Regression lautet (gerundet auf zwei Nachkommastellen):

$$x_2(p) = 0,15p^2 - 15,04p + 365,50.$$

Der Graph von x_2 approximiert die Punkte am Besten, besitzt jedoch keinen geeigneten ökonomischen Verlauf: Er befindet sich zeitweise unter der Abszissenachse, so dass zum Beispiel für einen Preis €50 pro Fahrkarte die Anzahl der Reisenden negativ wäre. Nach dem Minimum steigen die Funktionswerte an, was unterstellt, dass für einen höheren Preis mehr Buchungen eingehen. Für die exponentielle Nachfragefunktion erhalten wir (gerundet auf zwei Nachkommastellen):

$$x_3(p) = 517,95e^{-0,08p}.$$

Diese besitzt die zuvor genannten Nachteile nicht, wie der Graph von x_3 in Abbildung 11.4 (b) zeigt. Somit ist es ökonomisch sinnvoll, das Modell einer exponentiellen Nachfragefunktion zu verwenden. In Aufgabe 11.7 ist ein Erlösmaximum im Umfeld der natürlichen Exponentialfunktion zu bestimmen. Zur Ableitung sollten den Schülern die Ketten- sowie Produktregel bekannt sein. Die Verwendung eines Taschenrechners ist nicht nötig, sofern mit dem Näherungswert $e \approx 3$ gearbeitet wird.

Aufgabe 11.7

Ein monopolistisches Unternehmen setze sein Produkt mit der Preis-Absatz-Funktion $p(x) = 10 \cdot e^{-0,1x}$ ab (Menge x in Stück, Preis p in € pro Stück).

a) *Zeigen Sie, dass die Grenzerlösfunktion $E'(x) = e^{-0,1x} \cdot (10 - x)$ lautet.*

b) *Bestimmen und interpretieren Sie für $x_1 = 0$ den Grenzerlös.*

c) *Für welche Menge wird der Erlös maximal? Wie hoch ist dieser?*

Der Erlös berechnet sich als Produkt aus Preis und Menge. Folglich gilt für die Erlösfunktion:

$$E(x) = (10 \cdot e^{-0{,}1x}) \cdot x = 10x \cdot e^{-0{,}1x}.$$

Mittels Produkt- und Kettenregel erhalten wir die angegebene Grenzerlösfunktion. Für die Teilaufgabe b) ist $E'(0) = 10$. Das bedeutet, dass für eine Absatzsteigerung von 0 auf 1 Stück der Erlös (näherungsweise) um ca. €10 steigt. Aus der notwendigen Bedingung für eine lokale Extremstelle erhalten wir die folgende Gleichung:

$$e^{-0{,}1x} \cdot (10 - x) = 0.$$

Der erste Faktor ist für $x \in \mathbb{R}$ positiv, daher liegt die einzige Lösung bei $x_1 = 10$. Mit $E'(9) = e^{-0{,}9} > 0$ und $E'(11) = e^{-1{,}1} \cdot (-1) < 0$ erhalten wir für $E'(x)$ in einer Umgebung von x_2 einen VZW von $+ \to -$. Folglich liegt an der Stelle x_1 ein lokales Maximum vor. Mit $E(10) = 100 \cdot e^{-1} \approx \frac{100}{3}$ gilt: Beim Absatz von 10 Stücken erzielt das Unternehmen den größten Erlös in Höhe von ca. €33,33.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Die natürliche Exponentialfunktion als ökonomische Funktion“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... erkennen den Nutzen der natürlichen Exponentialfunktion zur Beschreibung ökonomischer Sachverhalte.
- ... unterscheiden zwischen linearem, quadratischem und exponentiellem Wachstum.
- ... bestimmen das Erlösmaximum beim Vorliegen einer exponentiellen Preis-Absatz-Funktion.

11.2.3 Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung

In diesem Abschnitt bieten wir Aufgaben an, die die Inhalte aus dem Basismodul der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen II“ wiederholen und vertiefen. Zunächst greifen wir in Aufgabe 11.8 die Parameter einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion auf.

Aufgabe 11.8
Bestimmen Sie einen Funktionsterm K einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, für die an der Stelle $x_0 = 8$ die Grenzkosten minimal werden.

Wir skizzieren einen möglichen Lösungsweg. Aus $K''(x) = 0$ resultiert die Gleichung:

$$6ax + 2b = 0.$$

Einsetzen von $x_0 = 8$ führt auf:

$$48a + 2b = 0.$$

Für $a > 0$ und $b < 0$ stellt z. B. $a = 0,5$ und $b = -12$ eine Lösung der Gleichung dar. Aus $b^2 \leq 3ac$ wählen wir z. B. $c = 100$. Für Fixkosten in Höhe von 50 GE erhalten wir folgende ertragsgesetzliche Kostenfunktion:

$$K(x) = 0,5x^3 - 12x^2 + 100x + 50.$$

Aufgabe 11.9 greift die Interpretation ökonomischer Zusammenhänge anhand der Graphen von Grenzfunktionen auf.

Aufgabe 11.9
Abbildung 11.5 zeigt die Graphen einer Grenzerlösfunktion E' und einer Grenzkostenfunktion K' in Abhängigkeit von der Menge x (E' und K' in € pro Stück, x in Stück). Erläutern Sie die Bedeutung der Punkte A, B und C im vorgegebenen Ausschnitt.

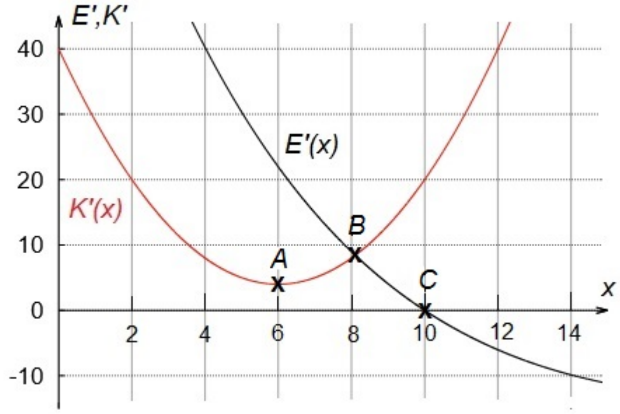


Abbildung 11.5: Schaubild einer Grenzerlös- und Grenzkostenfunktion

In Teilaufgabe a) ist im Punkt A das Minimum der Grenzkosten abzulesen. Eine Steigerung der Produktion von $x_1 \approx 6$ um ein Stück führt auf die kleinste Kostenänderung von etwa €4 pro Stück. In Punkt B schneiden sich die Graphen von $E'(x)$ und $K'(x)$. Die Gleichung $E'(x) = K'(x)$ ist die notwendige Bedingung zur Bestimmung des Gewinnmaximums, das an der Stelle $x_G \approx 8$ zu finden ist. Für $x < 8$ ist $G'(x) = E'(x) - K'(x) > 0$ und für $x > 8$ ist $G'(x) = E'(x) - K'(x) < 0$, somit ist $x_G \approx 8$ die gewinnmaximale Menge. Über den maximalen Gewinn kann anhand der Graphen von $E'(x)$

und $K'(x)$ keine Aussage gemacht werden. In Punkt C schneidet der Graph der Grenzerlösfunktion die x–Achse. Somit ist für $x_2 \approx 10$ der Grenzerlös gleich null. Da $E'(x)$ in einer Umgebebung von x_2 einen Vorzeichenwechsel von $+ \to -$ besitzt, liegt hier das Erlösmaximum vor. Aufgabe 11.10 behandelt die Analyse einer exponentiellen Nachfragefunktion. Wir empfehlen die Verwendung eines Taschenrechners.

Aufgabe 11.10

Ein monopolistisches Unternehmen sehe sich der folgenden Nachfragefunktion gegenüber (x: abgesetzte Menge in Stück; p: Preis in € pro Stück):

$$x(p) = 72 \cdot e^{-0,1p}$$

a) *Geben Sie für einen Preis in Höhe von €6 pro Stück die abgesetzte Menge an.*

b) *Bestimmen Sie den Preis pro Stück zum Absatz von zwölf Stücken.*

c) *Bei welchem Preis führt eine Erhöhung um €1 pro Stück auf einen Rückgang der Nachfrage von 0,20 Stück? Berechnen Sie den Wert genau und näherungsweise mittels erster Ableitung.*

Die Lösung von Teilaufgabe a) lautet $x_1 \approx 39,51$. Für einen Preis von €6 pro Stück verkauft das Unternehmen ungefähr 40 Stück. Teilaufgabe b) führt auf folgende Gleichung:

$$12 = 72 \cdot e^{-0,1p}.$$

Diese ist nach p aufzulösen. Wie erhalten $p_1 \approx 17,918$, d. h. bei einem Stückpreis von €17,92 liegt der Absatz bei zwölf Stücken. Die genaue Lösung von Teilaufgabe c) resultiert aus folgender Gleichung:

$$x(p+1) - x(p) = -0,2$$

Da es sich um einen Absatzrückgang handelt, ist auf der rechten Seite der Gleichung das Vorzeichen zu beachten. Die Gleichung besitzt die Lösung $p_2 \approx 35,34$. Erhöht das Unternehmen den Stückpreis von €35,34 um einen Euro, geht der Absatz um $0,2$ Stück zurück. Über die Ableitung der Nachfragefunktion erhalten wir einen Näherungswert für den Absatzrückgang. Die Gleichung $x'(p) = -0,2$ liefert den Wert $p_3 \approx 35,84$, der vom genauen Wert um ca. 0,50 abweicht.

Lehrziele:

Für den Abschnitt „Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

– ... vertiefen die Erkenntnisse aus der Analyse von Parametern einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

– ... interpretieren die Graphen von Grenzfunktionen.

– ... untersuchen eine exponentielle Nachfragefunktion mittels erster Ableitung.

11.3 Die Ergänzungsmodule

11.3.1 Analyse von Elastizitätsfunktionen (GTR)

In diesem Abschnitt analysieren wir Elastizitätsfunktionen, die in der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“ im Ergänzungsmodul „Preis-Elastizität der Nachfrage“ zu finden sind. Zur Verringerung des Rechenaufwands und zum Zeichnen von Funktionsgraphen empfehlen wir die Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) oder eines Computerprogramms. Zunächst bietet es sich an, die wichtigsten Begriffe und Zusammenhänge in diesem Umfeld zu wiederholen. Die Elastizitätsfunktion einer Funktion f berechnet sich für $f(x) \neq 0$ zu:

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x.$$

Im Umfeld der Elastizität ist die Durchschnittsfunktion von Bedeutung. Für diese gilt mit $x \neq 0$:

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Neben der Elastizität einer Funktion lässt sich die Elastizität ihrer Ableitungsfunktion untersuchen. Obwohl dies in der Literatur zur Wirtschaftsmathematik nicht thematisiert wird, ergeben sich interessante mathematische Zusammenhänge. Als Einstieg bietet sich Aufgabe 11.11 an.

Aufgabe 11.11
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 8x^2 + 24x + 50$.

a) *Zeichnen Sie für $0 \leq x \leq 20$ den Graphen von $\varepsilon_f(x)$.*

b) *Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von $\varepsilon_f(x)$ mit $(\varepsilon_f(x))' = 0$. Geben Sie die zugehörigen Extremwerte an.*

c) *Zeichnen Sie in das bestehende Schaubild den Graphen von $\varepsilon_{f'}(x)$ ein.*

d) *Bestimmen Sie die Funktionswerte $\varepsilon_{f'}(x)$ an den Extremstellen von $\varepsilon_f(x)$ aus Aufgabe b). Vergleichen Sie die Werte von $\varepsilon_f(x)$ und $\varepsilon_{f'}(x)$ an diesen Stellen.*

Abbildung 11.6 zeigt die Graphen der Elastizitätsfunktionen von Funktion und Ableitung. Die Elastizitätsfunktion von f besitzt in $0 \leq x \leq 20$ drei lokale Extremstellen:

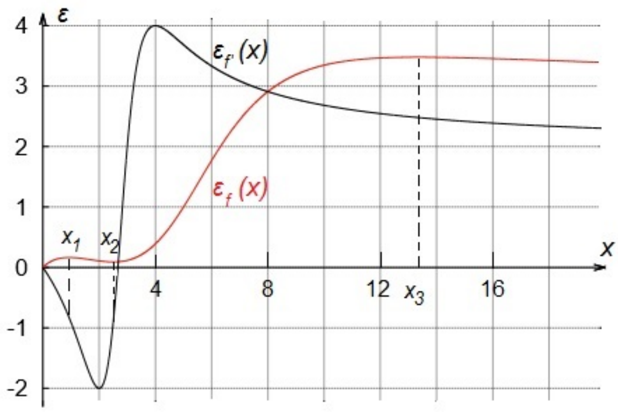


Abbildung 11.6: Graphen der Elastizitätsfunktionen von f und f'

- $x_1 \approx 0,94$ mit $y_1 \approx 0,16$.
- $x_2 \approx 2,50$ mit $y_2 \approx 0,09$.
- $x_3 \approx 13,36$ mit $y_3 \approx 3,48$.

Das lokale Maximum $M(x_1|y_1)$ der Elastizitätsfunktion von f liefert die Information, dass eine 1%-ige Erhöhung von $x_1 \approx 0,94$ eine in dieser Umgebung größte relative Funktionswertänderung von ca. $0,16\%$ nach sich zieht. Analog sind die weiteren lokalen Extrema zu interpretieren. Anschließend ist die Elastizitätsfunktion von f' zu betrachten. Es zeigt sich, dass der Elastizitätswert von f' in den Stellen mit waagrechter Tangente von $\varepsilon_f(x)$ um eins geringer ausfällt, als der von $\varepsilon_f(x)$. Beispielhaft sei hier der Elastizitätswert von f' mit $\varepsilon_{f'}(13,36) \approx 2,48$ aufgeführt. Wir halten fest:

Es sei die Funktion f im Intervall $[a;b]$ definiert und differenzierbar. Für ein $x_0 \in [a;b]$ gelte weiterhin $(\varepsilon_f(x_0))' = 0$. Dann gilt:

$$\varepsilon_f(x_0) = \varepsilon_{f'}(x_0) + 1.$$

Beweis. Wir setzen voraus, dass $\varepsilon_f(x)$ differenzierbar ist. Die Definition der Elastizität liefert für $f(x) \neq 0$ und $x \neq 0$:

$$(\varepsilon_f(x) = 0)' \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{\overline{f}(x)}\right)' = 0.$$

Der letzte Schritt erfolgt aus der Definition einer Durchschnittsfunktion. Mittels Quotientenregel folgt für diesen Quotienten:

$$\left(\frac{f'(x)}{\overline{f}(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot \overline{f}(x) - f'(x) \cdot \overline{f}'(x)}{\left(\overline{f}(x)\right)^2} = 0.$$

Mit einigen elementaren Umformungen führt die vorherige Gleichung auf:

$$f''(x) \cdot \overline{f}(x) = f'(x) \cdot \overline{f}'(x). \tag{11.1}$$

Für den Term $\overline{f}'(x)$ gilt nach der Definition einer Durchschnittsfunktion:

$$\overline{f}'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}.$$

Dies setzen wir in Gleichung (11.1) ein und verwenden wiederholt die Definition einer Durchschnittsfunktion.

$$f''(x) \cdot \frac{f(x)}{x} = f'(x) \cdot \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} - \frac{f(x)}{f(x)}.$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht per Definition die Elastizität der Grenzfunktion f' und auf der rechten Seite die Elastizität der Funktion f. Wir erhalten:

$$\varepsilon_{f'}(x) = \varepsilon_f(x) - 1 \Leftrightarrow \varepsilon_{f'}(x) + 1 = \varepsilon_f(x).$$

Sei x_0 die Stelle, an der die Ableitung der Elastizitätsfunktion verschwindet. Dann muss gelten:

$$(\varepsilon_f(x_0))' = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{f'}(x_0) + 1 = \varepsilon_f(x_0).$$

□

Damit haben wir eine Beziehung zwischen den Elastizitäten von f und f' gefunden. Wir greifen den Zusammenhang zwischen den Elastizitäten einer Funktion sowie ihrer Durchschnittsfunktion aus Abschnitt 10.3.3 auf. Dieser besagt, dass die Elastizität einer Funktion immer um eins größer ist als die Elastizität der Durchschnittsfunktion. Daraus resultiert:

In den Extremstellen der Elastizitätsfunktion einer Funktion f gilt: Die Elastizitäten der Ableitung f' und der Durchschnittsfunktion $\overline{f}$ sind identisch und gleichzeitig um eins kleiner als die Elastizität der Funktion f.

Die gefundenen Zusammenhänge im Umfeld von Elastizitätsfunktionen sind jedoch nicht ökonomisch interpretierbar, wie wir in Abschnitt 2.2.4 erläutert haben. Sie zeigen jedoch, wie aus einer Anwendung in einem ökonomischen Kontext ein innermathematisches Thema entsteht.

Lehrziele:

Für den Abschnitt „Elastizität als relative Funktionsänderung“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... finden mathematische Zusammenhänge im Bereich der Elastizitätsfunktionen heraus.
- ... erfassen Elastizitätsfunktionen als innermathematisches Thema mit eigenen Zusammenhängen.

11.3.2 Approximation von Funktionen

In Abschnitt 10.3.1 haben wir die Grundvorstellung einer Tangente als lokale Linearisierung an einen Funktionsgraphen eingeführt. Die Idee der Approximation lässt sich durch nicht lineare Funktionen wie Polynomfunktionen weiterführen. Für diese gilt:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$$

heißt Polynomfunktion mit den Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist der Grad von f.

Eine Tangente stellt eine Polynomfunktion vom Grad 1 dar (synonym: lineares Polynom). Diese ist an der Stelle a mit dem Funktionswert und der ersten Ableitung der Funktion identisch. Polynomfunktionen höheren Grades approximieren eine Funktion lokal exakter als eine Tangente, da für eine Polynomfunktion etwa vom Grad 2 (quadratisches Polynom) zusätzlich die zweite Ableitung an der Stelle a identisch ist. Eine Polynomfunktion vom Grad 3 (kubisches Polynom), die im Funktionswert und den ersten drei Ableitungen mit einer Funktion an einer Stelle übereinstimmt, stellt eine noch genauere lokale Approximation dar. Dies kann mit Aufgabe 11.12 geübt werden.

Aufgabe 11.12
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + 5x^2 - x + 1$.

a) *Bestimmen Sie Polynomfunktionen vom Grad* $1, 2$ *und* 3, *die mit* f *an der Stelle* $a = 0$ *im Funktionswert und im Wert der ersten Ableitungen identisch sind.*

b) *Skizzieren Sie die Graphen von* f, t_1 *und* t_2 *in ein Schaubild.*

Das Polynom vom Grad 1 besitzt folgende Form:

$$t_1(x) = a_0 + a_1x.$$

Aus $t_1(0) = f(0)$ und $t_1'(0) = f'(0)$ erhalten wir das LGS:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & + & a_1 \cdot 0 & = & 1 \\ & & a_1 & = & -1 \end{array}$$

Das LGS besitzt die Lösungen $a_0 = 1$ sowie $a_1 = -1$. Daraus resultiert das lineare Polynom $t_1(x) = 1 - x$, das der Tangente an $f(x)$ in $a = 0$ entspricht. Ein Polynom vom Grad 2 ist von der Form:

$$t_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

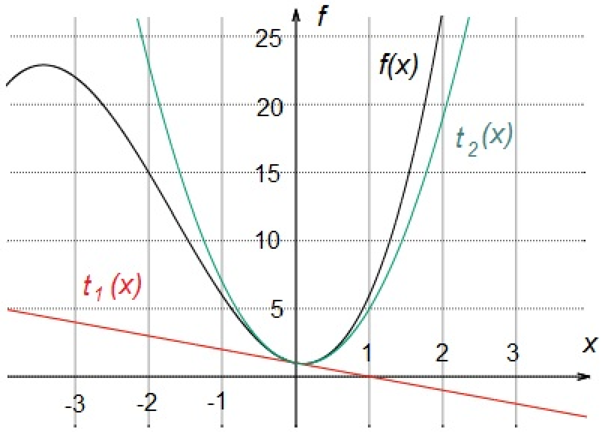


Abbildung 11.7: Approximation einer Funktion an der Stelle $a = 0$ durch Polynome vom Grad 1 und 2

Aus $t_2(0) = f(0)$, $t_2'(0) = f'(0)$ und $t_2''(0) = f''(0)$ folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & a_1 \cdot 0 & + & a_2 \cdot 0 & = & 1 \\ & & a_1 & + & 2a_2 \cdot 0 & = & -1 \\ & & & & 2a_2 & = & 10. \end{array}$$

Das LGS besitzt die Lösungen $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ sowie $a_2 = 5$. Folglich lautet das quadratische Polynom $t_2(x) = 1 - x + 5x^2$ und stimmt mit f bis zum Grad 2 überein. Wir vermuten, dass das kubische Polynom $t_3(x)$ mit $f(x)$ identisch ist, was sich auch rechnerisch bestätigt. Abbildung 11.7 zeigt die Approximation des Graphen von f an der Stelle $a = 0$ durch die Polynome $t_1(x)$ sowie $t_2(x)$. Es ist zu erkennen, dass der Graph von $t_2(x)$ sowohl in der Steigung als auch in der Krümmung mit dem Graphen von $f(x)$ übereinstimmt. Daraus resultiert auch anschaulich eine genauere lokale Approximation von $f(x)$ im Vergleich zu $t_1(x)$. Mit Aufgabe 11.13 kann eine Verallgemeinerung zur Approximation von Funktionen an der Stelle $a = 0$ erfolgen.

Aufgabe 11.13
Gegeben sei eine beliebige Funktion $f(x)$.

a) *Bestimmen Sie lineare, quadratische und kubische Polynomfunktionen, die mit $f(x)$ an der Stelle $a = 0$ im Funktionswert und im Wert der Ableitungen übereinstimmen.*

b) *Geben Sie das Näherungspolynom vom Grad n an.*

Das lineare Polynom stimmt mit f an der Stelle $a = 0$ in Funktionswert und der ersten Ableitung überein und lautet:

$$t_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x.$$

Für das quadratische Polynom mit $t_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, das mit $f(x)$ im Funktionswert und den ersten beiden Ableitungen identisch ist, erhalten wir aus $t_2(0) = f(0)$, $t_2'(0) = f'(0)$ und $t_2''(0) = f''(0)$ das LGS:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & a_1 \cdot 0 & + & a_2 \cdot 0 & = & f(0) \\ & & a_1 & + & 2a_2 \cdot 0 & = & f'(0) \\ & & & & 2a_2 & = & f''(0). \end{array}$$

Das LGS besitzt die Lösungen $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$ sowie $a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$. Folglich lautet die allgemeine quadratische Polynomfunktion:

$$t_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot f''(0) \cdot x^2.$$

Analog gilt für das kubische Polynom:

$$t_3(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot f'''(0) \cdot x^3.$$

Setzen die Schüler diese Vorgehensweise fort, erhalten sie für $a_4 = \frac{1}{24} \cdot f''''(0)$ bzw. $a_5 = \frac{1}{120} \cdot f'''''(0)$. Allgemein ist für $i = 1, 2, 3, ..., n$:

$$a_i = \frac{1}{i!} \cdot f^{(i)}(0).$$

Dabei ist $f^{(i)}$ die i-te Ableitung von f. Mit $i! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot i$ und $0! = 1$ gilt:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Das Näherungspolynom

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

heißt Taylorpolynom n-ten Grades zur Funktion f an der Stelle $a = 0$.

Mit Aufgabe 11.14 können die Schüler das Aufstellen sowie die Verwendung eines Taylorpolynoms an der Stelle $a = 0$ einüben.

Aufgabe 11.14
Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x$.

a) *Bestimmen Sie $T_2(x)$ zur Funktion f an der Stelle $a = 0$.*

b) *Nähern Sie $f(0,1)$ mit dem Taylorpolynom vom Grad 2 an.*

Mit $(e^x)' = e^x$ gilt für das Taylorpolynom vom Grad 2 von f für $a = 0$:

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

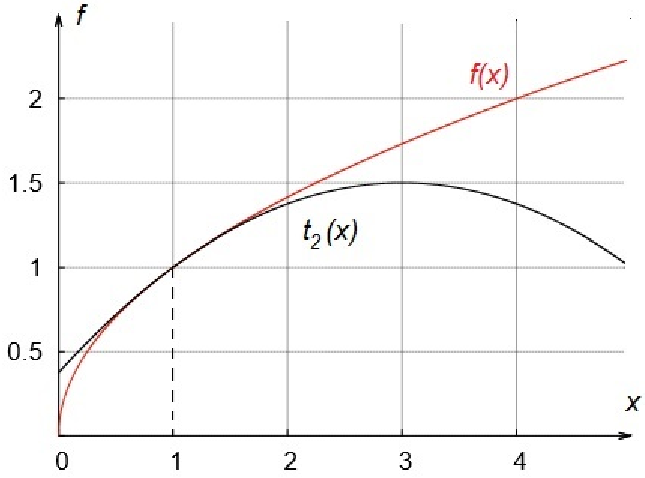


Abbildung 11.8: Quadratische Approximation des Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ in $P(1|f(1))$

Aus $T_2(x)$ folgt $e^{0,1} \approx 1,105$, was mit den ersten drei Nachkommastellen von $e^{0,1}$ übereinstimmt. Aus der Kenntnis von Taylor-Polynomen an der Stelle $a = 0$, ist das Verfahren zur Näherung auf eine beliebige Stelle zu erweitern. Aufgabe 11.15 führt zu dieser Thematik hin.

Aufgabe 11.15
Ein quadratisches Polynom t_2 soll die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $a = 1$ annähern. Bestimmen Sie die Gleichung von t_2, die mit f an der Stelle $a = 1$ mit $f(1)$, $f'(1)$ und $f''(1)$ übereinstimmt. Skizzieren Sie anschließend die Graphen von f und t_2.

Die Ableitungen von f lauten $f'(x) = 0,5 \cdot x^{-0,5}$ und $f''(x) = -0,25 \cdot x^{-1,5}$. Aus dem quadratischen Näherungspolynom mit $t_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ folgt mit $t_2(1) = f(1)$, $t_2'(1) = f'(1)$ und $t_2''(1) = f''(1)$ für das LGS:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & a_1 \cdot 1 & + & a_2 \cdot 1 & = & 1 \\ & & a_1 & + & 2a_2 \cdot 1 & = & 0,5 \\ & & & & 2a_2 & = & -0,25. \end{array}$$

Das LGS besitzt die Lösungen $a_2 = -0,125$, $a_1 = 0,75$ sowie $a_0 = 0,375$. Daraus resultiert das quadratische Näherungspolynom:

$$t_2(x) = 0,375 + 0,75x - 0,125x^2.$$

Abbildung 11.8 zeigt die Graphen von $f(x)$ und $t_2(x)$. Die Funktionen stimmen an der Stelle $a = 1$ im Funktionswert und den ersten beiden Ableitungen überein. Es bleibt die Bestimmung der Näherungsfunktion an einer beliebigen Stelle zu verallgemeinern. Dazu dient Aufgabe 11.16.

Aufgabe 11.16
Gegeben sei eine Funktion $f(x)$.

a) Bestimmen Sie lineare, quadratische und kubische Polynomfunktionen, die mit $f(x)$ an einer beliebigen Stelle a im Funktionswert und im Wert der Ableitungen übereinstimmen. Setzten Sie dafür:

$$t_1(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-a)$$
$$t_2(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-a) + a_2 \cdot (x-a)^2$$
$$t_3(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-a) + a_2 \cdot (x-a)^2 + a_3 \cdot (x-a)^3.$$

b) Geben Sie das Näherungspolynom vom Grad n an.

Aus $t_1(a) = f(a)$ sowie $t_1'(a) = f'(a)$ erhalten wir für das lineare Näherungspolynom zur Funktion $f(x)$ an der Stelle a das LGS:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & + & a_1 \cdot (a-a) & = & f(a) \\ & & a_1 & = & f'(a). \end{array}$$

Folglich lautet das lineare Näherungspolynom von $f(x)$ an der Stelle a:

$$t_1(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a).$$

Analoge Überlegungen führen auf das Näherungspolynom vom Grad 2:

$$t_2(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot f''(a) \cdot (x-a).$$

Das Näherungspolynom vom Grad 3 ergibt sich zu:

$$t_3(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} \cdot f''(a) + \frac{1}{6} \cdot f'''(a) \cdot (x-a).$$

Für die Koeffizienten des Näherungspolynoms $t_n(x)$ vom Grad n zur Funktion $f(x)$ an der Stelle a gilt allgemein für $i = 1, 2, 3, ..., n$:

$$a_i = \frac{1}{i!} \cdot f^{(i)}(a) \cdot (x-a)$$

Dies führt uns zu folgender Definition:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in D$. Das Näherungspolynom

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

heißt Taylorpolynom n-ten Grades zur Funktion f an der Stelle a.

Aufgabe 11.17 bezieht sich auf die Näherung eines Funktionswertes an einer beliebigen Stelle mittels Taylorpolynom.

Aufgabe 11.17
Gegeben sei die Funktion $f(x) = ln(x)$.

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 zur Funktion $f(x)$ an der Stelle $a = 1$.

b) Nähern Sie mit dem Taylorpolynom aus Aufgabe a) den Wert von $ln(0,9)$ an.

Mit $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ und $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ gilt für das Taylorpolynom vom Grad 2 an der Stelle $a = 1$:

$$T_2(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1,5.$$

Mit $T_2(x)$ erhalten wir einen Näherungswert für $ln(0,9)$:

$$\ln(0,9) \approx T_2(0,9) = -0,5 \cdot 0,81 + 1,8 - 1,5 = -0,105.$$

Zum Vergleich lautet der mit einem Taschenrechner auf vier Nachkommastellen gerundete Wert von $ln(0,9) \approx -0,1054$.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Approximation von Funktionen“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... entwickeln ausgehend von der lokalen Linearisierung die fundamentale Idee der Approximation weiter.
- ... bestimmen Taylorpolynome mittels höherer Ableitungen.
- ... nutzen Taylorpolynome zur Approximation von Funktionswerten.

11.3.3 Ökonomische Funktionen mit zwei Variablen

In diesem Abschnitt führen wir Funktionen mit zwei Variablen ein. Diese sind folgendermaßen definiert:

Seien x und y reelle Variablen. Wenn jedem Wertepaar (x, y) genau eine reelle Zahl z zugeordnet wird, so bildet diese Zuordnungvorschrift eine Funktion f der zwei unabhängigen Variablen x und y und man schreibt:

$$z = f(x, y).$$

Zunächst gehen wir auf Erlösfunktionen mit zwei Variablen ein, dabei stehen x und y in ökonomischen Fragestellungen meist für die abgesetzten Mengen zweier Güter. Für die Preise verwenden wir im Folgenden die Buchstaben p und q. Da zwei Güter zur Verfügung stehen, berechnet sich der Gesamterlös aus der Summe der jeweiligen Produkte aus Preis und Menge. Aufgabe 11.18 behandelt die Bestimmung des Erlöses eines Polypolisten, der zwei Güter verkauft.

Aufgabe 11.18

Ein polypolistisches Unternehmen verkaufe zwei Produkte A und B. Der Preis für Produkt A liegt bei 4 $\frac{GE}{ME}$ und der Preis von Produkt B ist 7 $\frac{GE}{ME}$. Dabei ist x die Menge, die von Produkt A abgesetzt wird und y die verkaufte Menge von Produkt B.

a) *Bestimmen Sie den Erlös, wenn 20 ME von Produkt A und 10 ME von Produkt B abgesetzt werden.*

b) *Stellen Sie die Erlösfunktion in Abhängigkeit der abgesetzten Mengen auf.*

Der Erlös berechnet sich als Summe der einzelnen Produkte von Preis und Menge zu:

$$E = 4 \cdot 20 + 7 \cdot 10 = 150.$$

Beim Absatz von 20 ME von A und 10 ME von B erzielt das Unternehmen einen Erlös in Höhe von 150 GE. Für die Erlösfunktion gilt:

$$E(x, y) = 4x + 7y.$$

Doch wie berechnet sich der Erlös eines monopolistischen Unternehmens, das zwei Produkte verkauft? Ähnlich zu einem Unternehmen, das nur ein Gut absetzt, liegt für jedes Produkt eine Preis-Absatz-Funktion vor. Dabei können sich deren Preise und verkaufte Mengen gegenseitig beeinflussen, wie Aufgabe 11.19 zeigt.

Aufgabe 11.19

Ein Monopolist biete zwei Produkte an. Es ist p der Preis pro Stück und x die abgesetzte Menge von Produkt A. Weiterhin ist q der Preis pro Stück und y die abgesetzte Menge von Gut B. Die Preis-Absatz-Funktionen des Monopolisten lauten:

$$p(x, y) = 10 - x - 2y; \qquad q(x, y) = 20 - 2x - 3y.$$

a) *Bestimmen Sie die Erlösfunktion in Abhängigkeit der abgesetzten Mengen x und y.*

b) *Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion.*

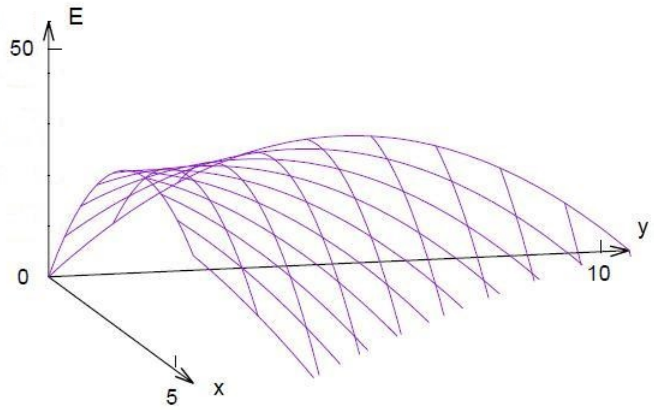


Abbildung 11.9: Graph einer Erlösfunktion mit zwei Variablen eines monopolistischen Anbieters

Der Gesamterlös berechnet sich als Summe der Produkte aus Preis und Menge. Da in diesem Fall Preis-Absatz-Funktionen vorliegen, gilt allgemein:

$$E(x, y) = p(x, y) \cdot x + q(x, y) \cdot y.$$

Wir erhalten für die Erlösfunktion:

$$E(x, y) = (10 - x - 2y) \cdot x + (20 - 2x - 3y) \cdot y = -x^2 - 4xy - 3y^2 + 10x + 20y.$$

Abbildung 11.9 zeigt den Graphen von E, der mit einem dreidimensionalen Funktionsplotter[58] erstellt wurde. Anschließend bietet es sich an, Kosten- und Gewinnfunktion mit einzubeziehen. Dazu dient Aufgabe 11.20.

Aufgabe 11.20
Ein polypolistisches Unternehmen setze x ME von Produkte A zum Preis 5 $\frac{GE}{ME}$ ab und verkauft gleichzeitig y ME von Produkt B zum Preis 8 $\frac{GE}{ME}$. Für Produkt A fallen variable Kosten in Höhe von 4 $\frac{GE}{ME}$ an, für Produkt B liegen diese bei 6 $\frac{GE}{ME}$. Die fixen Kosten belaufen sich auf 10 GE.

a) *Stellen Sie die Kosten- und Gewinnfunktion in Abhängigkeit der abgesetzten Mengen auf.*

b) *Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion mit einem dreidimensionalen Funktionsplotter für $0 \leq x \leq 20$ und $0 \leq y \leq 10$.*

c) *Geben Sie zwei verschiedene Mengenkombinationen an, mit denen das Unternehmen Break-Even ist.*

[58]Diese sind nach Eingabe von „3d online Funktionsplotter“ in einer gängigen Suchmaschine zu finden. Empfehlenswert sind diejenigen Seiten, auf denen die Möglichkeit besteht Definitions- und Wertebereich einzustellen z. B. http://www.livephysics.com/tools/mathematical-tools/online-3-d-function-grapher/

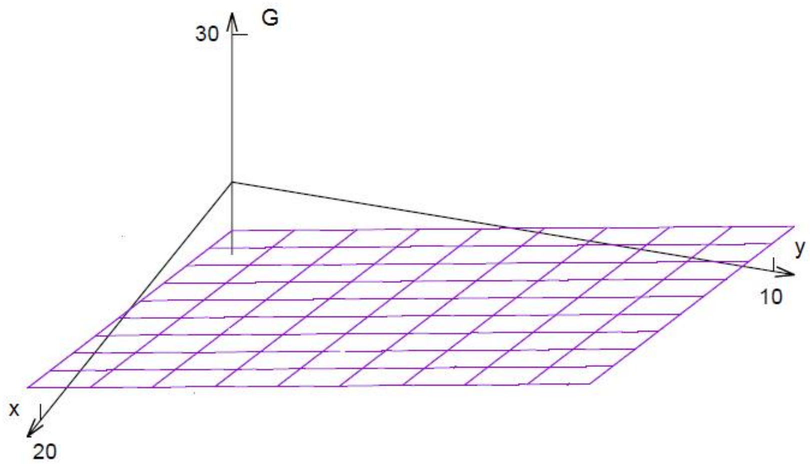


Abbildung 11.10: Graph einer Gewinnfunktion eines polypolistischen Anbieters mit zwei Variablen

Der Gewinn berechnet sich aus der Differenz von Erlös und Kosten. Mit $E(x, y) = 5x + 8y$ und $K(x, y) = 4x + 6y + 10$ lautet die Gewinnfunktion:

$$G(x, y) = E(x, y) - K(x, y) = x + 2y - 10.$$

Abbildung 11.10 zeigt den Graphen der Gewinnfunktion. Für $(x, y) = (4, 3)$ oder $(x, y) = (2, 4)$ ist das Unternehmen Break-Even d. h. Erlös und Kosten decken sich.

Die Aufgaben zeigen, dass wir für ökonomische Funktionen mit zwei Variablen die Zusammenhänge von Funktionen mit einer Variablen weitestgehend beibehalten können. Doch wie gestaltet sich die Untersuchung lokaler Extremstellen von Funktionen mit zwei Variablen mittels Differenzialrechnung? Dazu ist die Grundvorstellung der Ableitung einer Funktion mit einer Variablen mittels lokaler Linearisierung aufzugreifen (vgl. Abschn. 10.2.1). Für den absoluten Fehler an der Stelle (x, y) zwischen einer Funktion f und der linearen Funktion $t(x, y) = f(a, b) + m(x - a) + n(y - b)$, die mit f im Punkt $P(a, b, f(a, b))$ identisch ist, gilt:

$$\begin{aligned} r(x, y) &= f(x, y) - t(x, y) \\ &= f(x, y) - f(a, b) - m(x - a) - n(y - b). \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich zunächst nicht auf einen relativen Fehler zurückführen. Für $x = a$ oder $y = b$ besteht dieser Nachteil nicht. Dies führt zu folgender Definition:

Die Funktion g mit $g(x) := f(x, b)$ heißt partielle Funktion von f in Richtung x durch b.

Analog lässt sich $f(a, y)$ als partielle Funktion von f in Richtung y durch a bezeichnen. Für die lineare Funktion $t(x, y)$ erhalten wir mit $y = b$ die partielle Funktion von t in Richtung x durch b mit:

$$t(x, b) = f(a, b) + m \cdot (x - a).$$

Daraus folgt für den absoluten Fehler der partiellen Funktionen f und t in Richtung x durch b:

$$\begin{aligned} r(x, b) &= f(x, b) - f(a, b) - m \cdot (x - a) \\ &= \left(\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} - m \right) \cdot (x - a). \end{aligned}$$

Mit $x \to a$ strebt $r(x, b)$ gegen Null. Für den relativen Fehler erhalten wir:

$$\frac{r(x, b)}{x - a} = \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} - m.$$

Der relative Fehler strebt gegen Null, wenn gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = m.$$

Dies führt uns auf den Begriff der partiellen Ableitung einer Funktion.

Die Funktion f sei an der Stelle (a, b) definiert. Dann heißt der Grenzwert

$$f_x(a, b) := \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

- sofern dieser existiert - partielle Ableitung von f nach x an der Stelle (a, b). Analog heißt der Grenzwert

$$f_y(a, b) := \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

- sofern dieser existiert - partielle Ableitung von f nach y an der Stelle (a, b).

Zur partiellen Ableitung von f nach x halten wir die Variable y konstant und leiten f nach x ab. Für eine lineare Funktion T, die f lokal am Besten approximiert, gilt:

$$T(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b).$$

Geometrisch handelt es sich bei T um eine Tangentialebene, die eine vorgegebene Funktion f an der Stelle (a, b) berührt und die Steigung f_x in x–Achsenrichtung bzw. f_y in y–Achsenrichtung besitzt. Dazu können die Schüler die Aufgabe 11.21 bearbeiten.

Aufgabe 11.21
Ein monopolistisches Unternehmen setze seine beiden Güter mit der Erlösfunktion $E(x, y) = -x^2 - 2xy - 3y^2 + 40x + 50y$ (x und y in kg) ab.

a) *Stellen Sie mittels der partiellen Ableitungen von E die Gleichung einer linearen Funktion auf, die E an der Stelle $(2, 1)$ approximiert.*

b) *Das Unternehmen interessiert sich für die Höhe des Erlöses beim Absatz von $x_0 = 2,1$ kg und $y_0 = 0,9$ kg. Bestimmen Sie den Erlös für diese beiden Absatzzahlen näherungsweise mittels der in a) aufgestellten linearen Funktion.*

Die partiellen Ableitungen von E nach x sowie y lauten:

$$E_x(x, y) = -2x - 2y + 40 \quad \text{und} \quad E_y(x, y) = -2x - 6y + 50.$$

Für die lineare Funktion T an E an der Stelle $(2, 1)$ gilt:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= E(2, 1) + E_x(2, 1) \cdot (x - 2) + E_y(2, 1) \cdot (y - 1) \\ &= 119 + 34 \cdot (x - 2) + 40 \cdot (y - 1). \end{aligned}$$

Mit T können wir eine Näherung für $x = 2,1$ und $y = 0,9$ angeben mit:

$$E(2,1; 0,9) \approx T(2,1; 0,9) = 118,4.$$

Setzt das Unternehmen 2,1 kg von Produkt A und 0,9 kg von Produkt B ab, erzielt es einen ungefähren Erlös von 118,40 GE. Partielle Ableitungen werden zur Bestimmung von lokalen Extremstellen benötigt. An einer Extremstelle sind die Steigungen der Tangentialebene null, sie verläuft parallel zu xy–Ebene. Es gilt:

Die Funktion f sei partiell differenzierbar und besitzt an der Stelle (a, b) einen lokalen Extremwert, so gelten die notwendigen Bedingungen:

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f_y(a, b) = 0.$$

Eine Stelle (a, b), für die beide partiellen Ableitungen null sind, heißt **stationär**. Wir weisen darauf hin, dass diese Bedingung lediglich eine Aussage über eine extremwertverdächtige Stelle liefert. Ob ein lokales Mininum, ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt, ist zu prüfen. Aufgabe 11.22 greift diese Thematik auf.

Aufgabe 11.22
Ein monopolistisches Unternehmen modelliere den Gewinn beim Absatz seiner zwei Güter x und y mit folgender Gewinnfunktion:

$$G(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + 4x + 5y - 3$$

a) *Bestimmen Sie den stationären Punkt von G.*

b) *Prüfen Sie, ob der in Teilaufgabe a) berechnete Wert den maximalen Gewinn angibt.*

Seien $G_x(x,y) = -2x - y + 4$ und $G_y(x,y) = -x - 2y + 5$ die partiellen Ableitungen von G. Das LGS zur Bestimmung der lokalen Extremwerte lautet:

$$\begin{array}{rrrcl} -2x & -y & +4 & = & 0 \\ -x & -2y & +5 & = & 0 \end{array}$$

Das LGS besitzt die stationäre Stelle $(a,b) = (1,2)$ mit $G(1,2) = 4$. Der stationäre Punkt besitzt die Koordinaten $P(1,2,4)$. Beim Absatz einer Einheit von Produkt A und zwei Einheiten von Produkt B erzielt das Unternehmen einen Gewinn von 4 GE. Das Einsetzen einer weiteren Mengenkombination wie etwa $(1,1)$, liefert einen Gewinn in Höhe von 3 GE. Daher vermuten wir ein lokales Maximum. Für ein hinreichendes Kriterium zur Bestimmung lokaler Extremwerte von Funktionen mit zwei Variablen betrachten wir quadratische Gleichungen der folgenden Form:

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

Die partiellen Ableitungen der Funktion f lauten:

$$f_x(x,y) = 2Ax + By \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = Bx + 2Cy.$$

Das lineare Gleichungssystem aus $f_x(x,y) = 0$ und $f_y(x,y) = 0$ besitzt für $4AC - B^2 \neq 0$ an der Stelle $(0,0)$ mit $f(0,0) = 0$ einen stationären Punkt. Zu dessen Analyse betrachten wir die Funktion f. Mithilfe einer quadratischen Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 \\ &= A \cdot \left(x^2 + \frac{By}{A} \cdot x + \frac{Cy^2}{A}\right) \\ &= A \cdot \left[x^2 + \frac{By}{A} \cdot x + \left(\frac{By}{2A}\right)^2 - \left(\frac{By}{2A}\right)^2 + \frac{Cy^2}{A}\right] \\ &= A \cdot \left[\left(x + \frac{By}{2A}\right)^2 + \frac{Cy^2}{A} - \frac{B^2y^2}{4A^2}\right] \\ &= A \cdot \left[\left(x + \frac{By}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2} \cdot y^2\right]. \end{aligned}$$

Für $4AC - B^2 > 0$ ist der Term in der Klammer positiv. Aus einer Fallunterscheidung resultiert:

– Für $A < 0$ ist $f(x, y) < 0$: Der stationäre Punkt $P(0, 0, 0)$ stellt ein lokales Maximum dar.

– Für $A > 0$ ist $f(x, y) > 0$: Der stationäre Punkt $P(0, 0, 0)$ stellt ein lokales Minimum dar.

Die Überlegungen von speziellen quadratischen Gleichungen lassen sich auf beliebige quadratische Gleichungen der folgenden Form übertragen (vgl. Abschn. 3.3.2):

$$h(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Die Funktion h besitzt die stationäre Stelle (a, b). In der Literatur zur Wirtschaftsmathematik ist es üblich, die Koeffizienten A,B und C mittels höherer partieller Ableitungen anzugeben: Ableiten einer Funktion mit mehreren Variablen führt auf **partielle Ableitungen erster Ordnung**. Wiederholtes Ableiten oder zweimaligen Ableiten von f führt auf **partielle Ableitungen zweiter Ordnung**. Es entstehen vier partielle Ableitungen zweiter Ordnung von h:

$$h_{xx}(x, y) = 2A; \qquad h_{xy}(x, y) = B = h_{yx}(x, y); \qquad h_{yy}(x, y) = 2C.$$

Dabei beschreibt $h_{xy}(x, y)$ die partielle Ableitung zweiter Ordnung von h, die zuerst nach x und anschließend nach y abgeleitet wurde. Mittels der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung gelangen wir zur hinreichenden Bedingung zur Bestimmung lokaler Extremstellen für Funktionen mit zwei Variablen. Es gilt:

Die Funktion h mit $h(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ sei zweimal partiell differenzierbar und besitze für (a, b) eine stationäre Stelle mit $h_x(a, b) = 0$ und $h_y(a, b) = 0$. Dann gilt:

Für $\Lambda := h_{xx}(a, b) \cdot h_{yy}(a, b) - h_{xy}^2(a, b) > 0$ besitzt h ein lokales Extremum und zwar

a) ein lokales Minimum für $h_{xx}(a, b) > 0$,

b) ein lokales Maximum für $h_{xx}(a, b) < 0$.

Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf den Abschnitt 3.3.2. Aufgabe 11.23 behandelt die Bestimmung lokaler Extremstellen.

Aufgabe 11.23
Gegeben sei die Gewinnfunktion einer monopolistischen Unternehmung in Abhängigkeit der abgesetzten Mengen x und y mit:

$$G(x, y) = -x^2 - xy - y^2 + 9x + 12y - 10.$$

a) Zeigen Sie, dass G bei $(2, 5)$ *eine stationäre Stelle besitzt.*

b) Weisen Sie nach, dass es sich bei der stationären Stelle um ein lokales Maximum handelt. Begründen Sie, dass das lokale Maximum gleichzeitig globales Maximum von $G(x)$ *ist.*

Die Gleichungen $G_x(2, 5) = 0$ und $G_y(2, 5) = 0$ bestätigen die stationäre Stelle $(2, 5)$. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung ergeben sich zu:

$$G_{xx}(x, y) = -2 = G_{yy}(x, y), G_{xy}(x, y) = -1 = G_{yx}(x, y).$$

Aus der hinreichenden Bedingung $\Lambda = -2 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-1) = 3$ und $G_{xx}(x, y) = -2$ folgt, dass es sich um ein lokales Maximum handelt, dessen Wert sich zu $G(2, 5) = 29$ berechnet. Dies ist auch gleichzeitig das globale Maximum von $G(x)$, da für $x \to \pm\infty$ und $y \to \pm\infty$ gilt: $G(x) \to -\infty$. Beim Absatz von 2 ME von Produkt A und 5 ME von Produkt B ist der Gewinn maximal und beträgt 29 GE. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass für $\Lambda < 0$ an der Stelle (a, b) ein Sattelpunkt vorliegt. Für $\Lambda = 0$ kann keine Aussage über Extremwerte getroffen werden.

Lehrziele:
Für den Abschnitt „Ökonomische Funktionen mit zwei Variablen“ ergeben sich für die Schüler folgende Lehrziele. Die Schüler...

- ... erweitern ihr Funktionsverständnis auf Funktionen mit zwei Variablen.
- ... erfahren eine horizontale Vernetzung des Ableitungsbegriffs von Funktionen mit einer Variablen auf Funktionen mit zwei Variablen und erkennen die fundamentale Idee der Approximation.
- ... bestimmen Extremwerte von Funktionen mit zwei Variablen.

IV Praktische Erprobungen

12 Schulische Erprobungen

In diesem Kapitel präsentieren wir erste praktische Erfahrungen aus den vorgestellten Unterrichtseinheiten. Diese wurden an der Integrierten Gesamtschule Mannheim-Herzogenried (IGMH) in verschiedenen Klassenstufen erprobt. Die Erfahrungen und Eindrücke von Schülern und Lehrern liefern erste Hinweise, inwiefern eine Durchführung der Einheiten realisierbar ist. Mehr als eine erste Orientierung ist jedoch nicht möglich, da der Stichprobenumfang zu gering ist. Um signifikante Ergebnisse über die Realisierbarkeit und vor allem den Lerneffekt seitens der Schüler zu erhalten, sind weitere Untersuchungen nötig.

12.1 Umsetzung I: Von Märkten und Unternehmen

12.1.1 Rahmenbedingungen

Aus der Einheit „Von Märkten und Unternehmen“ wurde in der Klassenstufe 9 im gymnasialen Zug an der IGMH das Basismodul in einem Zeitraum von ungefähr drei Wochen mit je vier Mathematikstunden pro Woche unterrichtet. Dabei orientierten wir uns am schulinternen Jahresplan, der die Inhalte lineare und allgemeine quadratische Funktionen vorsieht. Seitens der Schüler war kein Vorwissen zum Thema Wirtschaftsmathematik vorhanden, sie besaßen lediglich grundlegende Kenntnisse zu linearen Funktionen. Da die Schüler zu Beginn der Unterrichtseinheit zur Aufbesserung der Klassenkasse Waffeln verkauften, konnte daran angeknüpft werden.

12.1.2 Durchführung der Einheit

Der Waffelverkauf fand zunächst zu einem willkürlich festgelegten Preis statt. Um die Preisgestaltung zu verbessern, wurden Umfragen nach der Zahlungsbereitschaft der Mitschüler durchgeführt. Aus diesen Daten erfolgte mittels Regression die Aufstellung einer linearen Nachfragefunktion. Anhand der Umkehrfunktion der Nachfragefunktion, der Preis-Absatz-Funktion, wurden erste ökonomische Begriffe (Prohibitivpreis, Sättigungsmenge, Monopol) erläutert. Die Schüler bestimmten in den folgenden Stunden die quadratische Erlösfunktion und untersuchten diese auf den erlösmaximalen Preis, der daraufhin den Verkaufspreis darstellte. Aus den Ausgaben der Einkäufe wurden die variablen Kosten bestimmt. Auf Wunsch des Lehrers erhielten die Verkäufer der Waffeln ein geringes Entgelt, was auf fixe Kosten führte. Aus der gewonnenen linearen Kostenfunktion und der Erlösfunktion erfolgte die Bestimmung der quadratischen Gewinnfunktion. Diese wurde auf den gewinnmaximalen Preis sowie den Cournotschen Punkt untersucht. Zu den mathematischen Ergebnissen diskutierten die Schüler, woher die Eier im Einkauf stammen sollen: Sie entschieden sich für Eier freilaufender Hühner, auch wenn durch die höheren Kosten der Gewinn abnahm. Darüber hinaus galt es die Güte der ökonomischen Funktionen zu prüfen. Dies geschah durch den ständigen Vergleich von Verkaufszahlen im Modell und in der Realität. Die Schüler pflegten neue Verkaufszahlen in das Modell ein und verglichen die rechnerischen Ergebnisse mit den tatsächlichen Verkaufszahlen. In den folgenden Unterrichtsstunden schloss sich die Untersuchung der Preisbildung im Polypol an, bevor die Einheit mit den Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung endete.

12.1.3 Analyse der Einheit

Einige Schüler äußerten Vorbehalte zu Beginn der Einheit, da sie zur Wirtschaft keinen Bezug hatten und die „übliche Mathematik schon schwer genug“ sei. Andere wiederum freuten sich auf den Anwendungsbezug, zeigten bei der Ankündigung ökonomischer Inhalte jedoch Zurückhaltung. Nach Einschätzung des Autors war dies darin begründet, dass sich die Schüler nur wenig unter dem Begriff Wirtschaft vorstellen konnten und ihre Vorstellungen darauf beruhten, was sie aus den Nachrichten kannten. Diese waren oft mit einem speziellen Vokabular versehen und ohne Kenntnis der Zusammenhänge nur schwer zu verstehen.

Während der Einheit zeigten sich die Schüler sehr motiviert, was sicherlich auch an der direkten Kontrolle durch den Waffelverkauf lag. Die zuvor geäußerten Bedenken konnten recht zügig ausgeräumt werden, da nur wenige wirtschaftliche Begriffe und Größen verlangt wurden. Dies bestätigte die abschließende Evaluation. Zur Frage, was den Schülern an der Einheit gefallen hat, listen wir im Folgenden ausgewählte Antworten auf:

> „Ich war erleichtert, dass nicht zu viele Wirtschaftsbegriffe dazu kamen.“
>
> „Mir hat besonders gut gefallen, dass wir ausrechnen konnten, wie wir mehr Geld in die Klassenkasse bekommen.“
>
> „Auch wenn die Berechnungen nicht einfach waren, so fand ich das Thema doch besser, weil wir sehen konnten, wofür wir das brauchen.“
>
> „Die Wirtschaft hielt sich wirklich in Grenzen. Mir gefiel es gut, weil alle Zahlen eine Bedeutung hatten.“

Der Anwendungsbezug wurde meist positiv gesehen, da die Anzahl der benötigten Begriffe aus dem Bereich der Wirtschaft für die Schüler überschaubar blieben. Gleichzeitig gaben die Schüler auch an, was ihnen an der Einheit nicht gefallen hat. Wir stellen einige Aussagen vor:

> „Unnötig fand ich die Ausführungen zur linearen Regression, da wir die Gerade im GTR bestimmen können.“

„Nicht gefallen haben mir die ständigen Wiederholungen der Rechnungen, da die Ergebnisse kaum unterschiedlich sind.“

„Ich fand es nicht so gut, dass für unseren Verkauf alles mit dem Taschenrechner gerechnet werden musste, da die Zahlen so krumm waren.“

Der letzte Einwand ist nachvollziehbar, da im mathematischen Modell in der Regel keine ganze Zahlen vorkommen. In den Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung ist eine händische Bearbeitung möglich. Auf die Frage, ob die Einheit für andere Klassen geeignet ist, antworteten von 27 Schülern 20 mit ja und 5 mit nein. Die restlichen zwei Schüler enthielten sich. Die Frage der Realisierbarkeit der Einheit ist anhand einer Erprobung nur ansatzweise zu beantworten, weitere Untersuchungen sind dafür notwendig. Der positive Eindruck des Autors und die Antworten der Schüler liefern erste Hinweise auf eine mögliche Vermittlung mathematischer und wirtschaftlicher Inhalte mittels der Einheit.

12.2 Umsetzung II: Preis-Elastizität der Nachfrage

12.2.1 Rahmenbedingungen

Aus der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“ wurde in der Klassenstufe 13 an der IGMH das Ergänzungsmodul „Preis-Elastizität der Nachfrage“ unterrichtet. Der Kurs setzte sich aus 18 Schülern zusammen. Die Einheit fand nach dem schriftlichen Abitur im Schuljahr 2013/2014 über einen Zeitraum von zwei Wochen statt. Aus der Analysis waren den Schülern die Inhalte der Differenzialrechnung bekannt, die ökonomisch notwendigen Grundbegriffe wie Nachfrage und Erlös konnten zügig geklärt werden. Zusätzlich waren fünf Schüler aus dem Wirtschaftskurs mit dem Begriff der Elastizität vertraut, jedoch nicht mit deren Berechnung. Weitere sechs Schüler waren Teilnehmer des Würth Bildungspreises (vgl. Abschn. 13), in dem die Bestimmung von Preis-Absatz-Funktionen anhand eines Apfelkuchenverkaufs durchgeführt wurde.

12.2.2 Durchführung der Einheit

Zu Beginn der Einheit wurde der Begriff der Bogen-Elastizität zur Bestimmung der relativen Änderung einer Funktion eingeführt und an einfachen Beispielen geübt. Der Nachteil der umständlichen Berechnung führte zur Punkt-Elastizität[59], die vom Lehrer als Grenzwert der Bogen-Elastizität eingeführt wurde. Im Umfeld der Begriffe Monopol und Preis-Absatz-Funktion wurde die Preis-Elastizität der Nachfrage untersucht. Viele Berechnungen unterstützten die Interpretationen der erhaltenen Ergebnisse. Abschließend

[59] Im Folgenden nur noch als Elastizität bezeichnet.

untersuchten die Schüler an verschiedenen Preis-Absatz-Funktionen den Zusammenhang zwischen der Preis-Elastizität der Nachfrage und der Preis-Elastizität des Erlöses. Sie erkannten anhand der Ergebnisse folgende Beziehung:

$$\varepsilon_x(p) + 1 = \varepsilon_E(p).$$

Der Nachweis wurde im Unterrichtsgespräch erbracht. Abschließend erfolgten Einführung und Interpretation der Begriffe unelastische sowie elastische Nachfrage.

12.2.3 Analyse der Einheit

Die Unterrichtssituation nach dem Abitur war als besonders einzustufen, da die Schüler in Mathematik keine schriftliche Arbeit mehr schreiben mussten. Trotzdem beteiligten sich die meisten Schüler eifrig am Unterricht. Die Frage, ob den Schülern die Unterrichtseinheit gefallen hat, wurde von den meisten bejaht. Die Gründe lagen vor allem im Praxisbezug:

> „Das Thema bezieht sich auf den Alltag. Der andere Stoff im Mathematikunterricht ergab für mich größtenteils keinen Sinn, da ich mir die Anwendung nicht vorstellen konnte.“

> „Die Zahlen im normalen Mathematikunterricht sind wenig interpretierbar. Mit dem Bezug zur Wirtschaftsmathematik kann man sich darunter etwas vorstellen.“

> „Das Thema ist realitätsnah und deswegen leichter zu verstehen. Die Rechenbeispiele sind gut nachvollziehbar.“

> „Das Thema hat mir gefallen, da man die Mathematik in die Wirtschaft übersetzen und sich daher auch darunter etwas vorstellen kann.“

Da es sich um eine Abschlussklasse handelte, wurde auch die Verknüpfung zu einem späteren betriebswirtschaftlichen Studium als positiver Nebenaspekt aufgeführt:

> „Es sollte mehr in der Schule unterrichtet werden, da man es für verschiedene Studiengänge benötigt.“

> „Es hat mir sehr gefallen, da ich eventuell auch ein Studium im Bereich Wirtschaft machen möchte.“

> „Es kann vielen Schülern für ihre Zukunft eine Hilfe sein, wenn sie BWL oder etwas Ähnliches studieren wollen.“

Ein Schüler plädierte jedoch dafür, die Inhalte nicht in die Schule vorzuziehen. Sie sollten im Studium belassen werden. Die größten Probleme bereiteten den Schülern die ökonomischen Begriffe und deren mathematische Interpretation. Fünf Abiturienten gaben an, dass sie vor allem die Unterscheidung in elastische und unelastische Nachfrage als schwierig empfanden. Sie waren der Auffassung, dass mehr Zeit benötigt wird, um mit diesen Begriffen gekonnt umzugehen. Dies mache dann eine Aufgabe unnötig schwer zu verstehen, „obwohl die Rechnungen dahinter gar nicht so kompliziert sind“. Diese Einschätzungen sind insofern interessant, da mit den Grundbegriffen wie Erlös oder Kosten keine Verständnisschwierigkeiten auftraten. Folglich muss bei der Behandlung von Elastizitäten mehr Zeit auf die Verknüpfung von mathematischen und ökonomischen Inhalten gelegt werden. Die bestätigte auch ein Schüler mit folgender Aussage:

> „Die größte Schwierigkeit lag darin, die wirtschaftlichen Begriffe ins mathematische zu übersetzen. Aber wenn man sich klar macht, was welcher Begriff bedeutet, dann ist das auch kein Problem mehr.“

Allgemein waren die Eindrücke aus dem Unterricht nach Einschätzung des Autors als positiv zu bewerten. Dies wurde auch insofern bestätigt, dass ungefähr 80 Prozent des Kurses dafür waren, vermehrt wirtschaftsmathematische Themen in den Unterricht zu integrieren. Aufgrund der geringen Anzahl der befragten Schüler, sind die Ergebnisse nicht repräsentativ. Die Aussagen und Einschätzungen seitens der Schüler und des Lehrers legen jedoch weitere Untersuchungen nahe.

12.3 Umsetzung III: Koeffizienten einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

12.3.1 Rahmenbedingungen

Aus dem Basismodul „Änderung ökonomischer Funktionen II“ haben wir die Analyse ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen ausgewählt, um den Schülern den Zusammenhang zwischen mathematischen und ökonomischen Inhalten zu verdeutlichen. Zielgruppe war die Klassenstufe 12, die zuvor die Bestimmung von Wendepunkten mittels zweiter Ableitung erlernt hat. Den Schülern waren ökonomische Inhalte im Mathematikunterricht gänzlich unbekannt, so dass wir nur einen Teil der Unterrichtseinheit als sinnvoll erachteten.

12.3.2 Durchführung der Einheit

Vorab erfolgte eine kurze Einführung in das Thema Kostenfunktionen, insbesondere wie der S-förmige Verlauf einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion zustande kommt. Die Schüler erkannten, dass der zugrundeliegende Funktionsterm von folgender Form ist:

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (a \neq 0).$$

Im Unterrichtsgespräch wurde geklärt, dass der Koeffizient a positiv zu wählen ist. Er bestimmt das Verhalten der Funktion K für $x \to \infty$. Zusätzlich ist $d = K(0)$ nicht negativ, da es sich um die fixen Kosten handelt. Somit verblieben die Koeffizienten b und c, deren Auswirkung die Schüler auf den Verlauf des Graphen untersuchten. Abbildung 12.1 zeigt das Beispiel einer ganzrationalen Funktion dritten Grades. Da jedoch für $x > 0$ Extremstellen vorhanden sind, liegt keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion vor.

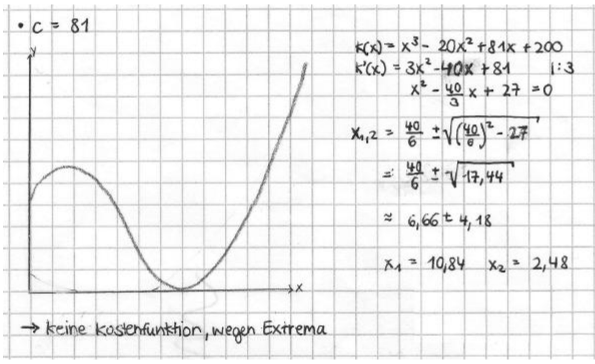


Abbildung 12.1: Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades mit Extremstellen

Doch selbst das Fehlen von Extremstellen bedeutet noch nicht, dass eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion vorliegt. In Abbildung 12.2 ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades aufgeführt, die streng monoton steigend ist. Damit erfüllt sie zwar die Anforderung an eine Kostenfunktion, jedoch liegt die Wendestelle im negativen Bereich. Laut Voraussetzung kann die Funktion daher keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion sein, denn der Übergang von fallenden zu steigenden Grenzkosten für $x > 0$ fehlt.

Durch eine ähnliche Vorgehensweise konnten Funktionsterme gefunden werden, die die geforderten Eigenschaften besitzen (vgl. Anh. E). Bei der Bearbeitung der Aufgabe stellte sich heraus, dass es für die Schüler ungewohnt war, für die Gleichung $K'(x) = 0$ bewusst keine Lösung zu finden. Diese Herangehensweise führte anschließend zu einem tieferen Verständnis bei der Bestimmung von Extrem- und Wendestellen, denn die Schüler beschränkten sich nicht nur aufs Abarbeiten von Aufgaben. Vielmehr konnten sie ausgehend von einem ökonomischen Problem verschiedene Funktionsterme sowie die zugehörigen Graphen vergleichen und reflektieren. Im Anschluss an die Schülerlösungen wurde der mathematische Nachweis geführt, welche Eigenschaften die Koeffizienten b und c besitzen.

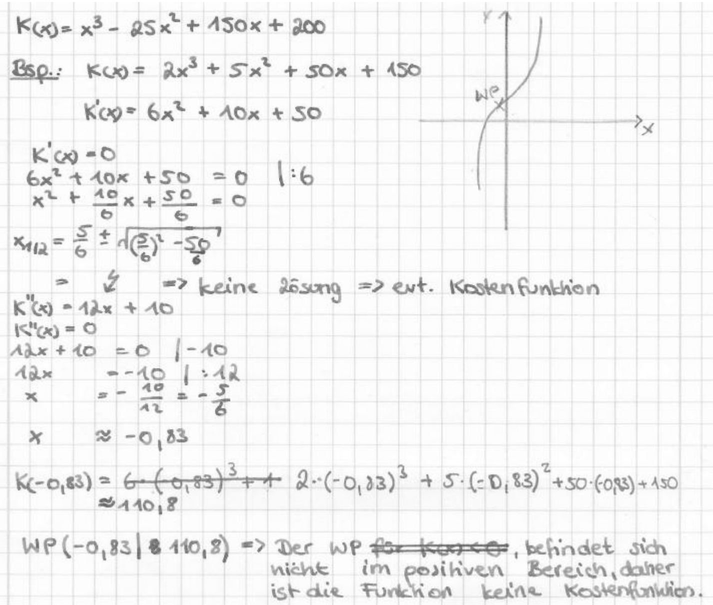


Abbildung 12.2: Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades mit negativer Wendestelle

12.3.3 Analyse der Einheit

Die Schüler hoben die Phase des Probierens positiv hervor, da sie selbst nach einer Lösung suchen konnten. Dabei war es sowohl schwächeren als auch stärkeren Schülern möglich, diese Aufgabe adäquat zu bearbeiten: Während die leistungsschwächeren Schüler sich vermehrt auf das Finden von Lösungen durch Probieren konzentrierten, versuchten die leistungsstärkeren Schüler eine allgemeine Lösung anhand des Funktionsterms zu bestimmen.

In der anschließenden Vorstellung ihrer Ergebnisse zeigte sich, dass die Schüler die Bestimmung von Extrem- und Wendestellen intensiv reflektierten. Obwohl ein ökonomisches Problem der Ausgangspunkt war, trat dieses hinter die mathematischen Argumentationen zurück. Seitens des Lehrers fiel positiv auf, dass mathematische Verfahren direkt mit anschaulichem Material verknüpft wurden. Dadurch erhielten die Schüler eine unmittelbare Rückmeldung zu ihren Berechnungen.

13 Außerschulische Erprobungen

Die Idee für diese Arbeit entstand durch die Teilnahme der damaligen Klasse 10c der IGMH am Würth Bildungspreis im Schuljahr 2010/11. Die jährlich von der Stiftung Würth durchgeführte Aktion, richtet sich an Schulen, die ein Schuljahr lang innovative Projekte aus dem Bereich Wirtschaft gestalten.

Das Projekt verknüpfte mathematische, wirtschaftliche und ethische Inhalte. Die Vorgehensweise, Bestandteile und Ergebnisse des Projektes stellen wir im Folgenden auszugsweise vor.

13.1 Projekt 1: Würth-Bildungspreis

Die Geschäftsidee bestand darin, einmal pro Woche in der Schulküche Apfelkuchen zu backen und in der Pause zu verkaufen. Neben der Herstellung und dem Verkauf sollten die Schüler den Einkauf der Zutaten selbst gestalten. Durch diesen entstanden Kosten, die durch den Verkauf mindestens ausgeglichen werden sollten. Dies führte auf die entscheidende Frage: Zu welchem Preis sollte der Apfelkuchen verkauft werden? Dazu erhielten die Schüler parallel in den Fächern Mathematik, Wirtschaft und Ethik Informationen und Hilfestellungen zu ihrem Projekt. Themen wie Mindestlohn, Nachhaltigkeit und ökonomische Grundbegriffe wurden anwendungsbezogen behandelt. In den Klassenleiterstunden klärten die Schüler Probleme, die im Verlauf des Projektes auftraten. Dies reichte von konkreten Verbesserungsvorschlägen über das Verwenden von Trockenhefe zur Herstellung bis hin zur Diskussion über den Lohn für die Verkäufer. In der ersten Phase des Verkaufs variierten die Schüler den Verkaufspreis des Kuchens und notierten die verkaufte Stückzahl. Betrachten wir die Verkaufszahlen der ersten Woche in Tabelle 13.1.

Preis in € pro Stück	**abgesetzte Menge**
$0,70$	48
$0,80$	46
$1,00$	22
$0,50$	60
$0,70$	39
$0,50$	48
$0,40$	72

Tabelle 13.1: Tabelle der Absatzzahlen bei verschiedenen Preisen

Die Tabelle 13.1 bestätigt das Gesetz der Nachfrage: „Je höher der Preis ist, desto geringer ist der Absatz“. Die Datenpaare wurden in ein Koordinatensystem eingetragen, wie Abbildung 13.1 zeigt.
Mittels Regression ergab sich das Modell einer linearen Nachfragefunktion. Diese lautete (gerundet auf zwei Nachkommastellen):

$$x(p) = -68,61p + 92,94.$$

Anhand der Nachfragefunktion ließen sich erste Schätzungen der Verkaufszahlen zu vorgegebenen Preisen aufstellen. Der Einkauf der Zutaten ori-

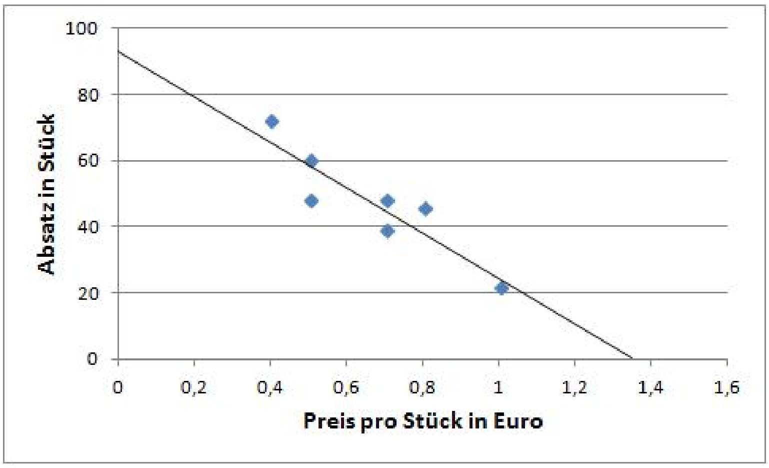


Abbildung 13.1: Kuchenabsatz in Abhängigkeit vom Preis

entierte sich am erwarteten Absatz, worauf lediglich das Nötigste eingekauft wurde. Die Schüler bestimmten aus der Nachfragefunktion die folgende Preis-Absatz-Funktion (gerundet auf drei Nachkommastellen):

$$p(x) = -0,015x + 1,355.$$

Aus der Preis-Absatz-Funktion erfolgte die Berechnung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie deren ökonomische Bedeutung. Anschließend stellten die Schüler die Erlösfunktion auf und berechneten den erlösmaximalen Preis, der bei €0,68 pro Stück lag. Mit diesem Wissen und aufgrund einer vereinfachten Wechselgeldausgabe bestimmte die Klasse einen Verkaufspreis von €0,70 pro Stück. Auf Wunsch des Lehrers erhielten die Verkäufer einen Arbeitslohn in Höhe von €1,50 pro Verkauf. Anhand der Einkaufslisten, die den Schülern zur Verfügung standen, erkannten sie, dass zur Produktion von 48 Stücken Kuchen Einkaufskosten in einer Höhe von €10,56 anfielen. Dies entsprach variablen Kosten für ein Stück Kuchen von €0,22. Aus den variablen und fixen Kosten ergab sich die folgende Kostenfunktion:

$$K(x) = 0,22x + 1,5.$$

Aus der Differenz von Erlös- und Kostenfunktion bestimmten die Schüler die Gewinnfunktion:

$$G(x) = (-0,015x + 1,355) \cdot x - (0,22x + 1,5) = -0,015x^2 + 1,135x - 1,5.$$

Aus der Gewinnfunktion berechnet sich der gewinnmaximale Preis zu ungefähr €0,79 pro Stück. Neben der mathematischen Preisfindung, sollten die Schüler auch soziale, ökologische und ethische Grundgedanken in ihr Projekt einbeziehen. In Kooperation mit der Dualen Hochschule Baden-Württemberg Mannheim wurde ein Tag organisiert, an dem sie eine speziell auf Schüler zugeschnittene Vorlesung zum Thema Nachhaltigkeit erhielten. Sie lernten das CSR-Modell (Corporate Social Responsibility-Modell) kennen, das auf den Säulen Ökologie, Ökonomie und Soziales beruht. Diese drei Aspekte setzten sie in den Bereichen Gehälter, Einkauf der Zutaten und Verkaufspreis folgendermaßen um:

– Die Angestellten bekamen ein faires Gehalt.

– Die Äpfel wurden von einem Bauern aus der näheren Umgebung gekauft.

– Der Preis sollte für die Käufer erschwinglich sein.

Letztendlich legten die Schüler den Preis bei €0,60 pro Stück fest, nachdem mathematische, ökonomische, ökologische und soziale Ansätze diskutiert wurden. Im Fach Wirtschaft konnte anhand des Projektes die Theorie verschiedener Marktformen und Unternehmensstrukturen gelehrt werden. Die Schüler fanden daraufhin eine geeignete Unternehmensform für ihre Schülerfirma. Da zu einer Firma auch ein gutes Marketing gehört, erfolgte eine Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl Marketing der Universität Mannheim sowie einer ortsansässigen Werbeagentur. Dies führte auf ein eigenes Firmenlogo, eine Marketingstrategie sowie einen eigenen Werbefilm. Durch diese Maßnahmen stieg die Nachfrage nach dem Kuchen deutlich an.

Das Projekt wurde zum Ende des Schuljahres bei der Preisverleihung durch die Stiftung Würth zum Sieger gewählt. Neben dem für die Wirtschaft wichtigen Marketing wurde besonders die Verzahnung der Unterrichtsfächer, die analytische Herangehensweise und die anwendungsorientierte Darstellung der Mathematik lobend hervorgehoben.

13.2 Projekt 2: Vorbereitungskurs Freudenberg

Zur Vorbereitung auf das Studium an der DHBW Mannheim führte das Unternehmen Freudenberg im September 2015 einen einwöchigen Vorbereitungskurs Mathematik durch. Schwerpunkt war die Wiederholung wichtiger mathematischer Inhalte aus der Mittel- und Oberstufe, um einen guten Start ins Studium zu ermöglichen. Der Kurs setzte sich aus fünf Studenten der Wirtschaftsinformatik und zehn Studenten des Studiengangs Industrie zusammen. Alle hatten innerhalb der letzten zwei Jahre ihr Abitur abgeschlossen oder die Fachhochschulreife erworben. Die Wiederholung der Differenzialrechnung erfolgte im Rahmen der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“. Alle angehenden Studierenden konnten den Großteil der Aufgaben selbständig bearbeiten, lediglich im Zuge des Betriebsminimums und -optimums wurden einige ökonomische Begriffe wie Stückkosten ausführlicher geklärt. Im Anschluss an das Basismodul wurde in einem Unterrichtsgespräch die Aufmerksamkeit der Kursteilnehmer auf die Ableitung ökonomischer Funktionen gelegt. Es stellte sich die Frage, wie die Ableitung in diesem Umfeld zu interpretieren ist. Anhand von einigen Zahlenbeispielen wurde deutlich, dass die Interpretation der Ableitung als lokale Änderung z. B. in Form einer momentanen Erlösänderung wenig sinnvoll ist. Stattdessen erkannten die angehenden Studierenden die Eigenschaft der näherungsweisen Funktionswertänderung. Darauf folgte eine Bearbeitung der Aufgaben aus dem Ergänzungsmodul „Die Ableitung als lokale Linearisierung“ der Unterrichtseinheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“. Auf die Grundvorstellung der Ableitung als lokale lineare Approximation schloss das Ergänzungsmodul „Approximation von Funktionen“ aus der Einheit „Änderung ökonomischer Funktionen II“ an. Hierbei erfolgte die Bestimmung von Taylorpolynomen zur natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion sowie zu den trigonometrischen Funktionen von Sinus und Cosinus. Abschließend wurde der Gruppe anschaulich mittels Tangentialebenen aufgezeigt, wie ausgehend von der lokalen Linearisierung ein Zugang zu Funktionen mit zwei Variablen gelingen kann.

Die Durchführung der Einheit führte nach Einschätzung des Autors zu folgenden Ergebnissen: Alle Kursteilnehmer zeigten bei der Bearbeitung der Aufgaben großes Interesse. Die Wiederholung der Schulmathematik unter wirtschaftsmathematischen Gesichtspunkten sorgte für eine hohe Motivation. Insbesondere die Bestimmung der Tangente unter dem Aspekt der lokalen linearen Approximation führte bei der Gruppe zur Einsicht über deren Notwendigkeit. Die meisten erkannten den Sinn und Zweck des Aufstellens der Tangente in der Schule nur unzureichend. Schwierigkeiten traten bei der Herleitung der Definition der Ableitung über den relativen Approximationsfehler auf. Hier empfiehlt es sich, ein wenig mehr Zeit einzuplanen. Die Wahrnehmung des Autors wurde in der anschließenden Befragung zur lokalen Linearisierung bestätigt. Viele bezogen sich auf die Tangentenbestimmung:

> „Ich finde die lineare Lokalisierung sehr hilfreich, da man versteht, wofür man eine Tangente braucht. In der Schule wusste ich nie, wofür man das braucht.“

> „Die Tangente wird gut erklärt und der Sinn dahinter wird klar.“

> „Man kann sich jetzt mehr unter einer Tangente vorstellen.“

> „Die allgemeine Tangentengleichung war für mich bisher eine Formel von vielen. Hätte ich schon in der Schule gewusst, dass dahinter ein Taylorpolynom vom Grad 1 steht, wäre mir vieles klarer geworden. Schade, dass man das erst später lernt.“

Insbesondere zwei Studenten der Wirtschaftsinformatik betonten in diesem Zusammenhang, dass angenäherte Ergebnisse ihres Taschenrechners nun viel plausibler erscheinen. Zusätzlich hob die Gruppe die Verallgemeinerungsfähigkeit der lokalen Linearisierung hervor:

> „Es ist besser, nicht immer bei Null anzufangen, sondern wenn neue Inhalte an alten anknüpfen können."

> „Ich finde es gut, wenn neue Elemente darauf aufbauen bzw. wenn etwas Bekanntes als Grundlage dient."

> „Die frühzeitige Einbringung der lokalen Linearisierung erachte ich für sinnvoll, da wesentlich besser auf Basiswissen aufgebaut werden kann. Es bildet sich dadurch eine klare Linie, die sich durch mehrere Jahre Unterricht zieht."

Neben den positiven Effekten reflektierten die Studenten auch die Schwierigkeiten beim Zugang zur lokalen Linearisierung:

> „Es dauert länger es zu begreifen. Dafür müsste sich auch angemessene Zeit für die Erklärung genommen werden."

> „Anfangs ist es schwer zu verstehen, vor allem, wenn die Ableitung als Momentangeschwindigkeit im Kopf verankert ist."

> „Die Herleitungen waren sehr anspruchsvoll. Vielleicht wäre das eher für einen Leistungskurs geeignet. Für einen Grundkurs reichen die Berechnungen."

Die Aussagen bestätigen die analytischen Hürden beim Zugang zur lokalen Linearisierung. Auf grundlegendem Niveau bietet sich eine anschauliche Herangehensweise an, für das erhöhte Niveau kann der analytische Zugang gewählt werden. Auch wenn die hier evaluierten Ergebnisse nicht repräsentativ sind, zeigen sie erste Anhaltspunkte, die bei der Vermittlung der lokalen Linearisierung im Mathematikunterricht zu berücksichtigen sind.

14 Zusammenfassung

Die praktischen Erprobungen der Unterrichtsversuche zeigen, dass die in der vorliegenden Dissertationsschrift entwickelten Unterrichtseinheiten im Mathematikunterricht realisierbar sind. Insbesondere die Einheit „Von Märkten und Unternehmen“ wurde nach Einschätzung von Schülern und Lehrer erfolgreich in der Sekundarstufe I erprobt. Auch das Ergänzungsmodul „Preis-Elastizität der Nachfrage“ aus der Einheit „Änderung ökonomischer Funktionen I“ zeigte sich umsetzbar, verdeutlichte aber, dass im Bereich der Elastizität auf die Vermittlung der ökonomischen Begriffe mehr Sorgfalt gelegt werden muss. Aus der Einheit „Änderung ökonomischer Funktionen II“ führte eine Sequenz zu den Koeffizienten einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion auf Seiten der Schüler zu einem tieferen Verständnis zum Monotonieverhalten von Funktionen sowie zur Grundvorstellung eines Wendepunktes als Ort der geringsten Funktionssteigung. Insbesondere kristallisierte sich aus der Beschäftigung mit der Wirtschaftsmathematik heraus, dass mit ökonomischen Funktionen ein anschaulicher, anwendungsorientierter Zugang zur Grundvorstellung der Ableitung als lokale Linearisierung einer Funktion möglich ist. Der Wert der Ableitung wird explizit als Näherung zur Funktionswertänderung aufgefasst, was auf das grafische Äquivalent der Tangente zur lokalen linearen Approximation einer Funktion führt.

Die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Linearisierung einer Funktion ist unter fachdidaktischen Gesichtspunkten von Interesse, da diese im Mathematikunterricht zumeist hinter der lokalen Änderungsrate zurücktritt. Dies ist damit zu begründen, dass die Bildungsstandards Mathematik für die allgemeine Hochschulreife die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate im grundlegenden und erhöhten Anforderungsniveau vorgeben, während die lokale Linearisierung dem höheren Anforderungsniveau vorbehalten bleibt (KMK 2012, S. 20). Auch fachdidaktische Positionen bevorzugen die lokale Änderungsrate (vgl. DANCKWERTS und VOGEL 2006), denn dieser Zugang führt z. B. von der mittleren zur Momentangeschwindigkeit rasch zum Ableitungsbegriff. Die außerschulischen Erprobungen aus dem Ergänzungsmodul „Die Ableitung als lokale Linearisierung“ (vgl. Abschn. 13.2) legen jedoch nahe, dass angehende Studierende die Ableitung als lokale Änderungsrate kaum mit dem grafischen Äquivalent der Steigung einer Tangente sowie der Tangentengleichung in Verbindung setzen. Nach einer Einführung zur Ableitung als lokale Linearisierung schien dieser gedankliche Bruch behoben. Dies liefert positive Hinweise, dass die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Linearisierung tragfähig ist und sinnvoll im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann. Aktuelle Studien unterstützen unserer Erfahrungen, dass die lokale Änderungsrate keinen besonders nachhaltigen Effekt auf Schülervorstellungen zum Tangentenbegriff erzielt (vgl. BÜCHTER 2014; WITZKE 2014). Im Aspekt der lokalen Linearisierung sehen wir diesen Nachteil nicht. Diese Eigenschaft der Tangente erlaubt es, den Tangentenbegriff auf einer höheren Ebene wieder aufzugreifen und mit neuen Elementen anzureichern. Wird dieser Aspekt dem Schüler schon in der Mittelstufe in der Kreis- und Koordinatengeometrie verdeutlicht, besitzt er er eine Grundvorstellung zur Tangente, die verallgemeinerbar und über die gesamte Schulzeit bis hin zum Studium tragfähig ist. Jedoch besitzt der Zugang zum Ableitungsbegriff als lokale Linearisierung einige Tücken, denn die Termumformungen zur Herleitung des relativen Fehlers zwischen Funktion und Tangente erfordern ein hohes Maß an analytischem Kalkül. Daher sehen wir den Einstieg zum Ableitungsbegriff über die lokale Änderung weiterhin als geeignet an. Nach unserer Auffassung gehört die lokale Linearisierung jedoch als ergänzende, tragfähige Grundvorstellung zum Ableitungsbegriff in den Mathematikunterricht. Insbesondere zeigt sie dem Schüler eine horizontale Verknüpfung auf, die ihren Beginn in der linearen Approximation von Kreisen und Parabeln genommen hat. Folglich plädieren wir dafür, auf grundlegendem Niveau mindestens einen anschaulichen Zugang zur Ableitung als lokale Linearisierung zu ermöglichen, auf erhöhtem Niveau kann eine analytische Legitimation erfolgen, um unterschiedlichen Ansprüchen in der Oberstufe gerecht zu werden. Jedoch existieren in Schulbüchern kaum Ansätze zur Vermittlung der Ableitung als lokale Linearisierung, obgleich diese in den Bildungsstandards Mathematik für die allgemeine Hochschulreife unter erhöhtem Anforderungsniveau angeführt sind. Über die Wirtschaftsmathematik sehen wir die Möglichkeit einen anschaulichen Einstieg zu gewährleisten. Daher möchten wir mit der vorliegenden Dissertationsschrift eine kritische Auseinandersetzung zur Vermittlung des Ableitungsbegriffs im Mathematikunterricht weiter anstoßen. Die Unterrichtseinheiten Änderung ökonomischer Funktionen I und II wagen dazu einen ersten Vorstoß.

In der Behandlung von Funktionen mit zwei Variablen im Mathematikunterricht sehen wir eine Möglichkeit die Verallgemeinerung des Tangentenbegriffs mittels lokaler Linearisierung einer Funktion fortzusetzen. Die Differenzialrechnung von Funktionen mit zwei Variablen greift über Tangentialebenen die fundamentale Idee der lokalen linearen Approximation auf, was die Entwicklung einer tragfähigen Grundvorstellung zum Ableitungsbegriff unterstützt. In diesem Umfeld plädieren wir für die Aufnahme von Funktionen mit zwei Variablen in den Oberstufenkanon, auch wenn diese in den aktuellen Lehrplänen nicht vorgesehen sind und nur wenige Autoren eine Umsetzung in der Schule fordern (vgl. WEIGAND und FLACHSMEYER 1997, KLIKA 2000). Funktionen mit zwei Variablen lassen sich mittels ökonomischer Funktionen anwendungsorientiert erschließen, ihre graphische Darstellung ist mit aktuellen Programmen möglich und diese üben durch ihre Anschaulichkeit für Schüler eine große Faszination aus.

Zur Vermittlung der Grundvorstellung der lokalen linearen Approximation wählen wir einen stoffdidaktischen Ansatz – gemäß dem didaktischen Prinzip vom Speziellen zum Allgemeinen gelangen wir ausgehend vom Wert der Ableitung als Näherung zur Funktionswertänderung in einem Anwendungskontext zur lokalen Linearisierung. Eine alleinige Orientierung am Stoff ist u. E. jedoch problematisch, viel wichtiger ist, wie sich die vorgeschlagenen Einheiten in der Praxis umsetzen lassen. Die Rückmeldungen befragter Schüler und Studenten liefern dazu erste, positive Hinweise. Inwiefern ein tieferes Verständnis zum Ableitungsbegriff gelingen kann, bleibt auch mit Mitteln anderer Fachbereiche zu prüfen.

Insgesamt geben die Einschätzungen von angehenden Studierenden in den außerunterrichtlichen Erprobungen, Schülern und Lehrern aus den Unterrichtseinheiten Anlass zur Hoffnung, dass eine stärkere Integration der Wirtschaftsmathematik in den Mathematikunterricht positiv zu sehen ist. Dafür sprechen auch folgende Gründe:

- Die Vermittlung von Wirtschaftsmathematik unterstützt den Auftrag des Mathematikunterrichts nach Allgemeinbildung in Form der Grunderfahrungen nach WINTER (1995). Schülern erhalten Einblick in ökonomische Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten, sie lernen z. B. wie Preise auf verschiedenen Märkten entstehen und wie Unternehmen beim Absatz ihres Produktes vorgehen können. Zusätzlich erlaubt die Wirtschaftsmathematik einen Zugang zur Mathematik als Wissenschaft mit eigenen Regeln und Zusammenhängen. Auf die ökonomischen Inhalte schließen innermathematische Themen wie die Ableitung als lokale Linearisierung, die Approximation von Funktionen mittels Taylorpolynomen oder die Analyse von Elastizitätsfunktionen an.

- Neben der mathematischen Allgemeinbildung leistet die Wirtschaftsmathematik einen Beitrag zur ökonomischen Bildung, auf deren Defizite wir zu Beginn dieser Arbeit hingewiesen haben. Ökonomische Problemstellungen können wie in einem Preisfindungsprozess von mathematischen Ergebnissen profitieren, wenn es um den Verkaufspreis eines Produktes geht. Darauf aufbauend zeigen wir, dass zur optimalen Preisgestaltung mathematische Lösungen nur einen Aspekt von vielen darstellen. Zugleich spielen ökonomische, soziale und ökologische Argumente eine Rolle. Neben dem kritischen Vernunftgebrauch nach HEYMANN (1996) hebt dies die Mehrperspektivität ökonomischer Problemstellungen hervor, was im Zuge der Diskussion zur Eigenständigkeit des Wirtschaftsunterrichts umso aktueller erscheint (vgl. HEDTKE et al. 2010). Gerade in Zeiten von Slogans wie „Geiz ist geil“ kommt dem eine erhöhte Verantwortung zu.

- Die Unterrichtseinheiten orientieren sich an den curricularen Vorgaben der Bildungsstandards Mathematik, so dass sie nach gängigen Lehrplänen in den Mathematikunterricht integriert werden können. Der spiralförmige Aufbau erlaubt ein Aufgreifen vieler Inhalte des Analysisunterrichts.

- Die fundamentale Idee der Approximation ist in den letzten Jahren durch den Einsatz von leistungsfähigeren Taschenrechnern in den Hintergrund geraten. Mit der vorliegenden Arbeit hegen wir den Wusch, dass sich dies wieder ändert. Neben den Vorteilen einer vertikalen Vernetzung zum Tangentenbegriff erlaubt die fundamentale Idee der Approximation eine horizontale Vernetzung. Sie lässt sich nicht nur dem Teilgebiet der Analysis zuordnen, sondern geht darüber hinaus (vgl. WINTER 1995, S. 37). Sie findet z. B. in der Stochastik im Rahmen des Übergang von der Binomial- zur Normalverteilung statt. Die fundamentale Idee des Approximierens lässt sich somit auch als Leitidee auffassen, was u. E. eine stärkere Einbindung im Mathematikunterricht legitimiert.

Abschließend bleibt zu wünschen, dass Lehrende das Potenzial ökonomischer Funktionen zur mathematischen Allgemeinbildung und zur Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen erkennen und in ihren Unterricht integrieren.

A Grundlagen der Differenzialrechnung für Funktionen mit einer Variablen

A.1 Monotonie

Intervalle, in denen eine Funktion monoton steigt oder fällt können algebraisch mittels Ableitung bestimmt werden. Es gilt:

Satz 19
Sei $f(x)$ auf dem Intervall I definiert und differenzierbar, dann gilt:

a) *Ist für $x \in I$ die Ableitung $f'(x) < 0$, so ist f in I streng monoton fallend.*

b) *Ist für $x \in I$ die Ableitung $f'(x) > 0$, so ist f in I streng monoton steigend.*

Beweis. Wir beschränken uns beim Beweis auf den ersten Teil. Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung (vgl. HEUSER 2001, S. 249) existiert in $[a;b]$ eine Stelle x_0 für die gilt:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass der Graph einer Funktion im Intervall mindestens eine Stelle $x_0 \in [a;b]$ besitzt, für die die Tangentensteigung parallel zur Sekantensteigung durch die Punkte $P_1(a|f(a))$ und $P_2(b|f(b))$ ist. Laut Voraussetzung ist $f'(x_0) < 0$ sowie $b - a > 0$, da $b > a$ ist. Damit erhalten wir:

$$f'(x_0) \cdot (b - a) = f(b) - f(a) < 0.$$

Der zweite Teil des Beweises ist analog mit $f'(x_0) > 0$ zu führen.

$\square$

Beispiel 56
Es sei die Erlösfunktion $E(x) = -2x^2 + 160x$ gegeben und für $0 \leq x \leq 80$ definiert. Zur Bestimmung der Intervalle, in denen der Graph von E fällt oder steigt sind die Gleichungen $E'(x) < 0$ und $E'(x) > 0$ zu lösen. Es gilt:

$$-4x + 160 < 0 \Leftrightarrow 160 < 4x \Leftrightarrow x > 40.$$

Der Grenzerlös ist für $x > 40$ negativ und der Erlös streng monoton fallend. Analog ist für $x < 40$ der Erlös streng monoton steigend.

Mithilfe des Monotonieverhaltens einer Funktion lassen sich Aussagen über deren Extremstellen ziehen. Dies untersuchen wir im folgenden Abschnitt.

A.2 Extremstellen

Ein in der Ökonomie oft gestelltes Problem ist die Frage nach einem größten Wert (z. B. maximaler Erlös oder Gewinn) oder auch kleinsten Wert (z. B. Minimum der Stückkosten). Dies führt auf die Ermittlung lokaler Extremwerte. Für diese gilt:

Definition 25 (Lokale Extrema)
Die Funktion f sei in $[a;b]$ definiert. Sie besitzt an der Stelle $x_0 \in [a;b]$

a) *ein lokales Maximum, wenn der Funktionswert $f(x_0)$ in einer beidseitigen Umgebung von x_0 am größten ist.*

b) *ein lokales Minimum, wenn der Funktionswert $f(x_0)$ in einer beidseitigen Umgebung von x_0 am kleinsten ist.*

Beispiel 57
Die Erlösfunktion $E(x) = -2x^2 + 160x$ ist für $0 \leq x \leq 80$ definiert. Sie besitzt an der Stelle $x_1 = 40$ ein lokales Maximum mit $E(40) = 3200$. Der größte Erlös liegt bei 3200 GE und wird für 40 produzierte und verkaufte Mengeneinheiten angenommen. Für die Mengen 0 und 80 ist der Erlös gleich Null und am kleinsten.

Der größte (kleinste) Funktionswert auf dem gesamten Definitionsbereich wird als **globales Maximum (Minimum)** bezeichnet, der gleichzeitig einen lokalen Extremwert darstellt. Umgekehrt trifft diese Aussage jedoch nicht immer zu. Auf den Graphen der Funktion bezogen können wir von einem **Hoch- und Tiefpunkt** sprechen. Doch wie lässt sich eine lokale Extremstelle algebraisch bestimmen? Neben etwa Punktproben in einer Umgebung einer möglichen Extremstelle und der Scheitelpunktsform bei quadratischen Funktionen stellt die Ableitung ein Analyseinstrument dar. Nach Satz 19 ist für eine lokale Extremstelle x_0 die Ableitung f' gleich Null, in einer Umgebung von x_0 ändert die Funktion f ihr Vorzeichen. Anschaulich bedeutet dies für den Graph von f, dass dieser an einem Hoch- oder Tiefpunkt eine waagrechte Tangente besitzt. Davor und danach ändert die Tangentensteigung ihr Vorzeichen[60]. Es gilt:

[60]Dieses Kriterium ist zwar ausreichend um eine Extremstelle zu identifizieren, aber nicht notwendig. So besitzt die Funktion f mit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Jedoch oszilliert die Funktion für $x \to 0$ so stark, dass f' in jeder noch so kleinen Umgebung von $x_0 = 0$ verschiedene Vorzeichen besitzt.

Satz 20
Die Funktion f sei differenzierbar und besitze an der Stelle x_0 einen lokalen Extremwert, so gilt:

a) $f'(x_0) = 0$ *(notwendige Bedingung),*

b) $f'(x_0) = 0$ *und wenn f' in einer Umgebung von x_0 einen Vorzeichenwechsel von $- \to +$ $(+ \to -)$ besitzt, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum (Maximum) (1. hinreichende Bedingung).*

Beweis. Wir beschränken uns beim Beweis von Satz 20 auf ein lokales Maximum. Mit Definition 25 gilt für ein lokales Maximum in einer Umgebung von x_0:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \leq 0 & \text{für} \quad x > x_0 \\ \geq 0 & \text{für} \quad x < x_0. \end{cases}$$

Aus $x \to x_0$ folgt mit Gleichung (2.1), dass $f'(x_0) \leq 0$ für $x > x_0$ und $f'(x_0) \geq 0$ für $x < x_0$ ist. Folglich ist $f'(x_0) = 0$. Damit ist die notwendige Bedingung bewiesen. Sei weiterhin $f'(x_0) = 0$. Es gelte $f'(x) > 0$ für $x < x_0$ sowie $f'(x) < 0$ für $x > x_0$. Nach Satz 19 steigt f für $x < x_0$ streng monoton und fällt für $x > x_0$. Folglich ist $f(x_0)$ ein lokales Maximum.

□

Beispiel 58
Gegeben sei die Gewinnfunktion $G(x) = -2x^2 + 120x - 40$. *Die notwendige Bedingung* $G'(x) = 0$ *liefert die Lösung* $x_0 = 30$ *mit* $G(30) = 1760$. *Mit* $G'(29) = 4$ *und* $G'(31) = -4$ *liegt ein Vorzeichenwechsel von* $G'(x)$ *an der Stelle* $x_0 = 30$ *von* $+ \to -$ *vor. Da der Graph von* $G(x)$ *eine nach unten geöffnete Parabel ist, gilt: Der Gewinn ist beim Absatz Menge mit* 1760 *GE am größten.*

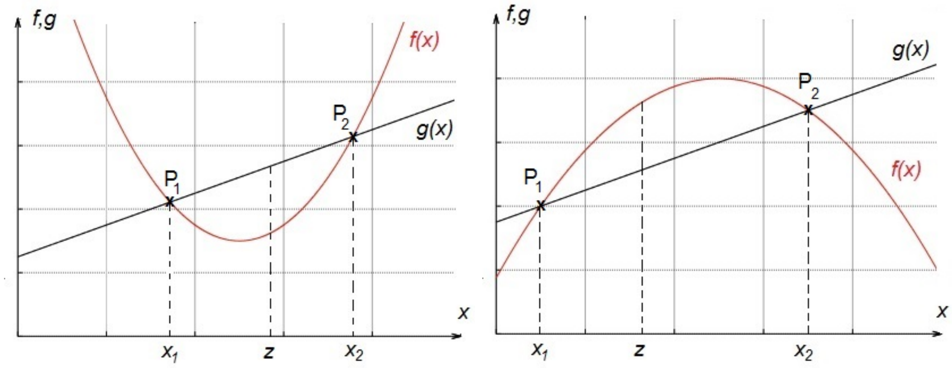
Ist in Satz 20 die notwendige Bedingung erfüllt, in der hinreichenden Bedingung jedoch kein Vorzeichenwechsel zu finden, liegt ein **Sattelpunkt** vor.

A.3 Krümmungsverhalten

In Abschnitt 1.3.3 beschreiben wir, dass eine zentrale Eigenschaft von Kostenfunktionen deren Monotonieverhalten darstellt. Diese sind i. A. streng monoton steigend. Dieser Anstieg lässt sich weiter charakterisieren, denn neben einem unter- oder überproportionalen Kostenanstieg ist auch deren Kombination in Form einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion häufig anzutreffen. Die Art des Anstiegs einer Funktion führt auf den Begriff der Krümmung.

Definition 26 (Krümmung)
Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert. Weiterhin existiere für jedes $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ eine lineare Funktion g als Verbindungsgerade durch die Punkte $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_2(x_2|f(x_2))$. Die Funktion f heißt linksgekrümmt, wenn für jedes $z \in (x_1; x_2)$ gilt: $f(z) < g(z)$. Analog heißt f rechtsgekrümmt, wenn für jedes $z \in (x_1; x_2)$ gilt: $f(z) > g(z)$.

Abbildung A.1 (a) veranschaulicht die Aussage aus Definition 26 für eine Linkskrümmung von f. Für ein $z \in (x_1; x_2)$ ist der Funktionswert $f(z)$ kleiner als der Funktionswert $g(z)$. Analog zeigt Abbildung A.1 (b) die Aussage für eine Rechtskrümmung von f. Hier ist $f(z)$ größer als $g(z)$.



(a) (b)

Abbildung A.1: (a) Links- und (b) Rechtskrümmung des Graphen einer Funktion

Das Krümmungsverhalten einer Funktion kann mittels Ableitung bestimmt werden, dazu ist der Begriff der Monotonie heranzuziehen. Es gilt:

Satz 21
Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert und differenzierbar. f ist in I genau dann linksgekrümmt (rechtsgekrümmt), wenn f' in I streng monoton wachsend (fallend) ist.

Beweis. Sei f' streng monoton wachsend. Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung (vgl. HEUSER 2001, S. 249) existieren Zahlen a und b mit $x_1 < a < z < b < x_2$ für die gilt:

$$\frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} = f'(a) < f'(b) = \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z}.$$

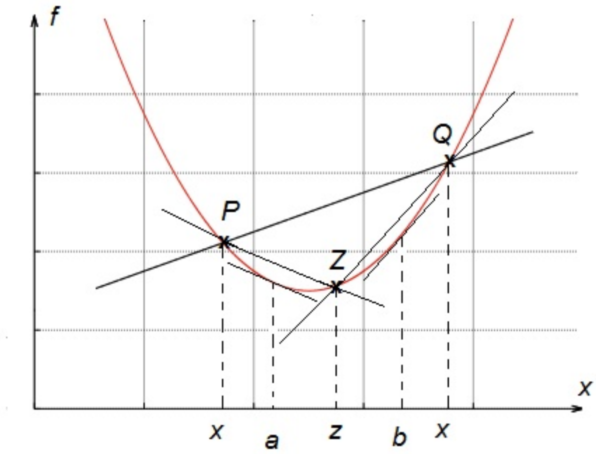


Abbildung A.2: Streng monoton zunehmende Tangentensteigung bei einer linksgekrümmten Funktion

Die beiden Differenzenquotienten stellen die Steigungen der Sekanten durch PZ und QZ dar. Folglich liegt die Steigung der Sekante durch PQ dazwischen und Z befindet sich unterhalb von PQ. Damit gilt $f(z) < g(z)$ für $z \in (x_1; x_2)$, wobei g die Sekante durch PQ darstellt. Nach Definition 26 ist f linksgekrümmt[61]. Abbildung A.2 verdeutlicht den Beweis aus Satz 21.

□

Die Aussage von Satz 19 können wir auf den Sachverhalt der Krümmung übertragen. Dabei kann das Änderungsverhalten der ersten Ableitung durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung beschrieben werden.

Satz 22
Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert und zweimal differenzierbar, dann gilt:

a) Wenn für alle $x \in I$ gilt $f''(x) > 0$, dann ist f linksgekrümmt.

b) Wenn für alle $x \in I$ gilt $f''(x) < 0$, dann ist f ist rechtsgekrümmt.

Beweis. Der Nachweis von Satz 22 folgt direkt aus den Sätzen 19 und 21.

□

[61]Für den Nachweis der Richtung „⇒“ verweisen wir den interessierten Leser auf BÜCHTER und HENN (2010, S. 268).

Den Begriff der Krümmung können wir zur zur Beschreibung eines lokalen Extremums einer Funktion verwenden. Anschaulich nimmt die Tangentensteigung an den Graphen einer Funktion um einen Tiefpunkt herum zu. Der Graph der Funktion f zeigt eine Linkskurve auf. Umgekehrt nimmt die Tangentensteigung um einen Hochpunkt herum ab, der Graph von f besitzt eine Rechtskurve. Dieser Zusammenhang erlaubt uns, anstelle des Vorzeichenwechsels von f' zur Überprüfung eines Extremwertes alternativ eine 2. hinreichende Bedingung anzugeben. Es sei jedoch erwähnt, dass der Nachweis über einen Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung universeller ist. So besitzt z. B. $f(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$ ein Minimum, da f' in einer Umgebung von x_0 das Vorzeichen von $- \to +$ wechselt. Die 2. Ableitung verschwindet mit $f''(0) = 0$. Daher ist im Zweifelsfall das Kriterium des Vorzeichenwechsels hinzuzuziehen. Mittels Krümmung gilt für eine lokale Extremstelle:

Satz 23
Die Funktion f sei differenzierbar und besitze an der Stelle x_0 einen lokalen Extremwert, so gilt:

a) $f'(x_0) = 0$ *(notwendige Bedingung),*

b) $f'(x_0) = 0$ *und für* $f''(x_0) > 0$ *besitzt* f *ein lokales Minimum, für* $f''(x_0) < 0$ *liegt ein lokales Maximum vor (2. hinreichende Bedingung).*

Beweis. Wir beschränken uns beim Nachweis von Satz 23 auf ein lokales Maximum. Da $f'(x_0) = 0$ ist, gilt nach Gleichung (2.1):

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Aus $f''(x_0) < 0$ folgt $f'(x) < 0$ für $x > x_0$ und $f'(x) > 0$ für $x < x_0$. Damit liegt für f' ein Vorzeichenwechsel von $- \to +$ vor und f besitzt nach Satz 20 ein lokales Maximum.

□

Beispiel 59
Gegeben sei die Gewinnfunktion $G(x) = -2x^2 + 120x - 40$. *Die Gleichung* $G'(x) = 0$ *mit* $G'(x) = -4x + 120$ *besitzt die Lösung* $x_0 = 30$. *Über die zweite Ableitung* $G''(x) = -4$ *erhalten wir* $G''(30) = -4 < 0$. *Für* $x_0 = 30$ *nimmt der Grenzgewinn ab und der Gewinn ist am größten.*

Die zweite Ableitung findet ihre Anwendung nicht nur in der Bestätigung von Extremwerten. Es können Punkte des Graphen von f bestimmt werden, in denen die Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert. Wechselt die

Krümmung einer Funktion von rechts nach links oder umgekehrt, besitzt f einen **Wendepunkt**. Zur Berechnung ist nach Satz 22 die Gleichung $f''(x) = 0$ zu lösen. Anschaulich besitzt die erste Ableitung an einer Wendestelle somit ein lokales Extremum[62]. Daher lassen sich die Zusammenhänge zur Ermittlung einer lokalen Extremstelle auf eine Wendestelle übertragen und wir erhalten:

Satz 24
Die Funktion f sei dreimal differenzierbar und besitze an der Stelle x_0 eine Wendestelle, so gilt:

a) $f''(x_0) = 0$ *(notwendige Bedingung) und f'' besitzt einen Vorzeichenwechsel von $- \to +$ oder von $+ \to -$ (1. hinreichende Bedingung).*

b) $f''(x_0) = 0$ *und* $f'''(x_0) < 0$ *oder* $f'''(x_0) > 0$ *(2. hinreichende Bedingung).*

Beweis. Der Beweis von Satz 24 folgt direkt aus den entsprechenden Sätzen für eine Extremstelle.

□

Beispiel 60
Gegeben sei die Kostenfunktion K mit $K(x) = x^3 - 12x^2 + 60x + 100$. Die Wendestelle von K berechnet sich über $K''(x) = 0$ zu $x_0 = 4$. Zusätzlich bestätigt $K'''(x) = 6 \neq 0$ für alle $x \in \mathrm{D}_K$ deren Vorhandensein. Die Wendestelle kennzeichnet den Übergang von fallenden zu steigenden Grenzkosten und gibt die Stelle mit dem kleinsten Kostenzuwachs an. Dieser beträgt $K'(4) = 12$.

Der in Abschnitt A.2 angesprochene Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente, der Graph der Ableitungsfunktion berührt hierbei die x-Achse.

[62] Zwar ist jede Wendestelle von f eine Extremstelle von f', jedoch gilt die Umkehrung nicht immer. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Funktion f mit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

f' besitzt an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, oszilliert jedoch in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0, so dass das Monotonieverhalten von f' nicht als Kriterium ausreicht.

B Auszüge aus dem Schriftverkehr zu den Zusammenhängen im Umfeld von Elastizitätsfunktionen aus Abschnitt 2.2.4

Am 11.2.2013 schrieb Prof. Bernd Luderer (TU Chemnitz):

> „[...] ich habe mir Ihre Seiten noch einmal angesehen. Satz 1 ist gut bekannt. Satz 2 kenne ich nicht. Es ist durchaus von Interesse. [...]“

Am 19.2.2013 schrieb Prof. Klaus Müller (TU Chemnitz):

> „[...] ich fürchte leider, Ihnen ebenfalls nicht helfen zu können. Ich habe zusätzlich den Rat eines Kollegen eingeholt (Wilhelm Lorenz, Fachhochschule Harz) [...]. Ich glaube, Sie sind auf eine mathematische Eigenschaft gestoßen, die ökonomisch nicht begründet werden kann bzw. belanglos ist. Ich weiß nicht, weshalb Unternehmen interessiert sein könnten am "prozentualen Maximum der Gesamtkosten". Dieser Wert ist, so zumindest mein erster Eindruck, ohne ökonomische Bedeutung. Warum sollten sich Unternehmer für die Produktionsmenge interessieren, bei der die Kosten die größtmögliche Elastizität bezüglich der Produktion aufweisen? Spannend nach Satz 1 ist m. E. nur die Elastizität der Gesamtkosten in Höhe von 1, weil (Zunahme der Elastizität vorausgesetzt) bis dahin die Stückkosten sinken.[...]“

Am 27.2.2013 schrieb Dr. Benjamin Auer (Uni Leipzig):

> „[...] ein sehr interessanter Zusammenhang, den Sie da aufzeigen. In meiner bisherigen Arbeit ist mir dieser in der Literatur noch nicht begegnet. Es kann daher durchaus sein, dass Sie der erste sind, der sich damit befasst hat. [...]“

Am 11.1.14 schrieb Prof. Peter Hoberg (HS Worms):

> „[...] der von Ihnen dargestellte Zusammenhang ist wohl eher ein mathematischer. In diesem Gebiet kann ich nicht beurteilen, was bereits veröffentlicht wurde.[...]“

Am 19.7.2014 schrieb Dipl. -Math. oec. Franziska Ziemer (Uni Würzburg):

> „[...] In der Tat ist der Zusammenhang mathematisch interessant, ökonomisch jedoch schwer interpretierbar. Leider kenne ich niemanden, der sich intensiver mit dieser Thematik auseinandergesetzt hat [...].“

C Auszug aus dem Mathematikabitur 2007 Baden-Württemberg - Wahlteil Analysis Aufgabe I 1

Die Herstellungskosten eines neuen Rheumamittels werden durch eine Funktion f mit

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+5} \qquad (x \geq 0)$$

modellhaft kalkuliert. Hierbei gibt $f(x)$ die Kosten in 10000 Euro für die x-te Produktionseinheit an, wobei die Einheiten nacheinander produziert werden.
Die fünfte Produktionseinheit kostet in der Herstellung 950000 Euro, die zwanzigste Produktionseinheit kostet nur noch 560000 Euro.

a) Bestimmen Sie a und b.
Skizzieren Sie das Schaubild von f.
Weisen Sie nach, dass die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit im Laufe der Zeit sinken.
Ab der wievielten Produktionseinheit sind die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit geringer als 400000 Euro?
Mit welchen Herstellungskosten für eine Produktionseinheit muss man langfristig rechnen?
(Teilergebnis: $f(x) = \frac{30x+800}{x+5}$)

b) Ab der wievielten Produktionseinheit unterscheiden sich die Herstellungskosten von zwei aufeinanderfolgenden Produktionseinheiten um weniger als 10000 Euro?
Jede Produktionseinheit besteht aus 10000 Packungen.
Wie hoch muss der Verkaufspreis für eine Packung sein, damit die Einnahmen aus den ersten 100 verkauften Produktionseinheiten ihre Herstellungskosten entsprechen?

D Abituraufgabe Grundkurs Mathematik Hamburg 2011 - Analysis 1

Der Computerladen AIKON produziert und vermarktet Netbooks. Es wird davon ausgegangen, dass die gesamte tägliche Produktion abgesetzt wird. Die täglichen Gesamtkosten in Euro für die Produktion hängen von der Anzahl x der produzierten Netbooks ab und werden durch eine Kostenfunktion K beschrieben. Zur Kostenentwicklung sind den Produktionsplanern die folgenden Daten bekannt:

Anzahl x der produzierten Netbooks pro Tag	0	80	105
Gesamtkosten K in Euro pro Tag	12450	32850	38100

Darüber hinaus haben die Produktionsplaner die Information, dass bei einer Produktion von 80 Netbooks die Grenzkosten $K'(47)$ Euro pro Stück betragen, das heißt $K'(80) = 47$.

a) Bestätigen Sie, dass $K(x) = 0,02x^3 - 5,8x^2 + 591x + 12450$ bei den gegebenen Informationen die Gleichung einer passenden Kostenfunktion darstellt.
Beschreiben Sie die inhaltliche Bedeutung von $K'(80)$.

Die Produktionsplaner betrachten die Kostenentwicklung bei Erhöhung der Produktion genauer.

b) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten minimal sind, und markieren Sie den zugehörigen Punkt auf dem Graphen in der Anlage.
Bestimmen Sie die Höhe der minimalen Grenzkosten.
Interpretieren Sie die Bedeutung der minimalen Grenzkosten im Sachkontext.

Das Computerunternehmen verkauft die Netbooks zu einem Preis von jeweils 599 Euro.

c) Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion E an und zeichnen Sie den Graphen von E in das Koordinatensystem in der Anlage.
Bestätigen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G mit

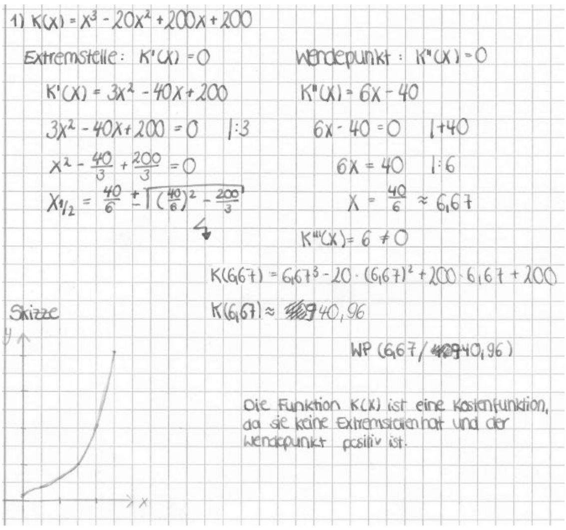
$$G(x) = -0,02x^3 + 5,8x^2 + 8x - 12450.$$

d) Bestätigen Sie, dass das Unternehmen mit Gewinn produziert, wenn mindestens 51 und höchstens 283 Netbooks hergestellt werden.
Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der maximaler Gewinn erwirtschaftet wird.

In der Zwischenzeit ist es zu einem Überangebot auf dem Netbookmarkt gekommen. Die Konkurrenz versucht, die Firma AIKON vom Markt zu drängen. Sie bietet dazu qualitativ gleichwertige Netbooks zu einem Preis von 300 € an. Die Geschäftsleitung der Firma AIKON beschließt, ebenfalls den Preis deutlich zu senken. Sie schlägt hierzu vor, das Minimum der Stückkosten k mit $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ zu bestimmen.

d) Weisen Sie nur unter der Verwendung der ersten Ableitung von k nach, dass die tägliche Produktionsmenge, bei der die Stückkosten k am geringsten sind, in guter Näherung bei 158 Netbooks erreicht wird.
Ermitteln Sie, welchen Verkaufspreis das Computerunternehmen für ein Netbook mindestens verlangen muss, wenn die produzierten 158 Netbooks verlustfrei verkauft werden sollen.
Begründen Sie, warum sich AIKON wegen seiner Konkurrenten derzeit noch keine ernsthaften Sorgen machen muss.

E Schülerlösungen zu ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen



1) $K(x) = x^3 - 20x^2 + 200x + 200$

Extremstelle: $K'(x) = 0$

$K'(x) = 3x^2 - 40x + 200$

$3x^2 - 40x + 200 = 0 \quad |:3$

$x^2 - \frac{40}{3} + \frac{200}{3} = 0$

$x_{1/2} = \frac{40}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{40}{6}\right)^2 - \frac{200}{3}}$

↯

Wendepunkt: $K''(x) = 0$

$K''(x) = 6x - 40$

$6x - 40 = 0 \quad |+40$

$6x = 40 \quad |:6$

$x = \frac{40}{6} \approx 6{,}67$

$K'''(x) = 6 \neq 0$

$K(6{,}67) = 6{,}67^3 - 20 \cdot (6{,}67)^2 + 200 \cdot 6{,}67 + 200$

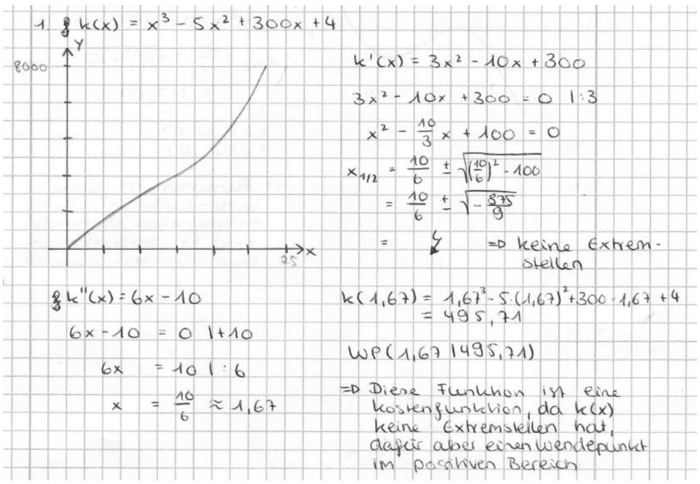
$K(6{,}67) \approx$ ~~...~~$40{,}96$

$WP\ (6{,}67 /$ ~~...~~$40{,}96)$

Skizze

Die Funktion K(x) ist eine Kostenfunktion, da sie keine Extremstellen hat und der Wendepunkt positiv ist.

Abbildung E.1: Ganzrationale Funktion dritten Grades als ertragsgesetzliche Kostenfunktion (a)



1. $k(x) = x^3 - 5x^2 + 300x + 4$

$k'(x) = 3x^2 - 10x + 300$

$3x^2 - 10x + 300 = 0 \quad |:3$

$x^2 - \frac{10}{3}x + 100 = 0$

$x_{1/2} = \frac{10}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{6}\right)^2 - 100}$

$= \frac{10}{6} \pm \sqrt{-\frac{875}{9}}$

$=$ ↯ ⇒ keine Extremstellen

$k''(x) = 6x - 10$

$6x - 10 = 0 \quad |+10$

$6x = 10 \quad |:6$

$x = \frac{10}{6} \approx 1{,}67$

$k(1{,}67) = 1{,}67^3 - 5 \cdot (1{,}67)^2 + 300 \cdot 1{,}67 + 4$

$= 495{,}71$

$WP(1{,}67 \mid 495{,}71)$

⇒ Diese Funktion ist eine Kostenfunktion, da k(x) keine Extremstellen hat, dafür aber einen Wendepunkt im positiven Bereich

Abbildung E.2: Ganzrationale Funktion dritten Grades als ertragsgesetzliche Kostenfunktion (b)

Literatur

ALLEN, R. (1972). *Mathematik für Volks- und Betriebswirte*, 2. Aufl., Duncker und Humblot, Berlin.

BARNER, M. und FLOHR, F. (2000). *Analysis I*, 5 Aufl., de Gruyter, Berlin.

BAUMERT, J., KLIEME, E., NEUBRAND, M., SCHIELFELE, U., SCHNEIDER, W., STANAT, P., TILLMANN, K.-J. und WEISS, M. H. (2001). *PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*, Leske und Budrich, Opladen.

BEA, F., DICHTL, E. und SCHWEITZER, M. (2002). *Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Bd.3*, 8. Aufl., UTB, Stuttgart.

BECK, B. (2011). *Mikroökonomie*, vdf Hochschulverlag, Zürich.

BEHRENDS, E. (2015). *Analysis, Bd. 1*, 6 Aufl., Springer Spektrum, Berlin.

BLACK, J. und BRADLEY, J. (1984). *Essential Mathematics for Economists*, 2. Aufl., Wiley, Chichester.

BLEICH, T. (2012). Preis und Umsatz - ein eindeutiger Zusammenhang?, *In: WISU* **6**: 800–803.

BLUM, W. (1995). Quo vadis Analysisunterricht? Aktuelle Entwicklungen und Perspektiven für das jahr 2000, *In: ÖMG-Didaktik-Reihe* **24**: 3–19.

BLUM, W., DRÜKE-NOE, C. und KÖLLER, H. (2011). *Bildungsstandards Mathematik: konkret*, 5. Aufl., Cornelsen, Berlin.

BLUM, W. und KIRSCH, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen, *In: Der Mathematikunterricht* **25 (1)**: 6–24.

BLUM, W. und LEISS, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe, *In: Mathematik Lehren* **128**: 18–21.

BRANDLMAIER, E., FRANK, H., KORUNKA, C., PLESSNIG, A., SCHOPF, C. und TAMEGGER, C. (2006). *Ökonomische Bildung von Schüler/innen Allgemeinbildender Höherer Schulen*, WUV, Wien.

BRANDT, D., GREULICH, D., JÜRGENSEN-ENGL, T., REIMER, R., SCHMITT-HARTMANN, R. und ZIMMERMANN, P. (2008). *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien 6*, Klett, Stuttgart.

BRAUN, M., BELLSTEDT, M., BITSCH, G., BRANDT, D., BRÜSTLE, G. und BUCK, H. (2012). *Lambacher Schweizer 11. Mathematik für berufliche Gymnasien*, Klett, Stuttgart.

BREYER, F. (2015). *Mikroökonomik: Eine Einführung*, 6. Aufl., Springer, Berlin.

BRUDER, R., ELSCHENBROICH, H.-J., GREEFRATH, G., HENN, H.-W., KRAMER, J. und PINKERNELL, G. (2010). Schnittstelle Schule – Hochschule, *Beiträge zum Mathematikunterricht* S. 75–82.

BRUDER, R., HEFENDEHL-HEBEKER, L., SCHMIDT-THIEME, B. und WEIGAND, H.-G. (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik*, Springer, Heidelberg.

BRUNER, J. (1973). *Der Prozess der Erziehung*, 3. Aufl., Berlin Verlag, Berlin.

BSB (2011). Schriftliche Abiturprüfung – Freie und Hansestadt Hamburg, Schuljahr 2010/2011, Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg (Hrsg.). `http://bildungsserver.hamburg.de`; (Stand: 15.03.2014).

BSB (2013). Abitur – Regelungen für die zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben, Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg (Hrsg.). `http://www.hamburg.de/contentblob/3953946/data/regelungen-2015-abitur.pdf`; (Stand: 18.06.2015).

BÜCHTER, A. (2014). Analysisunterricht zwischen Begriffsentwicklung und Kalkülaneignung – Befunde und konzeptionelle Überlegungen zum Tangentenbegriff, *Der Mathematikunterricht* **60 (2)**: 41–49.

BÜCHTER, A. und HENN, H.-W. (2010). *Elementare Analysis*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

BÜLTMANN, R. (2004). *Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht – Vorteile und Gefahren dieser Methode*, Grin, Norderstedt.

BUNDESVERBAND DEUTSCHER BANKEN (2009). Jugendstudie 2009. `http://www.bankenverband.de`; (Stand: 22.12.2013).

BUNDESVERBAND DEUTSCHER BANKEN (2012). Jugendstudie 2012. `http://www.bankenverband.de`; (Stand: 22.12.2013).

DANCKWERTS, R. und VOGEL, D. (2006). *Anaylsis verständlich unterrichten*, 1. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag, München.

DAUME, P. (2009). *Finanzmathematik im Unterricht*, 1. Aufl., Vieweg und Teubner, Wiesbaden.

DAUME, P. (2016). *Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht, Bd. 1*, Springer Spektrum, Wiesbaden.

DEGÖB (2004). Kompetenzen der ökonomischen Bildung für allgemein bildende Schulen und Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss. `http://degoeb.de/uploads/degoeb/04_DEGOEB_Sekundarstufe-I.pdf` (Stand: 16.02.2014).

DEGÖB (2009). Kompetenzen der ökonomischen Bildung für allgemein bildende Schulen und Bildungsstandards für den Abschluss der gymnasialen Oberstufe. `http://degoeb.de/uploads/degoeb/09_DEGOEB_Abitur.pdf` (Stand: 02.03.2014).

DEISER, O. (2015). *Analysis 2*, 2. Aufl., Springer Spektrum, Berlin.

DIETZ, H. M. (2012). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, 2. Aufl., Springer, Berlin.

DILLER, H. (2008). *Preispolitik*, 4. Aufl., Kohlhammer, Stuttgart.

DOLL, N. (2015). Volkswagen verabschiedet sich vom Größenwahn, `http://www.welt.de/wirtschaft/article148154826/Volkswagen-verabschiedet-sich-vom-Groessenwahn.html`; (Stand: 27.04.2016).

EICHBERGER, J. (2004). *Grundzüge der Mikroökonomik*, Mohr Siebeck, Tübingen.

FAMULLA, G.-E., FISCHER, A., HEDTKE, R., WEBER, B. und ZURSTRASSEN, B. (2011). Bessere ökonomische Bildung: problemorientiert, pluralistisch, multidisziplinär, *In: Aus Politik und Zeitgeschichte* **12**: 48–54.

FISCHER, A. (2006). *Ökonomische Bildung – Quo vadis?*, Bertelsmann, Bielefeld.

FREIDANK, C.-C. (2001). *Kostenrechnung*, 7. Aufl., Oldenbourg, München.

FREUDIGMANN, H., BAUM, M. und BELLSTEDT, M. (2009). *Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien, Kursstufe*, Klett, Stuttgart.

FRIEDL, G., HOFMANN, C. und PEDELL, B. (2013). *Kostenrechnung – Eine entscheidungsorientierte Einführung*, 2. Aufl., Vahlen, München.

FÜHRER, L. (1991). *Pädagogik des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunschweig.

GGW (2010). Ökonomische Bildung an allgemeinbildenden Schulen. Bildungsstandards. Standards für die Lehrerbildung, Autoren: Retzmann, T.; Seeber, G.; Remmele, B.; Jongebloed, H.-C. `http://www.bildungsserver.de`; (Stand) 22.12.2013.

GÜIDA, J. J. (2009). *Mikroökonomie und Management*, Kohlhammer, Stuttgart.

GREEFRATH, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*, Springer, Heidelberg.

GRIESEL, H., Gundlach, A., POSTEL, H. und SUHR, F. (2004). *Elemente der Mathematik 11*, Schroedel, Hannover.

GRIESEL, H., POSTEL, H. und SUHR, F. (2001). *Elemente der Mathematik. Leistungskurs Analysis*, Schroedel, Hannover.

GROSS, J. (2010). *Grundlegende Statistik mit R*, Vieweg und Teubner, Wiesbaden.

GRUBER, H. und NEUMANN, R. (2009). *Erfolg im Mathe-Abi*, Freiburger Verlag GmbH, Freiburg.

GUTENBERG, E. (1984). *Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 2: Der Absatz*, 17. Aufl., Springer, Berlin.

HANDELSBLATT-ONLINE (2011). Campbell verbrennt sich an Preiserhöhung. `http://www.handelsblatt.com/unternehmen/industrie/suppenhersteller-campbell-verbrennt-sich-an-preiserhoehung/5876028.html`; (Stand: 21.12.2012).

HARSKAMP, E., SUHRE, C. und VAN STREUN, A. (2000). The Graphics Calculator and Students' Solution Strategies, *In: Mathematics Education Research Journal* **12 No.1**: 37–52.

HEDTKE, R., FAMULLA, G.-E., FISCHER, A., WEBER, B. und ZURSTRASSEN, B. (2010). Für eine bessere ökonomische Bildung, Kurzexpertise zum Gutachten Ökonomische Bildung an allgemeinbildenden Schulen. Bildungsstandards. Standards für die Lehrerbildung. `http://www.iboeb.org`; (Stand 23.12.2013).

HENN, H.-W. (2000). Änderungsraten als Zugang zu den zentralen Begriffen und Resultaten der Analysis, *In: F. Förster, H.-W. Henn and J. Meyer (Hrsg.), Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* **Bd. 6: Computer Anwendungen**: 1–13.

HENTSCHEL, T. und PRUZINA, M. (1995). Grafikfähige Taschenrechner im Mathematikunterricht – Ergebnisse aus einem Schulversuch (in Klasse 9/10, *In: JMD* **3/4**: 193–232.

HEUSER, H. (2001). *Lehrbuch der Analysis – Teil 1*, 14. Aufl., Teubner, Wiesbaden.

HEUSER, H. (2004). *Lehrbuch der Analysis – Teil 2*, 13. Aufl., Teubner, Wiesbaden.

HEYMANN, H. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*, Beltz, Weinheim.

HOLEY, T. und WIEDEMANN, A. (2010). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, 2. Aufl., Springer, Heidelberg.

HOLZÄPFEL, L. (2013). Lernen im Zusammenhang, *In: mathematik lehren* **177**: 2–9.

HORNGREN, C. T., FOSTER, G. und DATAR, S. M. (2001). *Kostenrechnung: Entscheidungsorientierte Perspektive*, 9. Aufl., Oldenbourg, München.

HUSSMANN, S. und PREDIGER, S. (2010). Vorstellungsorientierte Analysis – auch in Klassenarbeiten und zentralen Prüfungen, *In: Praxis der Mathematik in der Schule* **52(31)**: 35–38.

HUTSCHENREUTER, T. (2009). *Allgemeine Betriebswirtschaftslehre*, 3. Aufl., Gabler, Wiesbaden.

JÄGER, J. und SCHUPP, A. (2013). Funktionen zweier Variablen, *In: Der Mathematikunterricht* **59**: 28–48.

KAMINSKI, H. und EGGERT, K. (2008). Konzeption für die ökonomische Bildung als Allgemeinbildung von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II. `https://bankenverband.de/media/files/Konzeption_fuer_die_oekonomische_Bildung.pdf`; (Stand: 14.01.2016).

KLIKA, M. (2000). Modellbildung und Realitätsbezug am Beispiel der Funktionen von zwei Variablen., *In: Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker, Hildesheim, S. 342–345.

KM (2013). Kultusministerium regelt Einsatz digitaler Hilfsmittel beim Mathematik-Abitur ab 2017 neu, Pressemitteilung. `http://www.kultusportal-bw.de`; (Stand: 10.06.2014).

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss: Beschluss vom 04.12.2003. Bildungsstandards als PDF-Datei verfügbar unter `http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf(Stand:15.2.2016).`

KMK (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss vom 18.10.2012. Bildungsstandards als PDF-Datei verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf(Stand:15.2.2016).

KORTMANN, W. (2006). *Mikroökonomik*, 4. Aufl., Physica, Heidelberg.

KRAMER, E. (2013). Schülervorstellungen zum Tangentenbegriff – Erfassung, Deutung und Ansätze zur Weiterentwicklung. (unveröffentlichte Examensarbeit).

KRAMER, J. (2010). Die Perspektive der Universität, *In: Schnittstelle Schule - Hochschule* S. 80–82.

KRETZ, S. (2012). Gehirnwäsche. Wirtschaftsverbände und Gewerkschaftsstiftungen versorgen Lehrer mit Unterrichtsmaterial. Sieht so Aufklärung aus? http://www.zeit.de/2012/39/C-Schule-Wirtschaft-Unterricht; (Stand: 28.01.2016).

KRUBER, K.-P. (2005). Ökonomische und politische Bildung – der mehrperspektivische Zugriff auf Wirtschaft und Politik, *in* D. KAHSNITZ (Hrsg.), *Integration von politischer und ökonomischer Bildung?*, S. 75–110.

KUNZE, S. (2000). Zur Beschreibung von Kompetenzen des mathematischen Modellierens konkretisiert an inhaltlichen Leitideen, *Der Mathematikunterricht* **56(4)**: 4–19.

LACHMANN, W. (2006). *Volkswirtschaftslehre 1*, 5. Aufl., Springer, Berlin.

LANGE, D. (2015). Schulfach Wirtschaft – Ein Kniefall vor den Arbeitgebern. http://www.zeit.de/wirtschaft/2015-11/schulfach-wirtschaft-oekonomie; (Stand: 27.01.2016).

LANGE, E. und FRIES, K. R. (2006). *Jugend und Geld 2005. Eine empirische Untersuchung über den Umgang von 10- bis 17-jährigen Kindern und Jugendlichen mit Geld*, Schufa Holding, Münster.

LENNÉ, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*, Klett, Stuttgart.

LUDERER, B. und DENNHARD, J. (2011). Waist-to-Height-Ratio und Versicherungsbeitrag, *In: Das Wirtschaftsstudium* **4**: 573–580.

LUDERER, B. und WÜRKER, U. (2003). *Einstieg in die Wirtschaftsmathematik*, 5. Aufl., Teubner, Wiesbaden.

MAASS, K. (2002). Handytarife, *In: mathematik lehren* **113**: 53–57.

Mathematik-Kommission Übergang Schule – Hochschule (2013). Stellungnahme der Mathematik-Kommission Übergang Schule – Hochschule. Stellungnahme als PDF-Datei verfügbar unter http://fraktion.cdu-bw.de/fileadmin/user_upload/infothek/Bildung/2013-11-13_PM_206_Anlage_Stellungnahme-Mathe-Kommission-2013-10-31__2_.pdf(Stand:5.7.2016).

MATTHÄUS, H. und MATTHÄUS, W.-G. (2012). *Mathematik für BWL-Bachelor: Übungsbuch*, 2. Aufl., Vieweg, Wiesbaden.

MAY, H. (2011). Ökonomische Bildung als Allgemeinbildung, *In: Aus Politik und Zeitgeschichte* **12**: 3–8.

MOLDENHAUER, W. (2007). Computeralgebrasysteme im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht in Thüringen., *In: Computeralgebra Rundbrief* **41**: 26–29.

MSW (2015). Vorgaben zu den unterrichtlichen Voraussetzungen für die schriftlichen Prüfungen im Abitur in der gymnasialen Oberstufe im Jahr 2015, Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (Hrsg.). https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/abitur-gost/fach.php?fach=2; (Stand: 18.06.2015).

PINDYCK, R. und RUBINFELD, D. (2009). *Mikroökonomie*, 7. Aufl., Pearson, München.

PINKERNELL, G. (2010). Rechnerfreie Mathematik in einem technologieorientierten Unterricht, *In: Beiträge zum Mathematikunterricht* S. 665–668.

PREISSLER, P. R. (2005). *Entscheidungsorientierte Kosten- und Leistungsrechnung*, 3. Aufl., Oldenbourg, München.

REISS, K. und HAMMER, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*, Springer, Basel.

REZAT, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers*, Vieweg und Teubner, Wiesbaden.

ROBECOSAM (2014). Alpha from sustainability, Website. http://www.robecosam.com/images/Alpha_from_Sustainability_06_2014.pdf; (Stand 26.04.2016).

RUNIA, P., WAHL, F., GEYER, O. und THEWISSEN, C. (2007). *Marketing – Eine prozess- und praxisorientierte Einführung*, 2. Aufl., Oldenbourg, Springer.

SCHLESIER, C. (2012). Die Deutsche Bahn bremst ihre Konkurrenten aus. `http://www.wiwo.de/unternehmen/dienstleister/schienenverkehr-die-deutsche-bahn-bremst-ihre-konkurrenten-aus/8532014.html`; (Stand: 10.10.2014).

SCHLITTGEN, R. (2013). *Regressionsanalysen mit R*, Oldenbourg, München.

SCHÖLER, K. (2011). *Grundlagen der Mikroökonomik*, 3. Aufl., Universitätsverlag Potsdam, Potsdam.

SCHUMANN, J., MEYER, U. und STRÖBELE, W. (2011). *Grundzüge der mikroökonomischen Theorie*, 9. Aufl., Springer, Berlin.

SCHWEIGER, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik, *In: JMD* **13**: 199–214.

SIEBERT, H. und LORZ, O. (2007). *Einführung in die Volkswirtschaftslehre*, 15. Aufl., Kohlhammer, Stuttgart.

SIEG, G. (2012). *Volkswirtschaftslehre. Mit aktuellen Fallstudien.*, 4. Aufl., Oldenbourg, München.

SILLER, H.-S. (2012). Mathe und der Rest der Welt, *In: mathematik lehren* **173**: 46–51.

SMITH, A. (1937). *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, Modern Library, New York.

STERN, E. (2015). Von der Synapse in die Schule?, *in* D. Rost (Hrsg.), *Intelligenz und Begabung, Unterricht und Klassenführung*, Waxmann, Münster.

TERVEER, I. und TERVEER, S. (2011). *Analysis-Brückenkurs für Wirtschaftswissenschaftler*, UVK-Lucius, München.

TIETZE, J. (2009). Die Elastizität ökonomischer Funktionen, *In: WISU* **8-9**: 1179–1187.

TIETZE, J. (2010). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik*, 15. Aufl., Vieweg und Teubner, Wiesbaden.

TIETZE, U.-P., KLIKA, M. und WOLPERS, H. (1982). *Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II*, Vieweg, Wiesbaden.

TIETZE, U.-P., KLIKA, M. und WOLPERS, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis*, Vieweg, Wiesbaden.

TULLY, C. und VAN SANTEN, E. (2012). Das verfügbare Geld im Jugendalltag von 13- bis 17-jährigen Schülern und Schülerinnen: Empirische Ergebnisse, *Diskurs Kindheits- und Jugendforschung* **2**: 197–211.

VOGT, G. (2007). *Faszinierende Mikroökonomie*, 2. Aufl., Oldenbourg, München.

VOHNS, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen, *In: JMD* **26**: 52–79.

VOLLRATH, H.-J. und ROTH, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*, 2. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

VOM HOFE, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen, *In: Mathematik lehren* **118**: 4–8.

VOM HOFE, R., LOTZ, J. und Salle, A. (2015). Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung, *in* R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme und H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, S. 149–184.

WALLRODT, L. (2016). Der englische Weg macht den Fußballfans Angst. `http://www.welt.de/sport/fussball/article151942886/Der-englische-Weg-macht-den-Fussballfans-Angst.html`; (Stand: 26.04.2016).

WEBER, B. (2000). Wirtschaft in die Schule! Ein Plädoyer für ein Schulfach Ökonomie an allgemein bildenden Schulen, *In: Gegenwartskunde* **1**: 11–22.

WEBER, B. (2010). Wirtschaftswissen zwischen Bildungsdefiziten und Unsicherheiten, *In: Zeitschrift für Didaktik der Gesellschaftswissenschaften* S. 91–114.

WEIGAND, H.-G. und FLACHSMEYER, J. (1997). Ein computerunterstützter Zugang zu Funktionen von zwei Veränderlichen., *In: mathematica didactica 20* **2**: 3–23.

WEINERT, F. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit, *In: Weinert, F. E. (Hrsg.): Leistungsmessungen in Schulen.* S. 17–31.

WHITEHEAD, A. (1962). Die Gegenstände des mathematischen Unterrichts, *In: Neue Sammlung 2/3* S. 257–266.

WILDMANN, L. (2007). *Einführung in die Volkswirtschaftslehre, Mikroökonomie und Wettbewerbspolitik*, Oldenbourg, München.

WINTER, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, *In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* **61**: 37–46.

WITTMANN, E. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, 6. Aufl., Vieweg, Wiesbaden.

WITZKE, I. (2014). Zur Problematik der empirisch-gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes, *Der Mathematikunterricht* **60(2)**: 19–32.

ZIMMERMANN, W., FRIES, H.-P. und HOCH, G. (2003). *Betriebliches Rechnungswesen*, 8. Aufl., Oldenbourg, München.

ZÖTTEL, L. und REISS, K. (2010). Heuristische Lösungsbeispiele – Eine Lerngelegenheit für den anfänglichen Erwerb von Modellierungskompetenz, *In: Der Mathematik-Unterricht* **56(4)**: 20–27.

Eidesstattliche Erklärung

Sehr geehrte Damen und Herren,

ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen (einschließlich elektronischer Quellen, dem Internet und mündlicher Kommunikation) direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos unter genauer Quellenangabe als solche kenntlich gemacht. Insbesondere habe ich nicht die Hilfe sogenannter Promotionsberaterinnen/ Promationsberater in Anspruch genommen. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar Geld oder geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

(Ort, Datum)　　　　　　　　(Jens Dennhard)