Stoffdidaktische Analyse und Entwicklung eines Unterrichtswerkes der punktbasierten analytischen Geometrie

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
vorgelegt an der Europa-Universität Flensburg von

Johannes Fabian Blauert

Februar 2017

Für Lias.

Verwendete Symbole

Zahlbereiche

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit Null $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}_0^+$	Menge der Bruchzahlen $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen

Intervalle

$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$]a, b[$	offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Mengenoperationen

$\subseteq$	Mengeninklusion (Gleichheit zugelassen)
$M + N$	Mengenaddition; $M + N = \{X \mid \exists A \in M \exists N \in N : X = M + N\}$
$M \cdot N$	Mengenmultiplikation; $M \cdot N = \{X \mid \exists A \in M \exists N \in N : X = M \cdot N\}$

Elementare Geometrie

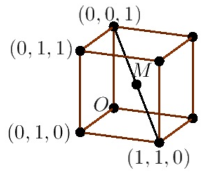
$g(A, B)$	Gerade durch die Punkte A, B
$E(A, B, C)$	Ebene durch die Punkte A, B, C
AB	Strecke mit den Endpunkten A, B
$\overset{\circ}{AB}$	relatives Inneres der Strecke AB ($:= AB \setminus \{A, B\}$)
$\lvert AB \rvert$	Länge der Strecke AB
$\lvert A \rvert, \lVert A \rVert$	Betrag eines Punktes; Länge der Strecke AO
M_{AB}	Mittelpunkt der Strecke AB
m_{AB}	Mittellot der Strecke AB
$d(A, B)$	Abstand der Punkte A und B
$d(M, N)$	Abstand der Punktmengen M, N: $\inf\{\lvert AB \rvert \mid A \in M, B \in N\}$

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Aufbau der Arbeit

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ist eine umfassende didaktische Analyse der *analytischen Geometrie* sowie die Entwicklung eines alternativen Zuganges zu diesem Themengebiet, welches sich neben der Analysis und der Stochastik als fester Bestandteil des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe *II* etabliert hat. Trotz dieser festen Verankerung in den Curricula und in den Schulbüchern der Oberstufenmathematik sind die aktuellen didaktischen Analysen dieses Gebietes unzureichend. Obwohl die Schüler in der Lage sind, die Aufgaben des Zentralabiturs mit Erfolg zu bearbeiten, zeigen genauere Untersuchungen[1], dass dieser Erfolg in vielen Fällen auf dem sicheren Beherrschen eines Kalküls beruht, dass die analytische Geometrie den Lernenden auf der Begriffsebene aber große Probleme bereitet.

Im Sommersemester 2016 wurden Studierende im zweiten Semester des Masterstudiums im Rahmen der Übungsaufgaben zur Vorlesung *Algebra II für Gemeinschaftsschule*[2] damit beauftragt, den Mittelpunkt der Raumdiagonale des abgebildeten Würfels zu bestimmen. Kein Studierender hat dabei die naheliegende Rechnung



$$M = \frac{1}{2} \cdot ((1,1,0) + (0,0,1)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

verwendet. Die einfachsten zielführenden Lösungen beinhalteten zunächst die Definitionen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

mit deren Hilfe der Ortsvektor des Mittelpunktes mithilfe des Vektorzuges

$$\vec{o} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

berechnet wurde. Aber auch wesentlich aufwändigere Vektorzüge kamen zum Einsatz, teilweise ohne zum richtigen Ergebnis geführt zu haben. Es scheint, als würde

[1] siehe S.277 dieser Arbeit
[2] gelesen von Dr. M. Schmitz

die schulische analytische Geometrie den Blick vernebeln und selbst einfache Dinge kompliziert erscheinen lassen. Die inflationäre Einführung neuer Begriffe wie *Vektor, Ortsvektor, Stützvektor, Richtungsvektor* führt dazu, dass sogar die aus der Sekundarstufe *I* bekannte Gerade zu einem komplizierten Objekt wird. Dies zeigen unter anderem die Untersuchungen von Malle in [31], in denen Schüler nach der Parameterdarstellung einer Geraden gefragt wurden. Eine typische Antwort auf diese Frage war die folgende:

> „$g = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$*, das ist zum Beispiel irgendein Punkt, zum Beispiel* $(2|4)$*, plus Lambda mal* $(5|6)$ *ist gleich die Gerade g.*“ (Malle, [31])

Eine Analyse dieser Antworten[3] zeigt, dass die Schüler zwar in der Lage sind, die für das Zentralabitur geforderten Aufgabentypen kalkülhaft zu bearbeiten, dass es jedoch an einem grundlegenden Verständnis der zugrunde liegenden Objekte mangelt. Diese Probleme basieren auf einer unzulänglichen Objektklarheit. Dabei verstehen wir unter Objektklarheit die Rückführung jedes verwendeten mathematischen Objektes auf möglichst einfache Grundobjekte - wobei dies im Idealfall das Grundobjekt *Menge* ist - und die transparente Gestaltung der Zusammenhänge zwischen diesen Objekten. Der Grad der geforderten Objektklarheit ist ein subjektives Bedürfnis, das vom Wissensstand des Betrachters abhängig ist[4]. Ein von einer fachlichen Basis aus agierender Lehrer sollte aber ein größtmögliches Maß an Objektklarheit anstreben, um gegebenenfalls Vereinfachungen im Rahmen der didaktischen Reduktion gezielt vornehmen zu können. Je einfacher die zum Aufbau einer Theorie verwendeten Objekte sind, desto einfacher wird es für den Lehrenden und Lernenden sein, diese Objektklarheit zu erzielen. Diese Einfachheit ist bei den üblichen Unterrichtsgängen der analytischen Geometrie nicht gegeben, was schon bei der *Definition* des Begriffes *Vektor* als *Äquivalenzklasse von Pfeilen*[5], die wir kurz mit *Pfeilklasse* bezeichnen wollen, beginnt. Vom fachlichen Standpunkt aus sind Vektoren nichts anderes als Elemente eines Vektorraumes, und da der $\mathbb{R}^2$ bzw. die Zeichenebene[6] Vektorräume sind[7], haben die Schüler schon mit der Koordinatisierung der Zeichenebene zu Beginn der Sekundarstufe *I* ein Beispiel für die Trägermenge eines Vektorraumes kennengelernt, die durch die Einführung zweier intuitiver Verknüpfungen zu einem Vektorraum wird. In dieser Arbeit wird ein alternativer Aufbau der analytischen Geometrie vorgestellt, der an dieses Vorwissen anknüpft und ausschließlich Punkte der Ebene und des Raumes als Grundobjekte verwendet, wodurch auf die für Schüler sprachlich komplizierten Begriffe *Vektor, Ortsvektor, Stützvektor, Richtungsvektor* usw. verzichtet werden kann. Der Einsatz dieses Aufbaus hat im Rahmen erster Interventionsstudien an Schulen in Schleswig-Holstein zu erfolgversprechenden Er-

[3] siehe S.277 dieser Arbeit
[4] So würde beispielsweise kein Schüler der Primarstufe eine mengentheoretische Konstruktion der natürlichen Zahlen zu schätzen wissen.
[5] siehe S. 253 dieser Arbeit
[6] siehe S. 18 dieser Arbeit
[7] siehe S. 21 dieser Arbeit

gebnissen hinsichtlich des verständnisorientierten Lernzuwachses geführt.

Zur Zielsetzung der didaktischen Analyse des genannten Themengebietes beziehen wir uns auf die Ausführungen von Wittmann in [52]. Demnach ist die spezifische Aufgabe der Mathematikdidaktik die *„Entwicklung und Erforschung inhaltsbezogener theoretischer Konzepte und praktischer Unterrichtsentwürfe mit dem Ziel einer Verbesserung des realen Unterrichts“*. Zum Kernbereich der wissenschaftlichen Arbeit gehören insbesondere:

- *„die Konzipierung lokaler mathematischer Theorien,*
- *die elementarmathematische Durchdringung von Unterrichtsinhalten und möglichen Unterrichtsinhalten mit dem Ziel, sie für bestimmte Lerngruppen zugänglich zu machen,*
- *die kritische Hinterfragung bzw. Rechtfertigung von Inhalten im Rahmen allgemeiner Zielsetzungen des Mathematikunterrichts,*
- *die Erforschung von Lernumgebungen und von Lehr-/Lernprozessen.“ (Wittmann, [52])*

In Anlehnung an diese Kernbereiche gliedern wir die vorliegende Arbeit in die auf diese Einleitung folgenden Vorbetrachtungen sowie drei Hauptteile.

In den Vorbetrachtungen beleuchten wir den Begriff *analytische Geometrie* sowohl aus schulischer als auch aus hochschuldidaktischer Sicht und grenzen den in dieser Arbeit entwickelten Zugang der *punktbasierten analytischen Geometrie* vom klassischen Zugang über Pfeilklassen ab.

In Teil *I* erfolgt eine elementarmathematische Durchdringung der Grundlagen der punktbasierten analytischen Geometrie, die es dem Lehrenden ermöglicht, von einer fachlichen Basis aus zu agieren und die nach Wittmann den Ausgangspunkt mathematikdidaktischer Arbeit darstellt. Anstelle eines axiomatischen Aufbaus arbeiten wir mit dem $\mathbb{R}^2$ bzw. dem $\mathbb{R}^3$ als gemeinsamer Konkretisierung der Ebene bzw. des Raumes und zwei- bzw. dreidimensionaler Vektorräume. Das Ziel soll dabei stets sein, aus der mathematischen Theorie Lernumgebungen entwickeln zu können, die für den Einsatz in der Schule geeignet sind. Deshalb erfolgt in diesem Teil schon eine wesentliche Reduktion der universitären analytischen Geometrie. Grundlegend für die elementarmathematische Analyse ist die Tatsache, dass wir unter der Ebene zunächst nur den $\mathbb{R}^2$ und unter dem Raum nur den $\mathbb{R}^3$ als abstraktes Objekt verstehen und nicht etwa den uns umgebenden Anschauungsraum. Genauso wie bei einem axiomatischen Aufbau einer Theorie alle Begründungen stets im Rahmen des zugrunde liegenden Axiomensystems erfolgen sollten, sollte man bei Verwendung einer Konkretisierung eines Axiomensystems auch anschaulich klare Aussagen innerhalb des vorgelegten Modells beweisen. Skizzen liefern dafür die Motivation und die Ideen, sie können jedoch keine formalen Beweise ersetzen, die in vorliegenden Arbeit überwiegend durch Rechnungen erfolgen werden.

In Teil *II* wird ein Entwurf eines Unterrichtswerkes entwickelt, das den $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ als Punkte der Ebene interpretiert und aufbauend auf der Theorie aus Teil *I* Lernumgebungen für den Einsatz in einer gymnasialen Oberstufe bereitstellt. Diese sind dabei so konzipiert, dass sie den folgenden Kriterien von Wittmann an substanzielle Lernumgebungen genügen:

1. *„Sie müssen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts repräsentieren.*
2. *Sie müssen reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schüler/-innen bieten.*
3. *Sie müssen flexibel sein und leicht an die speziellen Gegebenheiten einer bestimmten Klasse angepasst werden können.*
4. *Sie müssen mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren und daher ein weites Potential für empirische Forschungen bieten."(Wittmann [52])*

In Teil *III* erfolgt letztendlich die von Wittmann geforderte Hinterfragung und Rechtfertigung der präsentierten Lerninhalte im Rahmen allgemeiner Zielsetzungen des Mathematikunterrichts, eine Erläuterung der vorgenommenen didaktischen Reduktionen sowie eine didaktische Analyse der Lerninhalte. Ein wesentlicher Aspekt der didaktischen Reduktion ist die Durchmischung von elementargeometrischem Vorwissen mit der neu entwickelten Theorie, wodurch sich nicht nur Beweise erheblich vereinfachen lassen, sondern die analytische Geometrie auch vertikal mit diesem Vorwissen verknüpft wird. In der abschließenden Diskussion folgt der Versuch einer Antwort auf die Frage, ob und in welchem Maße die dargelegten Inhalte überhaupt ihre Berechtigung in einem Curriculum haben. Wir empfehlen eine Abkehr von der kalkülhaften analytischen Geometrie hin zu mehr echter mathematischer Tätigkeit.

2 Vorbetrachtungen

2.1 Analytische Geometrie

Zur Erläuterung des Begriffs *punktbasierte analytische Geometrie* betrachten wir zunächst dessen letzten beiden Bestandteile. Die Übersetzung des aus dem Altgriechischen stammenden Wortes *Geometrie* ($\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$) mit *Erdmaß*, *Erdmessung*, *Landmessung* lässt auf die ursprüngliche Verwendung geometrischen Wissens schließen, das schon den orientalischen Hochkulturen des 5. bis 3. Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung bekannt war. Der Einsatz dieses Wissens diente vorrangig dem Lösen praktischer Probleme wie beispielsweise der Vermessung von Land, der Konstruktion von Gebäuden sowie der Navigation und der Astronomie (vgl. [1]). Auch die Ägypter verwendeten als Formel für den Flächeninhalt einer Dreiecksfläche

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{\text{Länge der Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

und als Formel für den Flächeninhalt einer Kreisfläche

$$\text{Flächeninhalt} = \left(\text{Durchmesserlänge} - \frac{\text{Durchmesserlänge}}{9}\right)^2,$$

was einer Approximation von $\pi \approx 3,14159$ durch $\frac{256}{81} \approx 3,16049$ entspricht und hinreichend genau war, um praktische Probleme der damaligen Zeit zu lösen.

Die Verwendung dieser Formeln verdeutlicht die Sicht auf Mathematik der damaligen Zeit:

> *„Zwischen exakt gültigen Formeln - wie der zur Berechnung der Dreiecksfläche - und Näherungsformeln - wie der zur Berechnung der Kreisfläche - wurde kein prinzipieller Unterschied gemacht, das mathematische Wissen lag in Form von Regeln vor, Begründungen und Beweise wurden nicht gegeben.“ ([1], S. 1)*

Dies änderte sich in Griechenland in der Zeit um $350-200$ vor unserer Zeitrechnung. Das mathematische Wissen der damaligen Zeit ist in dem wohl berühmtesten Werk *Elemente* des griechischen Mathematikers Euklid von Alexandria zusammengetragen, der wahrscheinlich im 3. Jahrhundert v. Chr. in Alexandria gelebt hat. Die dort verwendete strenge Beweisführung wurde zum Vorbild der späteren Mathematik, deren zentraler Inhalt nicht mehr nur die Frage nach gewissen Regelmäßigkeiten ist, sondern auch die Suche nach Begründungen für deren Gültigkeit. Die von Euklid geprägte Vorgehensweise ist das Aufstellen von intuitiv einsichtigen Axiomen, die die aus der objektiven Realität abgeleiteten Begriffe und Strukturen abstrahieren, und aus denen dann weitere Aussagen deduktiv abgeleitet werden. Nachdem einmal die Objekte und die strukturellen Beziehungen zwischen diesen Objekten festgelegt sind, wird in der Mathematik von allen weiteren Eigenschaften dieser Objekte abgesehen und es werden nur noch solche Eigenschaften untersucht, die aus den Axiomen ableitbar sind. Geschieht bei diesen Ableitungen etwas, was nach den ursprünglichen Begriffen nicht erwartet wird oder unmöglich erscheint, so müssen diese gegebenenfalls verbessert oder ergänzt werden.

> *„Durch diesen Process wird unsere Auffassung der Natur allmählich immer vollständiger und richtiger, geht aber zugleich immer mehr hinter die Oberfläche der Erscheinungen zurück.“ ([48], S. 489)*

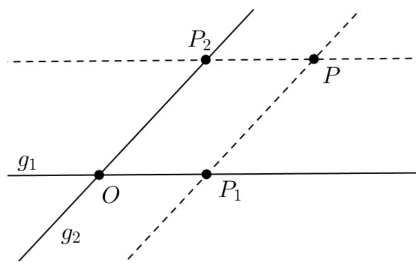
Die Axiomensysteme stehen also geschichtlich nicht am Anfang einer mathematischen Disziplin, sondern sind das Ergebnis einer langen historischen Entwicklung, in der sich die in den Axiomensystemen festgehaltenen Objekte und Strukturen als sinnvoll erwiesen haben. Die die Mathematik charakterisierende Exaktheit bleibt dabei stets eine *relative* Exaktheit im Rahmen des gegebenen Axiomensystems, und lässt sich mitnichten als *absolute* Exaktheit bezeichnen.

Das heute gebräuchlichste Axiomensystem der Geometrie wurde von David Hilbert entworfen und im Jahre 1899 in dem Werk *Grundlagen der Geometrie* [22] veröffentlicht. Demnach besteht die euklidische Ebene aus zwei Mengen $\mathscr{P}$ und $\mathscr{G}$ sowie einer Inzidenzrelation, einer Kongruenzrelation für Strecken, einer Kongruenzrelation für Winkel und einer Anordnung. Die Elemente der Menge $\mathscr{P}$ nennen wir Punkte, die Elemente der Menge $\mathscr{G}$ Geraden. Zusätzlich gelten verschiedene Gruppen von Axiomen: die Inzidenzaxiome, die Anordnungsaxiome, die Kongruenzaxiome für Strecken und für Winkel, das Parallelenaxiom sowie die Vollständigkeitsaxiome.

Dieser axiomatische Aufbau der Geometrie sorgt für logische Klarheit, da er das Ergebnis eines Jahrhunderte andauernden begrifflichen Optimierungsprozesses ist. Allerdings sind in diesem Rahmen die Beweise relativ simpler geometrischer Sachverhalte zu komplex für einen ungeübten Lernenden. Deshalb wurden weitere Varianten von Axiomensystemen entwickelt, die mit einem deutlich geringeren Aufwand verbunden sind, siehe etwa [29]. Doch auch bei diesen Axiomensystemen verkompliziert sich die Behandlung geometrischer Probleme mit Methoden der euklidischen Geometrie, sobald die geometrischen Objekte nicht mehr aus einfachen Elementen wie Strecken, Kreisbögen usw. zusammengesetzt sind.

Vor der Vereinheitlichung der Grundlagen der Geometrie durch Hilbert gab es statt einer globalen Theorie eine Vielzahl lokaler Axiomensysteme. Schon im Jahre 1637 kritisiert René Descartes in [8] diesen *„Wildwuchs der geometrischen Analysis der Griechen“* und entgegnet dem damit einhergehenden Mangel an Systematik mit der Charakterisierung von Punkten der Ebene durch Koordinaten.

Dazu wird ein Punkt $O \in \mathscr{P}$ der Ebene gewählt sowie zwei nicht-parallele orientierte Geraden $g_1, g_2 \in \mathscr{G}$, die den Punkt O enthalten. Diese Geraden bezeichnen wir als Koordinatenachsen. Jedem Punkt $P \in \mathscr{P}$ wird nun auf folgende Weise ein Tupel (x_1, x_2) reeller Zahlen zugeordnet:



P_1 ist der Schnittpunkt der Parallelen zu g_2 durch P mit der Koordinatenachse g_1, P_2 ist der Schnittpunkt der Parallelen zu g_1 durch P mit der Koordinatenachse g_2. Durch Wahl einer Einheitsstrecke können wir nun x_1 als Abstand von P_1 zu O und x_2 als Abstand von P_2 zu O wählen, wobei das Vorzeichen von x_1 bzw. x_2 angibt, auf welcher Seite der Geraden g_1 bzw. g_2 vermöge des Punktes O der Punkt P liegt.

Damit erhalten wir eine bijektive Abbildung $\iota : \mathscr{P} \to \mathbb{R}^2, P \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, wir identifizieren also die Ebene mit der Menge der 2-Tupel reeller Zahlen. Die Zahlen x_1, x_2 nennen wir *Koordinaten* des Punktes P. Durch diese Identifikation wird die *Zeichenebene* zur *Zahlenebene*, durch die Einführung von Verknüpfungen auf der Zahlenebene wird diese zu einem neuen *Zahlbereich*. Objekte in der Ebene werden durch die Einführung von Koordinaten zu Punktmengen, die durch Bedingungen an ihre Koordinaten gegeben sind. Geometrische Probleme lassen sich damit durch algebraische Gleichungen beschreiben und mit Methoden der Algebra und der Infinitesimalrechnung beweisen. Dieser Vorgang wird als *Algebraisieren* bezeichnet. Der umgekehrte Prozess, das *Geometrisieren*, veranschaulicht Rechnungen geometrisch. Descartes sieht in diesem von ihm *algebraische Analysis* genannten Zugang einen systematischeren Weg, um geometrische Probleme zu lösen. Er schreibt:

> *„Was sodann die Analysis der Alten betrifft oder die Algebra der Neueren, so ist abgesehen davon, daß sich beide nur auf sehr abstrakte Gegenstände beziehen, die gar keinen Nutzen zu haben scheinen, die erstere stets so an die Betrachtung von Figuren gebunden, daß sie den Verstand nicht üben kann, ohne die Einbildungskraft zu sehr zu ermüden - und in der letzteren hat man sich so dem Zwang gewisser Regeln und Zeichen unterworfen, daß daraus eine verworrene und dunkle Kunst entstanden ist, die den Geist eher hemmt, und nicht eine Wissenschaft die ihn bildet. Das war der Grund, weshalb ich dachte, man müsse eine andere Methode suchen, indem sie die Vorteile dieser drei in sich vereinigt, doch frei ist von ihren Mängeln.“ (Descartes [27])*

Descartes sieht in den algebraischen Gleichungen, mit denen nun geometrische Objekte beschrieben werden können, das entscheidende Bindeglied zwischen Algebra und Geometrie. Durch die Algebra wird die Geometrie wieder quantifiziert, und nähert sich damit wieder der ursprünglichen Begriffsbedeutung *Erdmessung* an. Die Gedanken von *Descartes* wurden in den folgenden Jahrhunderten auf den Raum respektive den $\mathbb{R}^3$ erweitert.

Folgen wir dem Weg von *Descartes*, so konstruieren wir das *kartesische Modell* der euklidischen Geometrie, indem wir $\mathscr{P} := \mathbb{R}^2$ und $\mathscr{G} := \{\mathbb{R}\cdot A+P | P, A \in \mathbb{R}^2, A \neq O\}$ setzen. Hierbei wird die Kurzschreibweise

$$\mathbb{R} \cdot A + P := \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, \exists r \in \mathbb{R} : X = r \cdot A + P\}$$

verwendet. Wir sagen, dass ein Punkt $P \in \mathscr{P}$ in einer Geraden $g \in \mathscr{G}$ *enthalten* ist, wenn $P \in g$ im mengentheoretischen Sinne ist. Damit sind die Inzidenzaxiome erfüllt.

Ein Punkt $Q \in \mathbb{R}^2$ liegt *zwischen* zwei Punkten $P \in \mathbb{R}^2$ und $R \in \mathbb{R}^2$, falls es ein $t \in]0, 1[$ gibt so dass $Q = tP + (1 - t)R$ ist. Mit dieser Definition sind die Axiome der Anordnung erfüllt.

Um die Kongruenz von Strecken und Winkeln zu definieren, benötigen wir den Begriff der euklidischen Bewegung. Ist $A \in O(2)$ eine orthogonale Matrix über $\mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{R}^2$, so nennen wir die Abbildung

$$F_{A,B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto A \cdot X + B$$

eine *euklidische Bewegung*. Zwei Strecken PQ und $P'Q'$ heißen *kongruent*, falls es eine euklidische Bewegung F gibt mit $F(P)F(Q) = P'Q'$. Zwei Winkel $\angle PQR$ und $\angle P'Q'R'$ heißen *kongruent*, falls es eine euklidische Bewegung F gibt mit

$$\angle F(P)F(Q)F(R) = \angle P'Q'R'.$$

Mit diesen Kongruenzdefinitionen sind auch die Kongurenzaxiome für Strecken und Winkel, das Parallelenaxiom sowie die Vollständigkeitsaxiome erfüllt (siehe etwa [1]).

Hilbert beweist in [22], dass jedes Modell der euklidischen Ebene isomorph zu diesem Modell ist. Somit bestimmt nicht mehr die Wahl des Modells, sondern nur die hinter dem Modell stehende mathematische Struktur die Aussagen, die im Rahmen dieses Modells entwickelt werden.

> *„Es war jedoch eine der fruchtbarsten mathematischen Einsichten des ausgehenden 19. Jahrhunderts, daß es nicht auf die Natur der mathematischen Objektbereiche ankommt, sondern ausschließlich auf ihre Struktur. Es war Hilbert, der diese Auffassung am klarsten formuliert hat. Später hat Hilbert diese heute als die axiomatische bezeichnete Auffassung zur Grundlage eines umfassenden Programms zur Neubegründung der Fundamente der Mathematik gemacht.“* ([40], S. 147)

Die Einführung eines derartigen Modells, das ein Axiomensystem erfüllt, nennen wir im Folgenden *Konkretisierung des Axiomensystems*. Solange wir im Rahmen der von dem Axiomensystem vorgegebenen mathematischen Struktur argumentieren, besitzen wir in der Konkretisierung Wahlfreiheit. Diese Konkretisierung trägt in entscheidendem Maße zur didaktischen Reduktion mathematischer Inhalte bei. Da die Punktmenge der euklidischen Ebene bis auf Isomorphie der $\mathbb{R}^2$ und die Punktmenge des Raumes der $\mathbb{R}^3$ ist, sagen wir deshalb:

Die Ebene ist der $\mathbb{R}^2$, der Raum ist der $\mathbb{R}^3$.

2.2 Analytische Geometrie aus hochschuldidaktischer Sicht

In der Schulmathematik wird die *analytische Geometrie* untrennbar mit dem Begriff des *Vektors* verknüpft. Betrachten wir *Vektoren* nicht aus der Sicht der Schulmathematik, sondern aus der Perspektive der Hochschulmathematik, so werden mit der heutigen Axiomatisierung der Vektorraumstruktur Erkenntnisse aus der Lehre linearer Gleichungssysteme, der Koordinatengeometrie und analytischen Geometrie, aber auch der Theorie der Differential- und Integralgleichungen und der dadurch begründeten Funktionalanalysis unter einem zentralen Begriff zusammengefasst. Erste Ansätze einer axiomatischen Definition gehen dabei auf Peano [37] zurück, der heutige Begriff des Vektorraumes wurde jedoch erst durch Entwicklungen der Funktionalanalysis im 20. Jahrhundert geprägt, die in den *„entscheidenden Jahren 1928-1933 ihre endgültige Vereinheitlichung erfuhr“* ([5]). Die Axiomatisierung dieser mathematischen Struktur ist damit - ebenso wie die Axiomatisierung der Geometrie - das Ergebnis eines langwierigen erkenntnistheoretischen Prozesses. Vektoren sind im Sinne der Hochschulmathematik Elemente der Trägermenge eines K-Vektorraumes $(V, +, \cdot)$, wobei K ein Körper, $(V, +)$ eine abelsche Gruppe und $\cdot$ eine Verknüpfung zwischen K und V ist, sodass für alle $c, c' \in K$ und alle $v, v' \in V$ die Aussagen

(o) $c \cdot v \in V$

(i) $(c + c') \cdot v = c \cdot v + c' \cdot v$

(ii) $(cc') \cdot v = c \cdot (c' \cdot v)$

(iii) $c \cdot (v + v') = c \cdot v + c \cdot v'$

(iv) $1_K \cdot v = v$

erfüllt sind. Wir halten fest:

Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraumes.

Eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq V$ eines K-Vektorraumes V heißt *K-Teilraum von V*, wenn $(T, +, \cdot)$ selbst ein K-Vektorraum ist. Ist T ein K-Teilraum von V und $v \in V$, so heißt die Menge $T + v = \{x \mid \exists t \in T : x = t + v\}$ ein *affiner K-Teilraum von V*. Ist $v \notin T$, so ist der affine K-Teilraum $T + v$ kein Vektorraum mehr.

In diesem Sinne ist *analytische Geometrie* die Theorie der affinen K-Teilräume von Vektorräumen. Dabei spielen insbesondere die euklidischen Vektorräume eine Rolle. Dabei heißt ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V *euklidisch*, wenn eine positiv definite Bilinearform $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ existiert. Euklidische Geometrie wird damit zur Theorie der positiv definiten symmetrischen Bilinearformen[1] und affiner Teilräume, in der Vektorräume axiomatisch eingeführt werden. Geometrische und algorithmische Aspekte spielen

[1](bzw. hermiteschen Formen bei $\mathbb{C}$-Vektorräumen, auf die wir hier nicht näher eingehen)

hingegen nur eine untergeordnete Rolle (vgl. [45], S. 3). Hierbei wird die Mathematik als *Produkt* und weniger als *Prozess* dargestellt.

Wir präsentieren im Folgenden eine Konstruktion, mit der sich eine große Klasse an Beispielen für Vektorräume generieren lässt.

Fundamentalbeispiel einer Vektorraumkonstruktion:

Sind X, K Mengen, so bezeichnen wir mit K^X die Menge aller Abbildungen von X nach K. Ist $X = \{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir kurz K^n statt $K^{\{1,\ldots,n\}}$. Ist $k \in K^X$, so definieren wir für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die j-te Komponente von k als $k_j := k(j)$ und schreiben $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$. k heißt dann *n-Tupel* über K. Statt 2-Tupel sagen wir auch kurz *Tupel*. Ein 3-Tupel heißt auch *Tripel*.

Sei nun K ein Körper, X eine Menge, $V := K^X$. Auf V definieren wir eine Verknüpfung

$$\hat{+} : V \times V \to V, (f_1, f_2) \mapsto f_1 \hat{+} f_2$$

durch

$$f_1 \hat{+} f_2 : X \to K, x \mapsto f_1(x) + f_2(x).$$

Außerdem definieren wir eine Verknüpfung

$$\hat{\cdot} : K \times V \to V, (c, f) \mapsto c \hat{\cdot} f$$

zwischen K und V durch

$$c \hat{\cdot} f : X \to K, x \mapsto c \cdot f(x).$$

Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnung $+$ statt $\hat{+}$ und $\cdot$ statt $\hat{\cdot}$.
Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

Einen wichtigen Spezialfall erhalten wir, wenn wir $X = \{1, \ldots, n\}$ setzen. Dann ist $K^X = K^n$ die Menge aller n-Tupel über K. Wählen wir als zugrunde liegenden Körper $K = \mathbb{R}$ die reellen Zahlen, so erhalten wir, dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Insbesondere sind damit die Ebene $\mathbb{R}^2$ und der Raum $\mathbb{R}^3$ Vektorräume. Punkte der Ebene und des Raumes sind also Elemente eines Vektorraumes und damit Vektoren.

Eine grundlegende Erkenntnis der linearen Algebra ist, dass endlichdimensionale K-Vektorräume gleicher Dimension zueinander isomorph sind (siehe z.B. [15]). Insbesondere ist jeder zweidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum isomorph zur Ebene $\mathbb{R}^2$ und jeder dreidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum isomorph zum Raum $\mathbb{R}^3$. Damit ist der $\mathbb{R}^n$, und insbesondere der $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, die übliche Konkretisierung eines Vektorraumes in der Schulmathematik, die es gestattet, abstrakte Zusammenhänge der linearen Algebra in Aussagen über den $\mathbb{R}^2$ respektive den $\mathbb{R}^3$ zu übersetzen und somit für die Schulmathematik zugänglich zu machen. Zusammen mit der Identifizierung aus Abschnitt 2.1 halten wir folgende Tatsache fest:

Die euklidische Ebene und der euklidische Raum sind Vektorräume.

In dieser Arbeit werden die beiden Stränge *Geometrie* und *Vektorraumtheorie* zusammengeführt und für eine Verwendung in der Schule aufbereitet. Die entscheidenden Bindeglieder dazu sind der $\mathbb{R}^2$ und der $\mathbb{R}^3$, die einerseits unter dem Aspekt der euklidischen Ebene und des euklidischen Raumes, andererseits jedoch auch als Vektorräume betrachtet werden. Die Art und Weise dieser Aufbereitung unterscheidet sich dabei dadurch von den herkömmlichen Zugängen dadurch, dass ausschließlich Punkte als zugrundeliegende Objekte verwendet werden. Dieser Zugang wird im folgenden Abschnitt näher erläutert.

2.3 Zugänge zur analytischen Geometrie

Der axiomatische Vektorraumbegriff liefert aufgrund seiner begrifflichen Klarheit und Einfachheit ein geeignetes Beispiel einer axiomatisch aufgebauten Theorie und ist ein adäquates Mittel, um die Oberstufengeometrie axiomatisch streng zu entwickeln. Dieser axiomatische Zugang ist jedoch - ebenso wie der axiomatische Zugang zur Geometrie - trotzdem für ein schulisches Curriculum ungeeignet. Das dadurch erzeugte Bild der Mathematik stellt diese nämlich als fertiges Produkt dar. Dies widerspricht einerseits der historischen Entwicklung, nach der Axiomensysteme am Ende eines Entwicklungsprozesses stehen und nicht an dessen Anfang, anderseits verhindert die sich dadurch ergebende stringente Unterrichtsführung die Öffnung von Unterrichtssituationen. Aber nur diese Öffnung *„kann der Bedeutung der Heuristik für das Fach Mathematik gerecht werden“*([6], S. 76), und dieser Erwerb von heuristischen Fähigkeiten ist eine der drei Grunderfahrungen, die allgemeinbildender Mathematikunterricht nach Winter [50] ermöglichen sollte.

Deshalb werden in der Schule die fachlichen Inhalte durch geometrisch-anschauliche und kalkülhaft-algorithmische Aspekte ergänzt. Dies führt zu den gebräuchlichen Interpretationen des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bzw. dessen (affiner) Teilräume als

1. Lösungsmengen homogener und inhomogener linearer Gleichungssysteme,
2. Äquivalenzklassen von Pfeilen, in der analytischen Geometrie der Schule auch *Vektoren* genannt,
3. Stücklisten bei Produktionsprozessen,

die die Schüler auf dem Weg von der Ablösung von den Vorstellungen hin zum Verständnis abstrakter Objekte begleiten. Dadurch ergibt sich ein konstruktivistischer Lernprozess gemäß den Forderungen von Borneleit in [6].

2.3.1 Zugang über Pfeilklassen

Der in dieser Arbeit entwickelte punktbasierte Zugang zur analytischen Geometrie soll insbesondere dem Zugang über Pfeilklassen gegenübergestellt werden, weshalb dieser kurz skizziert wird. Wir orientieren uns dabei an den Ausführungen in [21], wo mit geringfügiger Variation der Bezeichnungen die fehlenden Beweise nachzulesen sind. Diesen Zugang wollen wir im Folgenden als *klassischen Zugang* zur analytischen Geometrie bezeichnen.

Es werden die elementargeometrischen Begriffen *Punkt, Strecke, Streckenlänge, Gerade* als bekannt vorausgesetzt. Ein *Pfeil* oder auch eine *gerichtete Strecke* AB ist ein geordnetes Paar von Punkten A und B.

Auf der Menge der Pfeile wird die folgende Relation definiert: Zwei gerichtete Strecken (Pfeile) AB und CD heißen *parallelgleich*, falls sie gleich lang und gleichsinnig parallel sind, wenn also gilt:

(i) Die Abstände zwischen Anfangs- und Endpunkt sind bei beiden Pfeilen gleich: $|AB| = |CD|$.

(ii) Die Geraden, denen die beiden Pfeile angehören, sind parallel zueinander: $g(A, B) \parallel g(C, D)$.

(iii) Die Pfeile AB und CD sind gleich orientiert.
Dabei heißen AB und CD, die (i) und (ii) erfüllen, gleich orientiert, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Falls $g(A, B) = g(C, D)$, so ist $AB = CD$ oder (B und C liegen zwischen A und D) oder (A und D' liegen zwischen B und C).
- Falls $g(A, B) \neq g(C, D)$, so ist das Viereck $ABDC$ ein Parallelogramm, es gilt also zusätzlich $g(A, C) \parallel g(B, D)$.

Die Relation *parallelgleich* ist eine Äquivalenzrelation und partitioniert somit die Menge der gerichteten Strecken in Äquivalenzklassen. Diese Äquivalenzklassen bezeichnen wir als *Pfeilklassen* und bezeichnen die Pfeilklasse einer gerichteten Strecke u mit $\vec{u} := \{x \mid x \text{ ist parallelgleich zu } u\}$. Sind AB und BC Pfeile, so definieren wir die Summe von AB und BC als $AB + BC = AC$. Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Pfeilklassen und ist $AB \in \vec{u}$ ein Repräsentant von $\vec{u}$, so finden[2] wir einen Punkt C, so dass $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ ist und definieren $\vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AB + BC} = \overrightarrow{AC}$. Der Nachweis, dass diese Addition tatsächlich unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist, ist beispielsweise in [13], S. 92 nachzulesen. Der dort gegebene Beweis verwendet den Stufenwinkelsatz an parallelen Geraden sowie die Kongruenzsätze für Dreiecke. Mit dieser Addition wird

[2] Ist XY irgendein Repräsentant von $\vec{v}$ und $B \notin g(X, Y)$, so wählen wir C derart, dass das Viereck $XYCB$ ein Parallelogramm ist. Ist $B \in g(X, Y)$, so müssen wir die Strecke XY von B aus auf der Geraden $g(X, Y)$ derart abtragen, dass XY und BC gleich orientiert sind.

die Menge der Pfeilklassen zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element $\overrightarrow{AA}$. Zu jeder Pfeilklasse $\overrightarrow{AB}$ ist das Element $-\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{BA}$ invers.

Setzen wir voraus, dass die generelle Streckenabtragung reeller Zahlen möglich ist, so finden wir zu jeder Pfeilklasse $\vec{u}$, jedem Repräsentanten $AB \in \vec{u}$ und jeder reellen Zahl r einen Punkt C, so dass $|AC| = |r|\,|AB|$ ist und C im Fall $r > 0$ auf der gleichen Seite von A liegt wie B, und im Fall $r < 0$ auf der entgegengesetzten Seite von A liegt wie B und definieren die Multiplikation $r \cdot \vec{u} := \overrightarrow{AC}$. Auch hier ist wieder die Unabhängigkeit der Definition von der Wahl des Repräsentanten zu zeigen.

Die Menge der Pfeilklassen bildet mit der oben definierten Addition und Multiplikation einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Jede Pfeilklasse ist somit ein Element eines Vektorraumes und damit ein Vektor.

Die Problematik der analytischen Geometrie in der Schule ist nun, dass diese Tatsache häufig wie in der nebenstehenden Abbildung im umgekehrten Sinne verwendet wird: Vektoren werden als Pfeilklassen *definiert*, womit sich die umgekehrte Implikation *„Jeder Vektor ist eine Pfeilklasse“* ergibt. Dies verhindert nicht nur im späteren Unterrichtsverlauf, dass auch andere Beispiele für Vektorräume und damit für Vektoren behandelt werden können, durch eine derartige Einführung wird der klare Blick auf die Vektoreigenschaft vernebelt. Aus der schlichten und klaren fachlichen Definition des Vektors als Element eines Vektorraumes auf Seite 19 werden schwammige Formulierungen wie *„zu einer Klasse zusammengefasst“*, *„gleiche Richtung“* und *„Pfeilklasse“* verwendet, die rein gar nichts mit der fachlichen Definition des Vektors gemein haben.

Wir fassen daher alle Pfeile der Ebene (des Raumes), die gleiche Länge und gleiche Richtung haben, zu einer Klasse zusammen. Eine solche Pfeilklasse bezeichnen wir als einen ***Vektor*** in der Ebene (im Raum).

Vektoren stellen wir symbolisch durch Kleinbuchstaben dar, die mit einem Pfeil versehen sind: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$.
Jeder Vektor ist schon durch einen einzigen seiner Pfeile festgelegt.
Daher bezeichnen wir beispielsweise den Vektor $\vec{a}$ aus nebenstehendem Bild auch als Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Eine vektorielle Größe ist also durch eine Richtung und eine Länge gekennzeichnet im Gegensatz zu einer reellen Zahl, einer sog. skalaren Größe.

Abb. 2.1: Einführung des Vektorbegriffs in [4]

Noch verwirrender wird nach einer Einführung des Vektorbegriffes als Äquivalenzklasse von Pfeilen die geometrische Interpretation der Addition. In der nebenstehenden *Dreiecksregel* ist vollkommen unklar, ob mit $\overrightarrow{PQ}$ nun der gerichtete Pfeil gemeint ist, oder eine Pfeilklasse, oder ein Objekt, das sowohl Pfeil als auch Pfeilklasse ist. Auch der textliche Umfang dieser doch eigentlich anschaulichen Regel ist durch die Pfeilklassenstruktur enorm.

Dreiecksregel (Addition durch Aneinanderlegen): Ist $\overrightarrow{PQ}$ ein Repräsentant von $\vec{a}$ und $\overrightarrow{QR}$ der in Q beginnende Repräsentant von $\vec{b}$, so ist $\overrightarrow{PR}$ ein Repräsentant der Summe $\vec{a}+\vec{b}$.

Abb. 2.2: Geometrische Interpretation der Addition in [4]

2.3.2 Punktbasierte analytische Geometrie

Der Weg zum abstrakten Begriffsverständnis wird gefördert durch ein Wechselspiel zwischen unterschiedlichen Vorstellungen ein und desselben mathematischen Objektes, und deshalb sollte den Schülern ein breites Repertoire an Interpretationen angeboten werden. So fordert die Deutsche Mathematiker Vereinigung beispielsweise bereits in ihrer Denkschrift [46]:

> *„Zur Behandlung der Gleichungssysteme gehört deren geometrische Interpretation in Ebene und Raum [...]. Dabei ist die geometrische Interpretation der Vektoren wichtig, [...] jedoch ohne daß dadurch der Vektorbegriff einseitig auf gerichtete Strecken oder Pfeilklassen fixiert werden sollte."*

Werden Vektoren zu Beginn einer Unterrichtseinheit über analytische Geometrie als Pfeilklassen definiert, so ist dies nicht nur vom fachlichen Standpunkt aus schlichtweg falsch, da Vektoren ja keine Pfeilklassen, sondern genau umgekehrt Pfeilklassen Beispiele für Vektoren sind. Diese Definition führt auch zwangsweise zu einer Fixierung des Vektorbegriffs auf Pfeilklassen. Zur geforderten Loslösung des Vektorbegriffs von den Pfeilklassen ist es daher notwendig, weitere Interpretationsmöglichkeiten des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ zu entwickeln. Mit *punktbasierter analytischer Geometrie* meinen wir in diesem Zusammenhang eine weitere Interpretationsmöglichkeit, und zwar die Interpretation der Elemente des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ als Punkte der Ebene bzw. des Raumes unter Ausnutzung der Vektorraumstruktur. Da den Schülern Zahlenpaare schon aus der Sekundarstufe I als Punkte der Ebene bekannt sind, bedarf es zunächst keiner Einführung des mathematischen Begriffs *Vektor*. Wir beginnen stattdessen mit Punkten als *Beispiel* für einen Vektorraum. Erst wenn neben den Punkten weitere Beispiele von Vektorräumen behandelt wurden, kann nach gemeinsamen Eigenschaften dieser Objekte gesucht werden und letztendlich für alle Objekte, die diese Eigenschaft erfüllen, der Name *Vektorraum* bzw. *Vektor* vergeben werden.

Die obenstehende Interpretation wurde von Dieudonné [10] in einem Vortrag im Jahre 1966 für die Schulmathematik vorgeschlagen und unter anderem von Lorenzen in [29] und Malle in [30] diskutiert. In dieser Arbeit sollen diese Diskussionen aufgegriffen und didaktisch ausgearbeitet werden. Wir werden dabei diese Interpretation insbesondere der Interpretation des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ als Menge der Äquivalenzklassen von Pfeilen gegenüberstellen.

Teil I

Fachliche Grundlagen

3 Einleitung

Die Mengen $\mathscr{P} := \mathbb{R}^2$ und $\mathscr{G} := \{\mathbb{R} \cdot A + P \mid P, A \in \mathbb{R}^2, A \neq O\}$ bilden die Punkt- und Geradenmengen einer Konkretisierung der euklidischen Geometrie, die die hilbertschen Axiome erfüllt. Die Menge $\mathscr{G}$ ist jedoch auch die Menge aller echten nichttrivialen affinen Teilräume des $\mathbb{R}^2$. In diesem Teil der Arbeit sollen diese beiden Stränge zusammengeführt und es soll eine geschlossene Theorie zur Geometrie des $\mathbb{R}^2$ und des $\mathbb{R}^3$ präsentiert werden, in der die Menge $\mathscr{G}$ ebenfalls die Menge der Geraden darstellt. Anders als zuvor soll die Geometrie jedoch nicht anhand der hilbertschen Axiome aufgebaut werden, sondern es sollen die Begriffe unabhängig vom hilbertschen Axiomensystem definiert werden. Die intuitiv klaren Aussagen werden direkt aus den Definitionen innerhalb des Modells bewiesen. Dabei werden wir die Tatsache ausnutzen, dass der $\mathbb{R}^2$ bzw. der $\mathbb{R}^3$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, was es uns ermöglicht Beweise zu führen, die lediglich die Eigenschaften dieser mathematischen Struktur nutzen.

1. Wir beginnen dabei mit der affinen Geometrie. Darunter verstehen wir den Teil der Geometrie, der ohne Längenmessung auskommt. Da die Definition der Orthogonalität auf dem Punktprodukt basiert und dieses ebenfalls zur Definition des Abstandes zweier Punkte verwendet wird, zählen wir die Orthogonalität nicht mehr zur affinen Geometrie. Die dort getätigten Aussagen gelten nicht nur für den $\mathbb{R}^2$ und den $\mathbb{R}^3$, sondern für beliebige Dimension n. Dort werden wir folgende Tatsachen beweisen:

- Nicht-Eindeutigkeit der Darstellung von Geraden,
- Existenz einer Geraden durch zwei Punkte,
- Eindeutigkeit und Existenz der Parallelen.

2. Mit der Einführung des Punktproduktes erweitern wir die Vektorraumstruktur zum euklidischen Vektorraum und sind damit in der Lage, metrische Begriffe einzuführen. Es werden folgende Sätze bewiesen:

- die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Minkowski-Ungleichung und Dreiecksungleichung,

- der Satz des Pythagoras,
- ein Satz zur Abstandsberechnung von Punkt und Gerade.

3. Das nächste Kapitel beschäftigt sich mit Aussagen, die speziell im Zweidimensionalen gelten. Diese sind:

- das orthogonale Komplement einer Ursprungsgeraden ist eine Ursprungsgerade,
- das Lot auf eine Gerade durch einen Punkt ist auch dann eindeutig, wenn der Punkt auf der Geraden liegt,
- Orthogonalität und Parallelität sind miteinander verträglich,
- verschiedene Geraden sind genau dann parallel zueinander, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt besitzen,
- Geraden sind genau die Urbilder von Linearformen,
- Aussagen über Teilungspunkte,
- elementargeometrische Sätze, wie der Mittelparallelensatz in Dreiecken, Charakterisierungssätze von Parallelogrammen, Sätze über den Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Höhenlinienschnittpunkt in Dreiecken, Mittellotprinzip,
- Aussagen über Schnitte von Kreisen mit Geraden und Kreisen.

4. Im Anschluss werden lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit charakterisiert sowie gezeigt, dass der Begriff der Dimension wohldefiniert ist.

5. Es folgen Eigenheiten der Geometrie des Raumes. Dort gibt es zu einer Ursprungsgeraden nicht mehr nur eine dazu orthogonale Ursprungsgerade. Sind jedoch zwei verschiedene Ursprungsgeraden gegeben, so können wir die zu beiden Geraden orthogonale Ursprungsgerade mithilfe des Kreuzproduktes berechnen. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung lässt sich im Dreidimensionalen mithilfe des Kreuzproduktes beweisen. Dies liefert eine wichtige geometrische Interpretation des Kreuzproduktes. Im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall können Geraden nun auch windschief sein, was die Frage nach der Größe des Abstandes windschiefer Geraden aufwirft. Genauso wie bei Geraden ist auch für Ebenen die Darstellung nicht eindeutig. Es werden verschiedene Darstellungsformen von Ebenen diskutiert und die Lage von Ebenen und Geraden sowie von Ebenen und Ebenen untersucht. Es folgt die Berechnung des Abstandes von Punkten und Ebenen. Anschließend definieren wir den Begriff des Winkels und führen die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus ein, womit wir in der Lage sind Schnittwinkel zwischen zwei Geraden, zwischen Gerade und Ebene sowie zwischen zwei Ebenen zu berechnen. Das Kreuzprodukt ermöglicht es uns obendrein, Flächen- und Rauminhalte zu berechnen. Das dreidimensionale Analogon zum Kreis ist die Kugel. Auch hier wird wieder die Lage zwischen den nun vorhandenen geometrischen Objekten Kugel, Ebene und Gerade untersucht.

Den vorliegenden Aufbau hat Dieudonné in [10] skizziert und in einem abstrakteren Rahmen in [9] veröffentlicht. Dieudonné führt sowohl die reellen Zahlen als auch die euklidische Ebene axiomatisch ein, die Axiome basieren dabei jedoch nicht auf dem Hilbertschen Axiomensystem, sondern auf den Vektorraumaxiomen. Wir haben diesen Aufbau als Grundlage genommen und derart abgewandelt, dass er als fachliche Grundlage für einen Unterrichtsgang verwendet werden kann. Wir arbeiten im Gegensatz zu Dieudonné stets mit Konkretisierungen von Axiomensystemen, wodurch wir den Abstraktionsgrad erheblich reduzieren. Wir verzichten an einigen Stellen bewusst auf größtmögliche Objektklarheit, um den Text als Grundlage für die Erstellung eines Unterrichtswerkes verwenden zu können. Somit erfolgt hier keine mengentheoretische Konstruktion der natürlichen und reellen Zahlen. Auch werden Zahlenpaare als formales Objekt hingenommen und nicht auf das Grundobjekt *Menge* zurückgeführt[1]. Den $\mathbb{R}^n$ konstruieren wir nicht wie auf Seite 20 als Menge von Funktionen, sondern akzeptieren n-Tupel als formales Objekt, ohne dessen Natur genauer zu erläutern. Fischer beschreitet in den einleitenden Kapiteln seines Lernbuches [14], aus dem wir einige Bezeichnungsweisen übernommen haben, einen ähnlichen Weg.

[1]Eine gängige Darstellung des Objektes (a, b) mithilfe des Grundobjektes *Menge* stammt von Kazimierz Kuratowski ([26], S. 171). Eine Menge p heißt Kuratowski-Paar, wenn es Mengen a, b gibt, so dass $p = \{\{a, b\}, \{a\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ gilt. Der Durchschnitt der beiden Elemente eines Kuratowski-Paares enthält genau ein Element. Dieses Element nennen wir die 1. *Komponente* von p und bezeichnen diese mit p_1. Ist $p = \{\{a, b\}, \{a\}\}$, so ist $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$, also ist $a = p_1$. Die symmetrische Differenz der beiden Elemente eines Kuratowski-Paares p ist entweder leer, oder enthält genau ein Element. Im letzteren Fall nennen wir dieses die 2. *Komponente* von p und bezeichnen diese mit p_2. Im ersten Fall definieren wir die zweite Komponente gleich der ersten Komponente von p. Aus der Kenntnis von p lassen sich a und b in der gegebenen Reihenfolge rekonstruieren. Wir schreiben $(a, b) := \{\{a, b\}, \{a\}\}$.

4 Punkte und Geraden

Wir betrachten den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als gegeben.

Definition 4.1. *Unter der* Ebene $\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ *verstehen wir die Menge aller Tupel reeller Zahlen. Den Koordinatenursprung bezeichnen wir mit* $O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Ferner definieren wir die Punkte* $E_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $E_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Elemente des $\mathbb{R}^2$ nennen wir Punkte, die wir in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots$ bezeichnen. Für jeden Punkt $A \in \mathbb{R}^2$ existieren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. a_1 nennen wir die *erste Koordinate* von A, a_2 die *zweite Koordinate* von A. Koordinaten eines Punktes bezeichnen wir üblicherweise mit dem dazugehörigen kleinen lateinischen Buchstaben, indiziert mit der Nummer der Koordinate. Statt erste Koordinate und zweite Koordinate sagen wir auch x-Koordinate und y-Koordinate. Elemente der reellen Zahlen nennen wir *Skalare*. Zwei Punkte $A \in \mathbb{R}^2$ und $B \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann gleich, wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ ist.

Völlig analog definieren wir den *Raum*.

Definition 4.2. *Unter dem* Raum $\mathbb{R}^3 := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ *verstehen wir die Menge aller Tripel reeller Zahlen. Den Koordinatenursprung bezeichnen wir mit* $O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Wir definieren* $E_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Elemente des Raumes nennen wir ebenfalls Punkte und bezeichnen sie in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots$ Für jeden Punkt $A \in \mathbb{R}^3$ existieren $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. a_1 nennen wir die *erste Koordinate* von A, a_2 die *zweite Koordinate*, a_3 die *dritte Koordinate* von A. Alternativ sprechen wir auch von der x-Koordinate, der y-Koordinate und der z-Koordinate. Zwei Punkte $A \in \mathbb{R}^3$ und $B \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann gleich, wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ und $a_3 = b_3$ ist.

Viele der folgenden Überlegungen gelten sowohl für Punkte der Ebene als auch für Punkte des Raumes, wir sprechen in dem Fall einfach von Punkten. Wir fixieren deshalb eine natürliche Zahl $n \in \{2, 3\}$. Ist $n = 2$, so beziehen sich die Überlegungen auf Punkte der Ebene. Ist $n = 3$, so beziehen sich die Überlegungen auf Punkte des Raumes. Die Zahl n nennen wir *Dimension*.

Im Gegensatz zu der Konstruktion auf Seite 20 werden 2-Tupel und Tripel nicht als Funktionen definiert, sondern als intuitiv gegeben betrachtet. Dadurch vermeiden wir an dieser Stelle die Verwendung des Funktionsbegriffs, erkaufen diese Vereinfachung jedoch mit dem Preis, dass wir den $\mathbb{R}^2$ und den $\mathbb{R}^3$ nicht mehr als einheitliches Objekt, nämlich als Menge von Funktionen, sehen können und deshalb in den folgenden Definitionen und Sätzen den Fall $n = 2$ und $n = 3$ stets gesondert behandeln müssen.

Definition 4.3. *Sind $A, B \in \mathbb{R}^2$ Punkte der Ebene und ist $s \in \mathbb{R}$, so definieren wir die* Summe $A \hat{+} B$ *und die* Vervielfachung $s \hat{\cdot} A$ *durch*

$$A \hat{+} B := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und } s \hat{\cdot} A := \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \end{pmatrix}.$$

Sind $A, B \in \mathbb{R}^3$ Punkte des Raumes und ist $s \in \mathbb{R}$, so definieren wir

$$A \hat{+} B := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad \text{und } s \hat{\cdot} A := \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben $A + B$ statt $A \hat{+} B$ sowie $s \cdot A$ bzw. noch kürzer sA statt $s \hat{\cdot} A$. Für Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $-A := (-1)A$ und $A - B := A + (-B)$.

Die elementaren Rechenregeln für diese Verknüpfungen fassen wir in folgendem Satz zusammen.

Satz 4.1. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ Punkte und $r, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $A + B = B + A$,
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$,
3. $O + A = A = A + O$,
4. $A + (-A) = O$,
5. $(s + t) \cdot A = s \cdot A + t \cdot A$,
6. $s \cdot (A + B) = s \cdot A + s \cdot B$,
7. $(rs) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$,
8. $1 \cdot A = A$.

Beweis. Ein mathematisch rigider Beweis dieses Satzes für beliebige Dimension n, der ohne mehrdeutige „*Pünktchenschreibweisen*“ auskommt, ist durch Beschreibung der n-Tupel als Funktionen möglich. Da wir nur eine intuitive Vorstellung von Tupeln verwenden, zeigen wir den Beweis an dieser Stelle nur exemplarisch für Punkte des Raumes.

1. Aus der Kommutativität der Addition reeller Zahlen folgt
$$A+B=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+a_1\\b_2+a_2\\b_3+a_3\end{pmatrix}=B+A.$$

2. Aus der Assoziativität der Addition reeller Zahlen folgt
$$(A+B)+C=\begin{pmatrix}(a_1+b_1)+c_1\\(a_2+b_2)+c_2\\(a_3+b_3)+c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+(b_1+c_1)\\a_2+(b_2+c_2)\\a_3+(b_3+c_3)\end{pmatrix}=A+(B+C).$$

3. Es ist $O+A=\begin{pmatrix}0+a_1\\0+a_2\\0+a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=A$ und damit auch $A+O=O+A=A$.

4. Es ist $A+(-A)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+(-a_1)\\a_2+(-a_2)\\a_3+(-a_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=O.$

5. Aus dem Distributivgesetz der reellen Zahlen folgt
$$(s+t)\cdot A=\begin{pmatrix}(s+t)a_1\\(s+t)a_2\\(s+t)a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1+ta_1\\sa_2+ta_2\\sa_3+ta_3\end{pmatrix}=s\cdot A+t\cdot A,\ \text{sowie}$$

6. $s\cdot(A+B)=\begin{pmatrix}s(a_1+b_1)\\s(a_2+b_2)\\s(a_3+b_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1+sb_1\\sa_2+sb_2\\sa_3+sb_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}sb_1\\sb_2\\sb_3\end{pmatrix}=s\cdot A+s\cdot B.$

7. Wegen der Assoziativität der Multiplikation reeller Zahlen gilt
$$(rs)\cdot A=\begin{pmatrix}(rs)a_1\\(rs)a_2\\(rs)a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(sa_1)\\r(sa_2)\\r(sa_3)\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}=r\cdot(s\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix})=r\cdot(s\cdot A).$$

8. Es ist $1\cdot A=\begin{pmatrix}1a_1\\1a_2\\1a_3\end{pmatrix}=A.$

□

Neben Punkten führen wir Geraden als weiteres grundlegendes Objekt ein.

Definition 4.4. *Eine Teilmenge $g \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* Gerade*, falls ein Punkt $A \in \mathbb{R}^n$, $A \neq O$ und ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass*

$$g = \{X \mid X \in \mathbb{R}^n, \exists r \in \mathbb{R} : X = r \cdot A + P\}$$

ist. Wir schreiben in dem Fall auch kurz $g = \{r \cdot A + P \mid r \in \mathbb{R}\}$ oder noch kürzer $g = \mathbb{R} \cdot A + P$.

Die Geraden konkretisieren den Begriff des affinen Teilraumes. Im Fall $n = 2$ sind die Geraden sogar die einzigen nichttrivialen echten affinen Teilräume des $\mathbb{R}^2$. Im Fall $n = 3$ kommen zusätzlich noch die Ebenen hinzu.

Die Darstellung der Geraden durch die Punkte A und P ist nicht eindeutig. Dies besagt der folgende Satz.

Satz 4.2. *Sei $g = \mathbb{R} \cdot A + P$ eine Gerade und $Q \in g$ ein Punkt auf der Geraden. Dann ist $g = \mathbb{R} \cdot A + Q$.*

Beweis. Da $Q \in g = \mathbb{R} \cdot A + P$ ist, finden wir ein $r \in \mathbb{R}$ mit $Q = r \cdot A + P$.
Ist nun $X \in g = \mathbb{R} \cdot A + P$, so finden wir ein $s \in \mathbb{R}$ mit $X = s \cdot A + P$ und es folgt

$$X = s \cdot A + P = s \cdot A + (Q - r \cdot A) = (s - r) \cdot A + Q \in \mathbb{R} \cdot A + Q.$$

Ist umgekehrt $X \in \mathbb{R} \cdot A + Q$, so finden wie ein $s \in \mathbb{R}$ mit $X = s \cdot A + Q$ und es folgt

$$X = s \cdot A + Q = s \cdot A + (P + r \cdot A) = (r + s) \cdot A + P \in \mathbb{R} \cdot A + P.$$

Insgesamt erhalten wir $g = \mathbb{R} \cdot A + P = \mathbb{R} \cdot A + Q$. □

Diese Uneindeutigkeit der Darstellung von Geraden wirft die Frage auf, wann zwei Geraden gleich sind. Diese wird durch den folgenden Satz beantwortet.

Satz 4.3. *Seien $g = \mathbb{R} \cdot A + P$ und $g' = \mathbb{R} \cdot A' + P'$ zwei Geraden. Dann ist $g = g'$ genau dann, wenn $g \cap g' \neq \emptyset$ ist und ein $r \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $A = r \cdot A'$ ist.*

Beweis. Ist $g = g'$, so ist $g \cap g' = g \neq \emptyset$ und wir finden ein $X \in g \cap g'$. Damit ist $\mathbb{R} \cdot A + X = g = g' = \mathbb{R} \cdot A' + X$ gemäß Satz 4.2. Insbesondere ist

$$A + X = 1 \cdot A + X \in \mathbb{R} \cdot A + X = \mathbb{R} \cdot A' + X,$$

wir finden also ein $r \in \mathbb{R}$ mit $A + X = r \cdot A' + X$, woraus wir wie behauptet

$$A = (A + X) - X = (r \cdot A' + X) - X = r \cdot A' + (X - X) = r \cdot A' + O = r \cdot A'$$

erhalten.

Sei nun $g \cap g' \neq \emptyset$ und $r \in \mathbb{R}$, so dass $A = r \cdot A'$ ist. Da g eine Gerade ist, ist $A \neq O$ und damit $r \neq 0$. Da $g \cap g' \neq \emptyset$ ist, finden wir einen Punkt $X \in g \cap g'$. Gemäß Satz 4.2 ist $g = \mathbb{R} \cdot A + X$ und $g' = \mathbb{R} \cdot A' + X$. Wir zeigen nun, dass $g = g'$ ist.

Ist $Y \in g = \mathbb{R} \cdot A + X$, so finden wir ein $t \in \mathbb{R}$ mit $Y = t \cdot A + X$ und erhalten

$$Y = t \cdot A + X = t \cdot (r \cdot A') + X = tr \cdot A' + X \in \mathbb{R} \cdot A' + X = g'.$$

Also ist $g \subseteq g'$.

Ist umgekehrt $Y \in g' = \mathbb{R} \cdot A' + X$, so finden wir ein $t \in \mathbb{R}$ mit $Y = t \cdot A' + X$ und erhalten

$$Y = t \cdot A' + X = t \cdot (\frac{1}{r} \cdot A) + X = \frac{t}{r} \cdot A + X \in \mathbb{R} \cdot A + X = g.$$

Damit ist auch $g \supseteq g'$, womit insgesamt $g = g'$ gezeigt ist. □

Korollar: Seien $g = \mathbb{R} \cdot A + P$ und $g' = \mathbb{R} \cdot A' + P'$ zwei Geraden. Dann ist $g = g'$ genau dann, wenn $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot A'$ und $P - P' \in \mathbb{R} \cdot A$ ist.

Beweis. Ist $g = g'$, so finden wir nach der Hinrichtung von Satz 4.3 ein $r \in \mathbb{R}$ mit $A = r \cdot A'$. Das bedeutet, dass $A \in \mathbb{R} \cdot A'$ ist. Da außerdem $O \in \mathbb{R} \cdot A \cap \mathbb{R} \cdot A'$ ist, folgt aus der Rückrichtung von Satz 4.3, dass $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot A'$ ist. Damit ist $P \in \mathbb{R} \cdot A + P'$, also wie behauptet $P - P' \in \mathbb{R} \cdot A$.

Ist umgekehrt $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot A'$ und $P - P' \in \mathbb{R} \cdot A$, so finden wir wegen $A \in \mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot A'$ ein $r \in \mathbb{R}$ mit $A = rA'$ und wegen $P - P' \in \mathbb{R} \cdot A$ ein $s \in \mathbb{R}$ mit $P - P' = s \cdot A$. Es folgt $P = (P - P') + P' = s \cdot A + P' = s \cdot (r \cdot A') + P' = (sr) \cdot A' + P' \in g'$. Damit ist $g \cap g' \neq \emptyset$ und $A = rA'$, also $g = g'$ nach Satz 4.2. □

Satz 4.4. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ Punkte, $A \neq B$. Dann gibt es genau eine Gerade, die A und B enthält.*

Beweis. Da $A \neq B$ ist, ist $B - A \neq O$. Deshalb ist die Menge $g := \mathbb{R} \cdot (B - A) + A$ eine Gerade, und wegen $A = 0 \cdot (B - A) + A$ und $B = 1 \cdot (B - A) + A$ enthält diese Gerade die Punkte A und B.

Sei nun $g' = \mathbb{R} \cdot X + A'$ eine Gerade, die ebenfalls die Punkte A und B enthält. Wir zeigen, dass $g = g'$ ist. Da $g' \cap g \neq \emptyset$ ist, reicht es dafür nach Satz 4.3 zu zeigen, dass wir ein $r \in \mathbb{R}$ finden, so dass $X = r(B - A)$ ist.

Nach Satz 4.2 ist $g' = \mathbb{R} \cdot X + A$. Da $B \in g' = \mathbb{R} \cdot X + A$ ist, finden wir ein $t \in \mathbb{R}$ mit $B = t \cdot X + A$. Da $B \neq A$ ist, ist $t \neq 0$. Wir setzen $r := \frac{1}{t}$. Für dieses r gilt in der Tat $r \cdot (B - A) = \frac{1}{t} \cdot ((t \cdot X + A) - A) = \frac{1}{t} \cdot (t \cdot X) = X$. Also ist $g = g'$.

□

Definition 4.5. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ Punkte, $A \neq B$. Die nach Satz 4.4 eindeutig bestimmte Gerade, die A und B enthält, bezeichnen wir mit $g(A, B)$.*
Es gilt $g(A, B) = \mathbb{R} \cdot (B - A) + A$.

Sind zwei verschiedene Darstellungen $g = \mathbb{R} \cdot A + P = \mathbb{R} \cdot A' + P'$ einer Geraden g gegeben, so ist nach Korollar zu Satz 4.3 $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot A'$. Die Menge $\mathbb{R} \cdot A$ ist also unabhängig von der Wahl der Darstellung der Geraden g. Wir definieren also:

Definition 4.6. *Sei $g = \mathbb{R} \cdot A + P$ eine Gerade. Dann bezeichnen wir mit g_O die eindeutig bestimmte Ursprungsgerade $\mathbb{R} \cdot A$.*

Mithilfe der zu einer Geraden g gehörenden Ursprungsgeraden g_O sind wir in der Lage, die Parallelität von Geraden zu definieren.

Definition 4.7. *Zwei Geraden g und g' heißen* parallel *zueinander, falls $g_O = g'_O$ ist. Wir schreiben $g \parallel g'$.*

Die Relation der Parallelität ist transitiv: Sind g, g', g'' Geraden und ist $g \parallel g'$ und $g' \parallel g''$, so ist auch $g \parallel g''$.

Aus Satz 4.3 erhalten wir, dass zwei Geraden $g = \mathbb{R} \cdot A + P$ und $g' = \mathbb{R} \cdot A' + P'$ genau dann parallel zueinander sind, wenn ein $r \in \mathbb{R}$ existiert mit $A = r \cdot A'$. Ebenfalls mit Satz 4.3 erhalten wir, dass parallele Geraden, die einen gemeinsamen Punkt besitzen, identisch sind. Es folgt also:

Satz 4.5. *Sei $g \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gerade und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Dann gibt es genau eine Gerade $p \subseteq \mathbb{R}^n$, die parallel zu g ist und den Punkt P enthält, nämlich $p = g_O + P$.*

Definition 4.8. *Sind $A, B \in \mathbb{R}^n$ Punkte, so nennen wir die Punktmenge*

$$\begin{aligned} AB &:= \{X \mid X \in \mathbb{R}^n, \exists r \in [0,1] : X = r \cdot (A - B) + B\} \\ &= \{r \cdot A + (1 - r) \cdot B \mid r \in [0,1]\} \\ &= \{r \cdot A + s \cdot B \mid r, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, r + s = 1\} \\ &= [0,1] \cdot (A - B) + B. \end{aligned}$$

die Strecke *mit den Endpunkten A und B. Die Punktmenge*

$$\mathring{AB} := \{X \mid X \in \mathbb{R}^n, \exists r \in]0,1[: X = rA + (1 - r)B\}$$

heißt das relative Innere der Strecke *AB. Eine Strecke AB heißt* echt, *falls $A \neq B$ ist. Zwei echte Strecken AB und $A'B'$ heißen* parallel *zueinander, falls die Geraden $g(A, B)$ und $g(A', B')$ durch die Endpunkte parallel zueinander sind.*

Die Strecke AB ist also die konvexe Hülle der Punkte A und B. Sind $A, B, A', B' \in \mathbb{R}^n$ Punkte mit $AB = A'B'$, so ist $A = A'$ und $B = B'$ oder $A = B'$ und $B = A'$. Die Endpunkte sind also eindeutig bestimmt, wir können jedoch nicht den Anfangs- oder Endpunkt aus der Punktmenge bestimmen. In Fällen, in denen es uns wichtig ist, den Anfangs- und den Endpunkt zu kennzeichnen (wie beispielsweise bei der Definition von Teilungspunkten), verwenden wir aber trotzdem die Bezeichnung AB, interpretieren dies dann jedoch als geordnetes Paar (A, B).

Das relative Innere einer Strecke ist das Innere der Strecke bezüglich der Relativtopologie $\{X \cap AB \mid X \subseteq \mathbb{R}^n, X \text{ offen in } \mathbb{R}^n\}$ des $\mathbb{R}^n$ eingeschränkt auf die Menge AB.

5 Euklidische Geometrie

5.1 Das Punktprodukt

Den Begriff der Parallelität von Geraden konnten wir ausschließlich mithilfe der Addition und Vervielfachung von Punkten definieren. Zur Definition der Orthogonalität von Geraden und zur Einführung eines Abstandsbegriffes benötigen wir hingegen eine weitere Verknüpfung auf der Menge der Punkte.

Definition 5.1. *Für Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n$ der Ebene bzw. des Raumes definieren wir das* Punktprodukt

$$A \bullet B := a_1b_1 + a_2b_2 \ \textit{bzw.}\ A \bullet B := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Wir schreiben kurz $A^2 := A \bullet A$.

Die für das Punktprodukt geltenden Rechenregeln fassen wir in folgendem Satz zusammen.

Satz 5.1. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ Punkte, $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann gilt*

1. $A \bullet B = B \bullet A$,
2. $(A + B) \bullet C = A \bullet C + B \bullet C$,
3. $(r \cdot A) \bullet B = r(A \bullet B)$,
4. $A \bullet A \geq 0$,
5. $A \bullet A = 0 \Leftrightarrow A = O$.

Beweis. Wir führen den Beweis für Punkte des Raumes. Für Punkte der Ebene erfolgt der Beweis analog.

1. Wegen der Kommutativität der Multiplikation reeller Zahlen ist

$$A \bullet B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = B \bullet A.$$

2. Es gilt $(A + B) \bullet C = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3$
$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = A \bullet C + B \bullet C.$

3. Es gilt $(r \cdot A) \bullet B = (ra_1)b_1 + (ra_2)b_2 + (ra_3)b_3 = r(a_1b_1) + r(a_2b_2) + r(a_3b_3)$
$= r(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = r(A \bullet B)$.

4./5. Es ist $A \bullet A = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0$ und $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ genau dann, wenn $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist. □

Aus den Rechenregeln des Punktproduktes folgt mit der Konvention $A^2 = A \bullet A$ in Analogie zu den binomischen Formeln für reelle Zahlen

$$(A+B)^2 = (A+B) \bullet (X+Y) = A \bullet A + A \bullet B + B \bullet A + B \bullet B = A^2 + 2A \bullet B + B^2$$

sowie $(A-B)^2 = A^2 - 2A \bullet B + B^2$ und $(A+B) \bullet (A-B) = A^2 - B^2$.

Definition 5.2. *Sei $A \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Dann definieren wir den* Betrag von A *als*

$$\|A\| := \sqrt{A \bullet A}.$$

Ist $A \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt der Ebene, so ist $\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, ist $A \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt des Raumes, so ist $\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Satz 5.2. *Sei $A \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt sowie $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

1. $\|r \cdot A\| = |r|\,\|A\|$, *2.* $\|A\| \geq 0$, *3.* $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = O$.

Beweis. 1. Es ist $\|r \cdot A\| = \sqrt{(r \cdot A) \bullet (r \cdot A)} = \sqrt{r^2(A \bullet A)} = |r|\sqrt{A \bullet A} = |r|\,\|A\|$.

2. Es ist $\|A\| = \sqrt{A \bullet A} \geq 0$.

3. Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{A \bullet A} = 0 \Leftrightarrow A \bullet A = 0 \Leftrightarrow A = O.$$

□

Definition 5.3. *Für zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n$ nennen wir $d(A,B) := \|A - B\|$ den* Abstand *von A und B sowie $|AB| := d(A,B)$ die* Länge der Strecke *AB.*

Für Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$ der Ebene ist

$$|AB| = d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2},$$

für Punkte $A, B \in \mathbb{R}^3$ des Raumes ist

$$|AB| = d(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Die folgenden Rechenregeln können sowohl koordinatenbasiert nachgerechnet als auch auf die entsprechenden Rechenregeln des Punktproduktes zurückgeführt werden. Der Vorteil der Verwendung der Rechenregeln des Punktproduktes liegt - neben der kürzeren Beweisführung - darin, dass sich die Regeln sowohl für den Fall $n = 2$ als auch für den Fall $n = 3$ gemeinsam beweisen lassen und sich auch auf höherdimensionale Räume übertragen lassen.

Satz 5.3. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ Punkte, $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $d(A, B) \geq 0$,
2. $d(A, B) = 0$ *genau dann, wenn* $A = B$,
3. $d(A, B) = d(B, A)$ *(Symmetrie)*,
4. $d(A + C, B + C) = d(A, B)$ *(Translationsinvarianz)*,
5. $d(r \cdot A, r \cdot B) = |r|\, d(A, B)$,
6. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ *(Dreiecksungleichung)*.

Beweis. Es ist $d(A, B) = \|A - B\| \geq 0$ und $0 = d(A, B) = \|A - B\|$ genau dann, wenn $A - B = O$ und damit $A = B$ ist, womit die ersten beiden Aussagen gezeigt sind. Außerdem ist

$$d(A, B) = \|A - B\| = |-1|\, \|A - B\| = \|(-1) \cdot (A - B)\| = \|B - A\| = d(B, A),$$

sowie

$$d(A + C, B + C) = \|(A + C) - (B + C)\| = \|A - B\| = d(A, B)$$

und

$$d(r \cdot A, r \cdot B) = \|r \cdot A - r \cdot B\| = \|r \cdot (A - B)\| = |r|\, \|A - B\| = |r|\, d(A, B),$$

womit die Aussagen 3., 4. und 5. gezeigt sind. Der Beweis von Aussage 6. erfolgt in Satz 5.4 mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. □

Wegen Rechenregel 3. ist $|AB| = |A'B'|$, falls $AB = A'B'$ ist. Es ist $\|A\| = |AO|$, der Betrag eines Punktes ist also gleich der Länge der Strecke zwischen dem Koordinatenursprung und dem Punkt.

Satz 5.4. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ Punkte. Dann gilt*

1. $|A \bullet B| \leq \|A\|\|B\|$ *(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)*
   Gleichheit gilt genau dann, wenn $B = O$ ist oder ein $t \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $A = t \cdot B$ ist.

2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *(Minkowski-Ungleichung)*
   Gleichheit gilt genau dann, wenn $B = O$ ist oder wenn ein $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert mit $A = t \cdot B$.

3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ *(Dreiecksungleichung)*
   Gleichheit gilt genau dann, wenn $C \in AB$ ist.

Durch wiederholte Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, D) + d(D, B)$$

usw. Dies bedeutet, dass die Strecke AB der kürzeste Streckenzug von A nach B ist.

Beweis. Ist $A = O$ oder $B = O$, so gilt in beiden Ungleichungen 1. und 2. Gleichheit. Wir können also annehmen, dass $A \neq O$ und $B \neq O$ ist. Es gilt für alle $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|r \cdot A + s \cdot B\|^2 &= (r \cdot A + s \cdot B)^2 = r^2 A \bullet A + 2rsA \bullet B + s^2 B \bullet B \\ &= r^2\|A\|^2 + 2rsA \bullet B + s^2\|B\|^2 \end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $r \cdot A + s \cdot B = O$ ist.

Insbesondere gilt für $r = \|B\|$ und $s = \|A\|$ die Ungleichung $0 \leq \|B\|^2\|A\|^2 + 2\|B\|\|A\|A \bullet B + \|A\|^2\|B\|^2$. Division durch $\|A\|\|B\|$ ergibt $0 \leq \|B\|\|A\| + 2A \bullet B + \|A\|\|B\|$, also $A \bullet B \geq -\|A\|\|B\|$.

Für $r := \|B\|$, $s := -\|A\|$ erhalten wir $0 \leq \|B\|^2\|A\|^2 - 2\|B\|\|A\|A \cdot B + \|A\|^2\|B\|^2$. Division durch $\|A\|\|B\|$ ergibt $A \bullet B \leq \|A\|\|B\|$. Insgesamt folgt wie behauptet $|A \bullet B| \leq \|A\|\|B\|$.

Ist $A \neq t \cdot B$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dass $r \cdot A + s \cdot B \neq O$ ist. Folglich ist $0 < \|r \cdot A + s \cdot B\|$, die Ungleichung ist somit strikt.

Finden wir hingegen ein $t \in \mathbb{R}$ mit $A = t \cdot B$, so ist

$$|A \cdot B| = |A \cdot (t \cdot A)| = |t|\,\|A\|^2 = \|A\|\|t \cdot A\| = \|A\|\|B\|,$$

es gilt also Gleichheit.

Für $r := 1$, $s := 1$ erhalten wir mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + 2A \bullet B + \|B\|^2 \leq \|A\|^2 + 2\|A\|\|B\| + \|B\|^2 = (\|A\| + \|B\|)^2,$$

woraus die Minkowski-Ungleichung $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ folgt. Gleichheit gilt genau dann, wenn $A \bullet B = \|A\|\|B\|$ ist.

Ist $A \neq t \cdot B$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist $A \bullet B < \|A\|\|B\|$. Finden wir hingegen ein $t \in \mathbb{R}$ mit $A = t \cdot B$, so ist $A \bullet B = A \bullet (t \cdot A) = t(A \bullet A) = t\|A\|^2$ sowie $\|A\|\|B\| = \|A\|\|t \cdot A\| = |t|\,\|A\|^2$. Es gilt also $A \bullet B = \|A\|\|B\|$ genau dann, wenn $t = |t|$ ist, also genau dann, wenn $t \geq 0$ ist.

Der Beweis der Dreiecksungleichung erfolgt mithilfe der Minkowsi-Ungleichung. Damit ergibt sich nämlich

$$d(A,B) = \|A-B\| = \|(A-C)+(C-B)\| \leq \|A-C\|+\|C-B\| = d(A,C)+d(C,B).$$

Gleichheit gilt hier genau dann, wenn $A = C$ oder $B = C$ ist, oder wenn ein $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert mit $(A - C) = t \cdot (C - B)$. Letztere Bedingung ist äquivalent zu

$$C = \frac{1}{t+1} \cdot A + \frac{t}{t+1} \cdot B = \frac{1}{t+1} \cdot A + (1 - \frac{1}{t+1}) \cdot B,$$

in diesem Fall liegt C also auf der Strecke AB. Liegt umgekehrt C auf der Strecke AB, $C \neq A$ und $C \neq B$, so finden wir ein $s \in]0,1[$ mit $C = s \cdot A + (1-s) \cdot B$ und erhalten

$$s\cdot(A-C) = s\cdot A - s\cdot C = (C-(1-s)\cdot B) - s\cdot C = (1-s)\cdot C-(1-s)\cdot B = (1-s)\cdot(C-B).$$

Setzen wir $t := \frac{1-s}{s}$, so ist $t \in \mathbb{R}\geq 0$ und $(A - C) = t \cdot (C - B)$. Damit gilt in der Dreiecksungleichung Gleichheit. □

5.2 Orthogonalität

Die Orthogonalität von Geraden definieren wir mithilfe des Punktproduktes.

Definition 5.4. *Zwei Geraden $g = \mathbb{R} \cdot A + P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $h = \mathbb{R} \cdot B + Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen* orthogonal zueinander*, falls $A \bullet B = 0$ ist. Wir schreiben $g \perp h$.*
Ist $g \perp h$ und $X \in h$, so heißt h eine Lotgerade auf g durch X.

Diese Definition ist unabhängig von der Darstellung der Geraden g und h. Sind nämlich zwei weitere Darstellungen $g = \mathbb{R} \cdot A' + P'$ und $h = \mathbb{R} \cdot B' + Q'$ der Geraden g und h gegeben, so finden wir nach Satz 4.3 reelle Zahlen $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $A' = r \cdot A$ und $B' = s \cdot B$ ist, und erhalten mit Satz 5.1

$$A' \bullet B' = (r \cdot A) \bullet (s \cdot B) = (rs)(A \bullet B).$$

Damit ist $A' \bullet B' = 0$ genau dann, wenn $A \bullet B = 0$ ist.

Definition 5.5. *Ein Dreieck ABC mit paarweise verschiedenen Ecken heißt* rechtwinklig*, falls $g(A,C) \perp g(B,C)$ ist.*

Der Satz des Pythagoras kann nun durch kurze Rechnung bewiesen werden.

Satz 5.5 (Satz des Pythagoras). *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ paarweise verschiedene Punkte. Dann sind äquivalent:*

1. *ABC ist rechtwinklig,*
2. *$g(A,C) \perp g(B,C)$,*
3. *$(A-C) \bullet (B-C) = 0$,*
4. *$\|A-C\|^2 + \|B-C\|^2 = \|A-B\|^2$,*
5. *$d(A,C)^2 + d(B,C)^2 = d(A,B)^2$,*
6. *$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$.*

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen 1., 2. und 3. ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Orthogonalität von Geraden und der Definition der Rechtwinkligkeit von Dreiecken. Setzen wir $X := A - C$ und $Y := B - C$, so ist $X - Y = A - B$ und damit

$$\begin{aligned} d(A,B)^2 &= \|A-B\|^2 = \|X-Y\|^2 = (X-Y)^2 \\ &= X \bullet Y - 2X \bullet Y + Y \bullet Y = \|X\|^2 - 2X \bullet Y + \|Y\|^2 \\ &= d(A,C)^2 - 2(A-C) \bullet (B-C) + d(B,C)^2, \end{aligned}$$

woraus die Äquivalenz von 3., 4., 5. und 6. folgt.

□

5.3 Abstand Punkt-Gerade

Wir erweitern den Begriff des Abstandes zwischen zwei Punkten auf Objekte, die aus mehreren Punkten bestehen, indem wir den kleinstmöglichen Punktabstand wählen.

Definition 5.6. *Sei $g \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gerade, $X \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Dann bezeichnen wir mit $d(X,g) := \inf\{d(X,Y) \mid Y \in g\}$ den* Abstand des Punktes X von der Geraden g.

Den Abstand eines Punktes von einer Geraden können wir mithilfe des Lotfußpunktes berechnen.

Satz 5.6. *Sei $g = \mathbb{R} \cdot A + P \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gerade, $X \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Dann existiert genau ein Punkt $X_g \in g$, so dass $\mathbb{R} \cdot (X - X_g) \perp g$ ist, nämlich*

$$X_g = \frac{(X-P) \bullet A}{A \bullet A} \cdot A + P.$$

Den Punkt X_g nennen wir den Lotfußpunkt *der Lote auf g durch X.*

Liegt der Punkt X nicht auf der Geraden g, so ist die Gerade $\mathbb{R} \cdot (X - X_g) + X$ folglich das einzige Lot auf g durch X. Wir werden später sehen, dass im Fall $n = 2$ das Lot auf g durch X auch dann eindeutig bestimmt ist, wenn der Punkt X auf der Geraden g liegt. Im Fall $n = 3$ gibt es dann jedoch mehrere Lotgeraden.

Beweis. Sei $Z \in g$ ein Punkt auf der Geraden g. Dann finden wir ein $r \in \mathbb{R}$, so dass $Z = r \cdot A + P$ ist. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$\begin{aligned} & \mathbb{R} \cdot (X - Z) \perp g \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = (X - Z) \bullet A = (X - (r \cdot A + P)) \bullet A = X \bullet A - rA \bullet A - P \bullet A \\ \Leftrightarrow \quad & r = \frac{(X - P) \bullet A}{A \bullet A} \\ \Leftrightarrow \quad & Z = \frac{(X - P) \bullet A}{A \bullet A} \cdot A + P = X_g. \end{aligned}$$

Also existiert genau ein Punkt $X_g \in g$, so dass $\mathbb{R} \cdot (X - X_g) \perp g$ ist. □

Den Abstand eines Punktes X von einer Geraden g erhalten wir nun, indem wir die Länge der Strecke XX_g berechnen.

Satz 5.7. *Ist $g = \mathbb{R} \cdot A + P \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gerade und $X \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, so gilt für alle $Y \in g$ mit $Y \neq X_g$*

$$d(X, Y) > d(X, X_g) = d(X, g) = \sqrt{\|X - P\|^2 - \frac{((X - P) \bullet A)^2}{\|A\|^2}}.$$

Beweis. Sei $Y \in g$ ein von X_g verschiedener Punkt. Dann ist $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot (Y - X_g)$, also ist auch $\mathbb{R} \cdot (X - X_g) \perp \mathbb{R} \cdot (Y - X_g)$. Mit dem Satz des Pythagoras 5.5 folgt $\|X - X_g\|^2 + \|Y - X_g\|^2 = \|X - Y\|^2$. Da $Y \neq X_g$ ist, ist $\|Y - X_g\| > 0$ und wir erhalten $d(X, Y) > d(X_g, X)$, womit $d(X, X_g) = d(X, g)$ gezeigt ist.

Für den Abstand des Punktes X von der Geraden g folgt damit wie behauptet

$$\begin{aligned} d(X, g)^2 = d(X, X_g)^2 = \|X - X_g\|^2 = (X - X_g)^2 &= ((X - P) - \frac{(X - P) \bullet A}{A \bullet A} \cdot A)^2 \\ &= (X - P)^2 - 2\frac{(X - P) \bullet A}{A \bullet A}(X - P) \bullet A + \frac{((X - P) \bullet A)^2}{(A \bullet A)^2}(A \bullet A) \\ &= (X - P)^2 - 2\frac{((X - P) \bullet A)^2}{A \bullet A} + \frac{((X - P) \bullet A)^2}{A \bullet A} \\ &= (X - P)^2 - \frac{((X - P) \bullet A)^2}{A \bullet A} = \|X - P\|^2 - \frac{((X - P) \bullet A)^2}{\|A\|^2}. \end{aligned}$$

□

6 Geometrie der Ebene

6.1 Geraden in der Ebene

Die Geometrie der Ebene unterscheidet sich von der des Raumes in folgenden wesentlichen Gesichtspunkten:

- Zwei nichtparallele Geraden der Ebene schneiden sich stets in genau einem Punkt. Im Raum gibt es jedoch auch nichtparallele Geraden, die sich nicht schneiden.

- Zu jeder Ursprungsgerade $\mathbb{R} \cdot A$ der Ebene gibt es genau eine Ursprungsgerade, die orthogonal zu $\mathbb{R} \cdot A$ ist. Bei Ursprungsgeraden $\mathbb{R} \cdot A$ des Raumes gibt es hingegen mehrere dazu orthogonale Ursprungsgeraden.

Diese Tatsachen leiten sich daraus ab, dass drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ der Ebene stets linear abhängig sind (siehe Kapitel 7), dass wir also reelle Zahlen $r, s, t \in \mathbb{R}$ finden, so dass $\{r, s, t\} \neq \{0\}$ und $r \cdot A + s \cdot B + t \cdot C = O$ ist. Zum Nachweis dieser Eigenschaft müssen wir koordinatenbasiert rechnen. Alle folgenden Sätze lassen sich daraus koordinatenfrei ableiten. Die oben genannten Tatsachen über Punkte und Geraden der Ebene sind jedoch so grundlegend, dass sie thematisch vor der Frage der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Punkten behandelt werden sollten. Deshalb verzichten wir an dieser Stelle auf Argumente, die die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit verwenden und weisen die Sätze durch koordinatenbasierte Rechnungen nach.

Definition 6.1. *Für jeden Punkt $A \in \mathbb{R}^2$ definieren wir* $A^\perp := \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Der Punkt $A^\perp$ entsteht anschaulich durch Drehung des Punktes A um $90°$ entgegen dem Uhrzeigersinn, wobei das Drehzentrum der Koordinatenursprung O ist.

Satz 6.1. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ Punkte der Ebene, $A \neq O$. Dann sind äquivalent:*

$$A \bullet B = 0 \Leftrightarrow B \in \mathbb{R} \cdot A^{\perp}.$$

Das bedeutet: $\mathbb{R} \cdot A^{\perp}$ ist die einzige Ursprungsgerade, die orthogonal zu $\mathbb{R} \cdot A$ ist.

Beweis. Sei $B \in \mathbb{R} \cdot A^{\perp}$. Dann finden wir ein $r \in \mathbb{R}$ mit $B = r \cdot A^{\perp}$ und es gilt

$$A \bullet B = A \bullet (r \cdot A^{\perp}) = r(a_1(-a_2) + a_2 a_1) = 0.$$

Es gelte nun umgekehrt $A \bullet B = 0$. Da $A \neq O$ ist, ist $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$.

Ist $a_1 \neq 0$, so folgt aus $0 = A \bullet B = a_1 b_1 + a_2 b_2$, dass $b_1 = -\frac{b_2}{a_1} a_2$ ist, und damit ist

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b_2}{a_1} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{b_2}{a_1} \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot A^{\perp}.$$

Ist $a_2 \neq 0$, so folgt aus $0 = A \bullet B = a_1 b_1 + a_2 b_2$, dass $b_2 = -\frac{b_1}{a_2} a_1$ ist, und damit ist ebenfalls

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -\frac{b_1}{a_2} a_1 \end{pmatrix} = -\frac{b_1}{a_2} \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot A^{\perp}.$$

□

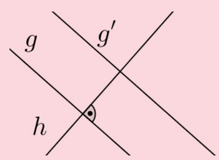
Sei $g = \mathbb{R} \cdot A + B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade, $X \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt. Dann ist die Gerade $h := \mathbb{R} \cdot A^{\perp} + X$ ein Lot auf g durch X. Ist $h' = \mathbb{R} \cdot C + X$ ein weiteres Lot auf g durch X, so ist $C \bullet A = 0$ und damit nach Satz 6.1 $C \in \mathbb{R} \cdot A^{\perp}$. Mit Satz 4.3 folgt, dass $h' = h$ ist. Im Fall $n = 2$ ist das Lot auf g durch X also auch dann eindeutig bestimmt, wenn der Punkt X auf der Geraden g liegt. Wir erhalten also den folgenden Satz:

Satz 6.2. *Sei $g = \mathbb{R} \cdot A + B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade, $X \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt. Dann ist die Gerade $h := \mathbb{R} \cdot A^{\perp} + X$ das eindeutig bestimmte Lot auf g durch X.*
Ist $X \notin g$, so ist $h = \mathbb{R} \cdot A^{\perp} + X = \mathbb{R} \cdot (X - X_g) + X$.

Es ist $(A^{\perp})^{\perp} = -A$ und damit $\mathbb{R} \cdot (A^{\perp})^{\perp} = \mathbb{R} \cdot A$. Wir erhalten den folgenden Satz über die Verträglichkeit von $\perp$ und $\parallel$.

Satz 6.3. *Es seien $g, h, g' \subseteq \mathbb{R}^2$ Geraden, $g \perp h$.*
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$h \perp g' \Leftrightarrow g \parallel g'.$$



Beweis. Sei $g = \mathbb{R} \cdot A + P$, $h = \mathbb{R} \cdot B + Q$ und $g' = \mathbb{R} \cdot A' + P'$.

Ist $h \perp g'$, so ist $A \in \mathbb{R} \cdot B^{\perp}$ und $B \in \mathbb{R} \cdot A'^{\perp}$ und damit $A \in \mathbb{R} \cdot (A'^{\perp})^{\perp} = \mathbb{R} \cdot (-A') = \mathbb{R} \cdot A'$, woraus $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot A'$ und damit die Parallelität von g und g' folgt.

Ist $g \parallel g'$, so finden wir ein $r \in \mathbb{R}$ mit $A' = r \cdot A$ und es ist

$$A' \bullet B = (r \cdot A) \bullet B = r(A \bullet B) = 0,$$

womit $h \perp g'$ gezeigt ist. □

Ausschließlich im Fall $n = 2$ gilt der folgende Charakterisierungssatz paralleler Geraden.

Satz 6.4. *Seien $g \subseteq \mathbb{R}^2$ und $h \subseteq \mathbb{R}^2$ Geraden. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) g und h sind parallel zueinander,

(ii) g und h haben keinen gemeinsamen Punkt oder sind gleich.

Beweis. Seien $g = \mathbb{R} \cdot A + P$ und $h = \mathbb{R} \cdot B + Q$ Darstellungen der Geraden g und h.

Aus Aussage (i) folgt Aussage (ii). Ist nämlich $g \parallel h$, so ist $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot B$. Ist $X \in g \cap h$ ein gemeinsamer Punkt, so ist $g = \mathbb{R} \cdot A + X = \mathbb{R} \cdot B + X = h$ nach Satz 4.2, und damit sind g und h gleich, sofern sie einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Wir zeigen nun, dass aus Aussage (ii) die Aussage (i) folgt. Ist $g = h$, so ist $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot B$ und damit $g \parallel h$, womit (i) gezeigt ist. Wir betrachten nun den Fall, dass $g \cap h = \emptyset$ ist. Sind $r, s \in \mathbb{R}$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$r \cdot A + P = s \cdot B + Q \Leftrightarrow r \cdot A - s \cdot B = Q - P =: E \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 r & -b_1 s & = & e_1 \\ a_2 r & -b_2 s & = & e_2 \end{bmatrix}.$$

Ist $a_1 = 0$, so ist wegen $A \neq O$ die zweite Koordinate $a_2 \neq 0$. Wäre $b_1 \neq 0$, so wäre $s = -\frac{e_1}{b_1}$ und $r = \frac{e_2 + b_2 s}{a_2}$ eine Lösung des Gleichungssystems, und damit $r \cdot A + P = s \cdot B + Q$ ein gemeinsamer Punkt der Geraden g und h, im Widerspruch zu $g \cap h = \emptyset$. Also ist $b_1 = 0$ und damit $b_2 \neq 0$ und wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{a_2}{b_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{a_2}{b_2} \cdot B,$$

womit g parallel zu h ist. Ist $a_2 = 0$, so folgt analog, dass g parallel zu h ist.

Wir können also voraussetzen, dass $a_1 \neq 0$ und $a_2 \neq 0$ ist. Dann gelten folgende

Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & r \cdot A + P = s \cdot B + Q \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} a_2 a_1 r & -a_2 b_1 s & = & a_2 e_1 \\ a_1 a_2 r & -a_1 b_2 s & = & a_1 e_2 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} a_2 a_1 r & -a_2 b_1 s & = & a_2 e_1 \\ & (a_1 b_2 - a_2 b_1) s & = & a_2 e_1 - a_1 e_2. \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wäre $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, so hätte das obige Gleichungssystem eine Lösung, nämlich

$$s = \frac{a_2 e_1 - a_1 e_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ und } r = \frac{a_2 e_1 + a_2 b_1 s}{a_2 a_1},$$

im Widerspruch zu $g \cap h = \emptyset$. Also ist $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ und damit $b_1 = \frac{b_2}{a_2} a_1$, woraus wir wie gewünscht

$$B = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{a_2} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{b_2}{a_2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{b_2}{a_2} \cdot A$$

und damit $g \parallel h$ erhalten.

Wir geben noch einen alternativen Beweis für die Implikation „$(ii) \Rightarrow (i)$“ an, der den später bewiesenen Satz 7.8 verwendet. Dieser Beweis zeigt, dass man durch Zuhilfenahme struktureller Eigenschaften des zugrunde liegenden Raumes koordinatenbasierte Rechnungen vermeiden kann.

Ist $g = h$, so ist $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot B$ und damit $g \parallel h$, womit Aussage (i) gezeigt ist. Wir betrachten also den Fall, dass $g \cap h = \emptyset$ ist. Dann gilt für alle $r, s \in \mathbb{R}$, dass $r \cdot A + P \neq s \cdot B + Q$ ist und deshalb

$$r \cdot A - s \cdot B \neq Q - P \text{ für alle } r, s \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Die Punkte $Q - P$, A und B sind nach Satz 7.8 linear abhängig. Deshalb existieren $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich 0 sind, so dass $\alpha(Q-P) + \beta A + \gamma B = O$ ist. Wir erhalten $\alpha(Q-P) = -\beta A - \gamma B$, woraus wegen $(*)$ folgt, dass $\alpha = 0$ ist. Sei ohne Einschränkung $\beta \neq 0$. Dann ist

$$O \neq A = -\frac{\gamma}{\beta} \cdot B \in \mathbb{R} \cdot B.$$

Die Ursprungsgeraden $\mathbb{R} \cdot A$ und $\mathbb{R} \cdot B$ besitzen also zwei gemeinsame Punkte und sind damit gleich, die Geraden g und h sind folglich parallel zueinander.

□

Satz 6.5 (Koordinatendarstellung von Geraden in der Ebene)**.** *Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Menge von Punkten. Die Menge g ist genau dann eine Gerade, wenn ein Punkt $N \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ sowie eine reelle Zahl d existieren, so dass $g = \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, N \bullet X = d\}$ ist. In diesem Fall ist $\mathbb{R} \cdot N \perp g$.*

Beweis. Sei $g = \mathbb{R} \cdot A + P$ eine Gerade. Wir setzen $N := A^\perp$ und $d := N \bullet P$ und zeigen, dass $g = \{X \mid A \in \mathbb{R}^2, N \bullet X = d\}$ ist. Ist $X \in g$, so finden wir ein $r \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot A + P$. Damit gilt

$$N \bullet X = N \bullet (r \cdot A + P) = r(N \bullet A) + N \bullet P = r(A^\perp \bullet A) + d = d.$$

Ist $X \in \mathbb{R}^2$ und $N \bullet X = d$, so ist $A^\perp \bullet X = A^\perp \bullet P$ und damit $A^\perp \bullet (P - X) = 0$. Nach Satz 6.1 finden wir ein $r \in \mathbb{R}$, so dass $P - X = r \cdot (A^\perp)^\perp = -r \cdot A$ ist, woraus wir $X = r \cdot A + P \in g$ erhalten. Damit ist $g = \{X \mid A \in \mathbb{R}^2, N \bullet X = d\}$ gezeigt.

Sei nun umgekehrt $N \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, $d \in \mathbb{R}$ und $g = \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, N \bullet X = d\}$. Wir zeigen, dass g eine Gerade ist. Dazu setzen wir $A := N^\perp$. Da $N \neq O$ ist, ist $n_1 \neq 0$ oder $n_2 \neq 0$. Im Fall $n_1 \neq 0$ setzen wir $P := \begin{pmatrix} \frac{d}{n_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ und zeigen $g = \mathbb{R} \cdot A + P$. In der Tat: Ist $X \in \mathbb{R} \cdot A + P$, so finden wir ein $r \in \mathbb{R}$ mit $X = rA + P$ und erhalten

$$N \bullet X = N \bullet (rA + P) = r(N \bullet A) + N \bullet P = r(N \bullet N^\perp) + n_1 \frac{d}{n_1} + n_2 \cdot 0) = d,$$

und damit $X \in g$. Ist $X \in g$, so ist $d = N \bullet X = n_1 x_1 + n_2 x_2$, woraus wir $x_1 = \frac{d}{n_1} - \frac{x_2}{n_1} n_2$ und damit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{n_1} - \frac{x_2}{n_1} n_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_2}{n_1} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d}{n_1} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot A + P$$

erhalten. Im Fall $n_2 \neq 0$ setzen wir $P := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{n_2} \end{pmatrix}$ und erhalten analog, dass $g = \mathbb{R} \cdot A + P$ ist. □

Wir haben damit eine alternative Darstellungsform für Geraden gefunden. Die Punkte sind nun nicht mehr explizit durch Angabe einer Berechnungsvorschrift, sondern implizit durch die Bedingung $N \bullet X = d$ gegeben, die Punkte der Geraden sind also die Lösungsmenge einer algebraischen Gleichung. Dies hat den Nachteil, dass zum Bestimmen von Punkten X auf der Geraden zunächst einmal eine Gleichung gelöst werden muss. Allerdings vereinfacht sich damit die Überprüfung, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt. Wenn wir schreiben, dass $g = \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, N \bullet X = d\}$ eine Gerade ist, setzen wir im Folgenden stillschweigend voraus, dass $N \neq O$ ist.

Satz 6.6. *Seien $g = \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, N \bullet X = d\}$, $g' = \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, N' \bullet X = d'\}$ Geraden. Dann gilt $g = g'$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, so dass $N = \lambda \cdot N'$ und $d = \lambda d'$ ist. Die Geraden g und g' sind genau dann parallel zueinander, wenn ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $N = \alpha \cdot N'$.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $N = \lambda \cdot N'$ und $d = \lambda d'$ ist. Dann gelten für alle $X \in \mathbb{R}^2$ die folgenden Aussagen Äquivalenzen:

$$N \bullet X = d \Leftrightarrow (\lambda \cdot N') \bullet X = \lambda d' \Leftrightarrow \lambda(N' \bullet X) = \lambda d' \Leftrightarrow N' \bullet X = d'.$$

Deshalb ist $g = \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, N \bullet X = d\} = \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, N' \bullet X = d'\} = g'$.

Ist $g = g' = \mathbb{R} \cdot A + P$, so gilt nach Satz 6.5, dass $\mathbb{R} \cdot N \perp \mathbb{R} \cdot A$ und $\mathbb{R} \cdot N' \perp \mathbb{R} \cdot A$ ist. Nach Satz 6.1 sind damit $N \in \mathbb{R} \cdot A^\perp$ und $N' \in \mathbb{R} \cdot A^\perp$ und wir finden $r, r' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $r \cdot N = r' \cdot N'$ ist. Setzen wir $\lambda := \frac{r'}{r}$, so gilt folglich $N = \lambda N'$. Da $g \neq \emptyset$ ist, finden wir ein $X \in g$. Da dann auch $X \in g'$ ist, erhalten wir

$$d = N \bullet X = (\lambda \cdot N') \bullet X = \lambda(N' \bullet X) = \lambda d'.$$

□

6.2 Vielecke und Teilungspunkte

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf Drei- und Vierecke, die wir sowohl in der Ebene als auch im Raum definieren können. Da die Ecken eines echten Dreiecks jedoch eine Ebene definieren, ordnen wir die Theorie der Dreiecke der ebenen Geometrie zu. Bei Vierecken beschränken wir uns im Wesentlichen auf die Behandlung von Parallelogrammen, mit denen die Addition von Punkten geometrisch interpretiert werden kann. Da bei Parallelogrammen alle vier Ecken ebenfalls in einer gemeinsamen Ebene liegen, ordnen wir auch diese der ebenen Geometrie zu.

Definition 6.2 (Dreieck). *Ein* Dreieck *ist ein Tripel von Punkten $A, B, C \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben ABC statt (A, B, C). Die Punkte heißen* Ecken *des Dreiecks. Die Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$ und $g(C, A)$ heißen* Seitenlinien *des Dreiecks, sofern die jeweiligen Ecken verschieden sind. Die dazugehörigen Strecken AB, BC und CA heißen* Seiten. *Ein Dreieck heißt* echt, *wenn seine Ecken paarweise verschieden sind und nicht alle auf einer Geraden liegen.*

Definition 6.3 (Viereck). *Ein* Viereck *ist ein 4-Tupel von Punkten $A, B, C, D \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben $ABCD$ statt (A, B, C, D). Die Punkte heißen* Ecken *des Vierecks. Die Geraden $g(A, B), g(B, C)$, $g(C, D)$ und $g(D, A)$ heißen* Seitenlinien *des Vierecks, sofern die jeweiligen Ecken verschieden sind. Die dazugehörigen Strecken heißen* Seiten. *Die Geraden $g(A, C)$ und $g(B, D)$ heißen* Diagonalenlinien *der Vierecks, falls sie mit keiner der Seitenlinien identisch sind. Die dazugehörigen Strecken heißen* Diagonalen. *Ein Viereck heißt* echt, *wenn seine Ecken paarweise verschieden sind und nicht alle auf einer Geraden liegen.*

Bei der Behandlung spezieller Vierecke beschränken wir uns auf Parallelogramme.

Definition 6.4 (Parallelogramm). *Sei $ABCD$ ein echtes Viereck. Dann heißen die Seitenlinien $g(A, B)$ und $g(C, D)$ sowie $g(B, C)$ und $g(A, D)$* gegenüberliegend. *Das Viereck $ABCD$ heißt* Parallelogramm, *wenn die gegenüberliegenden Seitenlinien parallel zueinander sind.*

Die Definition besonderer Linien im Dreieck - wie beispielsweise der Seitenhalbierenden oder der Mittelsenkrechten - baut auf der Definition des Mittelpunktes einer Strecke auf, welcher ein spezieller Teilungspunkt einer Strecke ist.

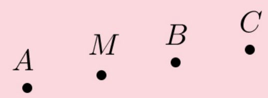
Definition 6.5 (Teilungspunkt)**.** *Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ Punkte, $p, q \in \mathbb{N}$. Dann heißt der Punkt*

$$T_{p:q}(A, B) := A + \frac{p}{p+q} \cdot (B - A) = \frac{q}{p+q} \cdot A + \frac{p}{p+q} \cdot B$$

p:q-Teilungspunkt *der Strecke AB. Der Punkt $M_{AB} := T_{1:1}(A, B)$ heißt* Mittelpunkt *der Strecke AB. Es ist $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$. Ein Punkt $C \in \mathbb{R}^n$ heißt* Verdopplungspunkt *der Strecke AB, wenn B der Mittelpunkt von AC ist. Wir nennen C dann auch den Spiegelpunkt von A an B.*

Die Definition des p:q-Teilungspunktes von AB ist abhängig von der Reihenfolge von A und B. In diesem Kontext verstehen wir unter der Strecke AB also das geordnete Paar mit A als erster und B als zweiter Komponente. Der Zusammenhang zwischen Mittelpunkt und 2:1-Teilungspunkt wird durch folgende Rechnung verdeutlicht.

Sind $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ Punkte derart, dass der Mittelpunkt von AB zugleich der Verdopplungspunkt von CB ist, so ist B der 2:1-*Teilungspunkt von AC*, denn es ist

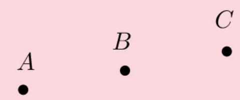


$$B = \frac{1}{2} \cdot (M_{AB} + C) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot (A + B) + C),$$

woraus $B = \frac{1}{3} \cdot A + \frac{2}{3} \cdot C$ folgt.

Wir können damit die Definition des 2:1-Teilungspunktes auf die Definition des Mittelpunktes zurückführen.

Ist C der Verdopplungspunkt von A und B, so folgt aus $B = \frac{1}{2} \cdot (A + C)$, dass $C = 2 \cdot B - A$ ist.



Anschaulich stellen wir uns unter einem p:q-Teilungspunkt T einer Strecke AB einen Punkt vor, der die Strecke AB in zwei Teilstrecken AT und TB unterteilt, deren Längen das gleiche Verhältnis haben wie p und q. Dass diese Vorstellung mit der oben angegebenen Definition übereinstimmt, besagt der folgende Satz.

Satz 6.7. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ verschiedene Punkte, $p, q \in \mathbb{N}$. Ein Punkt $T \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann der $p{:}q$-Teilungspunkt der Strecke AB, wenn er auf der Geraden $g(A, B)$ liegt und wenn*

$$d(A,T) = \frac{p}{p+q}\, d(A,B) \text{ und } d(T,B) = \frac{q}{p+q}\, d(A,B)$$

ist. Insbesondere ist dann $\dfrac{d(A,T)}{d(B,T)} = \dfrac{p}{q}$. Ein Punkt $M \in \mathbb{R}^n$ ist also genau dann Mittelpunkt der Strecke AB, wenn er auf der Geraden $g(A, B)$ liegt und $d(A, M) = d(B, M) = \frac{1}{2} d(A, B)$ ist.

Beweis. Ist $T = T_{p:q}(A, B)$ der $p{:}q$-Teilungspunkt der Strecke AB, so ist

$$T = A + \frac{p}{p+q} \cdot (B - A) \in g(A, B).$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
d(A,T)^2 &= (A-T) \bullet (A-T) \\
&= (A - (\frac{q}{p+q} \cdot A + \frac{p}{p+q} \cdot B)) \bullet (A - (\frac{q}{p+q} \cdot A + \frac{p}{p+q} \cdot B)) \\
&= (\frac{p}{p+q} \cdot (A-B)) \bullet (\frac{p}{p+q} \cdot (A-B)) = (\frac{p}{p+q})^2 (A-B) \bullet (A-B) \\
&= (\frac{p}{p+q})^2 d(A,B)^2,
\end{aligned}$$

also $d(A,T) = \frac{p}{p+q}\, d(A,B)$. Analog erhalten wir $d(T,B) = \frac{q}{p+q}\, d(A,B)$ und damit $\frac{d(A,T)}{d(B,T)} = \frac{p}{q}$.

Ist umgekehrt T ein Punkt auf der Geraden $g(A, B)$ mit $d(A,T) = \frac{p}{p+q}\, d(A,B)$ und $d(T,B) = \frac{q}{p+q}\, d(A,B)$, so finden wir ein $r \in \mathbb{R}$ mit $T = A + r \cdot (B - A)$. Aus

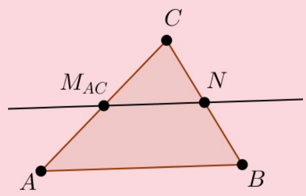
$$\begin{aligned}
(\frac{p}{p+q})^2\, d(A,B)^2 = d(A,T)^2 &= (A-T) \bullet (A-T) \\
&= (A - (A + r \cdot (B-A))) \bullet (A - (A + r \cdot (B-A))) \\
&= r^2 (B-A) \bullet (B-A) = r^2 d(A,B)^2
\end{aligned}$$

folgt $r = \frac{p}{p+q}$ oder $r = -\frac{p}{p+q}$. Aus

$$\begin{aligned}
(\frac{q}{p+q})^2\, d(A,B)^2 = d(T,B)^2 &= (B-T) \bullet (B-T) \\
&= (B - (A + r \cdot (B-A))) \bullet (B - (A + r \cdot (B-A)))) \\
&= ((1-r) \cdot (B-A)) \bullet ((1-r) \cdot (B-A)) \\
&= (1-r)^2 (B-A) \bullet (B-A) = (1-r)^2 d(A,B)^2
\end{aligned}$$

folgt $\frac{q}{p+q} = 1 - r$ oder $\frac{q}{p+q} = -1 + r$, also $r = \frac{p}{p+q}$ oder $r = -\frac{p}{p+q} + 2$. Insgesamt ergibt sich $r = \frac{p}{p+q}$ und damit wie gewünscht $T = A + \frac{p}{p+q}(B - A) = T_{p:q}(A, B)$. $\square$

Satz 6.8 (von der Mittelparallelen im Dreieck). *Sei ABC ein echtes Dreieck im $\mathbb{R}^n$, M_{AC} der Mittelpunkt von AC und $N \in g(B,C)$. Dann ist $g(M_{AC}, N)$ genau dann parallel zu $g(A,B)$, wenn N der Mittelpunkt von BC ist.*



Beweis. Ist $N = M_{BC}$ der Mittelpunkt von BC, so ist

$$M_{AC} - N = M_{AC} - M_{BC} = \frac{1}{2}(A+C) - \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}(A-B).$$

Damit ist $\mathbb{R}\cdot(M_{AC} - N) = \mathbb{R}\cdot(A-B)$ und die Geraden $g(A,B) = \mathbb{R}\cdot(A-B)+B$ und $g(M_{AC}, N) = \mathbb{R}\cdot(M_{AC} - N) + N$ sind parallel zueinander.

Sei nun $g(M_{AC}, N)$ parallel zu $g(A,B)$. Da nach dem bereits gezeigten $g(M_{AC}, M_{BC})$ parallel zu $g(A,B)$ ist, ist wegen der Eindeutigkeit der Parallelen

$$g(M_{AC}, N) = g(M_{AC}, M_{BC}).$$

Da das Dreieck ABC echt ist, ist

$$\{N\} = g(M_{AC}, N) \cap g(B,C) = g(M_{AC}, M_{BC}) \cap g(B,C) = \{M_{BC}\},$$

woraus wir wie gewünscht $N = M_{BC}$ erhalten. □

Bei der Rückrichtung des obigen Beweises wird die bereits bewiesene Eindeutigkeit der Parallelen verwendet. Wir können dieses geometrische Argument auch durch ein algebraisches Argument ersetzen und alternativ wie folgt vorgehen:

Beweis. Ist $N = M_{BC}$ der Mittelpunkt von BC, so ist

$$M_{AC} - N = M_{AC} - M_{BC} = \frac{1}{2}(A+C) - \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}(A-B).$$

Damit ist $\mathbb{R}\cdot(M_{AC} - N) = \mathbb{R}\cdot(A-B)$, und die Geraden $g(A,B) = \mathbb{R}\cdot(A-B)+B$ und $g(M_{AC}, N) = \mathbb{R}\cdot(M_{AC} - N) + N$ sind parallel zueinander.

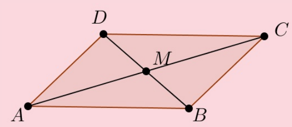
Sei nun $g(M_{AC}, N)$ parallel zu $g(A,B)$. Dann ist $g(M_{AC}, N) = \mathbb{R}\cdot(A-B) + M_{AC}$. Da N sowohl auf $g(M_{AC}, N)$ als auch auf $g(B,C) = \mathbb{R}\cdot(B-C)+B$ liegt, finden wir reelle Zahlen r, s, so dass $N = r\cdot(A-B) + M_{AC} = s\cdot(B-C)+B$ ist. Es folgt $r\cdot(A-B) + \frac{1}{2}\cdot(A+C) = s\cdot(B-C)+B$ und damit

$$(\frac{1}{2}+s)\cdot C = -(r+\frac{1}{2})\cdot A + (1+r+s)\cdot B = (\frac{1}{2}+s)\cdot B + (r+\frac{1}{2})\cdot(B-A).$$

Wäre $s \neq -\frac{1}{2}$, so könnten wir beide Seiten der Gleichung durch $\frac{1}{2}+s$ dividieren und erhielten $C = B + \frac{r+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+s} \cdot (B-A)$, womit C auf der Geraden $g(A,B)$ läge. Dies kann aber nicht sein, weil das Dreieck ABC nach Voraussetzung echt ist. Also ist $s = -\frac{1}{2}$ und damit $N = s \cdot (B-C) + B = -\frac{1}{2} \cdot (B-C) + B = \frac{1}{2} \cdot (B+C) = M_{BC}$.

□

Satz 6.9 (Charakterisierungssatz für Parallelogramme)**.** *Sei $ABCD$ ein echtes Viereck im $\mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*



(i) $ABCD$ ist ein Parallelogramm, (ii) $M_{AC} = M_{BD}$, (iii) $A - B = D - C$.

Beweis. Aus (ii) folgt (i). Ist nämlich $M_{AC} = M_{BD}$, so ist $\frac{1}{2} \cdot (A+C) = \frac{1}{2} \cdot (B+D)$, woraus $B-A = C-D$ und $D-A = C-B$ folgt. Damit ist $\mathbb{R} \cdot (B-A) = \mathbb{R} \cdot (C-D)$ und $\mathbb{R} \cdot (D-A) = \mathbb{R} \cdot (C-B)$, das Viereck $ABCD$ ist folglich ein Parallelogramm.

Wir zeigen nun, dass aus Aussage (i) die Aussage (ii) folgt. Sei dazu $ABCD$ ein Parallelogramm. Dann finden wir $r, s \in \mathbb{R}$, so dass $A - B = r \cdot (D - C)$ und $A - D = s \cdot (B - C)$ ist. Subtrahieren wir diese Gleichungen voneinander, so erhalten wir $D - B = r \cdot (D - C) - s \cdot (B - C)$ und damit

$$(1-r) \cdot D = (1-r) \cdot C + (1-s) \cdot (B-C). \qquad (*)$$

Wäre $r \neq 1$, so wäre $D = C + \frac{1-s}{1-r} \cdot (B-C) \in g(B,C)$ und damit wegen der Eindeutigkeit der Parallelen auch $A \in g(B,C)$, im Widerspruch zur Echtheit des Vierecks. Also ist $r = 1$. Aus $(*)$ folgt dann $(1-s) \cdot (B-C) = O$. Da $B \neq C$ ist, muss deshalb auch $s = 1$ sein. Damit ist $A - B = D - C$ und deshalb auch $M_{AC} = \frac{1}{2} \cdot (A+C) = \frac{1}{2} \cdot (B+D) = M_{BD}$.

Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ergibt sich aus

$$M_{AC} = M_{BD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(B+D) \Leftrightarrow A - B = D - C.$$

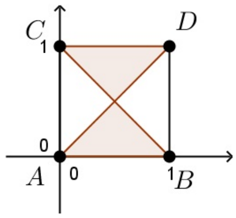
□

Satz 6.10. *Sei $ABCD$ ein Parallelogramm im $\mathbb{R}^n$. Dann sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.*

Beweis. Es ist $d(A,B) = \|A-B\| = \|D-C\| = d(D,C)$ wegen Satz 6.9 (iii). Die Gleichheit $d(A,D) = d(B,C)$ folgt analog. □

Zu beachten ist, dass in Satz 6.10 die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt, selbst dann nicht, wenn wir ein Viereck in der Ebene $\mathbb{R}^2$ betrachten:

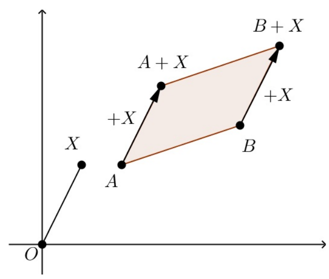
Sind beispielsweise $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ist $d(A, B) = 1 = d(C, D)$ und $d(B, C) = \sqrt{2} = d(D, A)$, aber $g(B, C) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht parallel zu $g(D, A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Satz 6.11 (Verschiebungssatz)**.** *Seien $A, B, X \in \mathbb{R}^n$ derart, dass das Viereck $AB(B + X)(A + X)$ echt ist. Dann ist das Viereck $AB(B + X)(A + X)$ ein Parallelogramm.*

Beweis. Der Mittelpunkt der Strecke $A(B+X)$ ist $\frac{1}{2}(A+(B+X))$. Der Mittelpunkt der Strecke $B(A + X)$ ist ebenfalls $\frac{1}{2}(B + (A + X)) = \frac{1}{2}(A + (B + X))$. Nach Satz 6.9 ist das Viereck $AB(B + X)(A + X)$ ein Parallelogramm. □

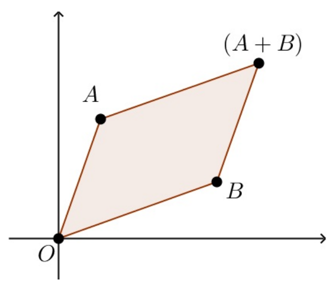
Satz 6.11 besagt, dass wir durch Addition eines Punktes X zu den Endpunkten einer Strecke AB eine Strecke erhalten, die parallel zur Strecke AB ist.
Die Strecke AB wurde also parallel zur gerichteten Strecke OX verschoben. Wir kennzeichnen diese Verschiebung durch Pfeile.



Wenden wir Satz 6.11 auf die Strecke AO und den Punkt B an, so erhalten wir, dass das Viereck

$$OA(A + B)(O + B) = OA(A + B)B$$

ein Parallelogramm ist. Damit können wir die Addition zweier Punkte geometrisch interpretieren: Der Punkt $A + B$ ist der Punkt, so dass das Viereck $OA(A + B)B$ ein Parallelogramm ist.



Wir können nun aus der Elementargeometrie bekannte Sätze über Dreiecke formulieren und beweisen.

Definition 6.6. *Sei ABC ein echtes Dreieck im $\mathbb{R}^n$. Dann heißen die Geraden $g(M_{AB}, C)$, $g(M_{BC}, A)$, $g(M_{AC}, B)$* Seitenhalbierendenlinien.

Definition 6.7. *Sei ABC ein echtes Dreieck im $\mathbb{R}^n$. Dann nennen wir den Punkt $S_{ABC} := \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$ den* Schwerpunkt *des Dreiecks.*

Satz 6.12. *Sei ABC ein echtes Dreieck im $\mathbb{R}^n$. Dann schneiden sich die Seitenhalbierendenlinien im Schwerpunkt $S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$.*

In [25] ist ein Beweis dieses Satzes gegeben, der die Seitenhalbierendenlinien parametrisiert. Wir führen stattdessen den in [29] vorgeschlagenen Beweis aus, der erheblich kürzer ist.

Beweis. Es ist

$$S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C) = \frac{1}{3} \cdot A + \frac{2}{3} \cdot M_{BC} = \frac{1}{3} \cdot B + \frac{2}{3} \cdot M_{AC} = \frac{1}{3} \cdot C + \frac{2}{3} \cdot M_{AB},$$

und damit ist S_{ABC} der 2:1-Teilungspunkt der Seitenhalbierenden AM_{BC}, BM_{AC}, CM_{AB} und liegt somit nach Satz 6.7 auf den Seitenhalbierendenlinien. □

Definition 6.8. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ verschiedene Punkte. Eine Gerade m heißt* ein Mittellot *oder auch* eine Mittelsenkrechte *der Strecke AB, wenn sie durch den Mittelpunkt von A und B verläuft und orthogonal zu $g(A, B)$ ist, wenn also $M_{AB} \in m$ und $m \perp g(A, B)$ ist.*

Sind $A, B \in \mathbb{R}^2$ verschiedene Punkte der Ebene, so folgt aus Satz 6.1, dass die Gerade $\mathbb{R} \cdot (A - B)^{\perp} + M_{AB}$ das einzige Mittellot von AB ist. Wir nennen diese Gerade deshalb das *Mittellot von A und B* und bezeichnen sie mit m_{AB}.

Satz 6.13 (Mittellotprinzip)**.** *Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ verschiedene Punkte.*
Dann liegt ein Punkt $X \in \mathbb{R}^n$ genau dann auf einem Mittellot m von A und B, wenn $d(A, X) = d(B, X)$ ist.
Im Fall $n = 2$ besteht das Mittellot m_{AB} also aus den Punkten, die von A und B den gleichen Abstand haben:

$$m_{AB} = \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, d(A, X) = d(B, X)\}.$$

Beweis. Sei $X \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&2(X - M_{AB}) \bullet (A - B) = (2 \cdot X - A - B) \bullet (A - B) \\
&= 2A \bullet X - A^2 - AB - 2B \bullet X + AB + B^2 = 2A \bullet X - A^2 - 2B \bullet X + B^2 \\
&= -(A^2 - 2A \bullet X + X^2) + (B^2 - 2B \bullet X + X^2) = -(A - X)^2 + (B - X)^2 \\
&= -\|A - X\|^2 + \|B - X\|^2 = -d(A, X)^2 + d(B, X)^2.
\end{aligned}$$

X liegt genau dann auf dem Mittellot von A und B, wenn $(X - M_{AB}) \bullet (A - B) = 0$ ist. Dies ist nach obiger Rechnung genau dann der Fall, wenn $d(A, X) = d(B, X)$ ist.

□

Wir werden uns in Kapitel 6.3 noch intensiv mit Kreisen auseinandersetzen. Zur Thematisierung des Umkreismittelpunktes geben wir an dieser Stelle schon vorab die Definition.

Definition 6.9. *Sei $M \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt, $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann heißt die Menge*

$$k_r(M) := \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, d(M, X) = r\}$$

der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

Definition 6.10. *Ist ABC ein echtes Dreieck im $\mathbb{R}^n$, so nennen wir die Geraden $h_A := \mathbb{R}\cdot(A - A_{g(B,C)}) + A$, $h_B := \mathbb{R}\cdot(B - B_{g(A,C)}) + B$, $h_C := \mathbb{R}\cdot(C - C_{g(A,B)}) + C$, die* Höhenlinien von A, B bzw. C *aus.*
Ist $n = 2$, so ist $h_A = \mathbb{R}\cdot(B - C)^{\perp} + A$, $h_B = \mathbb{R}\cdot(A - C)^{\perp} + B$, $h_C = \mathbb{R}\cdot(A - B)^{\perp} + C$.

Satz 6.14 (Umkreismittelpunkt)**.** *Sei ABC ein echtes Dreieck im $\mathbb{R}^2$. Dann schneiden sich die Mittellote m_{AB}, m_{BC}, m_{AC} in einem gemeinsamen Punkt U, dem* Umkreismittelpunkt. *Es ist $d(A, U) = d(B, U) = d(C, U)$, die Punkte A, B, C liegen also auf dem Kreis $k_r(U)$ mit Mittelpunkt U und Radius $r = d(A, U)$, dem* Umkreis *des Dreiecks ABC.*
Die Höhenlinien h_A,h_B,h_C schneiden sich ebenfalls in einem gemeinsamen Punkt H, dem Höhenlinienschnittpunkt.
Der Schwerpunkt S_{ABC}, der Höhenlinienschnittpunkt H und der Umkreismittelpunkt U liegen auf einer gemeinsamen Geraden, der Eulergeraden, *wobei der Schwerpunkt der 2:1-Teilungspunkt von HU ist.*

Beweis. Da $g(A, B) \nparallel g(B, C)$ ist, ist wegen der Verträglichkeit von $\perp$ und $\parallel$ (Satz 6.3) auch $m_{AB} \nparallel m_{BC}$, die Mittellote m_{AB} und m_{BC} schneiden sich folglich in genau einem Punkt U. Mit dem Mittellotprinzip (Satz 6.13) erhalten wir $d(A, U) = d(B, U)$ und $d(B, U) = d(C, U)$, also $d(A, U) = d(C, U)$. Durch erneute Anwendung von Satz 6.13 folgt $U \in m_{AC}$.

Die Höhenlinien h_A und h_B sind ebenfalls nicht parallel zueinander und schneiden sich deshalb in genau einem Punkt H. Wir zeigen, dass $H \in h_C$ ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass $g(C, H) \perp g(A, B)$, also $(C - H) \bullet (A - B) = 0$ ist.

Da $H \in h_A$ ist, gilt $0 = (A - H) \bullet (B - C) = ((A - C) + (C - H)) \bullet (B - C)$.
Da $H \in h_B$ ist, gilt $0 = (B - H) \bullet (A - C) = ((B - C) + (C - H)) \bullet (A - C)$.

Insgesamt erhalten wir

$$((A-C)+(C-H))\bullet(B-C)=((B-C)+(C-H))\bullet(A-C),$$

und daraus $(C-H)\bullet(B-C)=(C-H)\bullet(A-C)$, also wie gewünscht

$$0=(C-H)\bullet(A-C)-(C-H)\cdot(B-C)=(C-H)\bullet(A-B).$$

Wir betrachten den Punkt $X:=-2\cdot U+A+B+C$ und zeigen, dass $X=H$ ist. Es ist $X=-2\cdot(U-M_{BC})+A=-2\cdot(U-M_{AC})+B$. Da $\mathbb{R}\cdot(B-C)\perp\mathbb{R}\cdot(U-M_{BC})$ ist, ist $h_A=\mathbb{R}\cdot(B-C)^\perp+A=\mathbb{R}\cdot(U-M_{BC})+A$ und damit $X\in h_A$. Da $\mathbb{R}\cdot(A-C)\perp\mathbb{R}\cdot(U-M_{AC})$ ist, ist $h_B=\mathbb{R}\cdot(A-C)^\perp+B=\mathbb{R}\cdot(U-M_{AC})+B$ und damit $X\in h_B$. Also ist X der Schnittpunkt von h_A und h_B. Wir erhalten $H=X=-2\cdot U+A+B+C$ und daraus $S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot(A+B+C)=\frac{1}{3}\cdot H+\frac{2}{3}\cdot U$. □

6.3 Kreise

Zur Definition des Kreises wird die Eigenschaft des Zirkels, die dafür sorgt, dass alle Punkte auf dem Kreis den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben, in eine mathematische Gleichung übersetzt. Der Kreis ist, genauso wie die Koordinatenform der Geradengleichung, ein Beispiel für eine implizit definierte Punktmenge.

Definition 6.11 (Kreis)**.** *Sei $M\in\mathbb{R}^2$ ein Punkt und r eine positive reelle Zahl. Dann heißt die Punktmenge*

$$k_r(M):=\{X\mid X\in\mathbb{R}^2, d(M,X)=r\}$$

ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r. *Die Menge*

$$\mathring{k}_r(M):=\{X\mid X\in\mathbb{R}^2, d(M,X)<r\}$$

nennen wir das Innere des Kreises $k_r(M)$. *Ein Punkt $X\in\mathbb{R}^2$ liegt außerhalb des Kreises $k_r(M)$, wenn er weder zum Inneren des Kreises noch zum Kreis selbst gehört, wenn also $d(X,M)>r$ ist.*

Anstatt die Punkte X eines Kreises durch die Bedingung $d(M,X)=r$ zu definieren, ist es oft sinnvoll, die Quadrate der Abstände zu betrachten. Damit ergeben sich folgende äquivalente Schreibweisen:

$$\begin{aligned} k_r(M) &= \{X \mid d(M,X) = r\} \\ &= \{X \mid d^2(M,X) = r^2\} \\ &= \{X \mid \|M - X\|^2 = r^2\} \\ &= \{X \mid (M - X)^2 = r^2\} \\ &= \left\{X \mid \begin{pmatrix} m_1 - x_1 \\ m_2 - x_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} m_1 - x_1 \\ m_2 - x_2 \end{pmatrix} = r^2 \right\} \\ &= \{X \mid (m_1 - x_1)^2 + (m_2 - x_2)^2 = r^2\}. \end{aligned}$$

Die Punkte X eines Kreises $k_r(M)$ sind durch die Bedingung

$$r^2 = (m_1 - x_1)^2 + (m_2 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1m_1 + m_1^2 + x_2^2 - 2x_2m_2 + m_2^2$$

festgelegt. Es stellt sich die umgekehrte Frage, wann eine derartige quadratische Gleichung einen Kreis beschreibt. Diese Frage beantwortet der folgende Satz.

Satz 6.15. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Die Punktmenge $\{X | X \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + ax_1 + x_2^2 + bx_2 = c\}$ ist genau dann ein Kreis, wenn $c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} > 0$ ist. In diesem Fall ist $M = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$ der Mittelpunkt und $r = \sqrt{c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$ der Radius.*

Beweis. Für jeden Punkt $X \in \mathbb{R}^2$ ist die Aussage $x_1^2 + ax_1 + x_2^2 + bx_2 = c$ äquivalent zu $(x_1 + \frac{a}{2})^2 + (x_2 + \frac{b}{2})^2 = c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$.

Ist $c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} > 0$, so ist die Menge $\{X \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + ax_1 + x_2^2 + bx_2 = c\}$ folglich ein Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$ und Radius $r = \sqrt{c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}}$.

Ist $c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 0$, so ist $\{X \mid X \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + ax_1 + x_2^2 + bx_2 = c\} = \{\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix}\}$.

Ist $c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} < 0$, so ist $\{X \mid X \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + ax_1 + x_2^2 + bx_2 = c\} = \emptyset$. □

Die Lage einer Geraden zu einem Kreis wird durch die Begriffe *Passante*, *Tangente* und *Sekante* beschrieben, die wir über die Anzahl gemeinsamer Punkte definieren.

Definition 6.12. *Sei k ein Kreis und g eine Gerade. Die Gerade g heißt*

(i) Passante von k, *falls* $|k \cap g| = 0$,

(ii) Tangente von k, *falls* $|k \cap g| = 1$,

(iii) Sekante von k, *falls* $|k \cap g| = 2$ *ist.*

Die Anzahl der gemeinsamen Punkte eines Kreises mit einer Geraden ist vom Abstand des Kreismittelpunktes von der Geraden abhängig.

Satz 6.16 (Lage Kreis/Gerade). *Sei $k_r(M)$ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r und g eine Gerade. Dann gilt:*

(i) g ist genau dann Passante von $k_r(M)$, wenn $d(M,g) > r$,

(ii) g ist genau dann Tangente von $k_r(M)$, wenn $d(M,g) = r$ (der Schnittpunkt von $k_r(M)$ und g ist dann also der Lotfußpunkt M_g),

(iii) g ist genau dann Sekante von $k_r(M)$, wenn $d(M,g) < r$.

Beweis. Sei $g = \mathbb{R} \cdot A + M_g$, wobei M_g der nach Satz 5.7 eindeutig bestimmte Lotfußpunkt des Lotes durch M auf g ist. Ohne Einschränkung sei $\|A\| = 1$. Nach Satz 5.7 ist $d(M,g) = d(M_g, M) = \|M_g - M\|$. Sei $t \in R$ und $X = t \cdot A + M_g$ ein Punkt auf der Geraden g. Der Punkt X liegt genau dann auf dem Kreis $k_r(M)$, wenn

$$\begin{aligned} r^2 &= d^2(X,M) = (t \cdot A + M_g - M)^2 \\ &= t^2A^2 + 2tA \bullet (M_g - M) + (M_g - M)^2 = t^2 + (M_g - M)^2 \end{aligned}$$

ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $t^2 = r^2 - (M_g - M)^2 = r^2 - d^2(M,g)$ ist.

(i) Ist $d(M,g) > r$, so ist $r^2 - d^2(M,g) < 0$ und damit $g \cap k_r(M) = \emptyset$.

(ii) Ist $d(M,g) = r$, so ist $r^2 - d^2(M,g) = 0$ und damit $g \cap k_r(M) = \{M_g\}$.

(iii) Ist $d(M,g) < r$, so ist $r^2 - d^2(M,g) > 0$ und damit

$$g \cap k_r(M) = \{\sqrt{r^2 - d^2(M,g)}A + M_g, -\sqrt{r^2 - d^2(M,g)}A + M_g\}.$$

□

Satz 6.17 (Lage Kreis/Kreis). *Seien k und k' Kreise mit den Mittelpunkten M und M' sowie den Radien $r \geq r'$. Sei $d := d(M,M') > 0$ der Abstand der Mittelpunkte.*
Dann gilt:

(i) $|k \cap k'| = 0 \Leftrightarrow d > r + r'$ oder $d < r - r'$,

(ii) $|k \cap k'| = 1 \Leftrightarrow d = r + r'$ oder $d = r - r'$,

(iii) $|k \cap k'| = 2 \Leftrightarrow r - r' < d < r + r'$.

Beweis. (i) Sei $d > r + r'$. Sei $X \in k$ ein Punkt auf dem Kreis k. Mit der Dreiecksungleichung 5.4 folgt $d(M, M') \leq d(M, X) + d(X, M')$, also

$$d(X, M') \geq d(M, M') - d(M, X) > (r + r') - r = r'.$$

Das bedeutet $X \notin k'$, und damit ist $k \cap k' = \emptyset$.

Sei nun $d < r - r'$. Sei $X \in k'$ ein Punkt auf dem Kreis k'. Mit der Dreiecksungleichung 5.4 folgt $d(X, M) \leq d(X, M') + d(M', M) < r' + (r - r') = r$. Das bedeutet $X \notin k$, und damit ist $k \cap k' = \emptyset$.

(ii) Wir zeigen, dass $k \cap k' \subseteq \{M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)\}$ gilt, falls $d = r + r'$ oder $d = r - r'$. Sei dazu $X \in k \cap k'$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $d = r + r'$ ist. Dann ist

$$d(M, M') = d = r + r' = d(M, X) + d(X, M'),$$

nach Satz 5.4 ist also $X \in MM'$. Wir finden deshalb ein $t \in]0, 1[$, so dass $X = M + t \cdot (M' - M)$ ist und erhalten

$$r^2 = d^2(X, M) = (X - M)^2 = (t \cdot (M' - M))^2 = t^2 (M' - M)^2 = t^2 d^2$$

und damit $t = \frac{r}{d}$ und $X = M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)$.

Nun betrachten wir den Fall, dass $d = r - r'$ ist. Dann ist

$$d(M, M') = d = r - r' = d(M, X) - d(X, M')$$

und damit $d(M, X) = d(M, M') + d(M', X)$, nach Satz 5.4 ist also $M' \in MX$. Wir finden deshalb ein $t \in]0, 1[$, so dass $M' = M + t \cdot (X - M)$ und damit $X = M + \frac{1}{t} \cdot (M' - M)$ ist und erhalten

$$r^2 = d^2(X, M) = (X - M)^2 = (\frac{1}{t} \cdot (M' - M))^2 = \frac{1}{t^2} (M' - M)^2 = \frac{d^2}{t^2}$$

und damit $t = \frac{d}{r}$. Also ist auch in diesem Fall $X = M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)$.

Ist umgekehrt $X = M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)$, so ist

$$d(X, M)^2 = (X - M)^2 = (\frac{r}{d} \cdot (M' - M))^2 = r^2$$

und damit $X \in k$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} d(X, M')^2 &= (X - M')^2 = ((M - M') + \frac{r}{d} \cdot (M' - M))^2 \\ &= ((\frac{r}{d} - 1) \cdot (M' - M))^2 = (\frac{r}{d} - 1)^2 d^2 = (r - d)^2 = r'^2 \end{aligned}$$

und damit $X \in k'$. Also ist $X \in k \cap k'$. Damit ist $k \cap k' = \{M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)\}$ gezeigt.

(iii) Sei $r - r' < d < r + r'$. Sei $X \in k$. Dann ist $(X - M)^2 = r^2$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
& X \in k' \\
\Leftrightarrow\ & (X - M')^2 = r'^2 \\
\Leftrightarrow\ & (X - M)^2 - (X - M')^2 = r^2 - r'^2 \\
\Leftrightarrow\ & ((X - M) - (X - M')) \bullet ((X - M) + (X - M')) = r^2 - r'^2 \\
\Leftrightarrow\ & (M' - M) \bullet (2X - M - M') = r^2 - r'^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2X \bullet (M' - M) - (M' - M)(M + M') = r^2 - r'^2 \\
\Leftrightarrow\ & X \bullet (M' - M) = \frac{1}{2}(r^2 - r'^2 + (M' - M)(M + M')) =: c.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass X genau dann auf dem Kreis k und dem Kreis k' liegt, wenn X auf dem Kreis k und auf der Geraden $g = \{X \mid X \in \mathbb{R}^2, X \bullet (M' - M) = c\}$ liegt. Damit können k und k' höchstens zwei gemeinsame Punkte besitzen. Wir zeigen, dass $d(M, g) < r$ ist, denn dann haben die Gerade g und der Kreis k nach Satz 6.16 genau zwei Schnittpunkte. Nach Satz 6.5 ist $g = \mathbb{R}A + B$, wobei $A = (M' - M)^\perp = \begin{pmatrix} m_2 - m_2' \\ m_1' - m_1 \end{pmatrix}$ und ohne Einschränkung $B = \begin{pmatrix} \frac{c}{m_1' - m_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Es ist

$$\begin{aligned}
d(M, g) = d(M - B, \mathbb{R}A) &= \frac{|(M - B) \bullet (M' - M)|}{\|M' - M\|} = \frac{|(M - B) \bullet (M' - M)|}{d} \\
&= \left| \frac{-m_1^2 - m_1'^2 - m_2^2 - m_2'^2 - r^2 + r'^2 + 2\, m_1\, m_1' + 2\, m_2\, m_2'}{2\, d} \right| \\
&= \frac{|-r^2 + r'^2 - d^2|}{2d} = \frac{r^2 - r'^2 + d^2}{2d} = \frac{(r - d)^2 - r'^2 + 2rd}{2d} \\
&< \frac{r'^2 - r'^2 + 2rd}{2d} = r,
\end{aligned}$$

und damit ist $|k \cap g| = 2$.

Da genau einer der drei Fälle

(i) $d > r + r'$ oder $d < r - r'$, (ii) $d = r + r'$ oder $d = r - r'$, (iii) $r - r' < d < r + r'$

eintritt, folgen auch die anderen Implikationen. $\square$

7 Linearkombinationen

Definition 7.1. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Sind $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ Punkte, $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, so nennen wir*

$$r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m$$

eine Linearkombination der Punkte $A_1, \ldots, A_m$.

Definition 7.2 (lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit)**.** *Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Punkte $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ heißen* linear unabhängig, *wenn für alle reellen Zahlen $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ die Implikation*

$$r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = O \Rightarrow r_1 = \ldots = r_m = 0$$

gilt.
Die Punkte $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ heißen linear abhängig, *falls sie nicht linear unabhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn reelle Zahlen $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $\{r_1, \ldots, r_m\} \neq \{0\}$ und*

$$r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = O$$

ist.
Wie nennen in dem Fall die Linearkombination $r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = O$ eine nichttriviale Linearkombination der O.

Bemerkungen:

(1) Für jeden Punkt $A \in \mathbb{R}^n$ sind die Punkte O und A linear abhängig, denn es ist $1 \cdot O + 0 \cdot A = O$.

(2) Für beliebige Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n$ sind O, A und B linear abhängig, denn es ist $1 \cdot O + 0 \cdot A + 0 \cdot B = O$.

(3) Aus der paarweisen linearen Unabhängigkeit folgt im Allgemeinen nicht die

lineare Unabhängigkeit. So sind beispielsweise die Punkte

$$D := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

paarweise linear unabhängig, die Punkte D, E, F hingegen linear abhängig.

Es gilt die folgende Charakterisierung der linearen Abhängigkeit.

Satz 7.1. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Punkte $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn Indizes $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j_1, \ldots, j_{m-1} \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$ und reelle Zahlen $r_1, \ldots, r_{m-1} \in \mathbb{R}$ existieren, so dass*

$$A_i = r_1 A_{j_1} + \ldots + r_{m-1} A_{j_{m-1}}$$

ist.

Bemerkungen:

(1) Zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n$ sind folglich genau dann linear abhängig, wenn eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$A = r \cdot B \text{ oder } B = r \cdot A$$

ist.

(2) Zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot B$ ist.
Damit ist die Relation *linear abhängig sein* auf der Menge $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ transitiv. Sind nämlich $A, B, C \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, so dass A und B linear abhängig sind, und so dass B und C linear abhängig sind, so ist $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot B$ und $\mathbb{R} \cdot B = \mathbb{R} \cdot C$, woraus $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot C$ und damit die lineare Abhängigkeit von A und C folgt.

(3) Drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn reelle Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$A = r \cdot B + s \cdot C \text{ oder } B = r \cdot A + s \cdot C \text{ oder } C = r \cdot A + s \cdot B$$

ist.

Beweis von Satz 7.1. Seien $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig. Dann finden wir reelle Zahlen $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$, so dass $\{r_1, \ldots, r_m\} \neq \{0\}$ und $r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = O$ ist. Ohne Einschränkung sei $r_m \neq 0$. Dann ist $A_m = -\frac{r_1}{r_m} \cdot A_1 - \ldots - \frac{r_{m-1}}{r_m} \cdot A_{m-1}$.

Seien nun $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j_1, \ldots, j_{m-1} \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$ und $r_1, \ldots, r_{m-1} \in \mathbb{R}$ und es gelte $A_i = r_1 A_{j_1} + \ldots + r_{m-1} A_{j_{m-1}}$. Ohne Einschränkung sei $i = m$, $j_1 = 1$,

$j_2 = 2, \ldots, j_{m-1} = m-1$. Dann ist $A_m = r_1A_1 + \ldots + r_{m-1}A_{m-1}$. Wir setzen $r_m := -1$. Dann ist $\{r_1, \ldots, r_m\} \neq \{0\}$ und

$$r_1A_1 + \ldots + r_mA_m = r_1A_1 + \ldots + r_{m-1}A_{m-1} - A_m = 0,$$

womit die lineare Abhängigkeit gezeigt ist. □

Definition 7.3. *Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$. Wir definieren*

$$\mathbb{R}^{m\times n} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Elemente $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nennen wir Matrizen.

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, so nennen wir $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ die Komponenten der Matrix A und bezeichnen diese in der Regel mit kleinen, doppelt indizierten lateinischen Buchstaben. An einigen Stellen werden wir die ij-te Komponente einer Matrix A auch mit A_{ij} bezeichnen.

Die Matrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & \ldots 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \ldots 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

heißt *Einheitsmatrix.*

Genauso wie für Punkte definieren wir auch für Matrizen die Addition und die Vervielfachung.

Definition 7.4. *Sind $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $r \in R$, so definieren wir die* Summe $A + B$ *und die* Vervielfachung $r \cdot A$ *als*

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, r \cdot A := \begin{pmatrix} ra_{11} & \ldots & ra_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ra_{m1} & \ldots & ra_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden für diese Verknüpfungen wieder dieselben Symbole wie für die Addition und Vervielfachung reeller Zahlen. Analog zum Punktprodukt definieren wir für Matrizen das Matrixprodukt.

Definition 7.5. *Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, so definieren wir das* Matrixprodukt

$$\begin{aligned} A \bullet B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1k} + \ldots + a_{1n}b_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \ldots + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1k} + \ldots + a_{mn}b_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times k}. \end{aligned}$$

Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $X \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, so interpretieren wir X als $n \times 1$-Matrix und erhalten

$$A \bullet X = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1} = \mathbb{R}^m.$$

Der Malpunkt $\bullet$ hat somit zwei Bedeutungen: einmal als Verknüpfung auf der Menge der Punkte und einmal als Verknüpfung auf der Menge der Matrizen.

Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$ und bezeichnen wir den ij-ten Eintrag der Matrix $A \bullet B$ mit $(A \bullet B)_{ij}$, so gilt $(A \bullet B)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj}$.

Definition 7.6. *Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ definieren wir die* transponierte Matrix *${}^tA \in \mathbb{R}^{m\times n}$ durch $({}^tA)_{ij} = A_{ji}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$.*
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt orthogonal, *falls $A \bullet {}^tA = I_n$ ist. Die Menge aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen bezeichnen wir mit $O(n)$.*

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so ist ${}^tA := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Sind $X, Y \in \mathbb{R}^n$ Punkte, so können wir X und Y als $n \times 1$-Matrizen auffassen. Interpretieren wir $\bullet$ einmal als Punktprodukt und einmal als Matrixprodukt, so erhalten wir $X \bullet Y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tX \bullet Y$.

Satz 7.2. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Dann ist ${}^t(A \bullet B) = {}^tB \bullet {}^tA$.*

Beweis. Seien $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Wir bezeichnen den i, j-ten Eintrag einer Matrix X mit X_{ij}. Dann gilt für den i,j-ten Eintrag der Matrix ${}^t(A \bullet B)$

$$({}^t(A \bullet B))_{ij} = (A \bullet B)_{ji} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{li} = \sum_{l=1}^{n} ({}^tB)_{il} ({}^tA)_{lj} = ({}^tB \bullet {}^tA)_{ij}.$$

□

Satz 7.3. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{k\times l}$. Dann ist $A\bullet(B\bullet C) = (A\bullet B)\bullet C$.*

Beweis. Seien $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$. Dann gilt für den i,j-ten Eintrag der Matrix $A \bullet (B \bullet C)$

$$\begin{aligned}(A \bullet (B \bullet C))_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} a_{ir} (B \bullet C)_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \sum_{s=1}^{k} b_{rs} c_{sj} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{k} a_{ir} b_{rs} c_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rs} c_{sj} = \sum_{s=1}^{k} (A \bullet B)_{is} c_{sj} = ((A \bullet B) \bullet C)_{ij}.\end{aligned}$$

□

Definition 7.7. *Ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so definieren wir die* Determinante *von A als*

$$det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so definieren wir die Determinante *von A als*

$$det(A) := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Satz 7.4 (Charakterisierung der linearen Unabhängigkeit)**.** *Sind $A, B \in \mathbb{R}^n$, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A und B sind linear unabhängig,*

(ii) *$A \neq O$ und $B \neq O$ und $\mathbb{R} \cdot A \neq \mathbb{R} \cdot B$ (insbesondere ist $A \neq B$),*

(iii) *$A \neq O$, $B \neq O$ und $\mathbb{R} \cdot A \cap \mathbb{R} \cdot B = \{O\}$.*

(iv) *$A \neq O$, $B \neq O$, und zu jedem $Z \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ existieren eindeutig bestimmte $r, s \in \mathbb{R}$ mit $Z = r \cdot A + s \cdot B$.*

Beweis.

Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt direkt aus Satz 7.1 .

Wir zeigen nun die Äqivalenz von (*ii*) und (*iii*). Die Geraden $\mathbb{R} \cdot A$ und $\mathbb{R} \cdot B$ sind genau dann ungleich, wenn sie höchstens einen gemeinsamen Punkt haben. Da $O \in \mathbb{R} \cdot A \cap \mathbb{R} \cdot B$ ist, ist dies äquivalent zu $\mathbb{R} \cdot A \cap R \cdot B = \{O\}$. Damit ist die Äquivalenz von (*ii*) und (*iii*) gezeigt.

Aus (*iv*) folgt (*iii*). Ist nämlich $Z \in \mathbb{R} \cdot A \cap \mathbb{R} \cdot B$, so finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $Z = r \cdot A = s \cdot B$ und es ist $Z = r \cdot A + 0 \cdot B = 0 \cdot A + s \cdot B$. Aus der Eindeutigkeit (*iv*) folgt $r = s = 0$ und damit $Z = O$.

Gilt umgekehrt (*iii*) und ist $Z \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ und sind $r, r', s, s' \in \mathbb{R}$ mit $Z = r \cdot A + s \cdot B = r' \cdot A + s' \cdot B$, so ist

$$(r - r')A = (s' - s)B \in \mathbb{R} \cdot A \cap \mathbb{R} \cdot B = \{O\},$$

woraus wir $r - r' = s' - s = 0$ und damit $r = r'$ und $s = s'$ erhalten. Damit ist die Darstellung von Z eindeutig. □

Satz 7.5. *Sind $A, B \in \mathbb{R}^2$, so sind A und B sind genau dann linear unabhängig, wenn $det(A, B) := det(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}) \neq 0$ ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass A und B genau dann linear abhängig sind, wenn $det(A, B) = 0$ ist.

Es gelte $det(A, B) = 0$. Ist $A = O$ oder $B = O$, so sind A und B linear abhängig und wir sind fertig. Wir können also $A \neq O$ und $B \neq O$ voraussetzen. Ohne Einschränkung sei $a_1 \neq 0$. Wegen $0 = det(A, B) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ ist dann $b_2 = \frac{b_1}{a_1} a_2$ und damit

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{b_1}{a_1} a_2 \end{pmatrix} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{b_1}{a_1} \cdot A.$$

Mit Satz 7.1 folgt die lineare Abhängigkeit von A und B.

Sind A und B linear abhängig, so finden wir wegen Satz 7.1 eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $A = r \cdot B$ oder $B = r \cdot A$. Ohne Einschränkung sei $A = r \cdot B$. Dann gilt

$$det(A, B) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 (r a_2) - a_2 (r a_1) = 0.$$

□

Damit ist gezeigt:

Satz 7.6. *Zwei Geraden $g = \mathbb{R} \cdot A + B \subseteq \mathbb{R}^2$ und $g' = \mathbb{R} \cdot A' + B' \subseteq \mathbb{R}^2$ schneiden sich genau dann in genau einem Punkt, wenn $det(A, A') = a_1 a_2' - a_2 a_1' \neq 0$ ist.*

Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen Orthogonalität und linearer Unabhängigkeit.

Satz 7.7. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$. Ist $\mathbb{R} \cdot A \perp \mathbb{R} \cdot B$, so sind A und B linear unabhängig.*

Beweis. Sei $\mathbb{R} \cdot A \perp \mathbb{R} \cdot B$ und $X \in \mathbb{R} \cdot A \cap \mathbb{R} \cdot B$. Dann finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot A = s \cdot B$ und erhalten $\|X\|^2 = X \bullet X = (r \cdot A) \bullet (s \cdot B) = (rs)(A \bullet B) = 0$ und damit $X = O$. Also ist $\mathbb{R} \cdot A \cap \mathbb{R} \cdot B = \{O\}$, woraus mit Satz 7.4 die lineare Unabhängigkeit von A und B folgt. □

Definition 7.8 (Basis)**.** *Sei $m \in \mathbb{N}$. Eine Menge $\{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathbb{R}^n$ von Punkten heißt* Basis des $\mathbb{R}^n$, *falls $\{A_1, \ldots, A_m\}$ linear unabhängig und*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \cdot A_1 + \ldots + \mathbb{R} \cdot A_m$$

ist. Die Punktmenge

$$\mathbb{R} \cdot A_1 + \ldots + \mathbb{R} \cdot A_m := \{X \mid \exists r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R} : X = r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m\}$$

nennen wir das Erzeugnis *oder auch den* Aufspann *von $\{A_1, \ldots, A_m\}$.*

Wenn wir im Folgenden von einer Menge $\{A_1, \ldots, A_m\}$ sprechen, so setzen wir voraus, dass diese Menge m-elementig ist, dass die Punkte $A_1, \ldots, A_m$ also paarweise verschieden sind.

Ist $\{A_1, \ldots, A_m\}$ eine *Basis* des $\mathbb{R}^n$, so lässt sich jedes $Z \in \mathbb{R}^n$ *eindeutig* als Linearkombination von $A_1, \ldots, A_m$ schreiben. Sind nämlich $r_1, \ldots, r_m, r'_1, \ldots, r'_m \in \mathbb{R}$ mit

$$Z = r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = r'_1 \cdot A_1 + \ldots + r'_m \cdot A_m,$$

so ist

$$(r_1 - r'_1) \cdot A_1 + \ldots + (r_m - r'_m) \cdot A_m = O$$

und aus der linearen Unabhängigkeit von $\{A_1, \ldots, A_m\}$ folgt

$$r_1 - r'_1 = 0, \ldots, r_m - r'_m = 0$$

und damit $r_1 = r'_1, \ldots, r_m = r'_m$.

Ist umgekehrt jedes $Z \in \mathbb{R}^n$ eindeutig als Linearkombination darstellbar, so ist

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \cdot A_1 + \ldots + \mathbb{R} \cdot A_m$$

und $\{A_1, \ldots, A_m\}$ linear unabhängig, da es wegen der Eindeutigkeit der Linearkombinationen nur die triviale Linearkombination der O geben kann.

Sind $X, Y \in \mathbb{R} \cdot A_1 + \ldots + \mathbb{R} \cdot A_m$ und $r, s \in \mathbb{R}$, so ist auch $r \cdot X + s \cdot Y \in \mathbb{R} \cdot A_1 + \ldots + \mathbb{R} \cdot A_m$. Der Aufspann ist also abgeschlossen bezüglich Addition und Vervielfachung.

Die Punkte $E_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $E_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bilden eine zweielementige Basis der Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass jede Basis der Ebene aus zwei Punkten besteht und dass drei Punkte der Ebene stets linear abhängig sind.

Satz 7.8. *Ist $\{A, B\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine zweielementige Basis des $\mathbb{R}^2$, so gilt*

(i) Für jeden Punkt $X \in \mathbb{R}^2$, $X \neq O$, ist mindestens eine der Mengen $\{A, X\}$ oder $\{B, X\}$ linear unabhängig.

(ii) Sind $X, Y \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, so ist $\{X, Y\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$, es gilt also $\mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y = \mathbb{R}^2$.

(iii) Sind $X, Y, Z \in \mathbb{R}^2$, so ist die Menge $\{X, Y, Z\}$ linear abhängig.

Beweis. Zum Beweis von (i) sei $X \in \mathbb{R}^2$, $X \neq O$. Dann kann X nicht auf beiden Geraden $\mathbb{R} \cdot A$ und $\mathbb{R} \cdot B$ liegen, da diese sonst identisch wären, was nach Satz 7.4 ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von A und B ist. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $X \notin \mathbb{R} \cdot A$ ist. Dann ist $\mathbb{R} \cdot X \neq \mathbb{R} \cdot A$, und damit ist ebenfalls nach Satz 7.4 die Menge $\{A, X\}$ linear unabhängig.

Zum Beweis von (ii) seien $X, Y \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Es ist $\mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y \subseteq \mathbb{R}^2$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y$ ist. Nach (i) muss eine der Mengen $\{A, X\}$ oder $\{B, X\}$ linear unabhängig sein. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Menge $\{A, X\}$ linear unabhängig ist. Da $\{A, B\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot A + s \cdot B$. Wäre $s = 0$, so wäre $X \in \mathbb{R} \cdot A$, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\{A, X\}$. Also ist $s \neq 0$,

$$B = \frac{1}{s} \cdot X - \frac{r}{s} \cdot A \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot X,$$

und damit $\mathbb{R} \cdot B \subseteq \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot X$. Aus $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B \subseteq \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot X \subseteq \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ folgt die Gleichheit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot X$. Die Menge $\{A, X\}$ ist folglich eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Wir finden also $r', s' \in \mathbb{R}$ mit $Y = r' \cdot A + s' \cdot X$. Da $\{X, Y\}$ nach Voraussetzung linear unabhängig ist, ist $r' \neq 0$ und wir erhalten

$$A = \frac{1}{r'} \cdot Y - \frac{s'}{r'} \cdot X \in \mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y$$

und damit auch $\mathbb{R} \cdot A \subseteq \mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y$ und $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot X \subseteq \mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y$. Es gilt also

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot X \subseteq \mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y \subseteq \mathbb{R} \cdot A + R \cdot B = \mathbb{R}^2,$$

womit die Gleichheit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y$ gezeigt ist.

Wir kommen nun zum Nachweis von (iii). Ist $\{X, Y\}$ linear abhängig, so finden wir eine nichttriviale Linearkombination der O, $r \cdot X + s \cdot Y = O$. Dann ist aber auch

$r \cdot X + s \cdot Y + 0 \cdot Z = O$ eine nichttriviale Linearkombination der O, womit die lineare Abhängigkeit von $\{X, Y, Z\}$ gezeigt ist. Ist $\{X, Y\}$ linear unabhängig, so ist nach *(ii)* $\{X, Y\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$, wir finden also $r, s \in \mathbb{R}$ mit $Z = r \cdot X + s \cdot Y$. Damit ist jedoch $-r \cdot X - s \cdot Y + 1 \cdot Z = O$ eine nichttriviale Linearkombination der O, womit ebenfalls die lineare Abhängigkeit von $\{X, Y, Z\}$ gezeigt ist. □

Der Beweis von Satz 7.8 behält seine Gültigkeit, wenn wir für beliebige Dimension n linear unabhängige Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n$ wählen und jedes Vorkommen von $\mathbb{R}^2$ durch $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ ersetzen.

Die Punkte $E_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine dreielementige Basis des Raumes $\mathbb{R}^3$. Wir werden im Folgenden zeigen, dass jede Basis des Raumes $\mathbb{R}^3$ aus drei Punkten besteht und dass vier Punkte des Raumes stets linear abhängig sind.

Satz 7.9. *Sei $\{A, B, C\} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine dreielementige Basis des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt*

(i) Für jedes $X \in \mathbb{R}^3$, $X \neq O$ ist mindestens eine der Mengen $\{A, B, X\}$, $\{A, X, C\}$, $\{X, B, C\}$ linear unabhängig.

(ii) Ist $\{X, Y\} \subseteq \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, so ist mindestens eine der Mengen $\{A, X, Y\}$, $\{X, B, Y\}$, $\{X, Y, C\}$ linear unabhängig.

(iii) Jede linear unabhängige Menge $\{X, Y, Z\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(iv) Jede vierelementige Menge $\{X, Y, Z, W\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis von *(i)* und bemerken zunächst, dass $(\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B) \cap (\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot C) = \mathbb{R} \cdot A$ ist. Ist nämlich $Y \in (\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B) \cap (\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot C)$, so finden wir $r, r', s, s' \in \mathbb{R}$ mit $Y = r \cdot A + s \cdot B = r' \cdot A + s' \cdot C$. Aus der Eindeutigkeit der Darstellung folgt dann $s = s' = 0$, $r = r'$ und damit $Y \in \mathbb{R} \cdot A$.

Sei $X \in \mathbb{R}^3$, $X \neq O$. Da

$$(\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B) \cap (\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot C) \cap (\mathbb{R} \cdot B + \mathbb{R} \cdot C) = \mathbb{R} \cdot A \cap (\mathbb{R} \cdot B + \mathbb{R} \cdot C) = \{O\}$$

ist, kann X nicht in jeder der drei geschnittenen Mengen liegen. Ohne Einschränkung sei $X \notin \mathbb{R} \cdot B + \mathbb{R} \cdot C$. Wir zeigen nun die lineare Unabhängigkeit von $\{X, B, C\}$. Seien dazu $r, s, t \in \mathbb{R}$ mit $r \cdot X + s \cdot B + t \cdot C = 0$. Wäre $r \neq 0$, so wäre

$$X = -\frac{s}{r} \cdot B - \frac{t}{r} \cdot C \in \mathbb{R} \cdot B + \mathbb{R} \cdot C,$$

was ein Widerspruch ist. Also ist $r = 0$. Da B und C linear unabhängig sind, folgt aus $s \cdot B + t \cdot C = 0$, dass auch $s = t = 0$ ist. Also ist die Menge $\{X, B, C\}$ linear unabhängig.

Zum Nachweis von (ii) sei $\{X,Y\} \subseteq \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Dann ist $X \neq O$. Nach (i) können wir annehmen, dass $\{X,B,C\}$ linear unabhängig ist. Es ist

$$(\mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot B) \cap (\mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot C) = \mathbb{R}\cdot X.$$

Da nach Satz 7.4

$$Y \notin \mathbb{R}\cdot X = (\mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot B) \cap (\mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot C)$$

ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $Y \notin \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot C$ ist. Wir zeigen nun die lineare Unabhängigkeit von $\{X,Y,C\}$. Seien dazu $r,s,t \in \mathbb{R}$ mit $r\cdot X + s\cdot Y + t\cdot C = 0$. Wäre $s \neq 0$, so wäre $Y = -\frac{r}{s}\cdot X - \frac{t}{s}\cdot C \in \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot C$, was ein Widerspruch ist. Also ist $s = 0$ und $r\cdot X + t\cdot C = 0$. Da $\{X,C\}$ linear unabhängig ist, ist auch $r = t = 0$. Damit ist die Menge $\{X,Y,C\}$ linear unabhängig.

Wir weisen nun Aussage (iii) nach. Sei $\{X,Y,Z\} \subseteq \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Gemäß (i) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Menge $\{X,B,C\}$ linear unabhängig ist. Seien $r,s,t \in \mathbb{R}$ mit $X = r\cdot A + s\cdot B + t\cdot C$. Da $\{X,B,C\}$ linear unabhängig ist, ist $X \notin \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C$ und damit $r \neq 0$. Wir erhalten

$$A = \frac{1}{r}\cdot X - \frac{s}{r}\cdot B - \frac{t}{r}\cdot C \in \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C$$

und damit $\mathbb{R}\cdot A \subseteq \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C$. Es folgt

$$\mathbb{R}\cdot A + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C \subseteq \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C \subseteq \mathbb{R}\cdot A + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C$$

und damit letztendlich die Gleichheit

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\cdot A + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C = \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C.$$

Die Menge $\{X,B,C\}$ ist also eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir finden deshalb $r',s',t' \in \mathbb{R}$ mit $Y = r'\cdot X + s'\cdot B + t'\cdot C$. Wäre $s' = t' = 0$, so wäre $Y = r'\cdot X$, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von X und Y. Also ist $s' \neq 0$ oder $t' \neq 0$.

Ohne Einschränkung sei $s' \neq 0$. Dann ist

$$B = -\frac{r'}{s'}\cdot X + \frac{1}{s'}\cdot Y - \frac{t'}{s'}\cdot C \text{ und damit } \mathbb{R}\cdot B \subseteq \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot Y + \mathbb{R}\cdot C,$$

woraus $\mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C \subseteq \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot Y + \mathbb{R}\cdot C$ und

$$\mathbb{R}\cdot A + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C = \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C \subseteq \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot Y + \mathbb{R}\cdot C \subseteq \mathbb{R}\cdot A + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C$$

folgt. Wir erhalten $\mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot Y + \mathbb{R}\cdot C = \mathbb{R}\cdot A + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C = \mathbb{R}^3$ und finden deshalb $r'',s'',t'' \in \mathbb{R}$ mit $Z = r''\cdot X + s''\cdot Y + t''\cdot C$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $\{X,Y,Z\}$ folgt $t'' \neq 0$ und damit $\mathbb{R}\cdot C \subseteq \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot Y + \mathbb{R}\cdot Z$, woraus sich

$$\mathbb{R}\cdot A + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C = \mathbb{R}\cdot X + R\cdot Y + \mathbb{R}\cdot C \subseteq \mathbb{R}\cdot X + \mathbb{R}\cdot Y + \mathbb{R}\cdot Z \subseteq \mathbb{R}\cdot A + \mathbb{R}\cdot B + \mathbb{R}\cdot C$$

ergibt. Wir erhalten $\mathbb{R} \cdot X + \mathbb{R} \cdot Y + \mathbb{R} \cdot Z = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + \mathbb{R} \cdot C = \mathbb{R}^3$, die Menge $\{X, Y, Z\}$ ist folglich eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Zum Nachweis von (iv) betrachten wir eine vierelementige Menge $\{X, Y, Z, W\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Ist $\{X, Y, Z\}$ linear abhängig, so ist auch $\{X, Y, Z, W\}$ linear abhängig und Aussage (iv) ist gezeigt. Ist hingegen $\{X, Y, Z\}$ linear unabhängig, so ist die Menge nach (iii) eine Basis und wir finden $r, s, t \in \mathbb{R}$ mit $W = r \cdot X + s \cdot Y + t \cdot Z$. Damit ist $-W + r \cdot X + s \cdot Y + t \cdot Z = O$ eine nichttriviale Linearkombination der O, die Menge $\{X, Y, Z, W\}$ ist folglich linear abhängig, womit Aussage (iv) auch in diesem Fall gezeigt ist. $\square$

Die Menge $\{E_1, E_2, E_3\}$ ist eine dreielementige Basis des $\mathbb{R}^3$. Somit besagt Satz 7.9 (ii) , dass es keine zweielementige Basis des $\mathbb{R}^3$ gibt. Satz 7.9 (iv) besagt, dass es keine vierelementige Basis des $\mathbb{R}^3$ gibt. Somit besteht jede Basis des $\mathbb{R}^3$ aus 3 Elementen. Wir nennen den $\mathbb{R}^3$ deshalb einen dreidimensionalen Punktraum.

8 Geometrie des Raumes

8.1 Das Kreuzprodukt

In diesem Abschnitt sei $n = 3$, wir betrachten also den Raum $\mathbb{R}^3$ als zugrunde liegende Punktmenge.

Definition 8.1. *Für zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das* Kreuzprodukt „A kreuz B" *als* $A \times B := \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

Für das Kreuzprodukt gelten die folgenden Rechenregeln.

Satz 8.1. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ Punkte sowie $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) $A \times B = -B \times A$,

(ii) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ *und* $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$,

(iii) $(r \cdot A) \times B = r \cdot (A \times B) = A \times (r \cdot B)$,

(iv) $A \times (B \times C) = (A \bullet C) \cdot B - (A \bullet B) \cdot C$,

(v) $(A \times B) \bullet C = (C \times A) \bullet B$.

Das Kreuzprodukt ist also antikommutativ und linear in jeder Komponente. Wegen Rechenregel (iii) lassen wir auch beim Kreuzprodukt die Klammern weg und schreiben $rA \times B$. Das Kreuzprodukt ist jedoch nicht assoziativ. Stattdessen gilt die in (iv) genannte *Graßmann-Identität*. Rechenregel (v) besagt, dass die Kombination aus Kreuz- und Punktprodukt invariant ist unter zyklischer Vertauschung.

Beweis. Die Beweise erfolgen jeweils durch fleißiges Nachrechnen. Es gilt

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_3b_2 - a_2b_3) \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ -(a_2b_1 - a_1b_2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_2a_3 - b_3a_2 \\ b_3a_1 - b_1a_3 \\ b_1a_2 - b_2a_1 \end{pmatrix} = -B \times A,$$

womit der Nachweis von (i) erbracht ist. Der erste Teil von Aussage (ii) gilt wegen

$$\begin{aligned}(A+B)\times C &= \begin{pmatrix}(a_2+b_2)c_3-(a_3+b_3)c_2\\(a_3+b_3)c_1-(a_1+b_1)c_3\\(a_1+b_1)c_2-(a_2+b_2)c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2c_3-a_3c_2+b_2c_3-b_3c_2\\a_3c_1-a_1c_3+b_3c_1-b_1c_3\\a_1c_2-a_2c_1+b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a_2c_3-a_3c_2\\a_3c_1-a_1c_3\\a_1c_2-a_2c_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix} = A\times C+B\times C,\end{aligned}$$

womit wegen $A\times(B+C)\overset{(i)}{=}-(B+C)\times A\overset{(ii)}{=}-(B\times A+C\times A)=-B\times A-C\times A\overset{(i)}{=}A\times B+A\times C$ auch der zweite Teil von Aussage (ii) gezeigt ist.

Der erste Teil von Aussage (iii) gilt wegen

$$\begin{aligned}(r\cdot A)\times B &= \begin{pmatrix}(ra_2)b_3-(ra_3)b_2\\(ra_3)b_1-(ra_1)b_3\\(ra_1)b_2-(ra_2)b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r(a_2b_3-a_3b_2)\\r(a_3b_1-a_1b_3)\\r(a_1b_2-a_2b_1)\end{pmatrix}\\ &= r\cdot\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} = r\cdot(A\times B),\end{aligned}$$

woraus wir den zweiten Teil $A\times(r\cdot B)\overset{(i)}{=}-(r\cdot B)\times A\overset{(iii)}{=}(-r)\cdot(B\times A)\overset{(i)}{=}r\cdot(A\times B)$ erhalten. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}A\times(B\times C) &= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)\\a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1)\\a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3)\\a_3b_2c_3-a_3b_3c_2-a_1b_1c_2+a_1b_2c_1)\\a_1b_3c_1-a_1b_1c_3-a_2b_2c_3-a_2b_3c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1\\(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_2-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_2\\(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3\end{pmatrix}\\ &= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = (A\bullet C)\cdot B-(A\bullet B)\cdot C\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(A\times B)\bullet C = \begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} &= (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3\\ &= a_2b_3c_1-a_3b_2c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2+a_1b_2c_3-a_2b_1c_3\\ &= (c_2a_3-c_3a_2)b_1+(c_3a_1-c_1a_3)b_2+(c_1a_2-c_2a_1)b_3\\ = \begin{pmatrix}c_2a_3-c_3a_2\\c_3a_1-c_1a_3\\c_1a_2-c_2a_1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} &= (C\times A)\bullet B.\end{aligned}$$

□

Im weiteren Verlauf benötigen wir die in folgendem Satz zusammengefassten Eigenschaften des Kreuzproduktes.

Satz 8.2. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^3$.*

(i) A und B sind genau dann linear unabhängig, wenn $A \times B \neq O$ ist.

(ii) $\mathbb{R} \cdot (A \times B)$ ist orthogonal zu $\mathbb{R} \cdot A$ und zu $\mathbb{R} \cdot B$.

(iii) A und B sind genau dann linear unabhängig, wenn A, $B, A \times B$ linear unabhängig sind.

(iv) Sind A, B linear unabhängig, $C \neq O$ und ist $\mathbb{R} \cdot A \perp \mathbb{R} \cdot C$ und $\mathbb{R} \cdot B \perp \mathbb{R} \cdot C$, so sind A, B, C linear unabhängig.

Beweis. Zum Nachweis von (i) zeigen wir, dass A und B genau dann linear abhängig sind, wenn $A \times B = O$ ist. Sind A und B linear abhängig, so finden wir ohne Einschränkung ein $r \in \mathbb{R}$ mit $A = r \cdot B$ und erhalten

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} b_2b_3 - b_3b_2 \\ b_3b_1 - b_1b_3 \\ b_1b_2 - b_2b_1 \end{pmatrix} = O.$$

Es gelte nun umgekehrt $A \times B = O$. Ist $B = O$, so sind A und B linear abhängig und wir sind fertig. Sei also $B \neq O$ und ohne Einschränkung sei $b_3 \neq 0$. Aus $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$ und $a_3b_1 - a_1b_3 = 0$ folgt $a_2 = \frac{a_3}{b_3}b_2$ und $a_1 = \frac{a_3}{b_3}b_1$. Außerdem ist $a_3 = \frac{a_3}{b_3}b_3$. Damit folgt $A = \frac{a_3}{b_3} \cdot B$, womit A und B linear abhängig sind.

Der Nachweis von (ii) erfolgt durch Nachrechnen: Es gilt

$$\begin{aligned} (A \times B) \bullet A &= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 \\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0 \end{aligned}$$

und damit auch $(A \times B) \bullet B = -(B \times A) \bullet B = 0$.

Zum Nachweis von (iii) zeigen wir, dass A und B genau dann linear abhängig sind, wenn A, B und $A \times B$ linear abhängig sind. Dabei ist die Hinrichtung klar: Sind A und B linear abhängig, so sind auch A, B und $A \times B$ linear abhängig. Seien nun umgekehrt A, B und $A \times B$ linear abhängig. Dann finden wir $r, s, t \in \mathbb{R}$, $\{r, s, t\} \neq \{0\}$, mit $rA + sB + tA \times B = O$. Ist $t = 0$, so ist $rA + sB = O$ eine nichttriviale Linearkombination der O und A und B sind linear abhängig. Ist $t \neq 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= O \bullet (A \times B) = (r \cdot A + s \cdot B + t \cdot A \times B) \bullet (A \times B) \\ &= rA \bullet (A \times B) + sB \bullet (A \times B) + t(A \times B) \bullet (A \times B) = t(A \times B) \bullet (A \times B). \end{aligned}$$

Da $t \neq 0$ ist, muss $\|A \times B\|^2 = (A \times B) \bullet (A \times B) = 0$ und damit $A \times B = 0$ sein. Nach Aussage (i) sind A und B linear abhängig.

Zum Nachweis von Aussage (*iv*) seien A und B linear unabhängig, $C \neq O$ und $\mathbb{R} \cdot A \perp \mathbb{R} \cdot C$ und $\mathbb{R} \cdot B \perp \mathbb{R} \cdot C$. Wir zeigen, dass A, B und C linear unabhängig sind. Dazu nehmen wir an dass A, B, C linear abhängig sind. Dann finden wir $r, s, t \in \mathbb{R}$, $\{r, s, t\} \neq \{0\}$, so dass $r \cdot A + s \cdot B + t \cdot C = O$ ist. Da A und B linear unabhängig sind, ist $t \neq 0$, denn sonst wäre $r \cdot A + s \cdot B = O$ eine nichttriviale Linearkombination der O. Also ist $C = -\frac{r}{t} \cdot A - \frac{s}{t} \cdot B$ und damit

$$\|C\|^2 = C \bullet C = C \bullet (-\frac{r}{t} \cdot A - \frac{s}{t} \cdot B) = -\frac{r}{t}(C \bullet A) - \frac{s}{t}(C \bullet B) = 0,$$

woraus $C = O$ folgt, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also war unsere Annahme falsch, die Punkte A, B und C sind folglich linear unabhängig.

□

Wir wollen nun das dreidimensionale Analogon zu Satz 6.1 formulieren und beweisen.

Satz 8.3. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $C \in \mathbb{R}^3$. Dann ist*

$$A \bullet C = 0 \text{ und } B \bullet C = 0 \text{ genau dann, wenn } C \in \mathbb{R} \cdot (A \times B) \text{ ist.}$$

Das bedeutet: Die Gerade $\mathbb{R} \cdot (A \times B)$ ist die einzige Ursprungsgerade, die sowohl zu $\mathbb{R} \cdot A$ als auch zu $\mathbb{R} \cdot B$ orthogonal ist.

Beweis. Wir setzen voraus, dass $A \bullet C = 0$ und $B \bullet C = 0$ ist und zeigen, dass ein $r \in \mathbb{R}$ mit $C = r \cdot (A \times B)$ existiert. Da A und B linear unabhängig sind, ist nach Satz 8.2

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \neq O.$$

Sei ohne Einschränkung $a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0$. Dann ist auch $a_2 \neq 0$ oder $a_3 \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $a_2 \neq 0$. Wir setzen

$$r := \frac{c_1}{a_2b_3 - a_3b_2}.$$

Dann ist $c_1 = r(a_2b_3 - a_3b_2)$. Nun bedeutet $A \bullet C = 0$ und $B \bullet C = 0$, dass $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$ und $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$ ist, woraus wir durch Multiplikation mit b_2 bzw. a_2 die Gleichungen

$$a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 = 0 \text{ und } a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_2b_3c_3 = 0$$

und daraus durch Subtraktion $(a_2b_1 - a_1b_2)c_1 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 = 0$ erhalten. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$c_3 = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)c_1}{(a_2b_3 - a_3b_2)} = r(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Setzen wir dies in die Gleichung $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$ ein, so erhalten wir

$$c_2 = \frac{ra_1(a_3b_2 - a_2b_3)}{a_2} + \frac{ra_3(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2} = r(a_3b_1 - a_1b_3)$$

und damit insgesamt $C = r \cdot (A \times B)$.

Ist umgekehrt $C \in \mathbb{R} \cdot (A \times B)$, so folgt $A \bullet C = 0$ und $B \bullet C = 0$ unmittelbar aus Satz 8.3. $\square$

In Kapitel 4 haben wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung mithilfe der Rechenregeln des Punktproduktes bewiesen. Im Fall $n = 3$ können wir die Ungleichung auch mithilfe des Kreuzproduktes beweisen und erhalten.

Satz 8.4. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt*

$$0 \leq \|A \times B\|^2 = \|A\|^2\|B\|^2 - (A \bullet B)^2.$$

Insbesondere ist

$$|A \bullet B| \leq \|A\|\|B\|,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $A \times B = O$ ist, wenn also A und B linear abhängig sind.

Beweis. Der Beweis ergibt sich wieder durch fleißiges Nachrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|A \times B\|^2 &= \| \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \|^2 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= (a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2) + (a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_3^2) \\
&\quad +(a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2) \\
&= (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_3^2) \\
&\quad -(a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 + 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_3^2) \\
&= (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_3^2) \\
&\quad -((a_1b_1 + a_2b_2)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)a_3b_3 + a_3^2b_3^2) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^3 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= \|A\|^2\|B\|^2 - (A \bullet B)^2.
\end{aligned}$$

$\square$

8.2 Lagebeziehungen von Geraden

Definition 8.2. *Zwei Geraden $g = \mathbb{R} \cdot A + B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g' = \mathbb{R} \cdot A' + B' \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen* windschief, *wenn sie nicht parallel zueinander sind und $g \cap g' = \emptyset$ ist.*

Die Nichtparallelität ist nach Satz 7.4 äquivalent zur linearen Unabhängigkeit von A und A'.

In Abschnitt 6.1 haben wir gesehen, dass zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ entweder parallel zueinander sind oder genau einen gemeinsamen Punkt besitzen. Damit kann es im $\mathbb{R}^2$ keine windschiefen Geraden geben. Diese Tatsache können wir auch folgendem Satz entnehmen, da drei Punkte im $\mathbb{R}^2$ niemals linear unabhängig sein können.

Satz 8.5 (Charakterisierung windschiefer Geraden)**.** *Seien $g = \mathbb{R} \cdot A + B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g' = \mathbb{R} \cdot A' + B' \subseteq \mathbb{R}^n$ Geraden. Die Geraden g und g' sind genau dann windschief, wenn die Punkte $(B - B'), A, A'$ linear unabhängig sind.*

Beweis. Wir zeigen, dass g und g' genau dann nicht windschief sind, wenn die Punkte $(B - B'), A, A'$ linear abhängig sind.

Seien $(B - B'), A, A'$ linear abhängig. Dann finden wir $r, s, t \in \mathbb{R}$, $\{r, s, t\} \neq \{0\}$, so dass $r \cdot (B - B') + s \cdot A + t \cdot A' = 0$ ist. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $r = 0$ ist. Dann können s und t nicht beide gleich 0 sein. Sei ohne Einschränkung $s \neq 0$. Dann ist $A = -\frac{t}{s} A'$ und damit wegen $A \neq O$ auch $t \neq 0$, die Geraden g und g' sind also parallel zueinander und damit nicht windschief. Falls $r \neq 0$ ist, so ist

$$\frac{s}{r} \cdot A + B = -\frac{t}{r} \cdot A' + B',$$

dieser Punkt ist also ein gemeinsamer Punkt der Geraden g und g', womit diese auch in diesem Fall nicht windschief sind.

Wir setzen nun voraus, dass g und g' nicht windschief sind und zeigen die lineare Unabhängigkeit der Punkte $(B - B'), A, A'$. Da die Geraden nicht windschief sind, sind g und g' parallel zueinander oder es ist $g \cap g' \neq \emptyset$. Sind g und g' parallel zueinander, so ist $\mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot A'$, und damit sind A und A' nach Satz 7.4 linear abhängig. Also sind auch $(B - B'), A, A'$ linear abhängig. Ist hingegen $g \cap g' \neq \emptyset$, so finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r \cdot A + B = s \cdot A' + B'$. Damit ist $1 \cdot (B - B') + r \cdot A - s \cdot A' = O$ eine nichttriviale Linearkombination der O und die Punkte $(B - B'), A, A'$ sind auch in diesem Fall linear abhängig. □

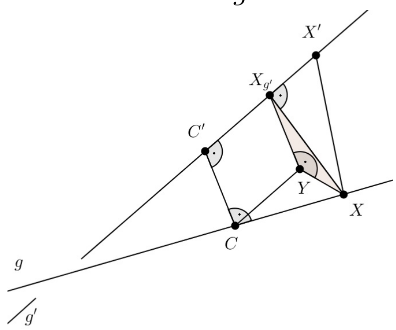
Definition 8.3. *Für zwei Geraden $g, g' \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir den* Abstand $d(g, g')$ der Geraden g und g' *als*

$$d(g, g') := \inf\{d(X, X') \mid X \in g, X' \in g'\}.$$

In den beiden folgenden Sätzen erfolgt die Berechnung des Abstandes zweier windschiefer Geraden, wobei wir die Beweisidee aus [15], S. 346 entnommen haben.

Satz 8.6. *Seien* $g = \mathbb{R} \cdot A + B \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $g' = \mathbb{R} \cdot A' + B' \subseteq \mathbb{R}^n$ *Geraden. Wir nehmen an, dass Punkte* $C \in g$ *und* $C' \in g'$ *existieren, so dass* $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp g$ *und* $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp g'$ *ist. Dann ist* $d(g, g') = d(C, C')$.

Beweis. Sei $X \in g$ und $X' \in g'$. Da die Geraden g und g' windschief sind, ist $X \notin g'$. Sei $X_{g'}$ der nach Satz 5.7 eindeutig bestimmte Lotfußpunkt des Lotes auf g' durch X. Nach Satz 5.7 gilt $d(X, X') \geq d(X, X_{g'})$. Wir setzen $Y := C + X_{g'} - C'$. Dann ist das Viereck $CYX_{g'}C'$ wegen $C - C' = Y - X_{g'}$ ein Parallelogramm und es ist $d(C, C') = d(Y, X_{g'})$. Wir zeigen im Folgenden, dass $d(Y, X_{g'}) \leq d(X, X_{g'})$ ist. Dazu betrachten wir das Dreieck $XX_{g'}Y$ und zeigen, dass dieses rechtwinklig bei Y ist. Dies gilt in der Tat, denn es ist



$$
\begin{aligned}
(Y - X_{g'}) \bullet (Y - X) &= (C - C') \bullet (Y - X) = (C - C') \bullet (C + X_{g'} - C' - X) \\
&= (C - C') \bullet (X_{g'} - C') + (C - C') \bullet (C - X) = 0.
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz des Pythagoras 5.5 ist $d(X_{g'}, Y)^2 + d(X, Y)^2 = d(X_{g'}, X)^2$ und damit $d(X_{g'}, Y) \leq d(X_{g'}, X)$. Setzen wir alles zusammen, so erhalten wir wie behauptet $d(X, X') \geq d(X, X_{g'}) \geq d(X_{g'}, Y) = d(C, C')$. □

Zur Berechnung des Abstandes müssen wir noch zeigen, dass die Punkte C und C' in der Voraussetzung von Satz 8.6 tatsächlich existieren.

Satz 8.7. *Seien* $g = \mathbb{R} \cdot A + B \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $g' = \mathbb{R} \cdot A' + B' \subseteq \mathbb{R}^n$ *windschiefe Geraden. Dann existieren eindeutig bestimmte Punkte* $C \in g$ *und* $C' \in g'$, *so dass* $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp g$ *und* $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp g'$ *und damit* $d(g, g') = d(C, C')$ *ist, nämlich* $C = r \cdot A + B$ *und* $C' = r' \cdot A' + B'$, *wobei*

$$
r = \frac{((B' - B) \times A') \bullet (A \times A')}{\|A \times A'\|^2} \quad \textit{und } r' = \frac{((B' - B) \times A) \bullet (A \times A')}{\|A \times A'\|^2}.
$$

Für den Abstand der Geraden g *und* g' *gilt* $d(g, g') = \dfrac{|(A \times A') \bullet (B - B')|}{\|A \times A'\|}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Seien $C \in g$ und $C' \in g'$, so dass $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp g$ und $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp g'$ ist. Dann finden wir $r, r' \in \mathbb{R}$, so dass $C = r \cdot A + B$ und $C' = r' \cdot A' + B'$ ist. Die Punkte A und A' sind nach Voraussetzung linear unabhängig. Da $(C - C') \bullet A = 0$ und $(C - C') \bullet A' = 0$ ist, finden wir nach Satz 8.3 ein $s \in \mathbb{R}$, so dass $C - C' = s \cdot (A \times A')$ ist. Insgesamt erhalten wir

$$s \cdot (A \times A') = r \cdot A + B - r' \cdot A' - B'. \quad (*)$$

Bilden wir das Punktprodukt dieser Gleichung mit $A \times A'$, so erhalten wir

$$s \cdot \|A \times A'\|^2 = (A \times A') \bullet B - (A \times A') \bullet B' = (A \times A') \bullet (B - B'),$$

also

$$d(C, C') = \|C - C'\| = |s| \, \|A \times A'\| = \frac{|(A \times A') \bullet (B - B')|}{\|A \times A'\|}.$$

Bilden wir das Kreuzprodukt von $(*)$ mit A', so erhalten wir

$$\begin{aligned} s \cdot (A' \times (A \times A')) &= r \cdot (A' \times A) + A' \times B - r' \cdot (A' \times A') - A' \times B' \\ &= r \cdot (A' \times A) + A' \times (B - B'). \end{aligned}$$

Es ist $(A' \times (A \times A')) \bullet (A \times A') = 0$. Bilden wir also das Punktprodukt mit $A \times A'$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= r \cdot (A' \times A) \bullet (A \times A') + (A' \times (B - B')) \bullet (A \times A') \\ &= -r(A \times A')^2 + (A' \times (B - B')) \bullet (A \times A'), \end{aligned}$$

und daraus

$$r = \frac{(A' \times (B - B')) \bullet (A \times A')}{\|A \times A'\|^2} = \frac{((B' - B) \times A') \bullet (A \times A')}{\|A \times A'\|^2}.$$

Analog erhalten wir

$$r' = \frac{((B' - B) \times A) \bullet (A \times A')}{\|A \times A'\|^2}.$$

Wir zeigen nun die Existenz. Dazu setzen wir $Y := B' - B$, $r := \dfrac{(Y \times A') \bullet (A \times A')}{\|A \times A'\|^2}$, $C = r \cdot A + B$, $r' = \dfrac{(Y \times A) \bullet (A \times A')}{\|A \times A'\|^2}$ sowie $C' = r' \cdot A' + B'$ und zeigen, dass dafür die Gleichung $(*)$ erfüllt ist.

Dafür definieren wir

$$\begin{aligned} Z &:= A \times A' - \frac{r}{s} \cdot A + \frac{r'}{s} \cdot A' + \frac{1}{s} \cdot (B' - B) \\ &= A \times A' + \frac{(Y \times A') \bullet (A \times A')}{Y \bullet (A \times A')} \cdot A - \frac{(Y \times A) \bullet (A \times A')}{Y \bullet (A \times A')} \cdot A' - \frac{\|A \times A'\|^2}{(A \times A') \bullet Y} \cdot Y \end{aligned}$$

und zeigen, dass $Z = O$ ist. Es ist

$$\begin{aligned}
Z \bullet (A \times A') &= \|A \times A'\|^2 - \|A \times A'\|^2 \frac{(A \times A') \bullet Y}{(A \times A') \bullet Y} = 0, \\
Z \bullet (A' \times Y) &= (A \times A') \bullet (A' \times Y) - (A \times A') \bullet (A' \times Y) \frac{(A' \times Y) \bullet A}{(A \times A') \bullet Y} = 0, \\
Z \bullet (Y \times A) &= (A \times A') \bullet (Y \times A) - (A \times A') \bullet (Y \times A) \frac{(Y \times A) \bullet A'}{(A \times A') \bullet Y} = 0.
\end{aligned}$$

Da g und g' windschief sind, sind nach Satz 8.5 die Punkte A, A', Y linear unabhängig. Damit sind nach Satz 8.2 auch $A \times A'$, $A' \times Y$, $Y \times A$ linear unabhängig, bilden also nach 7.9 eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir finden also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$Z = \alpha \cdot (A \times A') + \beta \cdot (A' \times Y) + \gamma \cdot (Y \times A).$$

Aus

$$\begin{aligned}
\|Z\|^2 = Z^2 &= Z \bullet (\alpha \cdot (A \times A') + \beta \cdot (A' \times Y) + \gamma \cdot (Y \times A)) \\
&= \alpha(Z \bullet (A \times A')) + \beta(Z \bullet (A' \times Y)) + \gamma(Z \bullet (Y \times A)) = 0
\end{aligned}$$

folgt $Z = O$. Dies bedeutet, dass $s \cdot (A \times A') = r \cdot A + B - r' \cdot A' - B' = C - C'$ ist, dass also die Gleichung $(*)$ erfüllt ist. Wir erhalten wie gewünscht $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp A$ und $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp A'$. $\square$

Sind die Geraden g und g' parallel zueinander, so genügt es, irgendeinen Punkt $C \in g$ zu wählen. Ist $C' := C_{g'}$ der Fußpunkt des Lotes von C auf g', so ist $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp g'$ und wegen der Parallelität auch $\mathbb{R} \cdot (C - C') \perp g$, wir erhalten also mit Satz 8.6 für den Abstand $d(g, g') = d(C, C_{g'})$.

8.3 Ebenen

Definition 8.4. *Eine Punktmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt* Ebene*, falls linear unabhängige Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass*

$$E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P := \{X \mid X \in \mathbb{R}^n, \exists r, s \in \mathbb{R} : X = r \cdot A + s \cdot B + P\}$$

ist. Zu jedem $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$ nennen wir die nach Satz 7.4 eindeutig bestimmten $r, s \in \mathbb{R}$ mit $(X - P) = r \cdot A + s \cdot B$ die Koordinaten *von X vermöge A und B.*

Sind $A, B \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ linear abhängig, so ist $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B = \mathbb{R} \cdot A = \mathbb{R} \cdot B$, die Punktmenge $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$ ist somit eine Gerade.

Die Darstellung einer Ebene ist nicht eindeutig.

Satz 8.8. *Sei Q ein Punkt der Ebene $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$. Dann ist*

$$\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + Q.$$

Beweis. Da $Q \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$ ist, finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $Q = r \cdot A + s \cdot B + P$.

Ist nun $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$, so finden wie $r', s' \in \mathbb{R}$ mit $X = r' \cdot A + s' \cdot B + P$ und es folgt

$$\begin{aligned} X &= r' \cdot A + s' \cdot B + P = r' \cdot A + s' \cdot B + (Q - r \cdot A - s \cdot B) \\ &= (r' - r) \cdot A + (s' - s) \cdot B + Q \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + Q. \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + Q$, so finden wir $r', s' \in \mathbb{R}$ mit $X = r' \cdot A + s' \cdot B + Q$ und es folgt

$$\begin{aligned} X &= r' \cdot A + s' \cdot B + Q = r' \cdot A + s' \cdot B + (r \cdot A + s \cdot B + P) \\ &= (r + r') \cdot A + (s + s') \cdot B + P \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + Q$. □

Analog zu Definition 4.6 definieren wir

Definition 8.5. *Sei $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$ eine Ebene. Dann bezeichnen wir mit E_O die zur Ebene E gehörige Ursprungsebene $E_O := \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$.*

Um zu zeigen, dass die zu einer Ebene E gehörige Ursprungsebene unabhängig von der Darstellung der Ebene ist, zeigen wir, dass sich die Menge E_O als Menge der Differenzen von Punkten aus E darstellen lässt (siehe auch [14]). Dadurch folgt sofort die Uneindeutigkeit der Darstellung der Ebene E, die wir in Satz 8.8 schon direkt gezeigt haben.

Satz 8.9. *Sei $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$ eine Ebene. Dann ist die zu E gehörende Ursprungsebene gleich der Menge der Differenzen von Punkten aus E, es gilt also*

$$E_O = \{X - X' \mid X, X' \in E\}.$$

Insbesondere ist E_O unabhängig von der Wahl der Darstellung von E. Ist $X \in E$, so gilt folglich $E = E_O + X$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $E_O \subseteq \{X - X' \mid X, X' \in E\}$ ist. Sei dazu $Y \in E_O$. Dann finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $Y = r \cdot A + s \cdot B$. Wir setzen $X := r \cdot A + P$ und $X' := -s \cdot B + P$. Dann sind $X, X' \in E$ und es ist $X - X' = Y$.

Nun zeigen wir, dass $\{X - X' \mid X, X' \in E\} \subseteq E_O$ ist. Seien dazu $X, X' \in E$. Dann finden wir $r, s, r', s' \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot A + s \cdot B + P$ und $X' = r \cdot A' + s \cdot B' + P$ und es ist

$$\begin{aligned}X - X' &= (r \cdot A + s \cdot B + P) - (r \cdot A' + s \cdot B' + P)\\ &= (r - r') \cdot A + (s - s') \cdot B \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B = E_O.\end{aligned}$$

□

Definition 8.6 (Parallelität)**.** *Zwei Ebenen E und E' heißen* parallel *zueinander, falls zu ihnen die gleichen Ursprungsebenen gehören, falls also $E_O = E'_O$ ist. Wir schreiben $E \parallel E'$.*
Eine Gerade g heißt parallel *zu einer Ebene E, wenn die dazugehörige Ursprungsgerade in der Ursprungsebene verläuft, wenn also $g_O \subseteq E_O$ gilt. Wir schreiben $g \parallel E$.*
Eine Gerade $g = \mathbb{R} \cdot C + Q$ heißt orthogonal *zu einer Ebene $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$, wenn $\mathbb{R} \cdot C \perp \mathbb{R} \cdot A$ und $\mathbb{R} \cdot C \perp \mathbb{R} \cdot B$ ist. Wir schreiben $g \perp E$.*

Die Definition der Orthogonalität ist unabhängig von der Wahl der Darstellung von E. Sind nämlich zwei verschiedenen Darstellungen $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot BC + P = \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B' + P'$ der Ebene gegeben, so ist $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B = E_O = \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B'$, wir finden also $r, s \in \mathbb{R}$ mit $A' = r \cdot A + s \cdot B$. Ist $\mathbb{R} \cdot C \perp \mathbb{R} \cdot A$ und $\mathbb{R} \cdot C \perp \mathbb{R} \cdot B$, so folgt $C \bullet A' = C \bullet (r \cdot A + s \cdot B) = rC \bullet A + sC \bullet B = 0$ und analog $C \bullet B' = 0$. Damit ist $\mathbb{R} \cdot C \perp \mathbb{R} \cdot A'$ und $\mathbb{R} \cdot C \perp \mathbb{R} \cdot B'$. Insbesondere ist eine zu einer Ebene E orthogonale Gerade g orthogonal zu *jeder* Geraden, die in der Ebene E verläuft.

Die Relation der Parallelität ist transitiv: Sind E, E', E'' Ebenen und ist $E \parallel E'$ und $E' \parallel E''$, so ist auch $E \parallel E''$.

Die Uneindeutigkeit der Darstellung von Ebenen wirft die Frage auf, wann zwei Ebenen gleich sind. Diese Frage wird durch den folgenden Satz beantwortet: Zwei Ebenen sind genau dann gleich, wenn sie parallel zueinander sind und einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Satz 8.10. *Seien E und E' zwei Ebenen. Dann ist $E = E'$ genau dann, wenn $E \cap E' \neq \emptyset$ und $E_O = E'_O$ ist.*

Beweis. Ist $E = E'$, so ist $E \cap E' = E \neq \emptyset$ und nach Satz 8.9

$$E_O = \{X - X' \mid X, X' \in E\} = \{X - X' \mid X, X' \in E'\} = E'_O.$$

Ist hingegen $E \cap E' \neq \emptyset$ und $E_O = E'_O$, so finden wir ein $X \in E \cap E'$ und erhalten $E = E_O + X = E'_O + X = E'$ ebenfalls nach Satz 8.9. □

Korollar: Seien $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$ und $E' = \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B' + P'$ zwei Ebenen. Dann ist $E = E'$ genau dann, wenn $E_O = E'_O$ und $P - P' \in E_O$ ist.

Beweis. Ist $E = E'$, so ist $E_O = E'_O$ nach Satz 8.10. Da $P, P' \in E$ sind, ist $P - P' \in E_O$ nach Satz 8.9.

Ist umgekehrt $E_O = E'_O$ und $P - P' \in E_O = E'_O$, so ist $P \in E'_O + P' = E'$ und damit ist $E \cap E' \neq \emptyset$. Mit Satz 8.10 folgt $E = E'$. □

Satz 8.11. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann existiert genau eine Ebene E, die die Punkte A, B, C enthält, nämlich*

$$E = \mathbb{R} \cdot (A - B) + \mathbb{R} \cdot (A - C) + A.$$

Beweis. Sei $E := \mathbb{R} \cdot (A - B) + \mathbb{R} \cdot (A - C) + A$. Die Menge E enthält die Punkte A, B, C. Um zu zeigen dass E eine Ebene ist, müssen wir zeigen, dass die Punkte $A - B$ und $A - C$ linear unabhängig sind. Wären sie linear abhängig, so fänden wir ohne Einschränkung ein $r \in \mathbb{R}$ mit $A - B = r \cdot (A - C)$, und damit wäre $B = A - r \cdot (A - C) \in g(A, C)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Menge E eine Ebene.

Ist $E' = \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B' + C'$ eine Ebene, die die Punkte A, B und C enthält, so ist $A - B \in E'_O$ und $A - C \in E'_O$ nach Satz 8.9. Die Menge $\{A', B'\}$ ist eine zweielementige Basis von $E'_0 = \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B'$. Da $\{A - B, A - C\}$ linear unabhängig ist, ist nach Satz 7.8 $\{A - B, A - C\}$ ebenfalls eine Basis von E'_O. Insbesondere ist $E_O = \mathbb{R} \cdot (A - B) + \mathbb{R} \cdot (A - C) = E'_O$. Mit Satz 8.10 folgt $E = E'$. □

Wir können die Aussage $E_O = E'_O$ im obigen Beweis auch elementar zeigen:

Beweis. Da $A - B \in E'_O$ und $A - C \in E'_O$ ist und die Menge E'_O abgeschlossen ist bezüglich Addition und Multiplikation, ist $\mathbb{R} \cdot (A - B) + \mathbb{R} \cdot (A - C) \subseteq \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B'$.

Um die andere Inklusion zu zeigen, wählen wir $r, s, t, v \in \mathbb{R}$ mit

$$A - B = r \cdot A' + s \cdot B' \quad (I) \quad \text{und} \quad A - C = t \cdot A' + v \cdot B' \quad (II).$$

Wir nehmen an, dass $rv - st = 0$ ist und führen dies zu einem Widerspruch. Die Zahlen r und s können nicht beide gleich 0 sein, da sonst $A = B$ wäre. Ebenso können t und v nicht beide gleich 0 sein, da sonst $A = C$ wäre. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $r \neq 0$ und $t \neq 0$ ist. Die anderen Fälle folgen durch ähnliche Überlegungen. Dann ist $s = \frac{r}{t} v$ und wir erhalten

$$A - B = r \cdot A' + \frac{r}{t} v \cdot B' = \frac{r}{t} \cdot (t \cdot A' + v \cdot B') = \frac{r}{t}(A - C),$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $A - B$ und $A - C$. Also ist $rv - st \neq 0$. Bilden wir $v \cdot I - s \cdot II$, so erhalten wir $(rv - ts) \cdot A' = v \cdot (A - B) - s \cdot (A - C)$, also

$$A' = \frac{v}{rv - ts} \cdot (A - B) - \frac{s}{rv - ts} \cdot (A - C) \in \mathbb{R} \cdot (A - B) + \mathbb{R} \cdot (A - C).$$

Bilden wir $r \cdot II - t \cdot I$, so erhalten wir $(rv - ts) \cdot B' = -t \cdot (A - B) + r \cdot (A - C)$, also

$$B' = -\frac{t}{rv - ts} \cdot (A - B) + \frac{r}{rv - ts} \cdot (A - C) \in \mathbb{R} \cdot (A - B) + \mathbb{R} \cdot (A - C).$$

Da E_O abgeschlossen ist bezüglich Addition und Vervielfachung, erhalten wir

$$\mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B' \subseteq \mathbb{R} \cdot (A - B) + \mathbb{R} \cdot (A - C)$$

und damit insgesamt $E_O = E'_O$. Mit Satz 8.10 folgt $E = E'$. $\square$

Definition 8.7. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann bezeichnen wir die nach Satz 8.11 eindeutig bestimmte Ebene, die die Punkte A, B, C enthält, mit $E(A, B, C)$. Es gilt also*

$$E(A, B, C) = \mathbb{R} \cdot (A - B) + \mathbb{R} \cdot (A - C) + A.$$

Für Geraden in $\mathbb{R}^2$ hatten wir neben der expliziten Darstellung auch eine implizite Darstellung gefunden, nämlich die Koordinatendarstellung. Im $\mathbb{R}^3$ können wir für Ebenen eine ähnliche implizite Darstellung finden. Dazu betrachten wir zunächst Ebenen durch den Koordinatenursprung und verallgemeinern das Ergebnis anschließend auf beliebige Ebenen.

Definition 8.8. *Für Punkte $N \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ und reelle Zahlen $d \in \mathbb{R}$ definieren wir $\mathscr{E}_{N,d} := \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, N \bullet X = d\}$.*

Satz 8.12. *(i) Sei $N \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. Dann ist $\mathscr{E}_{N,0}$ eine Ebene, die den Koordinatenursprung enthält.*
(ii) Sei $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ eine Ursprungsebene, $N \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ mit $\mathbb{R} \cdot N \perp \mathbb{R} \cdot A$ und $\mathbb{R} \cdot N \perp \mathbb{R} \cdot B$ (etwa $N := A \times B$). Dann ist $\mathscr{E}_{N,0} = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$.

Beweis. Wir zeigen zunächst Aussage (i). Ohne Einschränkung sei $n_1 \neq 0$. Wir setzen $A := \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $N \bullet A = 0$. Da $N \neq O$ und $A \neq O$ sind, sind nach Satz 8.2 (iv) die Punkte N und A linear unabhängig. Setzen wir $B := N \times A$, so sind nach Satz 8.2 (iii) die Punkte N, A und B linear unabhängig und bilden folglich nach Satz 7.9 eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Wir zeigen, dass $\mathscr{E}_{N,0} = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ gilt. Ist $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$, so finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot A + s \cdot B$ und es gilt $N \bullet X = N \bullet (r \cdot A + s \cdot B) = r(N \bullet A) + s(N \bullet B) = 0$, also $X \in \mathscr{E}_{N,0}$. Sei nun $X \in \mathscr{E}_{N,0}$. Da $\{N, A, B\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, finden wir $r, s, t \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot N + s \cdot A + t \cdot B$ und erhalten

$$0 = N \bullet X = N \bullet (r \cdot N + s \cdot A + t \cdot B) = r(N \bullet N) + s(N \bullet A) + t(N \bullet B) = r\|N\|^2.$$

Da $\|N\| \neq 0$ ist, muss $r = 0$ sein, und damit ist $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$. Damit ist $\mathscr{E}_{N,0} = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ gezeigt, die Menge $\mathscr{E}_{N,0}$ ist damit eine Ebene, die den Koordinatenursprung enthält.

Wir zeigen nun den Teil (ii) des Satzes. Da A und B linear unabhängig sind, sind nach Satz 8.2 (iv) die Punkte N, A und B linear unabhängig und bilden damit nach Satz 7.9 eine Basis des $\mathbb{R}^3$, für die $N \bullet A = N \bullet B = 0$ gilt. Wir zeigen, dass $\mathscr{E}_{N,0} = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ ist. Ist $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$, so finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot A + s \cdot B$ und es ist

$$N \bullet X = N \bullet (r \cdot A + s \cdot B) = r(N \bullet A) + s(N \bullet B) = 0,$$

also $X \in \mathscr{E}_{N,0}$. Sei nun umgekehrt $X \in \mathscr{E}_{N,0}$. Dann finden wir $r, s, t \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot N + s \cdot A + t \cdot B$ und es gilt

$$0 = N \bullet X = N \bullet (r \cdot N + s \cdot A + t \cdot B) = r(N \bullet N) + s(N \bullet A) + t(N \bullet B) = r\|N\|^2.$$

Da $\|N\| \neq 0$ ist, muss $r = 0$ sein, und damit ist $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$. □

Wir übertragen nun die Aussage von Satz 8.12 auf beliebige Ebenen.

Satz 8.13. *(i) Sei $N \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. Dann ist für jedes $d \in \mathbb{R}$ die Menge $\mathscr{E}_{N,d}$ eine Ebene, die parallel zu $\mathscr{E}_{N,0}$ ist und durch den Punkt $\frac{d}{\|N\|^2} \cdot N$ verläuft.*
(ii) Ist $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$ eine Ebene, so finden wir ein $N \in \mathbb{R}^3$ und ein $d \in \mathbb{R}$, so dass $E = \mathscr{E}_{N,d}$ ist, nämlich $N := A \times B$ und $d := N \bullet P$. Ist $N' \in \mathbb{R}^3$, $d' \in \mathbb{R}$ mit $E = \mathscr{E}_{N',d'}$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $N' = \lambda \cdot N$ und $d' = \lambda d$.

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis von (i). Sei $d \in \mathbb{R}$. Für alle $X \in \mathbb{R}^3$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{E}_{N,d} \Leftrightarrow N \bullet X = d \Leftrightarrow N \bullet X = d\frac{N \bullet N}{\|N\|^2} &\Leftrightarrow N \bullet (X - \frac{d}{\|N\|^2} \cdot N) = 0 \\ \Leftrightarrow X - \frac{d}{\|N\|^2} \cdot N \in \mathscr{E}_{N,0} \qquad &\Leftrightarrow X \in \mathscr{E}_{N,0} + d\frac{1}{\|N\|^2} \cdot N. \end{aligned}$$

Da $\mathscr{E}_{N,0}$ nach Satz 8.12 eine Ebene ist, die den Koordinatenursprung enthält, ist $\mathscr{E}_{N,d} = \mathscr{E}_{N,0} + \frac{d}{\|N\|^2} \cdot N$ ebenfalls eine Ebene, die parallel zu $\mathscr{E}_{N,0}$ ist.

Wir zeigen nun den Teil (ii) des Satzes. Sei $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$ eine Ebene. Wir setzen $N := A \times B$ und $d := N \bullet P$ und zeigen, dass $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P = \mathscr{E}_{N,d}$ ist. Ist $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$, so finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot A + s \cdot B + P$ und erhalten

$$N \bullet X = N \bullet (r \cdot A + s \cdot B + P) = N \bullet P + r(N \bullet A) + s(N \bullet B) = N \bullet P = d,$$

woraus sich $X \in \mathscr{E}_{N,d}$ ergibt. Sei nun umgekehrt $X \in \mathscr{E}_{N,d}$. Dann gilt

$$d = N \bullet X = N \bullet ((X - P) + P) = N \bullet (X - P) + N \bullet P = N \bullet (X - P) + d,$$

woraus wir $N \bullet (X - P) = 0$ und damit $X - P \in \mathscr{E}_{N,0} = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ nach Satz 8.12 erhalten. Das bedeutet $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$, womit $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P = \mathscr{E}_{N,d}$ gezeigt ist.

Sei nun $N' \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, $d' \in \mathbb{R}$ und $E = \mathscr{E}_{N',d'}$. Da $P \in E = \mathscr{E}_{N',d'}$ ist, ist $d' = N' \bullet P$. Damit gilt für alle $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ die Gleichung

$$N' \bullet X = N' \bullet ((X + P) - P) = N' \bullet (X + P) - N' \bullet P = d' - d' = 0,$$

woraus $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B \subseteq \mathscr{E}_{N',0}$ folgt. Ist umgekehrt $X \in \mathscr{E}_{N',0}$, so ist

$$0 = N' \bullet X = N' \bullet (X + P) - N' \bullet P,$$

also $N' \bullet (X + P) = N' \bullet P = d'$. Das bedeutet $X + P \in \mathscr{E}_{N',d'} = \mathbb{R} \bullet A + \mathbb{R} \bullet B + P$, also $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$. Insgesamt erhalten wir $\mathscr{E}_{N,0} = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B = \mathscr{E}_{N',0}$. Also finden wir nach Satz 8.3 ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $N' = \lambda \cdot N$ und es folgt $\lambda = \frac{N \bullet N'}{N \bullet N}$. Außerdem ist $d' = N' \bullet P = \lambda(N \bullet P) = \lambda d$.

□

Satz 8.14 (Lage Gerade/Ebene)**.** *Eine Gerade g ist genau dann parallel zu einer Ebene E, wenn sie in der Ebene enthalten ist oder keinen gemeinsamen Punkt mit ihr hat. Ist die Gerade g nicht parallel zur Ebene E, so schneiden sich die Gerade und die Ebene in genau einem Punkt.*

Beweis. Sei $g = \mathbb{R} \cdot C + Q$ und $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$. Durch eventuellen Übergang zur Geraden $g - Q$ und zur Ebene $E - Q$ können wir voraussetzen, dass $Q = O$ ist.

Sei $g \parallel E$. Dann ist $\mathbb{R} \cdot C \subseteq \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$.
Ist $g \cap E = \emptyset$, so haben die Gerade g und die Ebene E keinen gemeinsamen Punkt.
Ist $g \cap E \neq \emptyset$, so finden wir ein $P' \in g \cap E$ und erhalten

$$g = \mathbb{R} \cdot C + Q = \mathbb{R} \cdot C + P' \subseteq \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P' = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P = E,$$

die Gerade g ist also in der Ebene E enthalten.

Die andere Implikation zeigen wir durch Kontraposition. Sei also $g \nparallel E$, d.h. $\mathbb{R} \cdot C \nsubseteq \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$. Dann ist $\{A, B, C\}$ linear unabhängig, denn wäre $r \cdot A + s \cdot B + t \cdot C = O$ eine nichttriviale Linearkombination der O, so muss wegen der linearen Unabhängigkeit von A und B gelten, dass $t \neq 0$ ist und damit wäre $C = -\frac{r}{t} \cdot A - \frac{s}{t} \cdot B \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ und damit $\mathbb{R} \cdot C \subseteq \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$. Nach Satz 7.9 ist $\{A, B, C\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Wir finden deshalb ein $r \in \mathbb{R}$ sowie ein $H \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ mit $P = r \cdot C + H$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P &= \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + (r \cdot C + H) \\ &= (\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + H) + r \cdot C = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + r \cdot C. \end{aligned}$$

Damit ist

$$g \cap E = \mathbb{R} \cdot C \cap (\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P) = \mathbb{R} \cdot C \cap (\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + r \cdot C) = \{r \cdot C\},$$

die Gerade und die Ebene haben also genau einen gemeinsamen Punkt. Die Gerade g verläuft damit nicht in der Ebene E.

□

Analog zur Verträglichkeit von $\perp$ und $\parallel$ im Fall der ebenen Geometrie gilt im Fall der Geometrie des Raumes der folgende Satz.

Satz 8.15. *Seien $E, E' \subseteq \mathbb{R}^3$ Ebenen sowie $g \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, die orthogonal zu E ist. Dann gilt $E \parallel E'$ genau dann, wenn $g \perp E'$ ist.*

Beweis. Sei $g = \mathbb{R} \cdot C + Q$, $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P$, $E' = \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B' + P'$.

Ist $E \parallel E'$, so ist $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B = \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B'$. Wir finden also $r, s \in \mathbb{R}$ mit $A' = r \cdot A + s \cdot B$ und erhalten $C \bullet A' = C \bullet (r \cdot A + s \cdot B) = r(C \bullet A) + s(C \bullet B) = 0$ sowie analog $C \bullet B' = 0$. Damit ist $g \perp E'$.

Ist umgekehrt $g \perp E'$, so ist $\mathbb{R} \cdot (A \times B) = \mathbb{R} \cdot C = \mathbb{R} \cdot (A' \times B')$ und damit nach Satz 8.13 auch $E'_0 = \mathscr{E}_{C,0} = E_0$, die Ebene E ist folglich parallel zur Ebene E'. □

Definition 8.9. *Sei $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P = \mathscr{E}_{N,d}$ eine Ebene. Dann nennen wir die Mengen*

$$(\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P)^{+} := \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, N \cdot X \geq d\}$$

und

$$(\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P)^{-} := \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, N \cdot X \leq d\}$$

die durch die Ebene definierten abgeschlossenen Halbräume.
Analog nennen wir

$$(\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P)^{\oplus} := \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, N \cdot X > d\}$$

und

$$(\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P)^{\ominus} := \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, N \cdot X < d\}$$

die durch die Ebene definierten offenen Halbräume.
Zwei Punkte liegen auf derselben Seite der Ebene, wenn sie im selben offenen Halbraum liegen. Liegen zwei Punkte in verschiedenen offenen Halbräumen, so sagen wir, dass sie auf verschiedenen Seiten der Ebene liegen.

Diese Definition ist abhängig von der Wahl von $N \in \mathbb{R}^3$. Bei anderer Wahl können sich die Bezeichnungen gegebenenfalls vertauschen. Es ist

$$(\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P)^{+} \cap (\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P)^{-} = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P,$$

die Schnittmenge der beiden Halbräume ist also die Ebene $\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+P$. Außerdem ist $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+P)^+ \cup (\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+P)^-$ und die Relation *„auf derselben Seite liegen“* ist eine Äquivalenzrelation.

Satz 8.16. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene und seien $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $X \neq Y$.*

(i) Liegen X, Y auf derselben Seite der Ebene E, so liegen alle Punkte der Strecke XY auf derselben Seite der Ebene.

(ii) Liegen X, Y auf verschiedenen Seiten der Ebene, so hat die Strecke XY mit der Ebene E genau einen gemeinsamen Punkt.

Beweis. Sei $E = \mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+P = \mathscr{E}_{N,d}$. Liegen X und Y auf derselben Seite der Ebene E, so sind $N \bullet X - d \neq 0$ und $N \bullet Y - d \neq 0$ und haben gleiches Vorzeichen. Liegen X und Y auf verschiedenen Seiten der Ebene E, so sind $N \bullet X - d \neq 0$ und $N \bullet Y - d \neq 0$ und haben unterschiedliches Vorzeichen.

Für jedes $0 < r < 1$ gilt

$$N \bullet ((1-r)\cdot X + r\cdot Y) - d = (1-r)(N \bullet X - d) + r(N \bullet Y - d).$$

Haben $N \bullet X - d$ und $N \bullet Y - d$ das gleiche Vorzeichen, so hat $N \bullet ((1-r)\cdot X + r\cdot Y) - d$ folglich ebenfalls das gleiche Vorzeichen, der Punkt $(1-r)\cdot X + r\cdot Y$ der Strecke XY liegt also auf derselben Seite wie die Punkte X und Y.

Haben $N \bullet X - d$ und $N \bullet Y - d$ unterschiedliche Vorzeichen, so hat die Gleichung

$$0 = N \bullet ((1-r)\cdot X + r\cdot Y) - d = (1-r)(N \bullet X - d) + r(N \bullet Y - d)$$

genau eine Lösung $r \in]0,1[$, nämlich $r = \dfrac{d - N \bullet X}{N \bullet Y - N \bullet X}$. Die Strecke XY und die Ebene E besitzen folglich genau einen gemeinsamen Punkt. □

Satz 8.17 (Lage Ebene/Ebene)**.** *Gegeben seien die Ebenen $E, E' \subseteq \mathbb{R}^3$,*

$$E = \mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+P = \mathscr{E}_{N,d} \text{ und } E' = \mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'+P' = \mathscr{E}_{N',d'}.$$

Dann sind E und E' entweder parallel zueinander, oder die Menge der gemeinsamen Punkte ist eine Gerade. Ist im zweiten Fall $Q \in E \cap E'$, so ist

$$E \cap E' = \mathbb{R}\cdot (N \times N') + Q = \mathbb{R}\cdot ((A \times B) \times (A' \times B')) + Q.$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $N = A \times B$ und $N' = A' \times B'$ ist.

Seien E und E' nicht parallel zueinander. Dann ist $\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B \neq \mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'$. Ohne Einschränkung können wir $\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B' \not\subseteq \mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B$ annehmen. Da

$\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B\neq\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'$ ist, sind N und N' linear unabhängig und damit ist $N\times N'\neq O$ nach Satz 8.2 (i).

Wir zeigen, dass $\{A',A,B\}$ oder $\{B',A,B\}$ linear unabhängig sein müssen. Wären nämlich $\{A',A,B\}$ und $\{B',A,B\}$ linear abhängig, so fänden wir nichttriviale Linearkombinationen $r\cdot A'+s\cdot A+t\cdot B=O$ und $r'\cdot B'+s'\cdot A+t'\cdot B=O$. Da A und B linear unabhängig sind, müssen $r\neq 0$ und $r'\neq 0$ sein. Damit ist

$$A'=-\frac{s}{r}\cdot A-\frac{t}{r}\cdot B\in\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B \text{ und } B'=-\frac{s'}{r'}\cdot A-\frac{t'}{r'}\cdot B\in\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B,$$

und damit $\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'\subseteq\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B$, was ein Widerspruch ist.

Ohne Einschränkung können wir also annehmen, dass $\{A',A,B\}$ linear unabhängig ist. Dann ist $\{A',A,B\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, wir finden deshalb ein $r\in\mathbb{R}$ und ein $H\in\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B$ mit $P-P'=r\cdot A'+H$ und erhalten.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+(P-P')&=\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+(r\cdot A'+H)\\&=(\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+H)+r\cdot A'=\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+r\cdot A'.\end{aligned}$$

Damit gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}&Y\in E\cap E'\\ \Leftrightarrow\ &Y\in(\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+P)\cap(\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'+P')\\ \Leftrightarrow\ &Y-P'\in(\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+(P-P'))\cap(\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B')\\ \Leftrightarrow\ &Y-P'\in(\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+r\cdot A')\cap(\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B')\\ \Leftrightarrow\ &Y-P'\in\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B+r\cdot A'\wedge Y-P'\in\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'\\ \Leftrightarrow\ &Y-P'-r\cdot A'\in\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B\wedge Y-P'-r\cdot A'\in\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'\\ \Leftrightarrow\ &Y-P'-r\cdot A'\in\mathscr{E}_{N,0}\wedge Y-P'-r\cdot A'\in\mathscr{E}_{N',0}\\ \Leftrightarrow\ &Y-P'-r\cdot A'\in\mathscr{E}_{N,0}\cap\mathscr{E}_{N',0}\\ \Leftrightarrow\ &Y-P'-rA'\in\mathbb{R}(N\times N')\ \text{(nach Satz 8.3)}\\ \Leftrightarrow\ &Y\in\mathbb{R}(N\times N')+P'+r\cdot A'\\ \Leftrightarrow\ &Y\in\mathbb{R}\cdot((A\times B)\times(A'\times B'))+P'+r\cdot A'.\end{aligned}$$

Damit ist

$$E\cap E'=\mathbb{R}(N\times N')+P'+r\cdot A'=\mathbb{R}\cdot((A\times B)\times(A'\times B'))+P'+r\cdot A'$$

eine Gerade.

Sind E und E' parallel zueinander, so finden wir nach Satz 8.13 ein $\lambda\in\mathbb{R}$ mit $N=\lambda\cdot N'$. Ist $d=\lambda d'$, so sind die Ebenen gleich. Ist $d\neq\lambda d'$, so ist $E\cap E'=\emptyset$. $\square$

Analog zum Abstand eines Punktes von einer Geraden definieren wir den Abstand eines Punktes von einer Ebene.

Definition 8.10. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Ebene, $X \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Dann bezeichnen wir mit*

$$d(X,E) = \inf\{d(X,Y) \mid Y \in E\}$$

den Abstand des Punktes X von der Ebene E.

Satz 8.18 (Abstand Punkt/Ebene)**.** *Sei $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + P = \mathscr{E}_{N,d} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, $X \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt. Dann existiert genau ein Punkt $X_E \in E$, so dass $\mathbb{R} \cdot (X - X_E) \perp E$ ist, nämlich*

$$X_E = X - \frac{(X-P) \bullet N}{N \bullet N} \cdot N.$$

Den Punkt X_E nennen wir den Lotfußpunkt *des Lotes auf E durch X. Es ist*

$$d(X,E) = d(X,X_E) = \frac{|(X-P) \bullet N|}{\|N\|} = \frac{|X \bullet N - d|}{\|N\|}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Ist $Z \in E$ und $\mathbb{R} \cdot (X - Z) \perp E$, so ist $Z \bullet N = d$ und wir finden ein $r \in \mathbb{R}$ mit $X - Z = r \cdot N$. Es folgt

$$\begin{aligned} rN^2 &= (X - Z) \bullet N = X \bullet N - X_E \bullet N \\ &= X \bullet N - d \quad = X \bullet N - P \bullet N = (X-P) \bullet N, \end{aligned}$$

also $r = \dfrac{(X-P) \bullet N}{N \bullet N}$. Damit erhalten wir $Z = X - r \cdot N = X - \frac{(X-P)\bullet N}{N \bullet N} \cdot N = X_E$.

Der Punkt $X_E = X - \frac{(X-P)\bullet N}{N\bullet N} \cdot N$ liegt tatsächlich in der Ebene $E = \mathscr{E}_{N,d}$, da

$$N \bullet X_E = N \bullet X - \frac{(X-P) \bullet N}{N \bullet N} N \bullet N = N \bullet N - X \bullet N + P \bullet N = P \bullet N = d$$

ist. Außerdem ist $\mathbb{R} \cdot (X - X_E) \perp E$, da $X - X_E = \dfrac{(X-P) \bullet N}{N \bullet N} \cdot N$.

Sei nun $Y \in E$ ein von X_E verschiedener Punkt. Dann ist $\mathbb{R} \cdot (X - X_E) \perp \mathbb{R} \cdot (Y - X_E)$. Mit dem Satz des Pythagoras 5.5 folgt

$$\|X - X_E\|^2 + \|Y - X_E\|^2 = \|(X - X_E) - (Y - X_E)\|^2 = \|X - Y\|^2.$$

Da $Y \neq X_E$ ist, ist $\|Y - X_E\| > 0$ und wir erhalten $d(X,Y) > d(X_E, X)$, womit $d(X, X_E) = d(X,E)$ gezeigt ist.

Für den Abstand des Punktes X von der Ebene E erhalten wir nun

$$d(X,E)^2 = d(X,X_E)^2 = \|X - X_E\|^2 = (X - X_E)^2 = \left(\frac{(X-P) \bullet N}{N \bullet N}\right)^2 N \bullet N$$

und damit $d(X,E) = \dfrac{|(X-P) \bullet N|}{\|N\|}$. □

Ist $N \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $\|N\| = 1$ ist, so vereinfacht sich obige Gleichung zu $d(X,E) = |(X-P) \bullet N|$. Insbesondere erhalten wir $d(O,E) = |P \bullet N| = |d|$. Es ist $d(X,E) = 0$ genau dann, wenn der Punkt X in der Ebene liegt. Damit erhalten wir die folgende Darstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Satz 8.19 (Hessesche Normalendarstellung)**.** *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, $\mathbb{R} \cdot N \perp E$ mit $\|N\| = 1$ sowie $P \in E$ ein Punkt der Ebene.*
Dann ist

$$E = \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, (X-P) \bullet N = 0\}$$

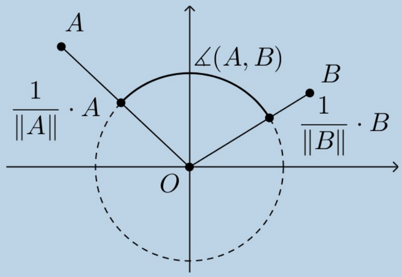
und für den Abstand eines Punktes $X \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene E gilt

$$d(X,E) = |(X-P) \bullet N| \,.$$

8.4 Winkel

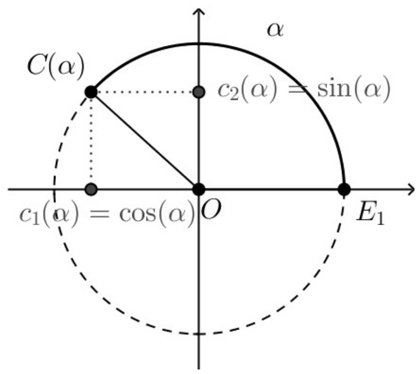
Wir definieren den Winkel zunächst ursprungsbezogen.

Definition 8.11. *Ein* Winkel *ist ein Paar (A, B) von Punkten $A, B \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$. Die* Größe $\measuredangle(A, B)$ des Winkels (A, B) *definieren wir als die Länge des kürzesten Kreisbogens zwischen $\frac{1}{\|A\|} \cdot A$ und $\frac{1}{\|B\|} \cdot B$ auf dem Einheitskreis $k_1(O)$ im Fall $n = 2$ bzw. dem Schnitt $K_1(O) \cap E(A, B, O)$ der Einheitskugel mit der Ebene[1] $E(A, B, O)$ im Fall $n = 3$.*



Zur genauen Definition der Kreisbogenlänge verweisen wir auf Anhang 9.1. Die Größe des Winkels ist nichtorientiert, es ist also $\measuredangle(A, B) = \measuredangle(B, A)$. Definieren wir $\pi := \measuredangle(A, -A)$, so ist die Länge des Kreisbogens eine reelle Zahl zwischen 0 und π.

Zu jeder reellen Zahl $\alpha \in [0, \pi]$ finden wir genau einen Punkt $C(\alpha) = \begin{pmatrix} c_1(\alpha) \\ c_2(\alpha) \end{pmatrix} \in k_1(O)$ auf dem Einheitskreis der Ebene $\mathbb{R}^2$, so dass



$$\measuredangle(E_1, C(\alpha)) = \alpha \text{ und } c_2(\alpha) \geq 0$$

ist. Wir definieren die Funktionen

$$\sin : [0, \pi] \to [-1, 1], \alpha \mapsto c_2(\alpha)$$

und

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1], \alpha \mapsto c_1(\alpha).$$

Damit ist $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = c_1(\alpha)^2 + c_2(\alpha)^2 = \|C(\alpha)\|^2 = 1$. Sind $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ und ist $\beta > \alpha$, so ist $\cos(\beta) < \cos(\alpha)$, die Funktion cos ist also auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend. Wir setzen die Funktionen cos und sin auf $[-\pi, \pi]$ fort, indem wir für alle $\alpha \in [-\pi, 0]$

$$\sin(\alpha) := -\sin(-\alpha) \text{ und } \cos(\alpha) := \cos(-\alpha)$$

setzen. Wir wollen im Folgenden die Größe des Winkels (A, B) berechnen.

Satz 8.20. *Seien $A, B \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ Punkte. Dann gilt* $\cos(\measuredangle(A, B)) = \dfrac{A \bullet B}{\|A\|\|B\|}$.

Beweis. Wir setzen $A' := \frac{1}{\|A\|} \cdot A$ und $B' := \frac{1}{\|A\|} \cdot B$. Ist $A' = B'$ bzw. $A' = -B'$,

[1] Sind A und B linear abhängig, so meinen wir mit $E(A, B, O)$ irgendeine Ebene, die A, B und O enthält.

so ist die Behauptung klar. Wir können also voraussetzen, dass A' und B' linear unabhängig sind. Sei $A'^{\perp} \in \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B'$ mit $\|A'^{\perp}\| = 1$ und[2] $\mathbb{R} \cdot A'^{\perp} \perp \mathbb{R} \cdot A'$. Da $B' \in \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot B' = \mathbb{R} \cdot A' + \mathbb{R} \cdot A'^{\perp}$ ist, finden wir $r, s \in \mathbb{R}$ mit $B' = r \cdot A' + s \cdot A'^{\perp}$. Durch Punktmultiplikation dieser Gleichung mit A' bzw. $A'^{\perp}$ erhalten wir $r = A' \bullet B'$ und $s = A'^{\perp} \bullet B'$ und damit $B' = (A' \bullet B') \cdot A' + (A'^{\perp} \bullet B') \cdot A'^{\perp}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{A \bullet B}{\|A\|\|B\|} &= A' \bullet B' = A' \bullet (r \cdot A' + s \cdot A'^{\perp}) = r = \cos(\measuredangle(E_1, r \cdot E_1 + s \cdot E_2) \\ &\overset{3}{=} \cos(\measuredangle(A', r \cdot A' + s \cdot A'^{\perp}) = \cos(\measuredangle(A', B')) = \cos(\measuredangle(A, B)).\end{aligned}$$

□

Definition 8.12 (Winkel zwischen Geraden). *Sind $\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B \subseteq \mathbb{R}^n$ Ursprungsgeraden, so definieren wir die* Größe des Winkels zwischen den Ursprungsgeraden *als*

$$\measuredangle(\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B) := \min\{\measuredangle(A, B), \measuredangle(A, -B)\}.$$

Sind $g, g' \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Geraden mit $g \cap g' \neq \emptyset$, so definieren wir die Größe des Winkels zwischen den Geraden g und g' *als* $\measuredangle(g, g') := \measuredangle(g_O, g'_O)$. *Sind $A, B, C \in \mathbb{R}^n$, $A \neq B$ und $C \neq B$, so definieren wir*

$$\measuredangle(A, B, C) := \measuredangle(A - B, C - B).$$

Wegen Satz 8.20 ist die Definition von $\measuredangle(\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B)$ unabhängig von der Wahl der Darstellungen der Ursprungsgeraden. Es ist $\measuredangle(A, B, C) = \measuredangle(C, B, A)$.

Satz 8.21 (Winkel Gerade/Gerade). *Sind $\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B \subseteq \mathbb{R}^n$ Ursprungsgeraden, so gilt* $\cos \measuredangle(\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B) = \dfrac{|A \bullet B|}{\|A\|\|B\|}$.

Beweis. Ist $A \bullet B \geq 0$, so ist

$$\cos(\measuredangle(A, B)) = \frac{A \bullet B}{\|A\|\|B\|} \geq 0 \geq \frac{A \bullet (-B)}{\|A\|\|B\|} = \cos(\measuredangle(A, -B)).$$

Da cos auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist, ist $\measuredangle(A, B) \leq \measuredangle(A, -B)$ und damit $\measuredangle(\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B) = \min\{\measuredangle(A, B), \measuredangle(A, -B)\} = \measuredangle(A, B)$. Wir erhalten

$$\cos \measuredangle(\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B) = \frac{A \bullet B}{\|A\|\|B\|} = \frac{|A \bullet B|}{\|A\|\|B\|}.$$

---

[2] Ein derartiges $A'^{\perp}$ erhalten wir beispielsweise durch die Orthonormalisierung $A'^{\perp} := \dfrac{B' - (B' \bullet A') \cdot A'}{\|B' - (B' \bullet A') \cdot A'\|}$ oder indem wir $A'^{\perp} := \begin{pmatrix} -a'_2 \\ a'_1 \end{pmatrix}$ im Fall $n = 2$ und $A'^{\perp} := \dfrac{A' \times (A' \times B')}{\|A' \times (A' \times B')\|}$ im Fall $n = 3$ wählen.

[3] Eine Begründung der Identität $\cos(\measuredangle(E_1, r \cdot E_1 + s \cdot E_2) = \cos(\measuredangle(A', r \cdot A' + s \cdot A'^{\perp})$ erfolgt in den mathematischen Vertiefungen in Abschnitt 9.1.

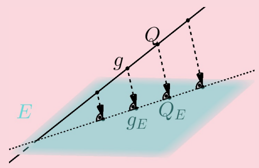
Ist $A \bullet B < 0$, so ist $\cos(\measuredangle(A,B)) = \frac{A \bullet B}{\|A\|\|B\|} < 0 < \frac{A \bullet (-B)}{\|A\|\|B\|} = \cos(\measuredangle(A,-B))$. Da cos auf dem Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend ist, ist $\measuredangle(A,B) > \measuredangle(A,-B)$ und damit $\measuredangle(\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B) = \min\{\measuredangle(A,B), \measuredangle(A,-B)\} = \measuredangle(A,-B)$. Wir erhalten

$$\cos \measuredangle(\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B) = \frac{A \bullet (-B)}{\|A\|\|B\|} = \frac{|A \bullet (-B)|}{\|A\|\|B\|} = \frac{|A \bullet B|}{\|A\|\|B\|}.$$

□

Um den Winkel zwischen Gerade und Ebene zu definieren, zeigen wir zunächst, dass die Orthogonalprojektion einer Geraden auf eine Ebene wieder eine Gerade ist.

Satz 8.22. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene, $g = \mathbb{R}C + Q \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade, sowie $\pi : \mathbb{R}^3 \to E, X \mapsto X_E$ die Orthogonalprojektion auf E gemäß Satz 8.18.*
Setzen wir $g_E := \pi(g)$, so ist $g_E = \mathbb{R} \cdot C_E + Q_E$. Ist $g \not\perp E$, so ist $\pi(g)$ folglich eine Gerade, die in der Ebene E verläuft.



Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $g_E \subseteq \mathbb{R} \cdot C_E + Q_E$ ist. Sei dazu $Z \in g_E$. Dann finden wir ein $X \in g$ mit $Z = \pi(X)$ sowie ein $r \in \mathbb{R}$ mit $X = r \cdot C + Q$. Wir setzen $Y := r \cdot C_E + Q_E$. Dann ist $Y \in g_E$. Wir zeigen, dass $Y = X_E$ ist, denn dann ist $Z = \pi(X) = Y \in g_E$. Dazu müssen wir zeigen, dass $(X - Y) \bullet A = 0$ und $(X - Y) \bullet B = 0$ ist. Dies gilt in der Tat, da

$$\begin{aligned}(X-Y) \bullet A &= ((r \cdot C + Q) - (r \cdot C_E + Q_E)) \bullet A \\ &= r(C - C_E) \bullet A + (Q - Q_E) \bullet A = 0\end{aligned}$$

und analog $(X - Y) \bullet B = 0$ ist.

Wir zeigen nun, dass $\mathbb{R} \cdot C_E + Q_E \subseteq g_E$ ist. Sei dazu $Y \in \mathbb{R} \cdot C_E + Q_E$. Dann finden wir ein $r \in \mathbb{R}$ mit $Y = r \cdot C_E + Q_E$. Wir setzen $X := r \cdot C + Q$. Dann ist $X \in g$. Wir zeigen, dass $X_E = \pi(X) = Y$ ist, denn dann ist $Y \in \pi(g) = g_E$. Dazu müssen wir zeigen, dass $(X - Y) \bullet A = 0$ und $(X - Y) \bullet B = 0$ ist. Dies gilt in der Tat, da

$$\begin{aligned}(X-Y) \bullet A &= ((r \cdot C + Q) - (r \cdot C_E + Q_E)) \bullet A \\ &= r(C - C_E) \bullet A + (Q - Q_E) \bullet A = 0\end{aligned}$$

und analog $(X - Y) \bullet B = 0$ ist. □

Mithilfe der Orthogonalprojektion können wir nun die Größe des Winkels zwischen Gerade und Ebene definieren und berechnen.

Definition 8.13. *Sei $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + S$ eine Ebene, $g = \mathbb{R} \cdot C + S$ eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ mit gemeinsamen Punkt S. Dann definieren wir die Größe des* Winkels zwischen der Geraden g und der Ebene E *als* $\measuredangle(g,E) := \begin{cases} \measuredangle(g, g_E) & \text{, falls } g \not\perp E \\ \frac{\pi}{2} & \text{, falls } g \perp E. \end{cases}$

Satz 8.23 (Winkel Gerade/Ebene). *Sei $E = \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B + S$ eine Ebene, $g = \mathbb{R} \cdot C + S$ eine Gerade im $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R} \cdot N \perp E$ (etwa $N = A \times B$). Dann ist*

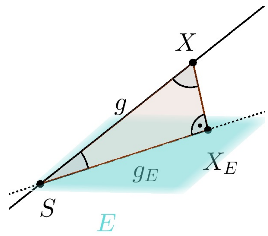
$$\measuredangle(g, E) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\mathbb{R} \cdot N, \mathbb{R} \cdot C), \text{ also } \sin \measuredangle(g, E) = \frac{|N \bullet C|}{\|N\| \|C\|}.$$

Beweis. Ist $g \subseteq E$, so ist $g = g_E$ und die Behauptung ist klar. Wir können also im Folgenden $g \nsubseteq E$ voraussetzen. Ist $g \perp E$, so ist $\mathbb{R} \cdot N = \mathbb{R} \cdot (A \times B) = \mathbb{R} \cdot C$ nach Satz 8.3 und damit

$$\measuredangle(g, E) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\mathbb{R} \cdot (A \times B), \mathbb{R} \cdot (A \times B)) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\mathbb{R} \cdot N, \mathbb{R} \cdot C),$$

womit die Behauptung in diesem Fall gezeigt ist. Wir betrachten also den Fall, dass $g \not\perp E$ ist. Wir verwenden an dieser Stelle ohne Beweis den Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck.

Sei X ein Punkt auf der Geraden g, $X \neq S$. Da $g \nsubseteq E$ ist, ist $X \neq X_E$ und das Dreieck SXX_E ist rechtwinklig bei X_E. Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck SXX_E sind wegen $\measuredangle(S, X_E, X) = \frac{\pi}{2}$ die Größen der beiden anderen Innenwinkel echt kleiner als $\frac{\pi}{2}$. Deshalb ist $\measuredangle(X_E, X, S) < \frac{\pi}{2}$, und damit



$$\measuredangle(X_E, X, S) = \measuredangle(X_E - X, S - X) = \measuredangle(\mathbb{R} \cdot (X_E - X), \mathbb{R} \cdot (S - X)).$$

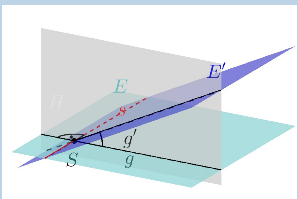
Ebenfalls nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ist

$$\begin{aligned}\measuredangle(g, E) = \measuredangle(X, S, X_E) &= \pi - \frac{\pi}{2} - \measuredangle(X_E, X, S) \\ &= \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\mathbb{R} \cdot (X_E - X), \mathbb{R} \cdot (S - X)) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\mathbb{R} \cdot (A \times B), \mathbb{R} \cdot C) \\ &= \frac{\pi}{2} - \measuredangle(\mathbb{R} \cdot N, \mathbb{R} \cdot C),\end{aligned}$$

also wie behauptet $\sin \measuredangle(g, E) = \cos \measuredangle(\mathbb{R} \cdot N, \mathbb{R} \cdot C) = \dfrac{|N \bullet C|}{\|N\| \|C\|}$. □

Als Letztes definieren und berechnen wir die Größe des Winkels zwischen zwei Ebenen.

Definition 8.14. *Seien E und E' zwei Ebenen mit gemeinsamen Punkt S. Sei $s = \mathbb{R} \cdot C + S \subseteq E \cap E'$ eine in beiden Ebenen enthaltene Gerade und $H := \mathscr{E}_{C, C \bullet S}$ die zu s orthogonale Ebene, die S enthält. Setzen wir $g := E \cap H$ und $g' := E' \cap H$, so sind g und g' Geraden. Wir definieren die* Größe des Winkels zwischen den Ebenen E und E' *als $\measuredangle(E, E') = \measuredangle(g, g')$.*



Bemerkung:
Ist $E \neq E'$, so ist $s = E \cap E'$ nach Satz 8.17. Ist $E = E'$, so kann s irgendeine Gerade in E sein, die den Punkt S enthält.

Satz 8.24 (Winkel Ebene/Ebene)**.** *Seien E und E' zwei Ebenen, $E \cap E' \neq \emptyset$. Ist $\mathbb{R} \cdot N \perp E$ und $\mathbb{R} \cdot N' \perp E'$, so ist $\cos \measuredangle(E, E') = \cos \measuredangle(\mathbb{R} \cdot N, \mathbb{R} \cdot N') = \dfrac{|N \bullet N'|}{\|N\|\|N'\|}$.*

Beweis. Ist $E = E'$, so ist $\mathbb{R} \cdot N = \mathbb{R} \cdot N'$. Wir finden deshalb ein $r \in \mathbb{R}$ mit $N' = r \cdot N$ und erhalten wie behauptet

$$\cos \measuredangle(E, E') = \cos 0 = 1 = \frac{|r|\,|N \bullet N|}{|r|\,\|N\|\|N\|} = \frac{|N \bullet rN|}{\|N\|\|rN\|} = \frac{|N \bullet N'|}{\|N\|\|N'\|}.$$

Sei im Folgenden $E \neq E'$ und $S \in E \cap E'$ ein gemeinsamer Punkt. Dann ist der Schnitt $s := E \cap E'$ der Ebenen nach Satz 8.17 eine Gerade und es gilt $s = \mathbb{R}(N \times N') + S$. Setzen wir $C := N \times N'$ und $d := C \bullet S$, so ist $H := \mathscr{E}_{C,d}$ die zu s orthogonale Ebene, die den Punkt S enthält. Setzen wir $g := E \cap H$ und $g' = E' \cap H$, so ist $g = \mathbb{R}(N \times C) + S$ und $g' = \mathbb{R}(N' \times C) + S$ nach Satz 8.17. Mit der Grassmann-Identität Satz 8.1 (*iv*) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&|(N \times (N \times N')) \bullet (N' \times (N \times N'))| \\
=&|((N \bullet N') \cdot N - (N \bullet N) \cdot N') \bullet ((N' \bullet N') \cdot N - (N' \bullet N) \cdot N')| \\
=&|(N \bullet N')(N' \bullet N')(N \bullet N) - (N \bullet N')(N' \bullet N)(N \bullet N') \\
&- (N \bullet N)(N' \bullet N')(N' \bullet N) + (N \bullet N)(N' \bullet N)(N' \bullet N')| \\
=&|N \bullet N'| \cdot |-(N \bullet N')(N \bullet N') + (N \bullet N)(N' \bullet N')| \\
=&|N \bullet N'| \cdot \left|-(N \bullet N')^2 + \|N\|^2\|N'\|^2\right| \\
=&|N \bullet N'| \cdot \|N \times N'\|,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen Satz 8.4 gilt.
Ebenfalls mit Satz 8.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|N \times (N \times N')\|^2 \cdot \|N' \times (N \times N')\|^2 \\
=&\left(\|N\|^2 \cdot \|N \times N'\|^2 - (N \bullet (N \times N'))^2\right) \cdot \left(\|N'\|^2 \cdot \|N \times N'\|^2 - (N' \bullet (N \times N'))^2\right) \\
=&\|N\|^2 \cdot \|N \times N'\|^2 \cdot \|N'\|^2 \cdot \|N \times N'\|^2,
\end{aligned}$$

also

$$\|N \times (N \times N')\| \cdot \|N' \times (N \times N')\| = \|N\|\|N'\|\|N \times N'\|.$$

Insgesamt folgt wie behauptet

$$\begin{aligned}\cos\measuredangle(E,E') &= \cos\measuredangle(g,g') = \cos\measuredangle(\mathbb{R}\cdot(N\times C),\mathbb{R}\cdot(N'\times C))\\ &= \cos\measuredangle(\mathbb{R}\cdot(N\times(N\times N')),\mathbb{R}\cdot(N'\times(N\times N')))\\ &= \frac{|(N\times(N\times N'))\bullet(N'\times(N\times N'))|}{\|N\times(N\times N')\|\|N'\times(N\times N')\|}\\ &= \frac{|N\bullet N'|\,\|N\times N'\|}{\|N\|\|N'\|\|N\times N'\|} = \frac{|N\bullet N'|}{\|N\|\|N'\|}.\end{aligned}$$

□

8.5 Flächen- und Rauminhalte

Ist $E\subseteq\mathbb{R}^3$ eine Ebene und $A\subseteq E$ eine Teilmenge der Ebene, so bezeichnen wir mit $\mu(A)$ den *Flächeninhalt* von A.
Ist $V\subseteq\mathbb{R}^3$, so bezeichnen wir mit $\lambda(V)$ den *Rauminhalt* von V. Zur genauen Definition von $\mu(A)$ und $\lambda(V)$ verweisen wir auf den Anhang 9.2.

Definition 8.15. *Seien $A,B\in\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ Punkte. Dann nennen wir die Punktmenge*

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(A,B) &:= [0,1]\cdot A+[0,1]\cdot B\\ &:= \{X\mid X\in\mathbb{R}^3,\exists r,s\in[0,1]: X=r\cdot A+s\cdot B\}\end{aligned}$$

die Fläche *des Parallelogramms $OA(A+B)B$.*

Wir wollen im Folgenden den Flächeninhalt $\mu(\mathscr{P}(A,B))$ des Parallelogramms berechnen und setzen dafür an dieser Stelle die aus der Elementargeometrie bekannte Formel *„Flächeninhalt = Grundseite · Höhe“* als bekannt voraus[4]. Damit gilt

$$\begin{aligned}\mu(\mathscr{P}(A,B)) = d(B,\mathbb{R}\cdot A)\cdot\|A\| &= \sqrt{\|B\|^2-\frac{(B\bullet A)^2}{\|A\|^2}}\cdot\|A\|\\ &= \sqrt{\|A\|^2\|B\|^2-(B\bullet A)^2} = \|A\times B\|.\end{aligned}$$

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen.

Satz 8.25. *Seien $A,B\in\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ Punkte. Dann gilt für den Flächeninhalt des von A und B aufgespannten Parallelogramms*

$$\mu(\mathscr{P}(A,B)) = d(B,\mathbb{R}\cdot A)\|A\| = \|A\times B\|.$$

[4] Eine Herleitung befindet sich ebenfalls in Anhang 9.2.

Dieser Satz ermöglicht es uns, in Verbindung mit der in Satz 8.20 bewiesenen Identität $\cos(\measuredangle(A,B)) = \frac{A \bullet B}{\|A\|\|B\|}$ das Kreuzprodukt geometrisch zu interpretieren. Mit Satz 8.4 und gilt nämlich

$$\begin{aligned}\|A \times B\| &= \sqrt{\|A\|^2\|B\|^2 - (A \bullet B)^2} \qquad = \sqrt{\|A\|^2\|B\|^2 - \|A\|^2\|B\|^2\cos^2(\measuredangle(A,B))}\\ &= \|A\| \cdot \|B\|\sqrt{1-\cos^2(\measuredangle(A,B))} = \|A\| \cdot \|B\|\sqrt{\sin^2(\measuredangle(A,B))}\\ &= \|A\| \cdot \|B\|\,|\sin(\measuredangle(A,B))|\,.\end{aligned}$$

Da $0 \le \measuredangle(A,B) \le \pi$ ist, ist $\sin(\measuredangle(A,B)) \ge 0$. Damit erhalten wir die folgende geometrische Interpretation des Kreuzproduktes.

Satz 8.26 (Geometrische Interpretation des Kreuzproduktes)**.** *Sind $A, B \in \mathbb{R}^3$, so ist $\mathbb{R} \cdot (A \times B)$ orthogonal zu $\mathbb{R} \cdot A$ und zu $\mathbb{R} \cdot B$. Für den Betrag von $A \times B$ gilt*

$$\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\| \sin(\measuredangle(A,B)).$$

Dies ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms $AOB(A+B)$.

Das dreidimensionale Analogon zum Parallelogramm ist das Spat.

Definition 8.16. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$. Dann nennen wir die Punktmenge*

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(A,B,C) &:= [0,1] \cdot A + [0,1] \cdot B + [0,1] \cdot C\\ &:= \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, \exists r,s,t \in [0,1] : X = r \cdot A + s \cdot B + t \cdot C\}\end{aligned}$$

das durch A, B und C aufgespannte Spat *mit den Ecken O,A,B,C, $A+B$, $A+C$, $B+C$ und $A+B+C$.*

Um den Rauminhalt des Spats zu berechnen, setzten wir wieder die Formel *„Rauminhalt des Spats = Grundfläche · Höhe"* als bekannt voraus und erhalten

$$\lambda(\mathscr{S}(A,B,C)) = \mu(\mathscr{P}(A,B)) \cdot d(C, \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B).$$

Sind A und B linear abhängig, so ist $A \times B = O$ und es folgt $\lambda(\mathscr{S}(A,B,C)) = 0 = |C \bullet (A \times B)|$. Sind A und B linear unabhängig, so ist $A \times B \neq O$ und wir erhalten mit Satz 8.18

$$\begin{aligned}\lambda(\mathscr{S}(A,B,C)) = \mu(\mathscr{P}(A,B)) \cdot d(C, \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B) &= \|A \times B\| \cdot \frac{|C \bullet (A \times B)|}{\|A \times B\|}\\ = |C \bullet (A \times B)| = |(A \times B) \bullet C|\,.\end{aligned}$$

Beachten wir noch, dass

$$\begin{aligned}(A \times B) \bullet C &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\\ &= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = det(A,B,C)\end{aligned}$$

gilt, so erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 8.27. *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ Punkte. Dann gilt für den Rauminhalt des von A, B und C aufgespannten Spats*

$$\lambda(\mathscr{S}(A,B,C)) = |(A \times B) \bullet C| = |det(A,B,C)|\,.$$

8.6 Kugeln

Das dreidimensionale Analogon zum Kreis ist die Kugel.

Definition 8.17. *Sei $M \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl. Dann heißt die Punktmenge*

$$K_r(M) = \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, d(X,M) = r\}$$

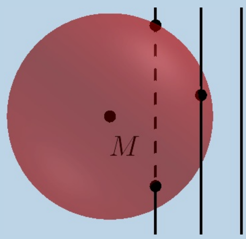
die Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r*.*

Die Menge $\mathring{K}_r(M) := \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, d(A,X) < r\}$ nennen wir das *Innere der Kugel* $K_r(M)$. Ein Punkt $X \in \mathbb{R}^3$ liegt außerhalb der Kugel $K_r(M)$, wenn er weder zur Kugel noch zum Inneren der Kugel gehört, wenn also $d(X,M) > r$ ist. Für die Darstellung der Kugel sind die folgenden gleichwertigen Schreibweisen üblich:

$$\begin{aligned} K_r(M) &= \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, d(X,M) = r\} \\ &= \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, (X-M)^2 = r^2\} \\ &= \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, (x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 + (x_3-m_3)^2 = r^2\}. \end{aligned}$$

Die Lagebeziehung einer Geraden zu einer Kugel wird durch die Begriffe Passante, Tangente und Sekante beschrieben, die wir durch die Anzahl gemeinsamer Punkte definieren.

Definition 8.18. *Sei $g \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade und $K \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Kugel. Dann heißt die Gerade g*



(i) Passante, *falls $|g \cap K| = 0$,*

(ii) Tangente, *falls $|g \cap K| = 1$ (in diesem Fall heißt der gemeinsame Punkt von g und K* Berührpunkt*),*

(iii) Sekante, *falls $|g \cap K| = 2$ ist.*

Ob eine Gerade eine Passante, Tangente oder Sekante ist, lässt sich nicht nur durch Bestimmung der Anzahl gemeinsamer Punkte herausfinden, sondern auch durch Berechnung des Abstandes des Kugelmittelpunktes von der Geraden.

Satz 8.28. *Sei $K_r(M) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r und $g \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Gerade. Dann gilt:*

(i) g ist genau dann Passante, wenn $d(M, g) > r$ ist,

(ii) g ist genau dann Tangente, wenn $d(M, g) = r$ (der Berührpunkt ist dann der Lotfußpunkt M_g) ist,

(iii) g ist genau dann Sekante, wenn $d(M, g) < r$ ist.

Beweis. Der Beweis wird analog zu dem von Satz 6.16 geführt. Sei $g = \mathbb{R} \cdot A + M_g$, wobei M_g der nach Satz 5.7 eindeutig bestimmte Lotfußpunkt der Lote durch M auf g ist. Ohne Einschränkung sei $\|A\| = 1$. Nach Satz 5.7 ist $d(M, g) = d(M_g, M) = \|M_g - M\|$. Sei $t \in R$ und $X = t \cdot A + M_g$ ein Punkt auf der Geraden g. Der Punkt X liegt genau dann auf der Kugel $K_r(M)$, wenn

$$\begin{aligned} r^2 &= d^2(X, M) = (t \cdot A + M_g - M)^2 \\ &= t^2 A^2 + 2tA \bullet (M_g - M) + (M_g - M)^2 = t^2 + (M_g - M)^2 \end{aligned}$$

ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $t^2 = r^2 - (M_g - M)^2 = r^2 - d^2(M, g)$ ist.

(i) Ist $d(M, g) > r$, so ist $r^2 - d^2(M, g) < 0$ und damit $g \cap K_r(M) = \emptyset$.

(ii) Ist $d(M, g) = r$, so ist $r^2 - d^2(M, g) = 0$ und damit $g \cap K_r(M) = \{M_g\}$.

(iii) Ist $d(M, g) < r$, so ist $r^2 - d^2(M, g) > 0$ und damit

$$g \cap K_r(M) = \{\sqrt{r^2 - d^2(M, g)}A + M_g, -\sqrt{r^2 - d^2(M, g)}A + M_g\}.$$

□

Zusätzlich zur Lagebeziehung von Kugel und Gerade können wir bei Punkten des Raumes die Lagebeziehung von Kugel und Ebene untersuchen.

Definition 8.19. *Eine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ nennen wir* Tangentialebene *einer Kugel $K \subseteq \mathbb{R}^3$, falls $|E \cap K| = 1$ ist.*

Auch hier gibt wieder der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene Aufschluss über die Lagebeziehung von Ebene und Kugel.

Satz 8.29 (Lage Kugel/Ebene). *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r und $E \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Ebene. Dann gilt:*

(i) $|E \cap K| = 0 \Leftrightarrow d(M, E) > r$,

(ii) $|E \cap K| = 1 \Leftrightarrow d(M, E) = r$
(in diesem Fall ist E eine Tangentialebene an K und $E \cap K = \{M_E\}$),

(iii) $E \cap K$ *ist ein Kreis* $\Leftrightarrow d(M, E) < r$.

Dabei heißt eine Teilmenge $k \subset \mathbb{R}^3$ des Raumes *Kreis*, wenn eine Ebene E, ein Punkt M und eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren, so dass $k = \{X \mid X \in E, d(X, m) = r\}$ ist.

Beweis. (i) Ist $d(M, E) > r$ und $X \in E$, so ist $d(M, X) \geq \inf\{d(M, Y) \mid Y \in E\} = d(M, E) > r$ und damit $X \notin K_r(M)$. Also ist $K_r(M) \cap E = \emptyset$.

(ii) Sei $d(M, E) = r$. Ist M_E der Fußpunkt des Lotes durch M auf E, so ist $d(M, M_E) = d(M, E) = r$ nach Satz 8.18 und damit $M_E \in K_r(M)$. Ist $Y \in E \setminus \{M_E\}$ ein weiterer Punkt der Ebene E, so ist $d(M, Y) > d(M, M_E) = r$ nach Satz 5.7, und damit $Y \notin K_r(M)$. Also ist $K \cap E = \{M_E\}$.

(iii) Sei $d(M, E) < r$. Ist M_E der Fußpunkt der Lotes durch M auf E, so ist nach Satz 8.18 $d(M, M_E) = d(M, E)$. Wir setzen $R := \sqrt{r^2 - d^2(M, E)}$ und zeigen, dass $K \cap E = k_R(M_E)$ ist, wobei $k_R(M_E) := \{X \mid X \in E, d(X, M_E) = R\}$ der Kreis in der Ebene E ist. Dies gilt in der Tat: Ist nämlich $X \in k_R(M_E)$, so ist $X \in E$ und $d(M_E, X) = R$. Da $X \in E$ ist, ist das Dreieck MXM_E rechtwinklig bei M_E. Also gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} d(M, X)^2 &= d(M, M_E)^2 + d^2(M_E, X) = d(M, M_E)^2 + R^2 \\ &= d(M, M_E)^2 + r^2 - d^2(M, E) = r^2 \end{aligned}$$

und damit $X \in K_r(M)$. Da $X \in E$ ist, $X \in K_r(M) \cap E$. Zum Nachweis der anderen Inklusion wählen wir einen Punkt $X \in K_r(M) \cap E$ und erhalten ebenfalls mit dem Satz des Pythagoras $r^2 = d^2(X, M) = d(M, M_E)^2 + d^2(M_E, X)$, und damit $d(M_E, X) = \sqrt{r^2 - d^2(M, E)} = R$ womit $X \in k_R(M_E)$ gezeigt ist.

Da genau einer der Fälle $d(M, E) < r$, $d(M, E) = r$ oder $d(M, E) > r$ eintritt, folgen auch die anderen Implikationen. $\square$

Zwei Kugeln können disjunkt sein, einen gemeinsamen Punkt besitzen oder sich in einem Kreis schneiden.

Satz 8.30 (Lage Kugel/Kugel)**.** *Seien K und K' Kugeln mit den Mittelpunkten M und M' sowie den Radien $r \geq r'$. Sei $d := d(M, M') > 0$ der Abstand der Mittelpunkte.*
Dann gilt:

(i) $|K \cap K'| = 0 \Leftrightarrow d > r + r'$ *oder* $d < r - r'$,

(ii) $|K \cap K'| = 1 \Leftrightarrow d = r + r'$ *oder* $d = r - r'$,

(iii) $K \cap K'$ *ist ein Kreis* $\Leftrightarrow r - r' < d < r + r'$.

Beweis. (i) Sei $d > r + r'$. Sei $X \in K$ ein Punkt auf der Kugel K. Mit der Dreiecksungleichung 5.4 folgt $d(M, M') \leq d(M, X) + d(X, M')$, also

$$d(X, M') \geq d(M, M') - d(M, X) > (r + r') - r = r'.$$

Das bedeutet $X \notin K'$, und damit ist $K \cap K' = \emptyset$.

Sei nun $d < r - r'$. Sei $X \in K'$ ein Punkt auf der Kugel K'. Mit der Dreiecksungleichung 5.4 folgt

$$d(X, M) \leq d(X, M') + d(M', M) < r' + (r - r') = r.$$

Das bedeutet $X \notin K$, und damit ist $K \cap K' = \emptyset$.

(ii) Wir zeigen, dass $K \cap K' \subseteq \{M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)\}$ gilt, falls $d = r + r'$ oder $d = r - r'$ ist. Sei dazu $X \in K \cap K'$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $d = r + r'$ ist. Dann ist

$$d(M, M') = d = r + r' = d(M, X) + d(X, M'),$$

nach Satz 5.4 ist also $X \in MM'$. Wir finden deshalb ein $t \in]0, 1[$, so dass $X = M + t \cdot (M' - M)$ ist und erhalten

$$r^2 = d^2(X, M) = (X - M)^2 = (t \cdot (M' - M))^2 = t^2(M' - M)^2 = t^2 d^2$$

und damit $t = \frac{r}{d}$ und $X = M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)$.

Nun betrachten wir den Fall, dass $d = r - r'$ ist. Dann ist

$$d(M, M') = d = r - r' = d(M, X) - d(X, M')$$

und damit $d(M, X) = d(M, M') + d(M', X)$, nach Satz 5.4 ist also $M' \in MX$. Wir finden deshalb ein $t \in]0, 1[$, so dass $M' = M + t \cdot (X - M)$ und damit $X = M + \frac{1}{t} \cdot (M' - M)$ ist und erhalten

$$r^2 = d^2(X, M) = (X - M)^2 = (\frac{1}{t} \cdot (M' - M))^2 = \frac{1}{t^2}(M' - M)^2 = \frac{d^2}{t^2}$$

und damit $t = \frac{d}{r}$, also ist auch in diesem Fall $X = M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)$. Damit ist $K \cap K' \subseteq \{M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)\}$ gezeigt.

Ist umgekehrt $X = M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)$, so ist

$$d(X, M)^2 = (X - M)^2 = (\frac{r}{d} \cdot (M' - M))^2 = r^2$$

und damit $X \in K$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} d(X, M')^2 &= (X - M')^2 = ((M - M') + \frac{r}{d} \cdot (M' - M))^2 \\ &= ((\frac{r}{d} - 1) \cdot (M' - M))^2 = (\frac{r}{d} - 1)^2 d^2 = (r - d)^2 = r'^2 \end{aligned}$$

und damit $X \in K'$. Also ist $X \in K \cap K'$. Damit ist $K \cap K' = \{M + \frac{r}{d} \cdot (M' - M)\}$ gezeigt.

(iii) Sei $r - r' < d < r + r'$. Sei $X \in K$. Dann ist $(X - M)^2 = r^2$ und es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & X \in K' \\ \Leftrightarrow & (X - M')^2 = r'^2 \\ \Leftrightarrow & (X - M)^2 - (X - M')^2 = r^2 - r'^2 \\ \Leftrightarrow & ((X - M) - (X - M')) \bullet ((X - M) + (X - M')) = r^2 - r'^2 \\ \Leftrightarrow & (M' - M) \bullet (2X - M - M') = r^2 - r'^2 \\ \Leftrightarrow & 2X \bullet (M' - M) - (M' - M) \bullet (M + M') = r^2 - r'^2 \\ \Leftrightarrow & X \bullet (M' - M) = \frac{1}{2}(r^2 - r'^2 + (M' - M) \bullet (M + M')) =: c. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass X genau dann auf der Kugel K und der Kugel K' liegt, wenn X auf der Kugel K und in der Ebene $E = \{Y \mid Y \in \mathbb{R}^3, Y \bullet (M' - M) = c\}$ liegt.

Wir zeigen, dass $d(M, E) < r$ ist, denn dann schneiden sich nach Satz 8.29 die Kugel K und die Ebene E in einem Kreis. Nach Satz 8.18 gilt

$$\begin{aligned} d(M, E) &= \frac{|M \bullet (M' - M) - c|}{\|M' - M\|} = \frac{|M \bullet (M' - M) - c|}{d} \\ &= \frac{|2M \bullet (M' - M) - r^2 + r'^2 - (M' - M) \bullet (M + M')|}{2d} \\ &= \frac{|(M' - M) \bullet (2M - (M + M')) - r^2 + r'^2|}{2d} \\ &= \frac{|(M' - M) \bullet (M - M') - r^2 + r'^2|}{2d} = \frac{|-d^2 - r^2 + r'^2|}{2d} \\ &= \frac{r^2 - r'^2 + d^2}{2d} = \frac{(r - d)^2 - r'^2 + 2rd}{2d} \\ &< \frac{r'^2 - r'^2 + 2rd}{2d} = r, \end{aligned}$$

und damit ist $K \cap K'$ ein Kreis.

Da genau einer der drei Fälle

(i) $d > r + r'$ oder $d < r - r'$,

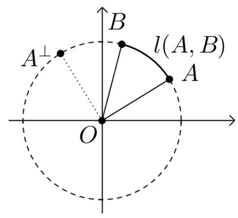
(ii) $d = r + r'$ oder $d = r - r'$,

(iii) $r - r' < d < r + r'$

eintritt, folgen auch die anderen Implikationen. $\square$

9 Mathematische Vertiefungen

9.1 Berechnung der Größe eines Winkels



Wir wollen im Folgenden die in Kapitel 8.4 verwendeten Begriffe präzisieren. Dazu betrachten wir zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ mit $\|A\| = \|B\| = 1$ und berechnen die *Länge* $l(A, B)$ *des Kreisbogens* auf dem Einheitskreis zwischen A und B. Im Fall $A = B$ ist $l(A, B) = 0$. Wir betrachten nun den Fall, dass $A \neq B$ und $A \neq -B$ ist. Dann sind A und B linear unabhängig.

Wir betrachten die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B, t \mapsto \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \cdot A + \frac{2t}{1 + t^2} \cdot A^\perp,$$

wobei $A^\perp \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ ist mit $\|A^\perp\| = 1$ und $A \bullet A^\perp = 0$.[1] Wir zeigen, dass γ eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf den Kreis in $\mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$ mit Radius 1 ohne den Punkt $-A$ ist. Aus $\|A\| = \|A^\perp\| = 1$ und $A \bullet A^\perp = 0$ erhalten wir

$$\|\gamma(t)\|^2 = \frac{(1 - t^2)^2 + 4t^2}{(1 + t^2)^2} = 1 \text{ und } \frac{1 - t^2}{1 + t^2} > -1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

also $\|\gamma(t)\| = 1$ und $\gamma(t) \neq -A$. Ist umgekehrt $X \in \mathbb{R} \cdot A + \mathbb{R} \cdot B$, $\|X\| = 1$ und $X \neq -A$, so setzten wir

$$t(X) := \begin{cases} \sqrt{\frac{1-(X \bullet A)}{1+(X \bullet A)}} & , \text{ falls } (X \bullet A^\perp) \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{1-(X \bullet A)}{1+(X \bullet A)}} & , \text{ falls } (X \bullet A^\perp) < 0 \end{cases}$$

und erhalten $\gamma(t) = (X \bullet A) \cdot A + (X \bullet A^\perp) \cdot A^\perp = X$. γ ist differenzierbar und es gilt $\gamma' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \dfrac{-4t}{(1 + t^2)^2} \cdot A + \dfrac{2 - 2t}{(1 + t^2)^2} \cdot A^\perp$ und damit $\|\gamma'(t)\|^2 = \dfrac{4}{(1 + t^2)^2}$, also $\|\gamma'(t)\| = \dfrac{2}{1 + t^2}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

---

[1] Ein derartiges $A^\perp$ erhalten wir beispielsweise durch die Orthonormalisierung $A^\perp := \dfrac{B - (B \bullet A) \cdot A}{\|B - (B \bullet A) \cdot A\|}$ oder indem wir $A^\perp := \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ im Fall $n = 2$ und $A^\perp := \dfrac{A \times (A \times B)}{\|A \times (A \times B)\|}$ im Fall $n = 3$ wählen.

Für die Bogenlänge $l(t)$ der Kurve $[0,t] \to \mathbb{R}^n, \eta \mapsto \gamma(\eta)$ ergibt sich damit

$$l(t) = \int_0^t \|\gamma'(\eta)\| d\eta = \int_0^t \frac{2}{1+\eta^2} d\eta.$$

l ist wegen $l'(t) = \frac{2}{1+t^2} > 0$ streng monoton wachsend und beschränkt. Deshalb existiert $\pi := \lim\limits_{t\to\infty} l(t)$ und es gilt $\lim\limits_{t\to-\infty} l(t) = -\pi$. Da $B \neq -A$ ist, finden wir ein $t(B) \in \mathbb{R}$ mit $B = \gamma(t(B))$ und es ist $\measuredangle(A,B) = |l(t(B))|$. Ist $B = -A$, so setzen wir $\measuredangle(A,B) := l(A,B) := \pi$. Es gilt somit

Satz 9.1. *Seien $A', B' \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ Punkte, und $A := \frac{1}{\|A'\|} \cdot A'$,$B := \frac{1}{\|B'\|} \cdot B'$. Dann gilt*

$$\measuredangle(A',B') = \begin{cases} \left|\int_0^{t(B)} \frac{2}{1+\eta^2} d\eta\right| & , \textit{falls } B \neq -A \\ \pi & , \textit{falls } B = -A. \end{cases}$$

9.2 Messen von Flächen- und Rauminhalten

Der natürliche Begriff für Flächeninhalte und Volumina ist aus der Sicht der modernen Mathematik das *Lebesgue-Maß* λ^n. Wir wollen das Lebesgue-Maß an dieser Stelle als gegeben voraussetzen und zitieren die wesentlichen Eigenschaften (siehe auch [2]).

Ein *n-dimensionaler Quader* ist eine Menge $Q \subseteq R^n$ der Form

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n,$$

wobei $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ sind mit $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$. Das n-dimensionale Lebesgue-Maß eines Quaders definieren wir als

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \ldots \times]a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

und nennen es den *Inhalt* des Quaders. Im Fall $n = 2$ sprechen wir auch von *Flächeninhalt*, im Fall $n = 3$ von *Rauminhalt*.

Sei $\mathscr{B}^n \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ die kleinste Teilmenge der Potenzmenge von $\mathbb{R}^n$, die alle n-dimensionalen Quader enthält sowie abgeschlossen ist bezüglich abzählbaren Vereinigungen und Komplementbildung. Die Elemente von $\mathscr{B}^n$ heißen *messbar*. Dann existiert eine eindeutige Erweiterung des Lebesque-Maßes[2] auf die messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

[2] In der Literatur wird dieses Maß auf der Borelschen σ-Algebra als Borel-Maß bezeichnet, unter dem Lebesgue-Maß versteht man hingegen die Vervollständigung des Borelmaßes auf die lebesguesche σ-Algebra, so dass alle Teilmengen von Borel-Nullmengen messbar sind.

(i) $\lambda^n([a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]) = (b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$

(ii) Ist $M\subseteq\mathbb{R}^n$ messbar und $X\in\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^n(M+X)=\lambda^n(M)$.

(iii) Ist $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ eine normerhaltende lineare Abbildung, so gilt für alle messbaren Mengen $M\subseteq\mathbb{R}^n$
$$\lambda^n(\varphi(M))=\lambda^n(M).$$

(iv) Sind $M,N\subseteq\mathbb{R}^n$ messbar, so ist $\lambda^n(M)+\lambda^n(N)=\lambda^n(M\cup N)+\lambda^n(M\cap N)$.

Wollen wir den Flächeninhalt des Parallelogramms berechnen, so ist das dreidimensionale Lebesgue-Maß nicht das geeignete Maß, es ist nämlich $\lambda^3(\mathscr{P}(A,B))=0$. Wir können das Parallelogramm jedoch so drehen, dass es in der x_1-x_2-Ebene liegt und anschließend das zweidimensionale Lebesgue-Maß dieser Menge berechnen. Dazu wählen wir $A':=\frac{1}{\|A\|}\cdot A$ und $B'\in\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B$ mit $\|B'\|=1$ und $\mathbb{R}\cdot B'\perp\mathbb{R}\cdot A'$. Dann ist $\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B=\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'$, zu jedem $X\in\mathbb{R}\cdot A+\mathbb{R}\cdot B$ finden wir also eindeutig bestimmte $r,s\in\mathbb{R}$ mit $X=r\cdot A'+s\cdot B'$. Wir definieren die Abbildung
$$\varphi:\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'\to\mathbb{R}^2, r\cdot A'+s\cdot B'\mapsto\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}.$$

Die Abbildung φ ist linear und für alle $X\in\mathbb{R}\cdot A'+\mathbb{R}\cdot B'$ gilt $\|X\|=\|\varphi(X)\|$, die Abbildung φ ist also normerhaltend. Wir definieren nun den Flächeninhalt μ des Parallelogramms $\mathscr{P}(A,B)$ als
$$\mu(\mathscr{P}(A,B)):=\lambda^2(\varphi(\mathscr{P}(A,B))).$$

Um $\lambda^2(\varphi(\mathscr{P}(A,B)))$ zu berechnen, setzen wir $\widetilde{A}:=\varphi(A)\in\mathbb{R}^2$ und $\widetilde{B}:=\varphi(B)\in\mathbb{R}^2$ und merken an, dass der Punkt $\widetilde{A}$ auf der x_1-Achse liegt und dass die Strecke $\widetilde{B}(\widetilde{A}+\widetilde{B})$ parallel zur Strecke $O\widetilde{A}$ und damit parallel zur x-Achse verläuft. Es ist also $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$. Ohne Einschränkung nehmen wir ferner an, dass $\widetilde{b_1}\geq 0$ und $\widetilde{b_2}\geq 0$ ist. Um $\lambda^2(\varphi(\mathscr{P}(A,B)))=\lambda^2([0,1]\cdot\widetilde{A}+[0,1]\cdot\widetilde{B})$ zu berechnen, zerlegen wir die Punktmenge $M:=[0,1]\cdot\widetilde{A}+[0,1]\cdot\widetilde{B}$ in zwei disjunkte Teilmengen - in die Punkte, deren 1. Koordinate kleiner oder gleich a ist und in die Punkte, deren 1. Koordinate größer als a ist - und beachten, dass das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist und dass Strecken das Lebesgue-Maß 0 besitzen. Damit gilt

$$\begin{aligned}\mu(\mathscr{P}(A,B)) &= \lambda^2(\varphi(\mathscr{P}(A,B)))=\lambda^2(M)\\ &= \lambda^2(M\cap\{X\mid X\in\mathbb{R}^2,x_1\leq a\})+\lambda^2(M\cap\{X\mid X\in\mathbb{R}^2,x_1>a\})\\ &= \lambda^2(M\cap\{X\mid X\in\mathbb{R}^2,x_1\leq a\})+\lambda^2(M\cap\{X\mid X\in\mathbb{R}^2,x_1>a\}-\widetilde{A})\\ &= \lambda^2(M\cap\{X\mid X\in\mathbb{R}^2,x_1\leq a\})+\lambda^2(M\cap\{X\mid X\in\mathbb{R}^2,x_1\geq a\}-\widetilde{A})\\ &= \lambda^2([0,a]\times[0,\widetilde{b_2}])=\widetilde{b_2}\cdot a=d(\widetilde{B},\mathbb{R}\cdot\widetilde{A})\|\widetilde{A}\|=d(B,\mathbb{R}\cdot A)\|A\|,\end{aligned}$$

und wir erhalten die bekannte Formel

„Flächeninhalt des Parallelogramms = Grundseite · Höhe“.

Das geeignete Maß für den Rauminhalt des Spats ist das dreidimensionale Lebesgue-Maß λ^3. Zur Berechnung definieren wir analog zum Parallelogramm eine normerhaltende lineare Abbildung φ, so dass $\varphi(A)$ auf der x_1-Achse und $\varphi(B)$ in der $x_1 - x_2$-Ebene liegt. Durch Zerlegung und Translation können wir das Spat in einen rauminhaltsgleichen Quader transformieren und wir erhalten die bekannte Formel

„Rauminhalt des Spats = Grundfläche · Höhe“.

Teil II

Entwurf eines Unterrichtswerkes

10 Zum Aufbau des Unterrichtswerkes

In diesem Teil der Arbeit soll ein Entwurf eines Unterrichtswerkes präsentiert werden, in dem die in Teil I entwickelten fachlichen Grundlagen für einen Einsatz im Unterricht der Sekundarstufe II aufbereitet wurden. Das Unterrichtswerk gliedert sich in zwei Hauptteile, nämlich die Geometrie der Ebene und die Geometrie des Raumes. Diese Teile gliedern sich in insgesamt 22 Lernumgebungen.

Viele Lernumgebungen beginnen zunächst mit einem Einstiegsimpuls. Der Impuls ist losgelöst vom Lehrtext, er ist etwas Freischwebendes, er beinhaltet eine offene Fragestellung oder Diskussionsgrundlage, bei der eine kreative Betätigung innerhalb der Lernumgebung stattfindet, die jedoch nicht immer zielgerichtet ist auf den Lehrtext oder auf die Merkkästen, in denen die wesentlichen Aussagen des Lehrtextes gesichert werden. Auf dieses Konzept wird sich jedoch nicht versteift. Insbesondere an Stellen, an denen formale Rechenverfahren erarbeitet werden sollen, sind zielgerichtetere und damit weniger offene Einstiege in die Lernumgebung gerechtfertigt.

In den auf die Einstiegsimpulse folgenden Lehrtexten werden die Unterrichtsinhalte auf einem für Schüler angemessenen mathematischen und sprachlichen Niveau präsentiert. In diesen Texten werden die durch die Einstiegsimpulse angeregten Inhalte systematisch notiert, ohne dass auf den konkreten Einstiegsimpuls Bezug genommen wird. Im Vergleich zum fachlichen Teil sind diese Darstellungen stark vereinfacht. An die Begründungen wird nicht der Anspruch der Vollständigkeit gestellt, Ziel ist es lediglich auf den Leser überzeugend zu wirken.

An die Darstellung des Unterrichtsstoffes schließen sich Beispielaufgaben an. Die Beispielaufgaben übernehmen einerseits die Funktion der im Unterrichtswerk entfallenen formalen Beweise und sind damit Teil der didaktischen Reduktion der Unterrichtsinhalte (siehe auch Abschnitt 13.3). Andererseits ist das Nachvollziehen von Beispielen eine Methode zum Erwerb von Rechenverfahren, die in gewissen Situationen sogar der Arbeit mit Problemlöseaufgaben überlegen sein kann[1]. Die Beispielaufgaben sind eine Demonstration von Aufgabentypen, die mit der im Lehrtext entwickelten Theorie lösbar sind. Ein Anspruch, den wir an das Unterrichtswerk

[1] Siehe dazu etwa die Unteruchungen in [56].

stellen, ist dass nach dessen Durcharbeitung sämtliche im Zentralabitur des Landes Schleswig-Holstein auftretenden Aufgaben erfolgreich bearbeitet werden können. Dies führt zu einer großen Anzahl an Beispielen, die kalkülhafte Schnittpunktberechnungen der thematisierten geometrischen Objekte implizieren. Wir präsentieren jedoch auch Beispielaufgaben, die den Nachweis erbringen, dass schon am Anfang der Theorie nach nur wenigen Seiten Lehrtext eine Fülle an abwechslungsreichen Aufgaben möglich ist. Die Beispielaufgaben dienen außerdem dem Lehrer zur Anregung, wie in einer Unterrichtssituation Ergebnisse schriftlich festgehalten werden können sowie Schülern zum Nacharbeiten der Unterrichtsinhalte und dem Selbststudium.

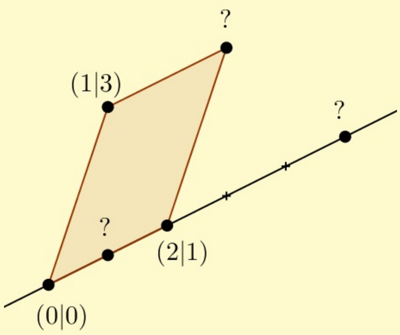
Viele der im Rahmen der Entwicklung des Unterrichtswerkes getroffenen Entscheidungen erschließen sich erst in Zusammenhang mit den didaktischen Bemerkungen, die im Teil III dieser Arbeit gegeben sind. Trotzdem ist der Entwurf des Unterrichtswerkes an dieser Stelle als geschlossener Text abgedruckt, um die Struktur eines möglichen Unterrichtsganges zu dokumentieren. Zu beachten ist, dass diese Lernumgebungen noch keine konkreten Unterrichtsstunden abbilden. Auch wenn sich an einige Lernumgebungen vereinzelt Übungsaufgaben anschließen, an denen die Unterrichtsinhalte vertieft werden können, so werden für reale Unterrichtssituationen weitere variantenreiche Übungsaufgaben zur Vertiefung der Unterrichtsinhalte notwendig sein. Um dem Unterrichtswerk den Entwurfscharakter zu nehmen, ist außerdem eine schülergerechtere graphische Gestaltung mit Fotos und weiteren Abbildungen sowie eine Vereinheitlichung des Layouts notwendig.

11 Geometrie der Ebene

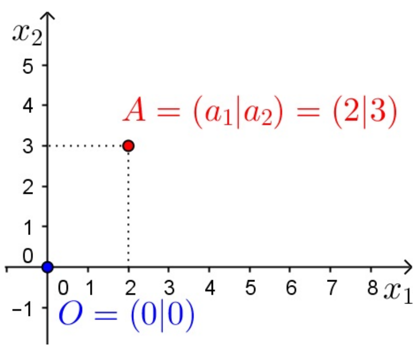
11.1 Affine Geometrie

11.1.1 Rechnen mit Koordinaten

Bestimmen Sie die Koordinaten des 4. Parallelogrammpunktes und der beiden Punkte auf der Geraden.



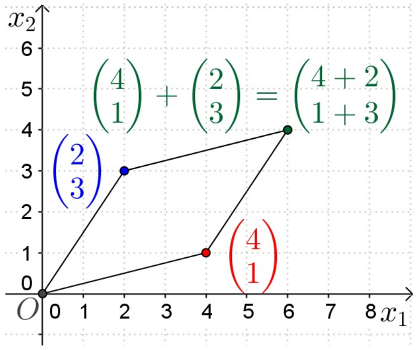
Ein Punkt $A = (a_1|a_2)$ in der Ebene besitzt zwei Koordinaten a_1 und a_2, die die Position des Punktes auf der x_1-Achse und der x_2-Achse angeben. Ein besonderer Punkt ist der *Koordinatenursprung* $(0|0)$, den wir mit dem Buchstaben O bezeichnen. Die Menge aller Punkte $(a_1|a_2)$ bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^2$ *(in Worten: „R zwei“)*.



Wir schreiben die Koordinaten eines Punktes im weiteren Verlauf nicht als Zahlenzeile $(a_1|a_2)$ sondern als Zahlenspalte $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, weil dies bei den folgenden Rechnungen übersichtlicher ist.

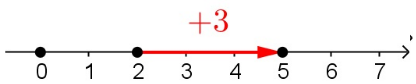
Zwei Punkte werden *addiert*, indem die entsprechenden Koordinaten addiert werden:

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}.$$



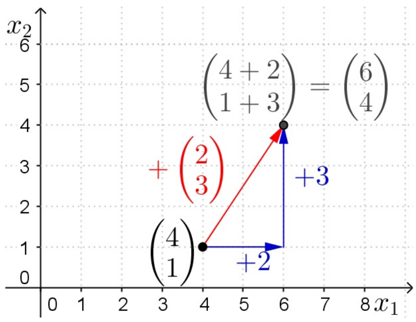
Wir beobachten, dass die Punkte $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ zusammen mit dem Koordinatenursprung ein Parallelogramm bilden.

Die Addition $2+3=5$ können wir uns unter anderem folgendermaßen vorstellen:



Wir gehen auf dem Zahlenstrahl von der 2 um 3 Einheiten nach rechts. Wir kennzeichnen dies durch einen Pfeil.

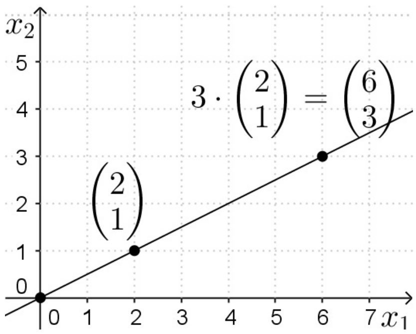
Ebenso können wir uns die Addition $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ folgendermaßen vorstellen:



Wir gehen von Punkt $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ um 2 Einheiten in Richtung der x_1-Achse und um 3 Einheiten in Richtung der x_2-Achse. Diese beiden Schritte schreiben wir platzsparend als $+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ auf und kennzeichnen diese ebenfalls durch einen Pfeil.

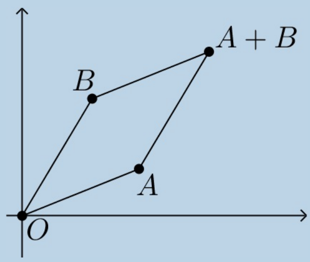
Ein Punkt wird mit einer reellen Zahl *vervielfacht*, indem jede seiner Koordinaten mit der Zahl vervielfacht wird:

$$3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2\\3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}.$$

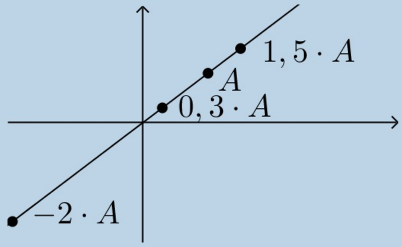


Alle Vielfachen eines Punktes liegen auf der Geraden durch den Koordinatenursprung und den Punkt.

Summe zweier Punkte:
Zwei Punkte $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ werden koordinatenweise *addiert*:
$A+B=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$.
Dadurch entsteht ein Parallelogramm.



Vielfaches eines Punktes:
Ein Punkt $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ wird koordinatenweise mit einer reellen Zahl r *vervielfacht*:
$r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \end{pmatrix}$.
Außerdem definieren wir: $-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$.



Beispiel 1
Finden Sie - falls möglich - eine reelle Zahl r mit $r \cdot \begin{pmatrix} 3r \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$r \cdot \begin{pmatrix} 3r \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Vereinfachung der linken und rechten Seite der Gleichung. $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3r^2 \\ 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

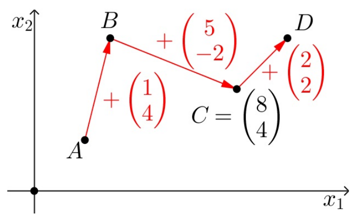
Zwei Punkte sind genau dann gleich, wenn ihre Koordinaten gleich sind. $\Leftrightarrow 3r^2 = 12$ und $2r = -4$

Wir lösen beide Gleichungen. $\Leftrightarrow (r = 2$ oder $r = -2)$ und $r = -2$

Nur eine Lösung erfüllt beide Gleichungen. $\Leftrightarrow r = -2$

Die Gleichung gilt für $r = -2$.

Beispiel 2
Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Punkte.



Lösung:
$D = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

11.1.2 Rechnen mit Punkten

Berechnen Sie $2 \cdot (B + A) - (A + 2 \cdot B)$, wobei $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Jede Rechnung, die wir mit Punkten durchführen und die nur Additionen und Vervielfachungen enthält, lässt sich in zwei Rechnungen zerlegen: eine Rechnung mit der ersten Koordinate und eine Rechnung mit der zweiten Koordinate. Wir können diese Rechnungen getrennt voneinander aufschreiben, einfacher und übersichtlicher ist es jedoch, wenn wir sie in Form von Zahlenpaaren in einem Zug hinschreiben. Deshalb gelten die Rechengesetze der Addition und Vervielfachung der reellen Zahlen auch für das Rechnen mit Punkten.

$$\begin{aligned} & 5 \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ = \; & 5 \cdot \begin{pmatrix} 2+4 \\ 3+1 \end{pmatrix} \\ = \; & \begin{pmatrix} 5 \cdot (2+4) \\ 5 \cdot (3+1) \end{pmatrix} \\ = \; & \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \\ 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = \; & \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rechengesetze für Punkte:
Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ Punkte, $r, s \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt

(1) $A + B = B + A$
(Kommutativgesetz)

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(Assoziativgesetz)

(3) $A + O = A$

(4) $A + (-A) = O$

(5) $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$
(Distributivgesetz I)

(6) $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$
(Distributivgesetz II)

(7) $(rs) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$

(8) $1 \cdot A = A$.

Genauso wie bei der Vervielfachung reeller Zahlen lässt man bei der Vervielfachung von Zahlenpaaren den Malpunkt weg, wenn dabei keine Missverständnisse auftreten. So schreibt man z.B. $3A$ statt $3 \cdot A$.

Beispiel 1
Berechnen Sie $\frac{1}{2} \cdot (4B + 3A) - 3 \cdot (\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B)$ für $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Um vorteilhaft zu rechnen, vereinfachen wir zunächst den Punktterm und setzen erst dann die Punkte ein.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(4B+3A)-3(\frac{1}{2}A+\frac{1}{3}B) &= \frac{1}{2}\cdot 4B+\frac{1}{2}\cdot 3A-3\cdot\frac{1}{2}A+3\cdot\frac{1}{3}B \\ &= 2B+\frac{3}{2}A-\frac{3}{2}A+B \\ &= 3B = 3\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\15\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Beispiel 2
Gegeben sind die Punkte $A=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Prüfen Sie, ob die Gleichung $A+2B=3D-2C$ richtig ist.

Lösung:
Wir berechnen die rechte und die linke Seite separat.

$$A+2B=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} \qquad 3D-2C=3\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

Die Gleichung ist also richtig.

Beispiel 3: Mittelpunkte

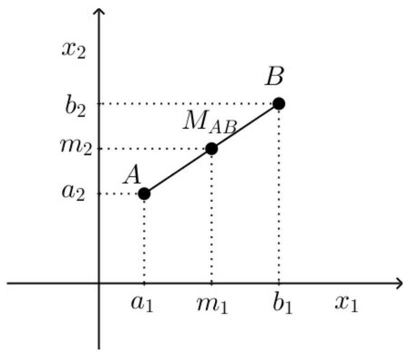
(a) Berechnen Sie den Mittelpunkt M_{AB} der Punkte $A=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

(b) Es sind die Punkte $A=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ und $M=\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$ gegeben. Für welchen Punkt B ist M der Mittelpunkt von A und B?

(c) Berechnen Sie den Spiegelpunkt A' des Punktes $A=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ an $S=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Die 1. und die 2. Koordinate des Mittelpunktes kann an der x_1 und an der x_2-Achse abgelesen werden.



$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \\ m_2 &= \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt setzt sich aus diesen beiden Koordinaten zusammen.

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \\ \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Wir lösen die Gleichung für den Mittelpunkt nach B auf und setzen die gegebenen Punkte ein.

$$\begin{aligned} && M &= \frac{1}{2}(A + B) \\ \Leftrightarrow && 2M &= A + B \\ \Leftrightarrow && B &= 2M - A \\ && &= 2 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Der Punkt S ist der Mittelpunkt von A und A'.

Wir lösen diese Gleichung nach A' auf und setzen die gegebenen Punkte ein.

$$\begin{aligned} && S &= \frac{1}{2}(A + A') \\ \Leftrightarrow && A' &= 2S - A \\ && &= 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 4

Beweisen Sie das Distributivgesetz I.

Lösung:
Das Distributivgesetz für Punkte folgt aus den entsprechenden Rechengesetzen für reelle Zahlen.

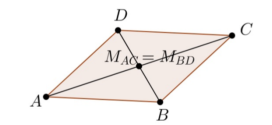
$$\begin{aligned}
r\cdot(A+B) &= r\cdot\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right) \\
&= r\cdot\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix} && \text{(Definition der Addition)} \\
&= \begin{pmatrix}r(a_1+b_1)\\r(a_2+b_2)\end{pmatrix} && \text{(Definition der Vervielfachung)} \\
&= \begin{pmatrix}ra_1+rb_1\\ra_2+rb_2\end{pmatrix} && \text{(Distributivgesetz in } \mathbb{R}) \\
&= \begin{pmatrix}ra_1\\ra_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}rb_1\\rb_2\end{pmatrix} && \text{(Definition der Addition)} \\
&= r\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} && \text{(Definition der Vervielfachung)} \\
&= r\cdot A+r\cdot B.
\end{aligned}$$

Beispiel 5: Parallelogramme
Seien Punkte $A=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ und $C=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ gegeben.

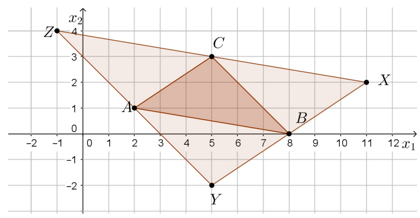
(a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass der Punkt $X=\begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix}$ das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm $ABXC$ ergänzt.

(b) Finden Sie alle Punkte, die das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzen.

Ein Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich die Diagonalen halbieren, wenn also $M_{AC}=M_{BD}$ ist.



Lösung:
(a) Der Mittelpunkt der Strecke AX ist $M_{AX}=\frac{1}{2}(A+X)=\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.
Der Mittelpunkt der Strecke BC ist $M_{BC}=\frac{1}{2}(B+C)=\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.



Die Strecken AX und BC haben einen gemeinsamen Mittelpunkt. Das Viereck ist $ABXC$ ist also ein Parallelogramm.

(b) Die Punkte Y und Z seien die weiteren Punkte, die das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzen.

Das Viereck $AYBC$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn $M_{CY} = M_{AB}$ ist. Wir lösen die Gleichung nach Y auf und setzen die gegebenen Punkte ein.

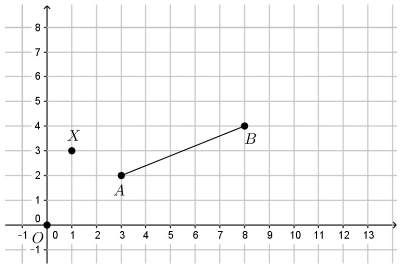
$$\begin{aligned} & M_{CY} = M_{AB} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}(C+Y) = \frac{1}{2}(A+B) \\ \Leftrightarrow\ & C+Y = A+B \\ \Leftrightarrow\ & Y = A+B-C \\ \Leftrightarrow\ & Y = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Genauso erhalten wir $Z = A + C - B = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

Beispiel 6: Verschiebungsregel
Sei die Strecke AB und der Punkt X wie in der Zeichnung gegeben.

(a) Zeichnen Sie die Punkte $A' := A + X$ und $B' := B + X$ ein. Stellen Sie eine Vermutung für das Viereck $ABB'A'$ auf und beweisen Sie diese.

(b) Gilt ihre Vermutung auch für jede andere Wahl von Punkten A, B und X?

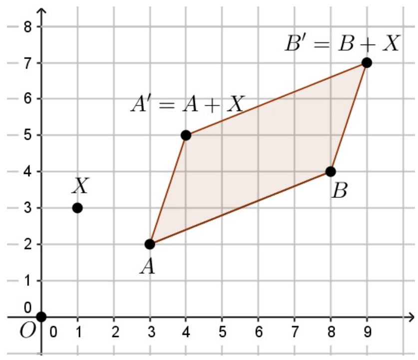


Lösung:
(a) Wir vermuten, dass das Viereck $ABB'A'$ ein Parallelogramm ist.

$M_{AB'} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$

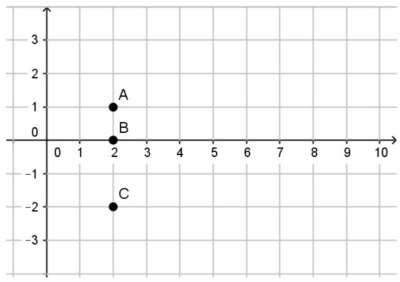
$M_{BA'} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$

Die Mittelpunkte der Diagonalen stimmen überein, also ist das Viereck $ABB'A'$ tatsächlich ein Parallelogramm.



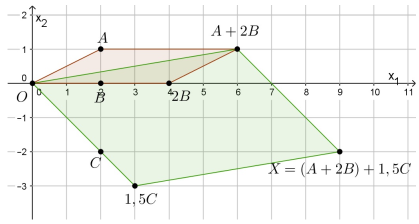
(b) Wir berechnen die Diagonalenmittelpunkte für beliebige Punkte A, B und X.
$M_{AB'} = \frac{1}{2}(A + B') = \frac{1}{2}(A + (B + X))$
$M_{BA'} = \frac{1}{2}(B + A') = \frac{1}{2}(B + (A + X)) = \frac{1}{2}(A + (B + X))$
Die Mittelpunkte der Diagonalen stimmen für jede Wahl von Punkten A, B und X überein, also ist das Viereck $ABB'A'$ immer ein Parallelogramm.

Beispiel 7
Gegeben sind die in der Abbildung dargestellten Punkte A, B und C. Konstruieren Sie zeichnerisch den Punkt $X = A + 2B + 1,5C$. Kontrollieren Sie die Lösung rechnerisch.



Lösung:

$$X = A + 2B + 1,5C$$
$$= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 1,5 \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$$



Beispiel 8: Seitenmittenviereck
Auch die dynamische Geometriesoftware GeoGebra[a] kann mit Punkten rechnen:

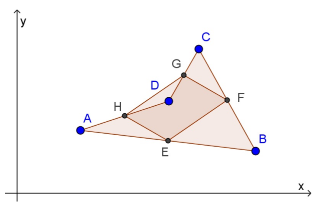
(a) Zeichnen Sie mit GeoGebra irgendein Viereck $ABCD$.
Konstruieren Sie durch Eingabe von $E = 1/2 * (A + B)$, $F = 1/2 * (B + C)$, $G = 1/2 * (C + D)$ und $H = 1/2 * (D + A)$ in der Eingabezeile die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD und DA.

(b) Zeichnen Sie nun das *Seitenmittenviereck* $EFGH$ ein und verschieben Sie die Punkte A, B, C, D des Ausgangsvierecks.
Stellen Sie eine Vermutung über das *Seitenmittenviereck* $EFGH$ auf und beweisen Sie diese.

[a] www.geogebra.org

Lösung:
Vermutung: Das Seitenmittenviereck ist ein Parallelogramm.

Beweis: Wir berechnen die Mittelpunkte der Diagonalen.

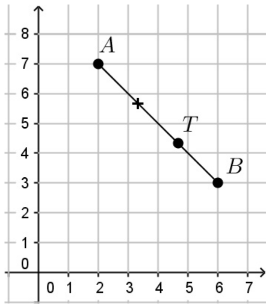


$$\begin{aligned} M_{EG} &= \frac{1}{2}(E+G) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(C+D)) = \frac{1}{4}(A+B+C+D) \\ M_{FH} &= \frac{1}{2}(F+H) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(D+A)) = \frac{1}{4}(A+B+C+D) \end{aligned}$$

Die Mittelpunkte der Diagonalen stimmen für jede Wahl von Punkten A, B, C und D überein, also ist das Seitenmittenviereck stets ein Parallelogramm.

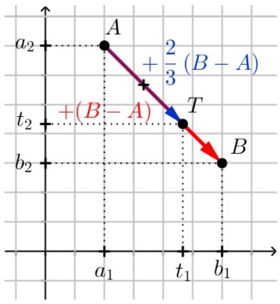
Beispiel 9: 2:1-Teilungspunkte

Gegeben ist die Strecke AB mit den Endpunkten $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Der Punkt T teile die Strecke AB im Verhältnis $2:1$. Bestimmen Sie die Koordinaten von T.



Lösung:

(a) Die 1. und die 2. Koordinate des 2:1-Teilungspunktes kann an der x_1 und der x_2-Achse abgelesen werden.



$$t_1 = a_1 + \frac{2}{3}(b_1 - a_1)$$
$$t_2 = a_2 + \frac{2}{3}(b_2 - a_2)$$

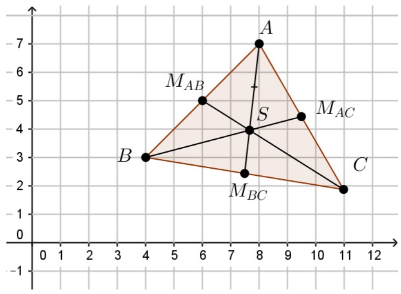
Der 2:1-Teilungspunkt setzt sich aus diesen beiden Koordinaten zusammen.

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = A + \frac{2}{3}(B - A) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

Beispiel 10: Schwerpunkt eines Dreiecks

(a) Berechnen Sie jeweils den 2:1-Teilungspunkt der Seitenhalbierenden AM_{BC}, BM_{AC} und CM_{AB}.

(b) Zeigen Sie mithilfe der Rechenregeln für Punkte, dass in *jedem* Dreieck ABC der 2:1-Teilungspunkt der Seitenhalbierenden AM_{BC}, BM_{AC} und CM_{AB} der Punkt $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$ ist.
Die Seitenhalbierenden schneiden sich also in einem Punkt, dem *Schwerpunkt* des Dreiecks.



Lösung:

(a) Es ist $A = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$, $M_{BC} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ und der 2:1-Teilungspunkt von AM_{BC} ist $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$. Der 2:1-Teilungspunkt von BM_{AC} und von

CM_{AB} ist ebenfalls jeweils der Punkt $\begin{pmatrix} \frac{23}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$.

(b) Der 2:1-Teilungspunkt der Seitenhalbierenden AM_{BC} ist

$$\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}M_{BC} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Der 2:1-Teilungspunkt der Seitenhalbierenden BM_{AC} ist

$$\frac{1}{3}B + \frac{2}{3}M_{AC} = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Der 2:1-Teilungspunkt der Seitenhalbierenden CM_{AB} ist

$$\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}M_{AB} = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Die Seitenhalbierenden besitzen also den gemeinsamen Punkt $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$.

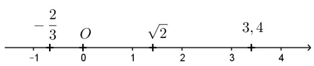
Exkurs: Zahlenpaare in neuem Gewand

Ein Müslihersteller plant seinen Absatz für das kommende Jahr. Dabei geht er für 8 Monate des Jahres von folgenden Liefereinheiten aus:

- *Müsli pur*: 270 Liefereinheiten pro Monat
- *Früchtemüsli*: 178 Liefereinheiten pro Monat

Für drei Sommermonate rechnet er erfahrungsgemäß mit um 20% geringeren Lieferzahlen wegen erhöhter Urlaubsreisen in dieser Zeit. Im Januar hofft der Hersteller jedoch auf eine Steigerung um 12% wegen der guten Vorsätze der Käufer für das neue Jahr.
Bestimmen Sie die für das Jahr geplante Liefermenge der einzelnen Müslisorten.

Die reelle Zahl 270 können wir wie jede reelle Zahl als Punkt auf dem Zahlenstrahl darstellen.



Die reelle Zahl 270 kann jedoch auch verwendet werden, um beispielsweise die monatlichen Liefereinheiten der Sorte *Müsli pur* anzugeben.

Genauso können wir das Zahlenpaar $A = \begin{pmatrix} 270 \\ 178 \end{pmatrix}$ nicht nur als Punkt in der Ebene interpretieren. Es kann auch den monatlichen Absatz des Müslierstellers für beide Müslisorten beschreiben.
Mit der Addition und Vervielfachung von Zahlenpaaren können wir nun die geplanten Liefermengen für beide Müslisorten gleichzeitig durchführen. Auch hier gilt wieder: Wir vereinfachen den Term zunächst, bevor wir A einsetzen.

$$\begin{aligned}
8 \cdot A + 3 \cdot (0,8 \cdot A) + 1.12 \cdot A &= 8 \cdot A + 2,4 \cdot A + 1.12 \cdot A \\
&= 11,52 \cdot A \\
&= 11,52 \cdot \begin{pmatrix} 270 \\ 178 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11,52 \cdot 270 \\ 11,52 \cdot 178 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3110,4 \\ 2050,56 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Müslihersteller plant also $3110,4$ Liefereinheiten der Sorte Müsli pur und $2050,56$ Liefereinheiten Früchtemüsli.

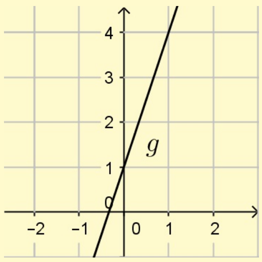
11.1.3 Geraden

Der Graph der Funktion $g(x) = 3x + 1$ ist eine Gerade.

(a) Geben Sie drei Punkte an, die auf dieser Geraden liegen.

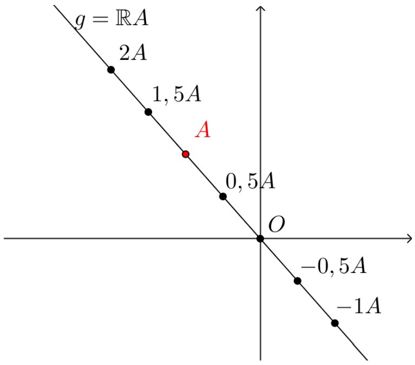
(b) Entwickeln Sie eine Berechnungsvorschrift, mit der man weitere derartige Punkte generieren kann.

(c) Gibt es noch weitere Berechnungsvorschriften?



Die Gerade g_O durch den Koordinatenursprung O und einen Punkt $A \neq O$ besteht aus allen Vielfachen von A. Wir bezeichnen diese Menge aller Vielfachen des Punktes A mit $\mathbb{R}A$. Ein Punkt X ist ein Vielfaches von A, wenn man ihn in der Form $X = rA$ mit $r \in \mathbb{R}$ schreiben kann. Es ist also

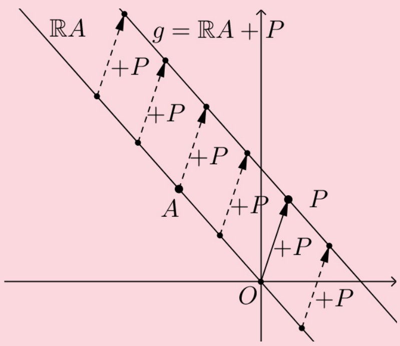
$$\begin{aligned} g_O &= \mathbb{R}A \\ &= \{X \mid \text{es existiert eine reelle Zahl } r, \\ &\qquad \text{so dass } X = rA \text{ ist}\} \\ &= \{rA \mid r \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$



Parameterdarstellung von Geraden

Wir erhalten die Gerade g, die parallel zur Ursprungsgeraden $g_O = \mathbb{R}A$ ist und durch den Punkt P verläuft, indem wir jeden Punkt von g_O parallel zur gerichteten Strecke OP verschieben. Wir müssen also zu jedem Punkt der Geraden g_O den Punkt P addieren. Es ist also

$$\begin{aligned} g &= \mathbb{R}A + P \\ &= \{X \mid \text{es existiert eine reelle Zahl } r, \\ &\qquad \text{so dass } X = rA + P \text{ ist}\} \\ &= \{rA + P \mid r \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

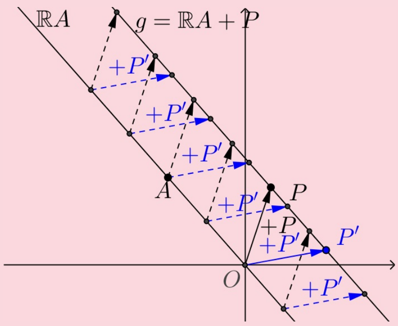


Diese Darstellung heißt *Parameterdarstellung* der Geraden g. Der Parameter, der sämtliche reelle Zahlen durchläuft, kann beliebig benannt werden. Wir verwenden meistens die Buchstaben r oder s.

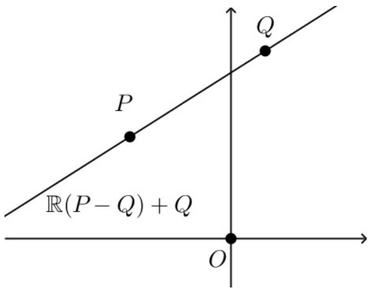
Ist P' ein weiterer Punkt auf der Geraden g, so erhalten wir ebenfalls die Gerade g, wenn wir jeden Punkt auf der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ parallel zur gerichteten Strecke OP' verschieben, zu jedem Punkt der Geraden $\mathbb{R}A$ also den Punkt P' addieren. Die Darstellung der Geraden g ist also nicht eindeutig.

Uneindeutigkeit der Geradendarstellung
Ist P' ein beliebiger Punkt auf der Geraden $g = \mathbb{R}A + P$, so ist

$$g = \mathbb{R}A + P' = \mathbb{R}A + P.$$



Häufig ist eine Gerade durch zwei Punkte P und Q gegeben. Die Gerade $\mathbb{R}(P-Q)+Q$ enthält sowohl den Punkt P als auch den Punkt Q, da sowohl $P = 1 \cdot (P-Q)+Q$ als auch $Q = 0 \cdot (P-Q)+Q$ von der Form $r \cdot (P-Q)+Q$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist, und ist damit die Gerade durch die Punkte P und Q.



Gerade durch zwei Punkte
Die Gerade $g(P,Q)$ durch die verschiedenen Punkte P und Q ist gegeben durch

$$\begin{aligned} g(P,Q) &= \mathbb{R}(P-Q)+Q \\ &= \{X \mid \text{ es existiert eine reelle Zahl } r \text{ so dass } X = r(P-Q)+Q\}. \end{aligned}$$

Wir können die Punkte P und Q beliebig vertauschen:

$$g(P,Q) = \mathbb{R}(P-Q)+Q = \mathbb{R}(P-Q)+P = \mathbb{R}(Q-P)+Q = \mathbb{R}(Q-P)+P.$$

Beispiel 1: Punktprobe
Sei $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie vier verschiedene Punkte an, die auf der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ liegen.

(b) Untersuchen Sie, ob die Punkte $X = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf der Geraden $\mathbb{R}A$ liegen.

Lösung:
(a) Auf der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ liegen alle Vielfachen von A, zum Beispiel

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Punkt X liegt genau dann auf der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$, wenn er von der Form $X = rA$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist.		$X = rA$
Wir setzen die Punkte X und A ein.	$\Leftrightarrow$	$\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
Zwei Punkte sind genau dann gleich, wenn ihre Koordinaten gleich sind	$\Leftrightarrow$	$3r = -4$ und $-2r = \frac{8}{3}$
Beide Gleichungen haben die gleiche Lösung.	$\Leftrightarrow$	$r = -\frac{4}{3}$

Also ist $X = -\frac{4}{3}A$ und damit ist $X \in \mathbb{R}A$.

Der Punkt Y liegt genau dann auf der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$, wenn er von der Form $Y = rA$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist.		$Y = rA$
Wir setzen die Punkte Y und A ein.	$\Leftrightarrow$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
Zwei Punkte sind genau dann gleich, wenn ihre Koordinaten gleich sind	$\Leftrightarrow$	$3r = 2$ und $-2r = -1$
Beide Gleichungen haben verschiedene Lösungen.	$\Leftrightarrow$	$r = \frac{2}{3}$ und $r = \frac{1}{2}$

Die letzte Aussage ist nicht erfüllbar, also ist $Y \notin \mathbb{R}A$.

Beispiel 2: Gleichheit von Ursprungsgeraden
Untersuchen Sie, ob $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$ ist.

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung:
Die Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}A'$ sind genau dann gleich, wenn A auf der Geraden $\mathbb{R}A'$ liegt, wenn also A ein Vielfaches von A' ist.

(a) Es ist $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$, also ist $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$.

(b) Es ist $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$ genau dann, wenn A ein Vielfaches von A' ist. $\quad A = rA'$

Wir setzen die Punkte A und A' ein. $\quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

Wir lösen das Gleichungssystem. $\quad \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$ und $r = \frac{4}{9}$
Die letzte Aussage ist nicht erfüllbar.
Deshalb ist $\mathbb{R}A \neq \mathbb{R}A'$.

(c) Es ist $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$ genau dann, wenn A ein Vielfaches von A' ist. $\quad A = rA'$

Wir setzen die Punkte A und A' ein. $\quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Wir lösen das Gleichungssystem. $\quad \Leftrightarrow r = -\frac{1}{6}$
Es ist $A = -\frac{1}{6}A'$ und damit $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$.

Beispiel 3
Sei $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 + x \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie x, so dass $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$ ist.

Lösung:

Es ist $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$ genau dann, wenn A ein Vielfaches von A' ist. $\quad A = rA'$

Wir setzen die Punkte A und A' ein. $\quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4+x \end{pmatrix}$

Wir erhalten ein Gleichungssystem mit zwei Variablen und zwei Gleichungen. $\quad \Leftrightarrow -3 = 6r$ und $5 = r(4+x)$

Wir lösen das Gleichungssystem. $\quad \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$ und $x = -14$

Es ist $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$ genau dann, wenn $x = -14$ ist.

Beispiel 4: Punktprobe

Gegeben ist die Gerade $g = \mathbb{R}A + P$ mit $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie drei verschiedene Punkte an, die auf der Geraden g liegen.

(b) Untersuchen Sie, ob die Punkte $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf der Geraden g liegen.

Lösung:

(a) Wenn wir für den Parameter r beispielsweise die Zahlen 0, 1 und -2 einsetzen, erhalten wir die Punkte

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Punkt X liegt genau dann auf der Geraden g, wenn er von der Form $X = rA + P$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist. $\quad X = rA + P$

Wir setzen die Punkte X, A und P ein, $\quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

vereinfachen den Punktterm, $\quad \Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

und lösen das Gleichungssystem. $\quad \Leftrightarrow r = -2$

Es ist $X = -2 \cdot A + P$ und damit ist $X \in \mathbb{R}A + P$.

Der Punkt Y liegt auf der Geraden g, wenn er von der Form $Y = rA + P$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist.	$Y = rA + P$
Wir setzen die Punkte Y, A und P ein,	$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
vereinfachen den Punktterm,	$\Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$
und lösen das Gleichungssystem.	$\Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$ und $r = 2$.

Die letzte Aussage ist nicht erfüllbar. Also ist $Y \notin \mathbb{R}A + P$.

Beispiel 5
Untersuchen Sie, ob $g = g'$ ist.

(a) $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, g' = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}, g' = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:
(a) Die Geraden g und g' sind durch Verschiebung der gleichen Ursprungsgeraden entstanden. Um zu überprüfen, ob die Geraden gleich sind, müssen wir überprüfen, ob der Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ auf der Geraden $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt. Der Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ liegt auf der Geraden g, wenn er von der Form $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist. Dieses Gleichungssystem ist äquivalent zu $r = -2$ und $r = -1$. Da diese Aussage nicht erfüllbar ist, ist $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit ist $g \neq g'$.

(b) Die Geraden g und g' sind durch Verschiebung der gleichen Ursprungsgeraden entstanden. Um zu überprüfen, ob die Geraden gleich sind, müssen wir überprüfen, ob der Punkt $\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf der Geraden $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ liegt. Der Punkt $\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt auf der Geraden g, wenn er von der Form $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ ist. Dieses Gleichungssystem ist äquivalent zu $r = -2$, besitzt also eine Lösung. Es ist $\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, der Punkt $\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt also auf der Geraden $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. Deshalb ist $g = g'$.

Beispiel 6
Geben Sie eine Parameterdarstellung der Parallelen zur x_2-Achse durch den Punkt $\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$ an.

Lösung:
Die x_2-Achse ist die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Eine Parametergleichung der Parallelen zur x_2-Achse durch den Punkt $\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$ ist also $\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$.

Beispiel 7
Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden $g(P,Q)$ durch P und Q an, wobei

$$P=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \text{ und } Q=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$g(P,Q)=\mathbb{R}(P-Q)+Q=\mathbb{R}\left(\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

Beispiel 8
Untersuchen Sie, ob der Punkt X auf der Geraden $g(P,Q)$ liegt.

(a) $P=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ (b) $P=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$

Lösung:
(a) Der Punkt X liegt genau dann auf der Geraden $g(P,Q)$, wenn $X=r\cdot(P-Q)+Q$ ist für ein $r\in\mathbb{R}$. Wir setzen die Punkte P, Q und X ein und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow\quad & r=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Also ist $X=\frac{1}{2}\cdot(P-Q)+Q$ und damit ist $X\in g(P,Q)$.

(b) Der Punkt X liegt genau dann auf der Geraden $g(P,Q)$, wenn $X=r\cdot(P-Q)+Q$ ist für ein $r\in\mathbb{R}$. Wir setzen die Punkte P, Q und X ein und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow\quad & r=-1 \text{ und } r=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist nicht erfüllbar. Also ist $X\notin g(P,Q)$.

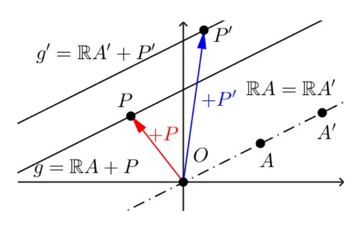
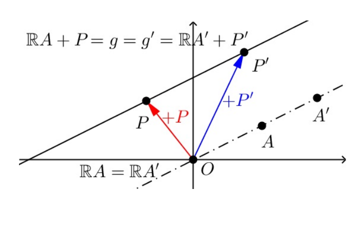
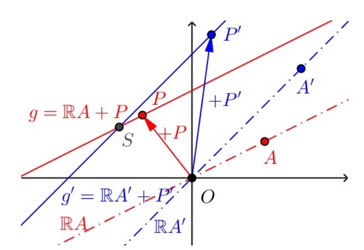
11.1.4 Lagebeziehungen von Geraden

Lene meint: „*Die Geraden* $g = \mathbb{R}A + P$ *und* $g' = \mathbb{R}A' + P'$ *mit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad A' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, P' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind parallel zueinander.“ Paul antwortet: „*Die Geraden sind sogar gleich!*“
Max sagt: „*Die Geraden haben mehr als einen gemeinsamen Punkt.*“

Wir können die gegenseitige Lage zweier Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ und $g' = \mathbb{R}A' + P'$ durch Bestimmung der Anzahl gemeinsamer Punkte und durch die Betrachtung der dazugehörigen Ursprungsgeraden untersuchen. Ein Punkt X ist ein gemeinsamer Punkt von g und g', wenn er sowohl auf der Geraden g als auch auf der Geraden g' liegt, wenn es also reelle Zahlen r und s mit $rA+P = X = sA'+P'$ gibt. Die Anzahl gemeinsamer Punkte ist also gleich der Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems $rA + P = sA' + P'$.
Die Geraden sind parallel zueinander, wenn sie aus der gleichen Ursprungsgeraden durch Verschiebung hervorgegangen sind, wenn also $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$ ist.

parallel und verschieden $g \parallel g', g \neq g'$	**parallel und gleich** $g \parallel g', g = g'$	**in einem Punkt schneidend**
		
g und g' haben **keinen gemeinsamen Punkt**: Das Gleichungssystem $rA + P = sA' + P'$ besitzt keine Lösung	g und g' haben **mehr als einen gemeinsamen Punkt**: Das Gleichungssystem $rA + P = sA' + P'$ besitzt mehr als eine Lösung	g und g' haben **genau einen gemeinsamen Punkt** S, den *Schnittpunkt*: Das Gleichungssystem $rA + P = sA' + P'$ besitzt genau eine Lösung
• $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$: es gibt ein r mit $A = rA'$ • P' liegt nicht auf g	• $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A'$: es gibt ein r mit $A = rA'$ • P' liegt auf g	• $\mathbb{R}A \neq \mathbb{R}A'$: es gibt **kein** r mit $A = rA'$

Beispiel 1
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und g' mithilfe der Anzahl gemeinsamer Punkte.

(a) $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ und $g' = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$.

(b) $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ und $g' = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.

(c) $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ und $g' = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

Lösung:
(a) Die Anzahl gemeinsamer Punkte ist gleich der Anzahl der Lösungspaare (r, s) des nebenstehenden Gleichungssystems. Wir lösen dieses Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen.

$$\begin{aligned}
& r\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\ & r\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} - s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix}5r & -2s & = & -1\\ 2r & +1s & = & -4\end{bmatrix}\\
\Leftrightarrow\ & r = -1 \text{ und } s = -2
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem $r\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ besitzt also nur ein Lösungspaar, nämlich $r = -1$ und $s = -2$. Die Geraden g und g' schneiden sich also in einem Punkt S. Wir erhalten die Koordinaten von S, indem wir r bzw. s einsetzen:

$$S = -1\cdot\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}.$$

(b) Die Anzahl gemeinsamer Punkte ist gleich der Anzahl der Lösungspaare (r, s) des nebenstehenden Gleichungssystems. Wir lösen dieses Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen.

$$\begin{aligned}
& r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\ & r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} - s\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix}3r & +6s & = & 3\\ -1r & -2s & = & 1\end{bmatrix}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix}3r & +6s & = & 3\\ & 0 & = & 6\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist nicht erfüllbar, also besitzt das Gleichungssystem keine Lösung. Die Geraden g und g' besitzen also keine gemeinsamen Punkte und sind damit parallel, aber nicht gleich.

(c) Die Anzahl gemeinsamer Punkte ist gleich der Anzahl der Lösungspaare (r, s) des nebenstehenden Gleichungssystems. Wir lösen dieses Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen.

$$\begin{aligned}
& r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} 3r & +1s & = & 6 \\ 2r & +\frac{2}{3}s & = & 4 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & s = 6 - 3r
\end{aligned}$$

Es gibt unendlich viele Paare reeller Zahlen (r, s), die die Gleichung $s = 6 - 3r$ erfüllen. Die Geraden g und g' besitzen also mehr als einen gemeinsamen Punkt. Damit ist $g = g'$.

Beispiel 2
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und g' aus Beispiel 1 mithilfe der dazugehörigen Ursprungsgeraden.

Lösung:
(a) Wir überprüfen zunächst, ob g parallel zu g' ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & r = \frac{2}{5} \text{ und } r = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist nicht erfüllbar. Also ist $g \nparallel g'$, die Geraden g und g' schneiden sich in genau einem Punkt.

(b) Es ist $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, also ist g parallel zu g'.

Um herauszufinden, ob $g = g'$ ist, müssen wir überprüfen, ob der Punkt $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf der Geraden $g = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & r = 1 \text{ und } r = -1
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist nicht erfüllbar, also ist $g \neq g'$. Die Geraden g und g' sind parallel zueinander, aber nicht gleich.

(c) Es ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, also ist g parallel zu g'.

Um herauszufinden, ob $g = g'$ ist, müssen wir überprüfen, ob der Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf der Geraden $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegt.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & r = 2
\end{aligned}$$

Also ist
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = g,$$
und damit ist $g = g'$.

Beispiel 3
Sei $ABCD$ ein Viereck und es gelte $A - B = D - C$.
Zeigen Sie, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Lösung:
Da $A - B = D - C$ ist, ist $\mathbb{R}(A - B) = \mathbb{R}(D - C)$. Also sind die Geraden

$$g(A, B) = \mathbb{R}(A - B) + B \text{ und } g(D, C) = \mathbb{R}(D - C) + C$$

parallel zueinander.

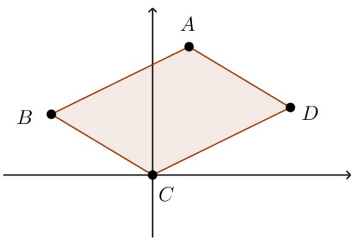
Da $A - B = D - C$ ist, ist auch $A - D = B - C$ und damit $\mathbb{R} \cdot (A - D) = \mathbb{R} \cdot (B - C)$. Also sind die Geraden

$$g(A, D) = \mathbb{R}(A - D) + D \text{ und } g(B, C) = \mathbb{R}(B - C) + C$$

parallel zueinander.

Das Viereck $ABCD$ ist folglich ein Parallelogramm.

Beispiel 4
Sei $ABCD$ ein Parallelogramm.
Zeigen Sie, dass dann $A - B = D - C$ ist.



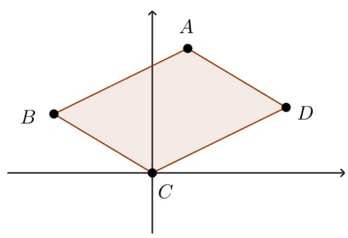
Lösung:
Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $C = O$ ist.

Erläuterung:	*Beweistext:*
	Voraussetzung:
Da das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, ist $g(A,B) \parallel g(D,C)$, also $\mathbb{R}(A-B) = \mathbb{R}(D-C)$. Wir setzen $C = 0$ ein.	$(I) \quad A - B = r \cdot (D - C) = r \cdot D$
Da das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, ist $g(B,C) \parallel g(A,D)$, also $\mathbb{R}(A-D) = \mathbb{R}(B-C)$. Wir setzen $C = 0$ ein.	$(II) \quad A - D = s \cdot (B - C) = s \cdot B$
	zu zeigen:
Wir müssen nun unter Zuhilfenahme dieser Voraussetzung zeigen, dass $A - B = D - C$ ist.	$A - B = D - C$
	Rechung:
Wir subtrahieren $(I) - (II)$ und formen um.	$D - B = r \cdot D - s \cdot B$ $\Rightarrow \quad (1-r) \cdot D = (1-s) \cdot B$
Der Punkt $(1-r) \cdot D$ liegt also sowohl auf der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}D$ als auch auf der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}B$ und muss deshalb gleich O sein.	$\Rightarrow \quad (1-r) \cdot D = O$
Da D ungleich O ist, muss der Vorfaktor gleich 0 sein.	$\Rightarrow \quad 1 - r = 0,\ r = 1$
Durch Einsetzen von $r = 1$ in Gleichung (I) erhalten wir die Behauptung.	$\Rightarrow \quad A - B = D - C$

Übungen

1. Sei $ABCD$ ein Viereck, bei dem sich die Diagonalen halbieren, bei dem also $M_{AC} = M_{AB}$ ist. Zeigen Sie wie in Beispiel 3, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

2. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm.
   Zeigen Sie wie in Beispiel 4, dass sich die Diagonalen halbieren, dass also $M_{AC} = M_{AB}$ ist.



11.1.5 Koordiatendarstellung von Geraden

Stellen die Punktmengen $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $\{X \mid 2x_1 - x_2 = 4\}$ die gleiche Gerade dar?

Die Lösungsmenge der Gleichung $ax_1 + bx_2 = c$ ist eine Gerade in der Ebene, sofern eine der beiden Zahlen a oder b ungleich 0 ist. Diese Darstellung einer Geraden nennt man *parameterfreie Darstellung* oder auch *Koordinatendarstellung*. Wir haben damit die beiden folgenden Darstellungsformen für Geraden in der Ebene.

Parameterdarstellung

Sind $A, P \in \mathbb{R}^2$ Punkte, $A \neq O$, so heißt

$$\begin{aligned} g &= \mathbb{R}A + P \\ &= \{X \mid \text{es existiert eine Zahl } r, \\ &\qquad \text{so dass } X = rA + P \text{ ist}\} \end{aligned}$$

Parameterdarstellung der Geraden g.

Koordinatendarstellung

Sind a, b, c reelle Zahlen, $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, so heißt

$$g = \{X \mid ax_1 + bx_2 = c\}$$

Koordinatendarstellung der Geraden g.

Bei der Parameterdarstellung können wir durch Einsetzen verschiedener Werte für den Parameter, den wir üblicherweise mit den Buchstaben r, s oder t bezeichnen, unmittelbar Punkte angeben, die auf der Geraden liegen. Diese Darstellungsform für Punktmengen heißt auch *explizite Darstellung*.

Bei der Koordinatendarstellung können wir nicht unmittelbar Punkte angeben, die auf der Geraden liegen, denn die Punkte der Geraden sind durch die Bedingung $ax_1 + bx_2 = c$ *implizit* definiert. Dafür gestattet es diese implizite Darstellung, sofort zu überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt.

Beispiel 1: Von der Parameterdarstellung zur Koordinatendarstellung

Stellen Sie die Gerade $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ in Koordinatendarstellung dar.

Lösung:

Ist $X \in g$, so ist $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, also $x_1 = 2r + 1$ und $x_2 = 3r + 4$.
Wir eliminieren den Parameter r: $3x_1 - 2x_2 = 3(2r+1) - 2(3r+4) = 3 - 6 = -3$.
Also ist $g = \{X \mid 3x_1 - 2x_2 = -3\}$.

Beispiel 2: Von der Koordinatendarstellung zur Parameterdarstellung

Stellen Sie die Gerade $g = \{X \mid 3x_1 - 9x_2 = -6\}$ in Parameterdarstellung dar.

Lösung:
Ist $X \in g$, so ist $3x_1 - 9x_2 = -6$. Wir lösen dies nach $x_1 = 3x_2 - 2$ auf und erhalten $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also ist $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

> **Beispiel 3: Punktprobe**
> Liegt der Punkt $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf der Geraden $g = \{X \mid -2x_1 + 3x_2 = -3\}$?

Lösung:
Ist $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ist $x_1 = 3$ und $x_2 = 1$, also ist $-2x_1 + 3x_2 = -2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = -3$.
Der Punkt X liegt auf der Geraden g.

> **Beispiel 4: Schnittpunktberechnungen**
> Berechnen sie den Schnittpunkt der Geraden g und g'.
>
> (a) $g = \{X \mid 2x_1 - 3x_2 = 4\}$, $g' = \{X \mid 5x_1 + 3x_2 = 2\}$
>
> (b) $g = \{X \mid 3x_1 - 5x_2 = 1\}$, $g' = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:
Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

(a)

$$X \in g \text{ und } X \in g'$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 & -3x_2 & = & 4 \\ 5x_1 & +3x_2 & = & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{6}{7} \text{ und } x_2 = \frac{23}{7}$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{23}{7} \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt ist $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{23}{7} \end{pmatrix}$.

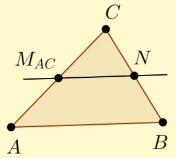
(b)

$$X \in g \text{ und } X \in g'$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } 3x_1 - 5x_2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } 3(-r+4) - 5(2r+3) = 1$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } r = -\frac{4}{13}$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{56}{13} \\ \frac{31}{13} \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt ist $\begin{pmatrix} \frac{56}{13} \\ \frac{31}{13} \end{pmatrix}$.

11.1.6 Aufgaben zur affinen Geometrie

Satz von der Mittelparallele im Dreieck
Sei ABC ein echtes Dreieck, M_{AC} der Mittelpunkt von AC und $N \in g(B, C)$. Die Gerade $g(M_{AC}, N)$ ist genau dann parallel zu $g(A, B)$, wenn N der Mittelpunkt der Strecke BC ist.



Ein Dreieck ABC heißt *echt*, wenn die Eckpunkte A, B, C nicht alle auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Wir können mithilfe der Rechenregeln für Punkte geometrische Sätze beweisen. Dazu müssen wir geometrische Aussagen in algebraische Gleichungen übersetzen. Dieses Zusammenwirken von Geometrie und Algebra zeigen wir am Beispiel des Satzes über die Mittelparallele im Dreieck aus der Einstiegsaufgabe.

Die Aussage des Satzes ist eine *genau-dann-wenn*-Aussage. Um diese Aussage zu beweisen, zerlegen wir die Aussage in zwei Teilaussagen.

„ $\Rightarrow$ “ *Wenn* $g(M_{AC}, N)$ parallel zu $g(A, B)$ ist, *dann* ist N der Mittelpunkt der Strecke BC.

„ $\Leftarrow$ “ *Wenn* N der Mittelpunkt der Strecke BC ist, *dann* ist $g(M_{AC}, N)$ parallel zu $g(A, B)$.

Wir beginnen mit dem Beweis der zweiten Teilaussage „ $\Leftarrow$ “.

Erläuterung:

Beweistext:

Wir setzen voraus, dass N der Mittelpunkt von BC ist.

Voraussetzung:
$N = \frac{1}{2}(B + C)$

Wir müssen nun unter Zuhilfenahme dieser Voraussetzung zeigen, dass $g(A, B) = \mathbb{R}(A - B) + B$ parallel zu $g(M_{AC}, N) = \mathbb{R}(M_{AC} - N) + N$ ist, dass diese beiden Geraden also aus der gleichen Ursprungsgeraden durch Verschiebung hervorgegangen sind.

zu zeigen:
$\mathbb{R}(M_{AC} - N) = \mathbb{R}(A - B)$

Um dies zu zeigen, berechnen wir $M_{AC} - N$ und setzen die Voraussetzung $N = \frac{1}{2}(B + C)$ ein.

Rechnung:

$$\begin{aligned} M_{AC} - N &= \tfrac{1}{2}(A + C) - \tfrac{1}{2}(B + C) \\ &= \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}B \\ &= \tfrac{1}{2}(A - B) \end{aligned}$$

Weil $M_{AC} - N$ ein Vielfaches von $A - B$ ist, ist $\mathbb{R}(M_{AC} - N) = \mathbb{R}(A - B)$

$\Rightarrow \mathbb{R}(M_{AC} - N) = \mathbb{R}(A - B)$

Die Geraden $g(A, B)$ und $g(M_{AC}, N)$ sind also parallel zueinander.

$\Rightarrow g(A, B) \parallel g(M_{AC}, N)$

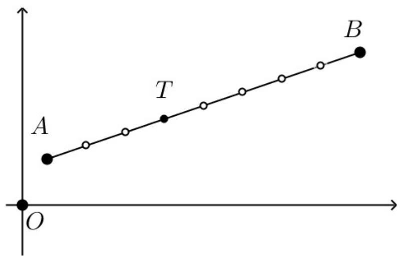
Nun folgt der Beweis der ersten Teilaussage „ $\Rightarrow$ “. Wir können das Koordinatensystem beliebig legen. Um die Rechnungen zu vereinfachen, legen wir das Koordinatensystem so, dass $C = O$ ist.

Erläuterung:	*Beweistext:*
Wir setzen voraus, dass $g(A,B) = \mathbb{R}(A-B)+B$ parallel zu $g(M_{AC},N) = \mathbb{R}(M_{AC}-N)+N$ ist, dass diese beiden Geraden also aus derselben Ursprungsgeraden durch Verschiebung hervorgegangen sind.	*Voraussetzung:* $\mathbb{R}(M_{AC} - N) = \mathbb{R}(A-B)$, also $g(M_{AC},N) = \mathbb{R}(A-B)+M_{AC}$
Wir müssen unter Zuhilfenahme dieser Voraussetzung zeigen, dass N der Mittelpunkt von BC ist.	*zu zeigen:* $N = \frac{1}{2}(B+C)$
N liegt auf der Geraden $g(M_{AC},N)$. Nach Voraussetzung ist $g(M_{AC},N) = \mathbb{R}(A-B)+M_{AC}$ Wir setzen $C = O$ ein.	*Rechnung:* $N = r(A-B)+M_{AC} = r(A-B)+\frac{1}{2}(A+C) = (r+\frac{1}{2})A - rB$
N liegt auf der Geraden $g(B,C) = \mathbb{R}(B-C)+B$. Wir setzen $C = O$ ein.	$N = s(B-C)+B = sB+B$
Gleichsetzen	$(r+\frac{1}{2})A - rB = sB+B$ $\Rightarrow (r+\frac{1}{2})A = (1+r+s)B$
$(r+\frac{1}{2})A$ ist also ein gemeinsamer Punkt der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$. Weil das Dreieck ABC echt ist, haben die Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ nur einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Koordinatenursprung O.	$\Rightarrow (r+\frac{1}{2})A = O$
Weil $A \neq O$ ist, muss der Vorfaktor $r+\frac{1}{2}$ gleich 0 sein.	$\Rightarrow r+\frac{1}{2} = 0$
Wir lösen dies nach r auf.	$\Rightarrow r = -\frac{1}{2}$
Nun können wir r einsetzen und damit N berechnen.	$N = r(A-B)+M_{AC} = -\frac{1}{2}(A-B)+\frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(B+C) = M_{BC}$ N ist also der Mittelpunkt der Strecke BC.

Beispiel 1: Teilungspunkte

(a) Der Punkt T teile die Strecke AB im Verhältnis 3:5. Entwickeln Sie eine Formel, mit der man die Koordinaten von T berechnen kann.

(b) Ein Punkt T teile eine Strecke AB im Verhältnis $p{:}q$. Entwickeln Sie eine Formel, mit der man die Koordinaten von T berechnen kann.



Lösung:

(a) Die Strecke AB ist in $3+5=8$ Teile unterteilt. Es ist $B = A + (B-A)$ und

$$\begin{aligned} T &= A + \frac{3}{8}(B-A) \\ &= \frac{5}{8}A + \frac{3}{8}B. \end{aligned}$$

(b) Die Strecke AB ist in $p+q$ Teile unterteilt. Es ist $B = A + (B-A)$ und

$$\begin{aligned} T &= A + \frac{p}{p+q}(B-A) \\ &= \frac{q}{p+q}A + \frac{p}{p+q}B. \end{aligned}$$

Beispiel 2

In welchem Verhältnis teilt der Punkt T die Strecke AB, wenn

$$A = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ und } T = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ ist?}$$

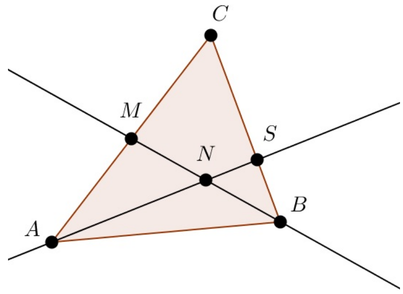
Lösung:

Es sind äquivalent:

$$\begin{aligned} & T = A + t(B-A) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = t\left(\begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & t = \frac{2}{5} = \frac{2}{2+3}. \end{aligned}$$

Der Punkt T teilt die Strecke AB folglich im Verhältnis $2:3$.

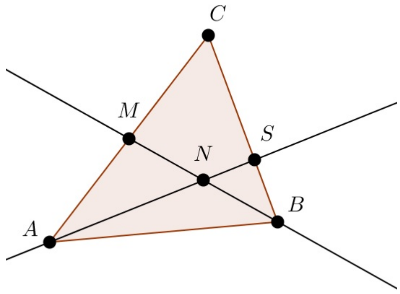
Beispiel 3
Sei ABC ein echtes Dreieck, M der Mittelpunkt von CA und N der Mittelpunkt von BM.
Sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierendenlinie $g(A, N)$ des Dreiecks ABM mit der Seitenlinie $g(B, C)$.
Zeigen Sie, dass S der 2:1-Teilungspunkt von CB ist.



Lösung:
Wir legen das Koordinatensystem so, dass $C = O$ ist.

Erläuterung:	*Beweistext:*
	Voraussetzungen:
M ist der Mittelpunkt von CA. Wir setzten $C = O$ ein.	$M = \frac{1}{2}(C + A) = \frac{1}{2}A$
N ist der Mittelpunkt von BM. Wir setzen $M = \frac{1}{2}A$ ein.	$N = \frac{1}{2}(B + M) = \frac{1}{2}(B + \frac{1}{2}A) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}A$
S liegt auf $g(A, N)$. Wir setzen N ein.	$S = t(N - A) + A = t((\frac{1}{2}B + \frac{1}{4}A) - A) + A = \frac{t}{2}B + (1 - \frac{3}{4}t)A$
S liegt auf $g(B, C)$. Einsetzen von $C = O$.	$S = r(B - C) + C = rB$
	zu zeigen:
Wir müssen zeigen, dass S der 2:1-Teilungspunkt von CB ist.	$S = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}B$
	Rechnung:
Wir setzen die beiden Terme für S aus der Voraussetzung gleich.	$\frac{t}{2}B + (1 - \frac{3}{4}t)A = rB$ $\Rightarrow (1 - \frac{3}{4}t)A = (r - \frac{t}{2})B$
$(1 - \frac{3}{4}t)A$ ist also ein gemeinsamer Punkt der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$. Da das Dreieck ABC echt ist und $C = O$ ist, haben die Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ nur einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Koordinatenursprung O.	$\Rightarrow (1 - \frac{3}{4}t)A = (r - \frac{t}{2})B = O$
Da $A \neq O$ und $B \neq O$ sind, müssen die Faktoren $1 - \frac{3}{4}t$ und $r - \frac{t}{2}$ gleich 0 sein.	$\Rightarrow 1 - \frac{3}{4}t = 0,\ t = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow r - \frac{t}{2} = 0,\ r = \frac{t}{2} = \frac{2}{3}$
Setzen wir nun r ein, so erhalten wir wie behauptet, dass S der 2:1-Teilungspunkt von CB ist.	$S = r(B - C) + B = \frac{2}{3}(B - C) + C = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}B$

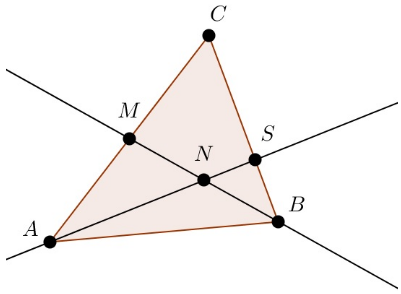
Beispiel 4
Sei ABC ein echtes Dreieck, M der Mittelpunkt von CA, S der 2:1-Teilungspunkt von CB und N der Schnittpunkt von $g(A,S)$ und $g(M,B)$. Zeigen Sie, dass die Gerade $g(A,S)$ Seitenhalbierendenlinie im Dreieck ABM und N der 3:1-Teilungspunkt der Strecke AS ist.



Lösung:

Erläuterung:	*Beweistext:*
	Voraussetzungen:
M ist der Mittelpunkt von CA.	$M = \frac{1}{2}(C+A)$
S ist der 2:1-Teilungspunkt von CB.	$S = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}B$
	N ist der Schnittpunkt von $g(A,S)$ und $g(M,B)$.
	zu zeigen:
$g(A,S)$ ist Seitenhalbierende im Dreieck ABM, d.h. N ist der Mittelpunkt von BM.	$N = \frac{1}{2}(B+M)$
N ist der 3:1-Teilungspunkt von AS.	$N = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}S$
	Rechnung:
Wir berechnen den 3:1-Teilungspunkt von AS und setzen $S = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}B$ ein.	$\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}S = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}B) = \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C$
Wir berechnen den Mittelpunkt von BM und setzen $M = \frac{1}{2}(C+A)$ ein.	$\frac{1}{2}(B+M) = \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C$
Also ist $\frac{1}{2}(B+M) = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}S$. Dieser Punkt liegt sowohl auf der Geraden $g(A,S)$ und $g(M,B)$ und ist damit der Schnittpunkt N.	$N = \frac{1}{2}(B+M) = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}S$

Beispiel 5
Sei ABC ein echtes Dreieck, M der Mittelpunkt von CA und S der 2:1-Teilungspunkt von CB. Zeigen Sie, dass die Gerade $g(A, S)$ Seitenhalbierendenlinie im Dreieck ABM ist.



Lösung:
Wir legen das Koordinatensystem so, dass $C = O$ ist und bezeichnen den Schnittpunkt von $g(A, S)$ mit $g(B, M)$ mit N.

Erläuterung:	*Beweistext:*
	Voraussetzungen:
M ist der Mittelpunkt von CA. Wir setzten $C = O$ ein.	$M = \frac{1}{2}(C + A) = \frac{1}{2}A$
S ist der 2:1 Teilungspunkt von CB. Wir setzten $C = O$ ein.	$S = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}B = \frac{2}{3}B$
N liegt auf $g(A, S)$. Wir setzen S ein.	$N = r(S - A) + A = r(\frac{2}{3}B - A) + A = \frac{2}{3}rB + (1 - r)A$
N liegt auf $g(M, B)$. Wir setzen M ein.	$N = t(M - B) + B = t(\frac{1}{2}A - B) + B = \frac{t}{2}A + (t - 1)B$
	zu zeigen:
Wir müssen zeigen, dass die Gerade $g(A, S)$ die Seitenhalbierendenlinie im Dreieck ABM ist, dass also N der Mittelpunkt von BM. Wir setzen $M = \frac{1}{2}A$ ein.	$N = \frac{1}{2}(B + M) = \frac{1}{2}(B + \frac{1}{2}A) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}A$
	Rechnung:
Wir setzen die beiden Terme für N aus der Voraussetzung gleich.	$\frac{2}{3}rB + (1 - r)A = \frac{t}{2}A + (t - 1)B$ $\Leftrightarrow (1 - \frac{t}{2} - r)A = (t - 1 - \frac{2}{3}r)B$
Da das Dreieck ABC echt ist und $C = O$ ist, sind die Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ verschieden und schneiden sich nur im Koordinatenursprung.	$(1 - \frac{t}{2} - r)A = O$ $(t - 1 - \frac{2}{3}r)B = O$

Da A und B ungleich O sind, müssen die Vorfaktoren gleich 0 sein. Wir erhalten ein Gleichungssystem und lösen dieses.

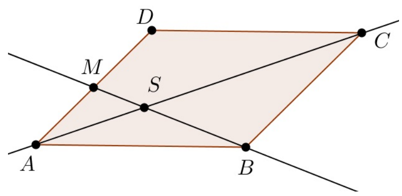
$$\begin{bmatrix} I: & r & + & \frac{1}{2}t & = & 1 \\ II: & \frac{2}{3}r & + & t & = & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3}I - II: & -\frac{2}{3}t & = & -\frac{1}{3} \\ 2 \cdot I - II: & \frac{4}{3}r & = & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2} \text{ und } r = \frac{3}{4}$$

Wir setzen $r = \frac{3}{4}$ in die Gleichung für N aus der Voraussetzung ein und erhalten das, was zu zeigen war.

$$\begin{aligned} N &= \tfrac{2}{3}rB + (1-r)A \\ &= \tfrac{1}{2}B + \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Also ist N der Mittelpunkt von BM und damit $g(A,S)$ die Seitenhalbierendenlinie im Dreieck ABM.

Beispiel 6
Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Sei M der Mittelpunkt von DA und sei S der Schnittpunkt von $g(A,C)$ und $g(B,M)$.
Zeigen Sie, dass S der 2:1-Teilungspunkt von BM und der 2:1-Teilungspunkt von CA ist.



Lösung:

Erläuterung:

Beweistext:

Voraussetzungen:

Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

$$\begin{aligned} & M_{AC} = M_{BD} \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2}(A+C) = \tfrac{1}{2}(B+D) \\ \Leftrightarrow\ & A = B + D - C \end{aligned}$$

zu zeigen:

S ist 2:1-Teilungspunkt von CA und der 2:1-Teilungspunkt von BM

$$S = \tfrac{1}{3}C + \tfrac{2}{3}A = \tfrac{1}{3}B + \tfrac{2}{3}M$$

Rechnung:

Wir berechnen den 2:1-Teilungspunkt von CA. Wir setzen die Voraussetzung $A = B + D - C$ ein.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}C + \tfrac{2}{3}A &= \tfrac{1}{3}C + \tfrac{2}{3}(B + D - C) \\ &= \tfrac{2}{3}B - \tfrac{2}{3}C + \tfrac{2}{3}D \end{aligned}$$

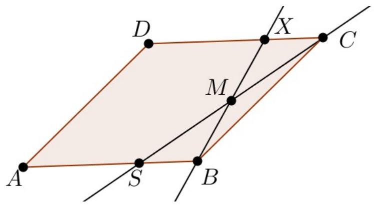
Wir berechnen den 2:1-Teilungspunkt von BM. Wir setzen für $M = \frac{1}{2}(D+A)$ ein.
Wir setzen die Voraussetzung $A = B + D - C$ ein.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}B + \tfrac{2}{3}M &= \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}(D + A) \\ &= \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}(D + (B + D - C)) \\ &= \tfrac{2}{3}B - \tfrac{1}{3}C + \tfrac{2}{3}D \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass der 2:1-Teilungspunkt von CA mit dem 2:1-Teilungspunkt übereinstimmt. Dieser Punkt liegt sowohl auf der Geraden $g(A,C)$ als auch auf der Geraden $g(B,M)$ und ist damit gleich dem Schnittpunkt S dieser Geraden.

$$S = \tfrac{1}{3}C + \tfrac{2}{3}A = \tfrac{1}{3}B + \tfrac{2}{3}M$$

Beispiel 7
Sei $ABCD$ ein Parallelogramm.
Sei S der 2:1-Teilungspunkt von AB, M der Mittelpunkt von SC und X der Schnittpunkt der Geraden $g(B,M)$ und $g(C,D)$.
Beweisen Sie, dass X der 2:1-Teilungspunkt von DC ist und dass das Viereck $SBCX$ ein Parallelogramm ist.



Lösung:

Erläuterung:

Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

S ist der 2:1-Teilungspunkt von AB.

X ist der 2:1-Teilungspunkt von DC.

Das Viereck $SBCX$ ist ein Parallelogramm, d.h. X ist der Spiegelpunkt von B an M.

Einsetzen von $M = \frac{1}{2}(S+C)$, $S = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ und $B = A + C - D$.

Also liegt $2M - B$ sowohl auf der Geraden $g(B,M)$ als auch auf der Geraden $g(C,D)$, ist also gleich dem Schnittpunkt X dieser Geraden.

Beweistext:

Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} & M_{AC} = M_{BD} \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2}(A+C) = \tfrac{1}{2}(B+D) \\ \Leftrightarrow\ & B = A + C - D \end{aligned}$$

X ist der Schnittpunkt von $g(B,M)$ und $g(C,D)$

$$S = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$$

zu zeigen:

$$X = \frac{1}{3}D + \frac{2}{3}C$$

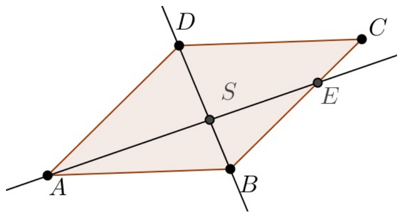
$$\begin{aligned} M &= M_{BX} = \tfrac{1}{2}(B+X), \text{ d.h.} \\ X &= 2M - B \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} 2M - B &= (S+C) - B \\ &= \tfrac{1}{3}A + \tfrac{2}{3}B + C - B \\ &= \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}B + C \\ &= \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}(A + C - D) + C \\ &= \tfrac{2}{3}C + \tfrac{1}{3}D \end{aligned}$$

$$X = 2M - B = \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}D$$

Beispiel 8
Sei $ABCD$ ein Parallelogramm und E der 2:1-Teilungspunkt der Strecke BC.
Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt S der Geraden $g(A,E)$ und $g(B,D)$ der 3:2-Teilungspunkt von AE und der 3:2-Teilungspunkt von DB ist.



Lösung:

Erläuterung:

Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

E ist der 2:1-Teilungspunkt von BC.

S ist der 3:2-Teilungspunkt von AE und der 3:2-Teilungspunkt von DB.

Wir berechnen den 3:2-Teilungspunkt von AE und setzen $E = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C$ ein.
Wir setzen $A + C = B + D$ ein,

Also ist der 3:2-Teilungspunkt von AE gleich dem 3:2-Teilungspunkt von DB und damit gleich dem Schnittpunkt S der geraden $g(A,E)$ und $g(B,D)$.

Beweistext:
Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} & M_{AC} = M_{BD} \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2}(A+C) = \tfrac{1}{2}(B+D) \\ \Leftrightarrow\ & A + C = B + D \end{aligned}$$

$$E = \tfrac{1}{3}B + \tfrac{2}{3}C$$

S ist der Schnittpunkt von $g(A,E)$ und $g(B,D)$.

zu zeigen:

$$S = \tfrac{2}{5}A + \tfrac{3}{5}E = \tfrac{2}{5}D + \tfrac{3}{5}B$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}A + \tfrac{3}{5}E &= \tfrac{2}{5}A + \tfrac{3}{5}\left(\tfrac{1}{3}B + \tfrac{2}{3}C\right) \\ &= \tfrac{2}{5}(A+C) + \tfrac{1}{5}B \\ &= \tfrac{2}{5}(B+D) + \tfrac{1}{5}B \\ &= \tfrac{2}{5}D + \tfrac{3}{5}B \end{aligned}$$

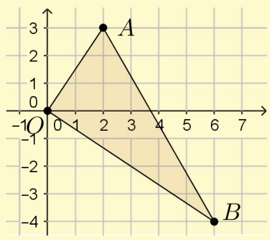
$$S = \tfrac{2}{5}A + \tfrac{3}{5}E = \tfrac{2}{5}D + \tfrac{3}{5}B$$

11.2 Metrische Geometrie

11.2.1 Das Punktprodukt

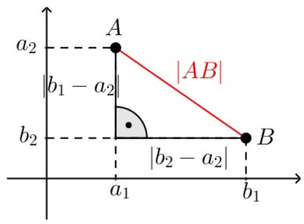
(a) Ist das Dreieck ABO in der Zeichnung wirklich rechtwinklig bei O?

(b) Entwickeln Sie ein Kriterium, mit dem für beliebige Punkte A und B rechnerisch überprüft werden kann, ob das Dreieck ABO rechtwinklig bei O ist.

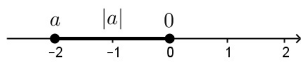


Sind zwei Punkte A und B gegeben, so erhalten wir mit dem Satz des Pythagoras für die Länge der Stecke AB

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

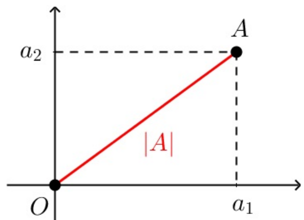


Den Betrag $|a|$ einer reellen Zahl a können wir auf dem Zahlenstrahl als Abstand der Zahl a von der 0 interpretieren.



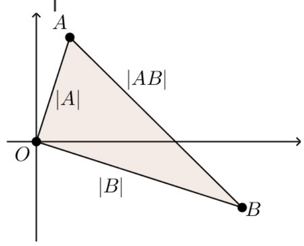
Genauso definieren wir den *Betrag eines Punktes* A als Abstand des Punktes A vom Koordinatenursprung O, also als Länge der Strecke AO,

$$|A| = |AO| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$



Nach dem Satz der Pythagoras sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned}
&\text{Das Dreieck } ABO \text{ ist rechtwinklig bei } O\\
\Leftrightarrow\quad & |A|^2 + |B|^2 = |AB|^2\\
\Leftrightarrow\quad & (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\\
\Leftrightarrow\quad & (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) = (b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2)\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2)\\
\Leftrightarrow\quad & 0 = -2a_1b_1 - 2a_2b_2\\
\Leftrightarrow\quad & 0 = -2(a_1b_1 + a_2b_2)\\
\Leftrightarrow\quad & 0 = a_1b_1 + a_2b_2
\end{aligned}$$



Das Dreieck ABO ist also genau dann rechtwinklig bei O, wenn $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ ist.

Für den Ausdruck $a_1b_1 + a_2b_2$ führen wir daher folgende Schreibweise ein.

Punktprodukt:
Für Punkte $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ definieren wir das *Punktprodukt*

$$A \bullet B = a_1b_1 + a_2b_2.$$

$A \bullet B$ ist eine reelle Zahl. Für $A \bullet A$ schreiben wir kurz A^2.

Wir haben den folgenden Satz gezeigt.

Streckenlängen und Orthogonalität:
Für den Betrag eines Punktes A gilt $|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{A \bullet A} = \sqrt{A^2}$.
Für die Länge einer Strecke AB gilt

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(B - A) \bullet (B - A)} = \sqrt{(B - A)^2} = |A - B|\,.$$

Das Dreieck ABO ist genau dann rechtwinklig bei O, denn $A \bullet B = 0$ ist.

Für das Punktprodukt gelten folgende Rechenregeln.

Rechengesetze des Punktproduktes:
Seien A, B und C Punkte sowie r eine reelle Zahl. Dann gilt

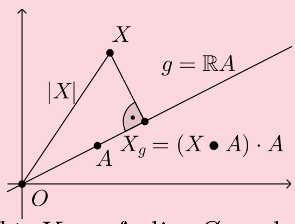
(1)	$A \bullet B = B \bullet A$	(Kommutativgesetz)
(2)	$(rA) \bullet B = r(A \bullet B) = A \bullet (rB)$	
(3)	$(A + B) \bullet C = A \bullet C + B \bullet C$	(Distributivgesetz I)
(4)	$A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$	(Distributivgesetz II)
(5)	$A^2 \geq 0$	
(6)	$A^2 = 0$ genau dann, wenn $A = O$ ist.	

Wegen Rechenregel (2) können wir auf die Klammern verzichten und schreiben $rA \bullet B$ anstelle von $r(A \bullet B)$ beziehungsweise $(rA) \bullet B$.

In Beispiel 6 zeigen wir die folgende geometrische Interpretation des Punktproduktes.

Geometrische Interpretation des Punktproduktes:
Ist A *normiert*, d.h. $|A| = 1$, so ist der *Fußpunkt* X_g *des Lotes* durch X auf die Gerade $g = \mathbb{R}A$ gegeben durch

$$X_g = r \cdot A \text{ mit } r = X \bullet A.$$



Man sagt auch: *„Durch das Punktprodukt wird der Punkt X auf die Gerade $g = \mathbb{R}A$ projiziert.“*
$X \bullet A$ ist der *orientierte Betrag des Lotfußpunktes*. Das Vorzeichen von $X \bullet A$ gibt an, auf welcher Seite der Geraden $g = \mathbb{R}A$ der Lotfußpunkt liegt.

Beispiel 1
Beweisen Sie das Kommutativgesetz für das Punktprodukt.

Lösung:

$$\begin{aligned} A \bullet B &= a_1 b_1 + a_2 b_2 && \text{(Definition von } \bullet\text{)} \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 && \text{(Kommutatixgesetz in } \mathbb{R}\text{)} \\ &= B \bullet A && \text{(Definition von } \bullet\text{)} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Binomische Formeln
Beweisen Sie die binomischen Formeln für Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$.

(1) $(A+B)^2 = A^2 + 2A \bullet B + B^2$

(2) $(A-B)^2 = A^2 - 2A \bullet B + B^2$

(3) $(A+B) \bullet (A-B) = A^2 - B^2$

Lösung:
Beispielhaft zeigen wir (1).

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B) \bullet (A+B) && \text{(Definition von } X^2\text{)} \\ &= A \bullet (A+B) + B \bullet (A+B) && \text{(Distributivgesetz } I\text{)} \\ &= A \bullet A + A \bullet B + B \bullet A + B \bullet B && \text{(Distributivgesetz } II\text{)} \\ &= A \bullet A + A \bullet B + A \bullet B + B \bullet B && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &= A \bullet A + 1(A \bullet B) + 1(A \bullet B) + B \bullet B && \text{(Rechengesetz (2))} \\ &= A \bullet A + (1+1)A \bullet B + B \bullet B && \text{(Distributivgesetz } I\text{)} \\ &= A^2 + 2A \bullet B + B^2 && \text{(Definition von } X^2\text{)} \end{aligned}$$

Beispiel 3
Seien A, B, X, Y Punkte. Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die folgenden von den reellen Zahlen bekannten Aussagen für Punkte **falsch** sind.

(a) Wenn $A \bullet B = 0$ ist, dann ist $A = O$ oder $B = O$.
(Wenn ein Produkt O ist, dann muss einer der beiden Faktoren O sein.)

(b) Wenn $X \bullet A = Y \bullet A$ ist, dann ist $X = Y$ (für $A \neq O$).
(Kürzungsregel)

(c) $(A \bullet B)^2 = A^2 B^2$.

Lösung:
(a) Für $A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist $A \bullet B = 0$, obwohl $A \neq O$ und $B \neq O$ ist.

(b) Für $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $X \bullet A = 4 = Y \bullet A$, aber $X \neq Y$.

(c) Für $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $(A \bullet B)^2 = 1 \neq 1 \bullet 2 = A^2B^2$.

Beispiel 4

Sei $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie drei verschiedene Punkte X an, so dass das Dreieck AXO rechtwinklig bei O ist.

(b) Geben Sie *alle* Punkte X an, für die das Dreieck AXO rechtwinklig bei O ist.

Lösung:

(a) Ist $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, so ist $A \bullet X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 0$.

Ist $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, so ist $A \bullet X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 = 0$.

Ist $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$, so ist $A \bullet X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-6) + 3 \cdot 10 = 0$.

Für diese Punkte ist also das Dreieck AXO rechtwinklig.

(b) Es sind äquivalent:

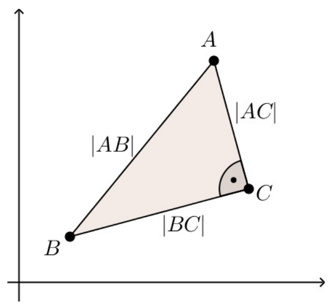
$$\begin{aligned} & \text{Das Dreieck } AXO \text{ ist rechtwinklig bei } O \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = A \bullet X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5x_1 + 3x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1 = -\frac{3}{5}x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & X \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Dreieck AXO ist also genau dann rechtwinklig, wenn X auf der Ursprungsgeraden $\mathbb{R} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegt.

Beispiel 5
Zeigen Sie mithilfe der Rechenregeln für das Punktprodukt, dass ein Dreieck ABC genau dann rechtwinklig bei C ist, wenn $(A - C) \bullet (B - C) = 0$ ist.

Lösung:
Nach dem Satz der Pythagoras sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned}
&\text{Das Dreieck } ABC \text{ ist rechtwinklig bei C}\\
\Leftrightarrow\ & |AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2\\
\Leftrightarrow\ & (A - C)^2 + (B - C)^2 = (A - B)^2\\
\Leftrightarrow\ & (A^2 - 2A \bullet C + C^2) + (B^2 - 2B \bullet C + C^2)\\
& = A^2 - 2A \bullet B + B^2\\
\Leftrightarrow\ & -2A \bullet C + 2C^2 - 2B \bullet C = -2A \bullet B\\
\Leftrightarrow\ & A \bullet B - A \bullet C - B \bullet C + C^2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & (A - C) \bullet (B - C) = 0.
\end{aligned}$$



Beispiel 6: Geometrische Interpretation des Punktproduktes
Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ und $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

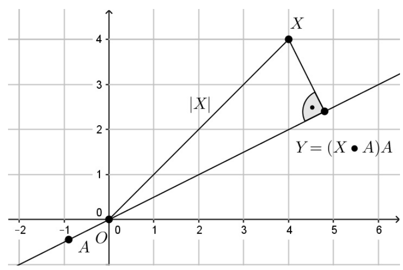
(a) Zeigen Sie, dass A *normiert* ist, dass also $|A| = 1$ ist.

(b) Berechnen Sie $Y := (X \bullet A)A$.

(c) Zeigen Sie, dass das Dreieck XOY bei Y rechtwinklig ist.

(d) Vergleichen Sie $|Y|$ und $X \bullet A$.

(e) Zeigen Sie allgemein: Sind A und X Punkte und ist $|A| = 1$ und $Y = (X \bullet A)A$, so ist das Dreieck XOY rechtwinklig bei Y.



Lösung:
(a) $|A| = \sqrt{(-\frac{2}{\sqrt{5}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{5}})^2} = \sqrt{1} = 1$

(b) $Y = (X \bullet A)A = (-\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 4 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 4) \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -\frac{12}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$

(c) zu zeigen: $(X-Y)\bullet Y = 0.$

Rechnung:

$$\begin{aligned}(X-Y)\bullet Y &= \left(\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{24}{5}\\\frac{12}{5}\end{pmatrix}\right)\bullet\begin{pmatrix}\frac{24}{5}\\\frac{12}{5}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{8}{5}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\frac{24}{5}\\\frac{12}{5}\end{pmatrix} = -\frac{96}{25}+\frac{96}{25} = 0\end{aligned}$$

Also ist das Dreieck XOY bei Y rechtwinklig.

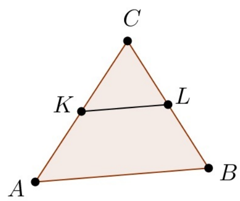
(*d*) $|Y| = \sqrt{(\frac{24}{5})^2 + (\frac{12}{5})^2} = \sqrt{\frac{720}{25}} = \sqrt{\frac{144}{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$, $A\bullet X = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 4 - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 4 = -\frac{12}{\sqrt{5}}$.
$|Y|$ und $A\bullet X$ sind also bis auf das Vorzeichen gleich.

(e) zu zeigen: $(X-Y)\bullet Y = 0.$

Rechnung:

$$\begin{aligned}(X-Y)\bullet Y &= (X-(X\bullet A)A)\bullet(X\bullet A)A\\ &= (X\bullet A)(A\bullet A) - (X\bullet A)(X\bullet A)(A\bullet A)\\ &= (X\bullet A)(A\bullet A) - (X\bullet A)(X\bullet A)\,|A|^2\\ &= 0\end{aligned}$$

Beispiel 7
Sei ABC ein echtes Dreieck und $K = M_{AC}$, $L = M_{BC}$.
Zeigen Sie, dass $|KL| = \frac{1}{2}|AB|$ ist.



Lösung:
Es gilt

$$\begin{aligned}|KL|^2 = |M_{AC}-M_{BC}|^2 &= \left|\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C\right|^2 = \left|\frac{1}{2}(A-B)\right|^2\\ &= \left(\frac{1}{2}(A-B)\right)^2 = \frac{1}{4}(A-B)^2 = \frac{1}{4}|AB|^2,\end{aligned}$$

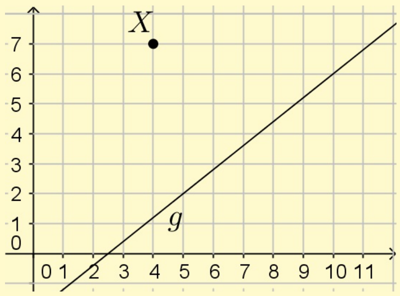
also $|KL| = \frac{1}{2}|AB|$.

11.2.2 Orthogonale Geraden

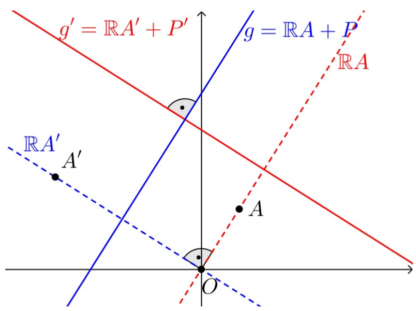
Ein Haus steht an der Stelle $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und soll an ein Glasfaserkabel angeschlossen werden, das entlang der Geraden

$$g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

verläuft. Geben Sie die Gleichung der Geraden an, entlang derer die kürzeste Anschlussstrecke verläuft.
Berechnen Sie die Koordinaten des Anschlusspunktes und die Länge des Anschlusskabels.



Zwei Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ und $g' = \mathbb{R}A' + P'$ sind genau dann orthogonal zueinander, wenn die dazugehörigen Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}A'$ orthogonal zueinander sind, wenn also das Dreieck $AA'O$ rechtwinklig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $A \bullet A' = 0$ ist.



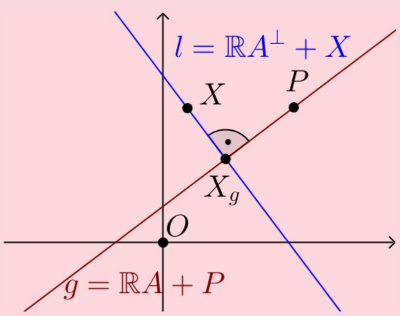
Orthogonale Geraden:
Zwei Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ und $g' = \mathbb{R}A' + P'$ sind genau dann orthogonal zueinander, wenn $A \bullet A' = 0$ ist. Wir schreiben $g \perp g'$.

Es ist $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -a_2 a_1 + a_1 a_2 = 0$. Deshalb gilt der folgende Satz.

Lotgerade:
Ist $g = \mathbb{R}A + P$ eine Gerade und X ein Punkt, so ist die Lotgerade auf g durch X gegeben durch

$$l = \mathbb{R}A^{\perp} + X \quad \text{mit} \quad A^{\perp} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

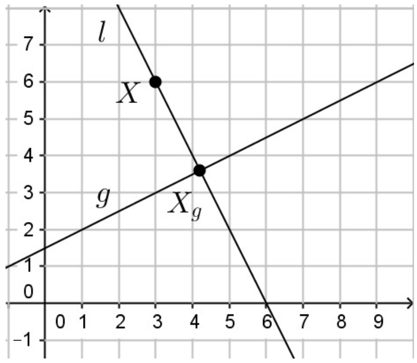
Der *Lotfußpunkt* X_g ist der Schnittpunkt der Geraden l und g. Der *Abstand* des Punktes X von der Geraden g ist die Länge der Strecke XX_g.



Beispiel 1

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ von der Geraden $g = \mathbb{R}A + P$, wobei $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

Lösungsvariante 1:



1.) *Aufstellen der Lotgeraden:*
Die Lotgerade l auf g durch X ist
$l = \mathbb{R}A^{\perp} + X = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2.) *Berechnung des Lotfußpunktes* X_g als Schnittpunkt von l und g:

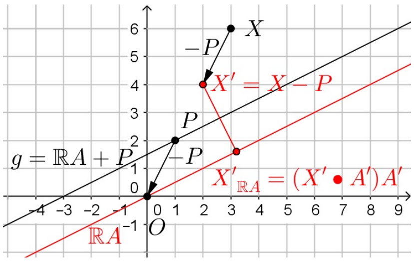
$$
\begin{aligned}
& r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} I & : & 2r & +s & = & 2 \\ II & : & r & -2s & = & 4 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} I & : & 2r & +s & = & 2 \\ I-2II & : & & 5s & = & -6 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & s = -\frac{6}{5} \text{ und } r = \frac{8}{5}.
\end{aligned}
$$

Der Lotfußpunkt ist also
$X_g = \frac{8}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$.

3.) *Abstandsberechnung:*
Der Abstand d des Punktes X von der Geraden g ist

$$
\begin{aligned}
d &= |XX_g| = |X - X_g| \\
&= \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{21}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}\right| = \frac{6}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

Lösungsvariante 2:
Der Abstand des Punktes X von der Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ ist genauso groß wie der Abstand des Punktes



$$X' = X - P = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

von der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$.

1.) *Normierung von A:*
Es ist $|A| = \sqrt{5}$, also ist $A' := \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ein Punkt auf $\mathbb{R}A$ mit $|A'| = 1$.

2.) *Berechnung des Fußpunktes $X'_{\mathbb{R}A}$* des Lotes durch X' auf $\mathbb{R}A$ mithilfe des Punktproduktes:

$$X'_{\mathbb{R}A} = (X' \bullet A')A' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{8}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

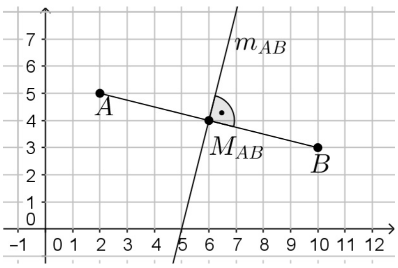
3.) *Abstandsberechnung:*
Der Abstand d des Punktes X von der Geraden g ist gleich dem Abstand des Punktes X' vom Punkt $X'_{\mathbb{R}A}$, also

$$d = |X'X'_{\mathbb{R}A}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Beispiel 2: Mittelsenkrechte

Gegeben ist die Strecke AB mit den Endpunkten $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Stellen Sie die Geradengleichungen für die Mittelsenkrechte m_{AB} der Strecke AB auf.



(b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt $X := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ auf der Mittelsenkrechten m_{AB} liegt. Berechnen Sie die Längen der Strecken AX und BX.

(c) Sei nun eine beliebige Strecke AB gegeben. Zeigen Sie, dass ein Punkt X genau dann auf der Mittelsenkrechten m_{AB} von A und B liegt, wenn $|AX| = |BX|$ ist.

Lösung:

(a) Die Mittelsenkrechte verläuft orthogonal zu $\mathbb{R}(A-B)$ und durch den Punkt M_{AB}.

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \mathbb{R}(A-B)^{\perp} + M_{AB} \\ &= \mathbb{R}(A-B)^{\perp} + \frac{1}{2}(A+B) \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}^{\perp} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) *Variante 1:* $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegt auf der Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = m_{AB}$.

Variante 2:

Ein Punkt X liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten m_{AB}, wenn die Gerade $g(X, M_{AB})$ orthogonal zur Geraden $g(A,B)$ ist, wenn also $(A-B) \bullet (M_{AB} - X) = 0$ ist.

Rechnung:

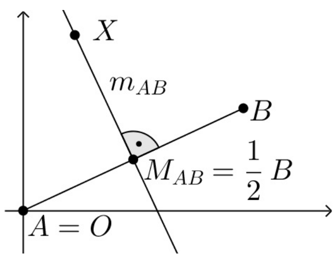
$$\begin{aligned} (A-B) &\bullet (M_{AB} - X) \\ = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} &\bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Also liegt der Punkt X auf der Mittelsenkrechten.

Es ist $|AX| = |A-X| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$ und

$|BX| = |B-X| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}.$

(c) Wir legen das Koordinatensystem so, dass $A = O$ ist und zeigen die Behauptung durch Äquivalenzumformungen.

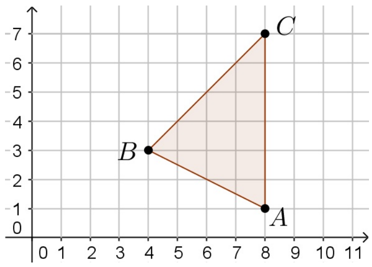


$$\begin{aligned} & |BX| = |AX| \\ \Leftrightarrow\ & |BX|^2 = |AX|^2\,. \\ \Leftrightarrow\ & (B-X)^2 = (A-X)^2 \\ \Leftrightarrow\ & B^2 - 2B \bullet X + X^2 = X^2 \\ \Leftrightarrow\ & B^2 - 2B \bullet X = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}B^2 - B \bullet X = 0 \\ \Leftrightarrow\ & B \bullet (\frac{1}{2}B - X) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (A-B) \bullet (M_{AB} - X) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & X \in m_{AB} \end{aligned}$$

Beispiel 3: Umkreismittelpunkt

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}.
Zeigen Sie, dass dieser Punkt ebenfalls auf der Mittelsenkrechten m_{AC} liegt.
Können Sie diesen Nachweis erbringen, ohne die Geradengleichung der Mittelsenkrechten m_{AC} aufzustellen?
Welche geometrische Bedeutung hat der Schnittpunkt?



(b) Sei nun ein beliebiges Dreieck ABC gegeben. Zeigen Sie, dass sich die Mittelsenkrechten m_{AB}, m_{BC} und m_{AC} stets in einem Punkt U schneiden.

Lösung:

(a) *Aufstellen der Geradengleichungen der Mittelsenkrechten:*

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \mathbb{R}(A-B)^\perp + M_{AB} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}^\perp + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \mathbb{R}(B-C)^\perp + M_{BC} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}^\perp + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schnittpunktberechnung von m_{AB} und m_{BC}:

$$\begin{aligned} & r\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & r\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} 2r & -4s & = & 0 \\ 4r & +4s & = & 3 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & r = \frac{1}{2} \text{ und } s = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt von m_{AB} und m_{BC} ist also $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Nachweis $U \in m_{AC}$:

Der Punkt U liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten m_{AC}, wenn die Gerade $g(U, M_{AC})$ orthogonal zur Geraden $g(A, C)$ ist.

Rechnung:

$$\begin{aligned} &(A - C) \bullet (M_{AC} - U) \\ = &\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Also ist $g(A, C) \perp g(U, M_{AC})$.

Geometrische Bedeutung:
Der gemeinsame Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten hat nach Aufgabe 2 von allen Eckpunkten des Dreiecks ABC den gleichen Abstand und ist deshalb der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC.

(b) Sei U der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}. Wir legen das Koordinatensystem so, dass $U = O$ ist.

Voraussetzungen:

U liegt auf m_{AB}. $\quad (A - B) \bullet (M_{AB} - U) = 0$

U liegt auf m_{BC}. $\quad (B - C) \bullet (M_{BC} - U) = 0$

Einsetzen von $U = O$.

$$\begin{aligned} (A - B) &\bullet M_{AB} = 0 \\ (B - C) &\bullet M_{BC} = 0 \end{aligned}$$

zu zeigen:

Der Punkt U liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten m_{AC}, wenn die Gerade $g(U, M_{AC})$ orthogonal zur Geraden $g(A, C)$ ist.

$$(A - C) \bullet (M_{AC} - U) = 0$$

Rechnung:

Einsetzen von $U = O$.

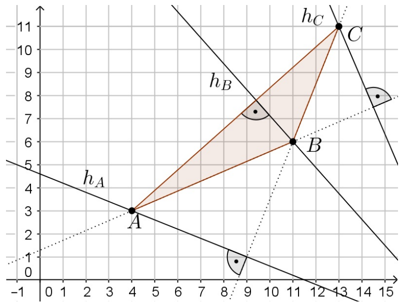
$$\begin{aligned} & (A - C) \bullet (M_{AC} - U) \\ = \; & \tfrac{1}{2}(A - C) \bullet (A + C) \\ = \; & \tfrac{1}{2}(A^2 - C^2) \\ = \; & \tfrac{1}{2}(A^2 - B^2 + B^2 - C^2) \\ = \; & \tfrac{1}{2}((A + B) \bullet (A - B) \\ & +(B + C) \bullet (B - C)) \\ = \; & M_{AB} \bullet (A - B) + M_{BC} \bullet (B - C) \\ = \; & 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Beispiel 4: Höhenlinien im Dreieck

Gegen ist das Dreieck ABC mit den Ecken $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Höhenlinien h_A und h_B.
Zeigen Sie, dass dieser Schnittpunkt auf der Höhenlinie h_C liegt.
Können Sie diesen Nachweis erbringen, ohne die Geradengleichung von h_C aufzustellen?

(b) Sei nun ein beliebiges Dreieck ABC gegeben. Zeigen Sie, dass sich die Höhenlinien in einem gemeinsamen Punkt H schneiden, dem *Höhenlinienschnittpunkt*.



(a) Geradengleichungen der Höhenlinien:

$$h_A = \mathbb{R}(B-C)^\perp + A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}^\perp + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h_B = \mathbb{R}(A-C)^\perp + B = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix}^\perp + \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Schnittpunktberechnung von h_A und h_B:

$$r\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad r\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = 3 \text{ und } s = 1$$

Der Schnittpunkt ist $H = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -3 \end{pmatrix}$.

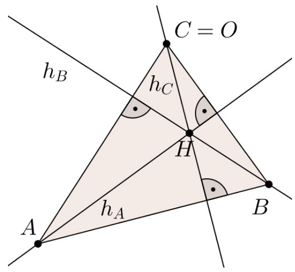
Nachweis $H \in h_c$:
Der Punkt H liegt genau dann auf der Höhenlinie h_C, wenn die Gerade $g(C,H)$ orthogonal zur Geraden $g(A,B)$ ist, wenn also $(C-H) \bullet (A-B) = 0$ ist.

Rechnung:

$$(C-H) \bullet (A-B) = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Also ist $g(C,H) \perp g(A,B)$ und $H \in h_C$.

(b) Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $C = O$ ist. Sei H der Schnittpunkt der Höhenlinien h_A und h_B. Wir zeigen, dass $H \in h_C$ ist.



Voraussetzungen:

H liegt auf h_A.
Einsetzen von $C = O$.

$$\begin{aligned} 0 &= (A - H) \bullet (B - C) \\ &= (A - H) \bullet B \\ &= A \bullet B - H \bullet B \end{aligned}$$

H liegt auf h_B.
Einsetzen von $C = O$.

$$\begin{aligned} 0 &= (B - H) \bullet (A - C) \\ &= (B - H) \bullet A \\ &= B \bullet A - H \bullet A \end{aligned}$$

zu zeigen:

Der Punkt H liegt genau dann auf der Höhenlinie h_C, wenn die Gerade $g(C, H)$ orthogonal zur Geraden $g(A, B)$ ist.

H liegt auf der Höhenlinie h_C.
$(C - H) \bullet (A - B) = 0$

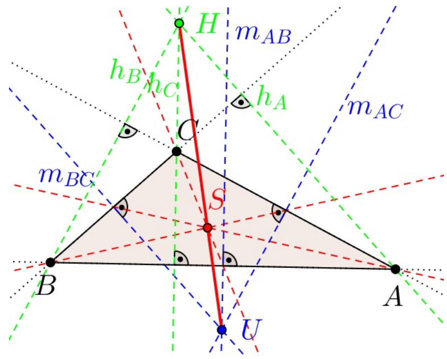
Rechnung:

Einsetzen von $C = O$.
Einsetzen der Voraussetzungen
$H \bullet A = A \bullet B$ und $H \bullet B = A \bullet B$.

$$\begin{aligned} & (C - H) \bullet (A - B) \\ =\ & H \bullet (A - B) \\ =\ & H \bullet A - H \bullet B \\ =\ & A \bullet B - A \bullet B \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

Also schneiden sich alle drei Höhenlinien im Punkt H.

Beispiel 5: Eulergerade
In einem Dreieck ABC sei U der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (*Umkreismittelpunkt*), H der Höhenlinienschnittpunkt und S der Schwerpunkt. Zeigen Sie, dass S der 2:1-Teilungspunkt der Strecke HU ist. Insbesondere liegen H, S und U auf einer Geraden, der *Eulergeraden*.



Lösung:

Voraussetzungen:

$\mathbb{R}(B-C)\perp\mathbb{R}(U-M_{BC})$

$$\begin{aligned} h_A &= \mathbb{R}(B-C)^{\perp}+A \\ &= \mathbb{R}(U-M_{BC})+A \end{aligned}$$

$\mathbb{R}(A-C)\perp\mathbb{R}(U-M_{AC})$

$$\begin{aligned} h_B &= \mathbb{R}(A-C)^{\perp}+B \\ &= \mathbb{R}(U-M_{AC})+B \end{aligned}$$

zu zeigen:

$$\tfrac{1}{3}H + \tfrac{2}{3}U = S = \tfrac{1}{3}(A+B+C)$$

Rechnung:

H ist der Schnittpunkt von h_A und h_B

$$\begin{aligned} H &= r(U-M_{BC})+A \\ &= s(U-M_{AC})+B \\ \Leftrightarrow\quad rU &-\tfrac{1}{2}rB-\tfrac{1}{2}rC+A \\ &= sU-\tfrac{1}{2}sA-\tfrac{1}{2}sC+B \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich $\qquad r=-2,\ s=-2$

Einsetzen von $r=-2$, $s=-2$

$$\begin{aligned} H &= r(U-M_{BC})+A \\ &= -2(U-\tfrac{1}{2}(B+C))+A \\ &= -2U+A+B+C \end{aligned}$$

Umformen $\qquad \tfrac{1}{3}H + \tfrac{2}{3}U = \tfrac{1}{3}(A+B+C) = S$

Beispiel 6: Diagonalenlinien in einer Raute
Sei $ABCD$ eine Raute. Zeigen Sie, dass die Diagonalenlinien senkrecht aufeinander stehen, dass also $g(A,C)\perp g(B,D)$ ist.

Lösung:

In einer Raute sind alle Seiten gleich lang.

Voraussetzungen:

$$\begin{array}{rl} & |A-B| = |A-D| \\ \Rightarrow & |A-B|^2 = |A-D|^2 \\ \Rightarrow & (A-B)^2 = (A-D)^2 \\ \Rightarrow & A^2 - 2A \bullet B + B^2 \\ & = A^2 - 2A \bullet D + D^2 \\ \Rightarrow & A \bullet B - A \bullet D = \frac{1}{2}(B^2 - D^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & |D-C| = |B-C| \\ \Rightarrow & |D-C|^2 = |B-C|^2 \\ \Rightarrow & (D-C)^2 = (B-C)^2 \\ \Rightarrow & D^2 - 2D \bullet C + C^2 \\ & = B^2 - 2C \bullet C + C^2 \\ \Rightarrow & -B \bullet C + D \bullet C = \frac{1}{2}(D^2 - B^2) \end{array}$$

Die Diagonalen $g(A,C) = \mathbb{R}(A-C)+C$ und $g(B,D) = \mathbb{R}(B-D)+D$ stehen senkrecht aufeinander.

zu zeigen:

$$(A-C) \bullet (B-D) = 0$$

Einsetzen der Voraussetzungen.

Rechnung:

$$\begin{array}{rl} & (A-C) \bullet (B-D) \\ = & A \bullet B - A \bullet D - B \bullet C + C \bullet D \\ = & \frac{1}{2}(B^2 - D^2) + \frac{1}{2}(D^2 - B^2) \\ = & 0 \end{array}$$

Also stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

Beispiel 7
Sei $ABCD$ ein Viereck und M der Mittelpunkt von AC. Das Dreieck BCM sei gleichschenklig bei M.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ACB rechtwinklig in B ist.

Lösung:

M ist der Mittelpunkt von AC. Das Dreieck BCM ist gleichschenklig bei M. Wir vereinfachen die Voraussetzungen.

Voraussetzungen:

$$\begin{array}{rl} & M = \frac{1}{2}(A+C) \\ & |BM| = |CM| \\ \Rightarrow & (B-M)^2 = (C-M)^2 \\ \Rightarrow & B^2 - 2B \bullet M + M^2 \\ & = C^2 - 2C \bullet M + M^2 \\ \Rightarrow & B^2 - B \bullet (A+C) = C^2 - C \bullet (A+C) \\ \Rightarrow & B^2 = B \bullet (A+C) + C^2 - C \bullet (A+C) \\ & = A \bullet B + B \bullet C - A \bullet C \end{array}$$

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei B.

zu zeigen:

$(A - B) \bullet (C - B) = 0$

Einsetzen der Voraussetzung $B^2 = A \bullet B + B \bullet C - A \bullet C$.

Rechnung:

$$\begin{aligned} & (A - B) \bullet (C - B) \\ = \ & A \bullet C - A \bullet B - B \bullet C + B^2 \\ = \ & A \bullet C - A \bullet B - B \bullet C + A \bullet B \\ & + B \bullet C - A \bullet C \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

Beispiel 8
Sei $ABCD$ ein Viereck und M der Mittelpunkt von AC. Das Dreieck ACB sei rechtwinklig in B.
Zeigen Sie, dass das Dreieck BCM gleichschenklig bei M ist.

Lösung:

M ist der Mittelpunkt von AC.
Das Dreieck ACB ist rechtwinklig in B.
Wir vereinfachen die Voraussetzungen.

Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1}{2}(A + C) \\ 0 &= (A - B) \bullet (C - B) \\ &= A \bullet C - A \bullet B - B \bullet C + B^2 \\ \Rightarrow \quad B^2 &= -A \bullet C + A \bullet B + B \bullet C \end{aligned}$$

Das Dreieck BCM gleichschenklig bei M.

zu zeigen:

$|BM| = |CM|$

Wir berechnen die Quadrate der Streckenlängen.
Wir setzen die Voraussetzungen $M = \frac{1}{2}(A+C)$ und $B^2 = -A \bullet C + A \bullet B + B \bullet C$ ein.

Rechnung:

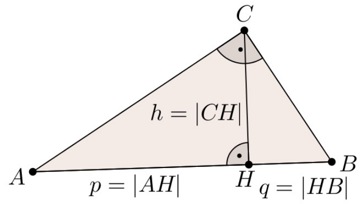
$$\begin{aligned} |BM|^2 &= |B - M|^2 \\ &= (B - M)^2 \\ &= B^2 - 2B \bullet M + M^2 \\ &= -A \bullet C + A \bullet B + B \bullet C \\ & \quad - B \bullet (A + C) + M^2 \\ &= -A \bullet C + A \bullet B + B \bullet C \\ & \quad - B \bullet A - B \bullet C + M^2 \\ &= -A \bullet C + M^2 \\ |CM|^2 &= |C - M|^2 \\ &= (C - M)^2 \\ &= C^2 - 2C \bullet M + M^2 \\ &= C^2 - C \bullet (A + C) + M^2 \\ &= -A \bullet C + M^2 \end{aligned}$$

Also ist $|BM| = |CM|$, das Dreieck BCM ist also gleichschenklig bei M.

Beispiel 9: Höhensatz
Sei ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck, H der Höhenfußpunkt, h die Länge der Höhe und p und q die Längen der Hypotenusenabschnitte wie in der Zeichnung.
Zeigen Sie, dass

$$h^2 = pq$$

gilt.



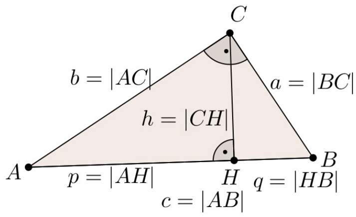
Lösung:
Wir legen das Koordinatensystem so, dass $C = O$ ist.

	Voraussetzungen:
$g(A, C)$ ist orthogonal zu $g(B, C)$.	$0 = (A - C) \bullet (B - C)$
Einsetzen von $C = O$.	$= A \bullet B$
$g(A, H)$ ist orthogonal zu $g(H, C)$.	$0 = (A - H) \bullet (H - C)$
Einsetzen von $C = O$.	$= (A - H) \bullet H$
	$= A \bullet H - H^2$
$g(B, H)$ ist orthogonal zu $g(H, C)$.	$0 = (B - H) \bullet (H - C)$
Einsetzen von $C = O$.	$= (B - H) \bullet H$
	$= B \bullet H - H^2$
H liegt zwischen A und B.	$\|AB\| = \|AH\| + \|HB\|$
	$\Rightarrow \|A - B\| = \|A - H\| + \|H - B\|$
	$\Rightarrow \|A - B\|^2 = (\|A - H\| + \|H - B\|)^2$
	$\Rightarrow (A - B)^2 = (A - H)^2 + 2\,\|A - H\| \cdot \|H - B\| + (H - B)^2$
	zu zeigen:
	$h^2 = pq$
	Rechnung:
	$pq = \|A - H\| \cdot \|H - B\|$
Einsetzen der Voraussetzung *H liegt zwischen A und B.*	$= \frac{1}{2}((A - B)^2 - (A - H)^2 - (H - B)^2)$
Einsetzen der Voraussetzungen $H^2 = A \bullet H$, $B \bullet H = H^2$ und $A \bullet B = 0$.	$= -H^2 - A \bullet B + A \bullet H + H \bullet B$
	$= -A \bullet H - 0 + A \bullet H + H^2$
	$= H^2$
	$= \|H\|^2$
	$= h^2$

Beispiel 10: Kathetensatz
Sei ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c, H der Höhenfußpunkt, p und q die Längen der Hypotenusenabschnitte wie in der Zeichnung.
Zeigen Sie, dass

$$a^2 = qc \quad \text{und} \quad b^2 = pc$$

gilt.



Lösung:
Wir legen das Koordinatensystem so, dass $C = 0$ ist.

Voraussetzungen:

$g(A, C)$ ist orthogonal zu $g(B, C)$.
Einsetzen von $C = O$.

$$\begin{aligned} 0 &= (A - C) \bullet (B - C) \\ &= A \bullet B \end{aligned}$$

$g(A, H)$ ist orthogonal zu $g(H, C)$.
Einsetzen von $C = O$.

$$\begin{aligned} 0 &= (A - H) \bullet (H - C) \\ &= (A - H) \bullet H \\ &= A \bullet H - H^2 \end{aligned}$$

$g(B, H)$ ist orthogonal zu $g(H, C)$.
Einsetzen von $C = O$.

$$\begin{aligned} 0 &= (B - H) \bullet (H - C) \\ &= (B - H) \bullet H \\ &= B \bullet H - H^2 \end{aligned}$$

H liegt zwischen A und B.

$$\begin{aligned} & |HB| && = |AB| - |AH| \\ \Rightarrow\ & |H - B| && = |A - B| - |A - H| \\ \Rightarrow\ & |H - B|^2 && = (|A - B| - |A - H|)^2 \\ \Rightarrow\ & (H - B)^2 && = (A - B)^2 \\ & && \quad -2\,|A - B|\,|A - H| \\ & && \quad +(A - H)^2 \end{aligned}$$

zu zeigen:

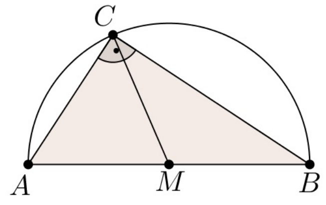
$$b^2 = c \cdot p$$

Rechnung:

Einsetzen der Voraussetzung *H liegt zwischen A und B.*
Einsetzen der Voraussetzungen $A \bullet H = H^2$, $B \bullet H = H^2$, $A \bullet B = 0$.

$$\begin{aligned} c \cdot p &= |A - B|\,|A - H| \\ &= \tfrac{1}{2}((A - B)^2 + (A - H)^2 - (H - B)^2) \\ &= A^2 - A \bullet B - A \bullet H + H \bullet B \\ &= A^2 - 0 - H^2 + H^2 \\ &= A^2 \\ &= |A|^2 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

Beispiel 11: Satz des Thales
Sei ABC ein Dreieck, M der Mittelpunkt von AB. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage gilt: Das Dreieck ABC ist genau dann rechtwinklig bei C, wenn $|AM| = |CM|$ ist.
Letztere Aussage bedeutet, dass C auf dem Kreis mit Mittelpunkt M durch A liegt, dem sogenannten *Thaleskreis*.



Lösung:
Wir legen das Koordinatensystem so, dass $C = 0$ ist.

Dann gilt

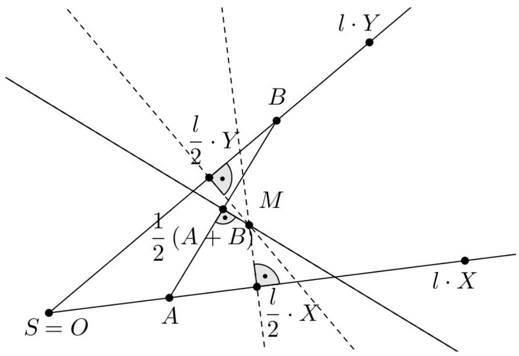
$$\begin{aligned} |AM|^2 &= |A - M|^2 \\ &= (A - M)^2 \\ &= A^2 - 2A \bullet M + M^2 \\ &= A^2 - 2A \bullet \frac{1}{2}(A + B) + M^2 \\ &= A^2 - A \bullet (A + B) + M^2 \\ &= A^2 - A^2 - A \bullet B + |CM|^2 \\ &= -A \bullet B + |CM|^2, \end{aligned}$$

und damit $|AM| = |CM|$ genau dann, wenn $A \bullet B = 0$ ist, wenn also das Dreieck ABC rechtwinklig bei C ist.

Beispiel 12
Seien $g := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot X + S$ und $h := \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot Y + S$ zwei nichtparallele Strahlen mit Scheitelpunkt S sowie $l \in \mathbb{R}_{>0}$.
Zeigen Sie, dass es einen Punkt M gibt, so dass für alle Punkte $A \in g$ und $B \in h$ mit $|AS| + |BS| = l$ gilt, dass M auf der Mittelsenkrechten m_{AB} von A und B liegt.

Lösung:

Wir legen das Koordinatensystem so, dass $S = O$ ist. Wir nehmen außerdem an, dass $|X| = |Y| = 1$ gilt. Die beiden Schenkel sind dann die Punktmengen $\mathbb{R}_{\geq 0}X$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}Y$.
Da nach Voraussetzung $\mathbb{R}X \nparallel \mathbb{R}Y$ ist, existiert der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten $m_{O(l \cdot X)}$ und $m_{O(l \cdot Y)}$.



Seien nun $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}X$ und $B \in \mathbb{R}_{\geq 0}Y$ mit $l = |AS| + |BS| = |A| + |B|$.
zu zeigen: M liegt auf der Mittelsenkrechten m_{AB} von A und B, d.h.

$$(A - B) \bullet (M - M_{AB}) = 0.$$

Fall 1: $A = O$.
Dann ist $B = l \cdot Y$ und damit $M \in m_{AB}$.

Fall 2: $A = l \cdot X$.
Dann ist $B = O$ und damit ebenfalls $M \in m_{AB}$.

Fall 3: $A \neq O$ *und* $A \neq l \cdot X$
Dann finden wir ein $t \in]0, l[$ mit $A = t \cdot X$ und $B = (l - t) \cdot Y$.
Da $A \neq O$ ist, existiert der Schnittpunkt N der Mittelsenkrechten m_{AB} und $m_{O(l \cdot Y)}$.
Da $N \in m_{O(l \cdot Y)}$ ist, gilt

$$0 = (N - \frac{l}{2} \cdot Y) \bullet Y = N \bullet Y - \frac{l}{2},$$

also $N \bullet Y = \frac{l}{2}$.

Wir zeigen, dass $N = M$ ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass $N \in m_{O(l \cdot X)}$ ist, dass also

$$0 = (N - \frac{l}{2} \cdot X) \bullet X = N \bullet X - \frac{l}{2}$$

gilt.

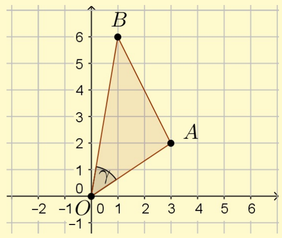
Da $N \in m_{AB}$ ist, ist

$$\begin{aligned}
0 &= (N - \frac{1}{2}(A+B)) \bullet (A-B) \\
&= N \bullet (A-B) - \frac{1}{2}(A^2 - B^2) \\
&= N \bullet (t \cdot X - (l-t) \cdot Y) - \frac{1}{2}(t^2 - (l-t)^2) \\
&= t(N \bullet X) - (l-t)N \bullet Y) - \frac{1}{2}(-l^2 + 2lt) \\
&= t(N \bullet X) - \frac{(l-t)l}{2} - \frac{1}{2}(-l^2 + 2lt) \\
&= t(N \bullet X) - \frac{tl}{2} \\
&= t((N \bullet X) - \frac{l}{2}).
\end{aligned}$$

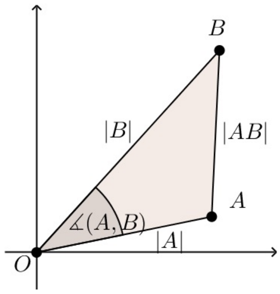
Da $t \neq 0$ ist, ist $(N \bullet X) - \frac{l}{2} = 0$ und damit $N \in m_{O(l \cdot X)}$.

11.2.3 Winkel

Zwei Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ bilden mit dem Koordinatenursprung einen Winkel γ. Berechnen Sie die Größe des Winkels γ.



Zwei Punkte $A \neq O$ und $B \neq O$ bilden mit dem Koordinatenursprung einen Winkel $\measuredangle(A, O, B)$, wofür wir kurz $\measuredangle(A, B)$ schreiben. Mit dem Kosinussatz erhalten wir



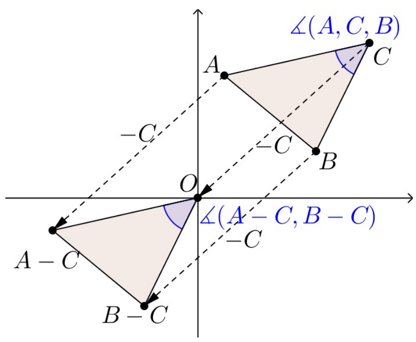
$$|AB|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2\,|A|\,|B| \cos \measuredangle(A, B),$$

$$\begin{aligned}
\cos \measuredangle(A, B) &= \frac{|A|^2 + |B|^2 - |AB|^2}{2\,|A|\,|B|} \\
&= \frac{A^2 + B^2 - (A - B)^2}{2\,|A|\,|B|} \\
&= \frac{A^2 + B^2 - (A^2 - 2A \bullet B + B^2)}{2\,|A|\,|B|} \\
&= \frac{A \bullet B}{|A|\,|B|}.
\end{aligned}$$

Ursprungswinkel:
Für die Größe des am Koordinatenursprung durch zwei Punkte $A \neq O$ und $B \neq O$ eingeschlossenen Winkels gilt

$$\cos \measuredangle(A, B) = \frac{A \bullet B}{|A|\,|B|} \quad \text{und} \quad 0 \leq \measuredangle(A, B) \leq 180°.$$

In einem beliebigen Dreieck ABC berechnen wir den Winkel an der Ecke C, indem wir das Dreieck zum Ursprung verschieben:



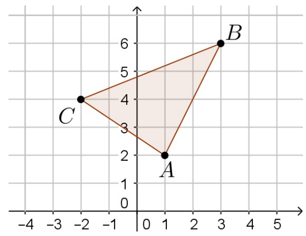
$$\begin{aligned}
\cos \measuredangle(A, C, B) &= \cos \measuredangle(A - C, O, B - C) \\
&= \cos \measuredangle(A - C, B - C) \\
&= \frac{(A - C) \bullet (B - C)}{|A - C|\,|B - C|}.
\end{aligned}$$

Innenwinkel eines Dreiecks:
Für die Größe des Innenwinkels $\measuredangle(A,C,B)$ eines Dreiecks ABC an der Ecke C gilt

$$\cos\measuredangle(A,C,B) = \cos\measuredangle(A-C,B-C) = \frac{(A-C)\bullet(B-C)}{|A-C|\,|B-C|},$$

wobei $0 \leq \measuredangle(A,C,B) \leq 180°$ ist.

Beispiel 1
Berechnen Sie die Größe des Winkels $\measuredangle(A,B,C)$.



Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned}\cos\measuredangle(A,B,C) &= \cos\measuredangle(A-B,C-B)\\ &= \cos\measuredangle(\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}) = \frac{\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}\right|} = \frac{18}{\sqrt{25}\sqrt{29}},\end{aligned}$$

also $\measuredangle(A,B,C) \approx 41,63°$.

Beispiel 2
Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC der Seitenlänge 5.
Berechnen Sie $(B-A)\bullet(C-A)$.

Lösung:

		$(B-A)\bullet(C-A)$
Erweitern.	$=$	$\|B-A\|\,\|C-A\|\,\frac{(B-A)\bullet(C-A)}{\|B-A\|\|C-A\|}$
	$=$	$\|B-A\|\,\|C-A\|\cos\measuredangle(B-A,C-A)$
	$=$	$\|BA\|\,\|CA\|\cos\measuredangle(B,A,C)$
In einem gleichseitigen Dreieck sind die	$=$	$5\cdot 5\cdot\cos 60°$
Größen der Innenwinkel immer 60°	$=$	$\frac{25}{2}$

11.3 Kreise

Lassen Sie sich mit GeoGebra durch Eingabe von

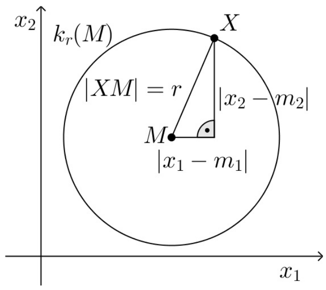
(a) $|(x, y) - (1, 2)| = 3$ (b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

die Punktmengen

(a) $\left\{X \mid \left|X - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right| = 3\right\}$ (b) $\{X \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 9\}$

anzeigen. Beschreiben Sie die Mengen und begründen Sie, weshalb Sie jeweils die gleichen geometrischen Objekte erhalten.

Ist ein Punkt M und eine reelle Zahl $r > 0$ gegeben, so liegt ein Punkt X genau dann auf dem Kreis $k_r(M)$ mit Mittelpunkt M und Radius r, wenn $|XM| = r$ ist. Der Kreis $k_r(M)$ besteht also aus allen Punkten X, für die $|XM| = r$ ist.



Ist M ein Punkt und r eine positive reelle Zahl, so ist die Punktmenge

$$\begin{aligned}
k_r(M) &= \{X \mid |MX| = r\} \\
&= \{X \mid |M - X| = r\} \\
&= \{X \mid \sqrt{(M - X)^2} = r\} \\
&= \{X \mid (X - M)^2 = r^2\} \\
&= \{X \mid (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2\}
\end{aligned}$$

ein *Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.*

Die Punktmenge $k_r(M)$ ist genauso wie die Koordinatendarstellung einer Geraden *implizit* gegeben.

Beispiel 1

Geben Sie den Kreis $k_r(M)$ mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und Radius $r = 4$ als Punktmenge an.

Lösung:
Es ist

$$
\begin{aligned}
k_r(M) &= \left\{X \mid \left|X - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right| = 4\right\} \\
&= \left\{X \mid \left(X - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)^2 = 4^2\right\} \\
&= \left\{X \mid \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)^2 = 16\right\} \\
&= \left\{X \mid (x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 = 16\right\} \\
&= \left\{X \mid (x_1^2 - 6x_1 + 9) + (x_2^2 - x_2 + 1) = 16\right\} \\
&= \left\{X \mid x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - x_2 = 6\right\}
\end{aligned}
$$

Bei den ersten vier Darstellungen kann der Mittelpunkt und der Radius des Kreises sofort abgelesen werden. Bei den letzten beiden Darstellungen ist dies nicht mehr so einfach möglich.

Beispiel 2
Zeigen Sie, dass die Punktmenge $\{X \mid x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 4x_2 = -20\}$ ein Kreis ist und bestimmen Sie dessen Mittelpunkt und Radius.

Lösung:
Wir führen die quadratische Ergänzung durch sowohl für den Term, der die Variable x_1 enthält als auch für den Term mit der Variablen x_2, so dass wir die binomische Formel anwenden können:

$$
\begin{aligned}
& \{X \mid x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 4x_2 = -20\} \\
= & \{X \mid (x_1^2 - 10x_1 + 25) + (x_2^2 - 4x_2 + 4) = -20 + 25 + 4\} \\
= & \{X \mid (x_1-5)^2 + (x_2-2)^2 = 9\} \\
= & \{X \mid \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\right)^2 = 3^2\} \\
= & \{X \mid (X - \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix})^2 = 3^2\}.
\end{aligned}
$$

Aus den letzten beiden Darstellungen können wir den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ und den Radius $r = 3$ direkt ablesen.

Beispiel 3
Überprüfen Sie, ob der Punkt A innerhalb, außerhalb oder auf dem Kreis $k = \{X \mid (x_1+3)^2 + (x_2-1)^2 = 25\}$ liegt.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Lösung:
Der Kreis hat den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Radius $r = 5$. Ist $|AM| < r$, so liegt A innerhalb des Kreises. Ist $|AM| = r$, so liegt A auf dem Kreis. Ist $|AM| > r$, so liegt A außerhalb des Kreises.

(a) Es ist $|AM|^2 = (1+3)^2 + (4-1)^2 = 25 = r^2$, also liegt der Punkt A auf dem Kreis.

(b) Es ist $|AM|^2 = (-5+3)^2 + (3-1)^2 = 8 < 25 = r^2$, also liegt der Punkt A innerhalb des Kreises.

(c) Es ist $|AM|^2 = (0+3)^2 + (-5-1)^2 = 45 > 25 = r^2$, also liegt der Punkt A außerhalb des Kreises.

Beispiel 4: Kreis durch drei Punkte
Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie den Kreis durch die Punkte A, B und C.

Lösungsweg 1:
Für den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ und den Radius r gelten die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} (a_1-m_1)^2 + (a_2-m_2)^2 & = & r^2 \\ (b_1-m_1)^2 + (b_2-m_2)^2 & = & r^2 \\ (c_1-m_1)^2 + (c_2-m_2)^2 & = & r^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (15-m_1)^2 + (8-m_2)^2 & = & r^2 \\ (13-m_1)^2 + (12-m_2)^2 & = & r^2 \\ (7-m_1)^2 + (12-m_2)^2 & = & r^2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 225 - 30m_1 + m_1^2 + 64 - 16m_2 + m_2^2 & = & r^2 \\ 169 - 26m_1 + m_1^2 + 144 - 24m_2 + m_2^2 & = & r^2 \\ 49 - 14m_1 + m_1^2 + 144 - 24m_2 + m_2^2 & = & r^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (15-m_1)^2 + (8-m_2)^2 & = & r^2 \\ -4m_1 + 8m_2 & = & 24 \\ -12m_1 & = & -120 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow m_1 = 10, m_2 = 8, r = 5.$

Es ist also $k = \{X \mid (x_1-10)^2 + (x_2-8)^2 = 5^2\}$.

Lösungsweg 2:
Der Mittelpunkt M des Kreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}.

$$\begin{aligned} m_{AB} =& \mathbb{R}(A-B)^\perp + M_{AB} \\ =& \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}^\perp + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}13\\12\end{pmatrix}\right) \\ =& \mathbb{R}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}14\\10\end{pmatrix} \end{aligned}$$

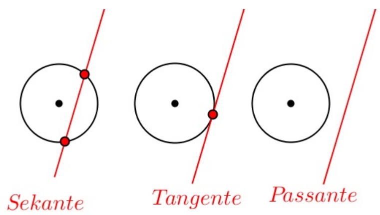
$$\begin{aligned} m_{BC} =& \mathbb{R}(B-C)^\perp + M_{BC} \\ =& \mathbb{R}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}^\perp + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}13\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}\right) \\ =& \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schnittpunktberechnung von m_{AB} und m_{BC}:

$$\begin{aligned} & t\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}14\\10\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & t\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} - s\cdot\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & t=-1 \text{ und } s=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Der Kreis hat also den Mittelpunkt
$M = t\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}14\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}$,
den Radius $r = |AM| = \left|\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right| = 5$,
$k = \{X \mid (x_1-10)^2 + (x_2-8)^2 = 5^2\}$.

Beispiel 5: Schnittpunkte Kreis/Gerade
Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix}$ mit dem Kreis $k_r(M) = \{X \mid (x_1-5)^2 + (x_2-4)^2 = 13\}$.



Lösung:
Ein Punkt $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix}$ auf der Geraden g liegt genau dann auf dem Kreis $k_r(M)$, wenn

$$13 = (x_1-5)^2 + (x_2-4)^2 = (5t+13-5)^2 + (-t+5-4)^2 = 26t^2 + 78t + 65$$

ist. Dies ist äquivalent zu $t=-1$ oder $t=-2$. Die Schnittpunkte des Kreises $k_r(M)$ mit der Geraden g sind also

$$S_1 = -\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad S_2 = -2\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}13\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}.$$

Beispiel 6: Kreistangenten
Sei $k_r(M) = \{X \mid (x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 = 5\}$ der Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ und Radius $r = \sqrt{5}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Punkt $P = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ auf dem Kreis $k_r(M)$ liegt und bestimmen Sie die Tangente an $k_r(M)$ durch den Punkt P.

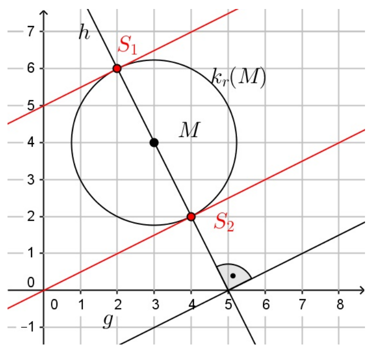
(b) Bestimmen Sie die Tangenten an den Kreis $k_r(M)$, die parallel zur Geraden $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ sind.

Lösung:
(a) Es ist $(5-3)^2+(3-4)^2 = 5$, also liegt der Punkt P auf dem Kreis $k_r(M)$. Die Tangente t verläuft durch den Punkt P und ist orthogonal zur Geraden $g(M,P)$.

$$\begin{aligned} t &= \mathbb{R}(M-P)^\perp + P \\ &= \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right)^\perp + \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}^\perp + \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Lotgeraden h auf g durch M und dem Kreis $k_r(M)$. Es ist

$$\begin{aligned} h &= \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}^\perp + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Ein Punkt $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ auf der Lotgeraden h liegt genau dann auf dem Kreis $k_r(M)$, wenn $5 = (x_1-3)^2+(x_2-4)^2 = (-t+3-3)^2+(2t+4-4)^2 = 5t^2$ ist, wenn also $t=1$ oder $t=-1$ ist. Die Schnittpunkte des Kreises $k_r(M)$ mit der Geraden h sind folglich

$$S_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = -\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$

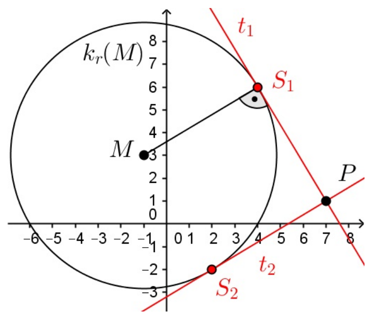
Die Tangenten t_1 und t_2 an den Kreis $k_r(M)$ parallel zur Geraden g sind also

$$t_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}.$$

Beispiel 7: Tangente an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises
Sei $k_r(M) = \{X | (x_1+1)^2+(x_2-3)^2 = 34\}$ der Kreis mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und Radius $r = \sqrt{34}$. Bestimmten Sie die Tangenten durch den Punkt $P = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ an den Kreis $k_r(M)$.

Lösung:

Ist $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ ein Berührpunkt einer Tangente durch P an $k_r(M)$, so ist $(S - M) \bullet (S - P) = 0$, da die Gerade $g(M, S)$ orthogonal zur Tangente verläuft und $(S - M)^2 = 34$, da der Berührpunkt auf dem Kreis $k_r(M)$ liegt.



Es sind äquivalent:

$$\begin{bmatrix} (S-M)^2 & = & 34 \\ (S-M)\bullet(S-P) & = & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (s_1+1)^2+(s_2-3)^2 & = & 34 \\ (s_1+1)(s_1-7)+(s_2-3)(s_2-1) & = & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1^2+2s_1+1+s_2^2-6s_2+9 & = & 34 \\ s_1^2-6s_1-7+s_2^2-4s_2+3 & = & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1^2+2s_1+1+s_2^2-6s_2+9 & = & 34 \\ -8s_1+2s_2 & = & -20 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (s_1+1)^2+(s_2-3)^2 & = & 34 \\ s_2 & = & -10+4s_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (s_1+1)^2+(4s_1-13)^2 & = & 34 \\ s_2 & = & -10+4s_1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 17s_1^2-102s_1+136 & = & 0 \\ s_2 & = & -10+4s_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1^2-6s_1+8 & = & 0 \\ s_2 & = & -10+4s_1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1 = 4 \text{ oder } s_1 = 2 & & \\ s_2 & = & -10+4s_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow s_1 = 4, s_2 = 6 \text{ oder } s_1 = 2, s_2 = -2.$$

Die Berührpunkte sind also $S_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $S_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, die Tangenten

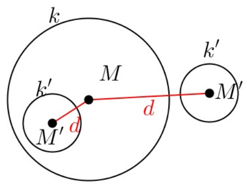
$$t_1 = \mathbb{R}(S_1 - P) + P = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } t_2 = \mathbb{R}(S_2 - P) + P = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 8: Lage Kreis/Kreis
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Kreise k und k'.
Vergleichen Sie dazu den Abstand der Mittelpunkte mit den Radien.

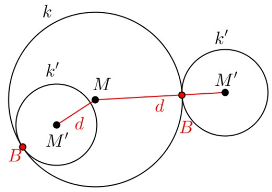
$$\begin{aligned}
(a) k &= \left\{X \mid (x_1+3)^2 + (x_2-2)^2 = 25\right\}, k' = \left\{X \mid (x_1+3)^2 + (x_2-9)^2 = 4\right\}\\
(b) k &= \left\{X \mid (x_1-3)^2 + (x_2+4)^2 = 25\right\}, k' = \left\{X \mid (x_1-2)^2 + (x_2+3)^2 = 4\right\}\\
(c) k &= \left\{X \mid (x_1+1)^2 + x_2^2 = 20\right\}, \qquad k' = \left\{X \mid (x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 = 4\right\}
\end{aligned}$$

Lösung:
Es gibt folgende Lagemöglichkeiten zweier Kreise $k_r(M)$ und $k'_{r'}(M')$ mit dem Abstand $d = |MM'|$ der Mittelpunkte:

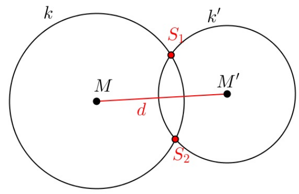
Kein Schnittpunkt
$d > r + r'$ oder
$d < |r - r'|$



Berührpunkt
$d = r + r'$ oder
$d = |r - r'|$



Zwei Schnittpunkte
$|r - r'| < d < r + r'$



(a) Der Abstand der Mittelpunkte ist

$$d = \left|\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}\right| = 7,$$

außerdem ist $r + r' = 5 + 2 = 7$.
Da $d = r + r'$ ist, berühren sich die Kreise. Der Kreis k' liegt außerhalb von k.

(b) Der Abstand der Mittelpunkte ist

$$d = \left|\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2},$$

außerdem ist $|r - r'| = |5 - 2| = 3$.
Da $d < |r - r'|$ ist, haben die Kreise keinen Schnittpunkt.
k' liegt innerhalb von k.

(c) Der Abstand der Mittelpunkte ist

$$d = \left|\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

außerdem ist $|r - r'| = \left|\sqrt{20} - 2\right| = 3\sqrt{2}$ und $r + r' = \sqrt{20} + 2 = (\sqrt{10} + \sqrt{2})\sqrt{2}$.
Da $|r - r'| < d < r + r'$ ist, haben die Kreise zwei Schnittpunkte.

Beispiel 9: Schnittpunkte zweier Kreise
Die Kreise $k = \{X \mid (x_1+1)^2 + x_2^2 = 20\}$ und $k' = \{X \mid (x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 = 4\}$ schneiden sich in zwei Punkten. Berechnen Sie die Schnittpunkte.

Lösung:
Es sind äquivalent:

$$
\begin{array}{ll}
 & X \text{ ist ein Schnittpunkt von } k \text{ und } k' \\
\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} I & : & (x_1+1)^2 + x_2^2 & = & 20 \\ II & : & (x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 & = & 4 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} I & : & x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 & = & 19 \\ II & : & x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 8x_2 & = & -21 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} I & : & x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 & = & 19 \\ I - II & : & 8x_1 + 8x_2 & = & 40 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} I & : & x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 & = & 19 \\ II & : & x_2 & = & 5 - x_1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} II \ in \ I & : & x_1^2 + 2x_1 + (5-x_1)^2 & = & 19 \\ II & : & x_2 & = & 5 - x_1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{bmatrix} I & : & x_1^2 - 4x_1 + 3 & = & 0 \\ II & : & x_2 & = & 5 - x_1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow & x_1 = 3, x_2 = 2 \text{ oder } x_1 = 1, x_2 = 4.
\end{array}
$$

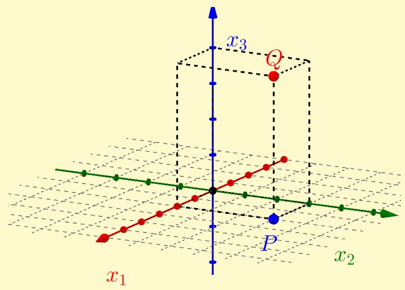
Die Schnittpunkte sind also $S_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

12 Geometrie des Raumes

12.1 Ebenen

12.1.1 Punkte im Raum

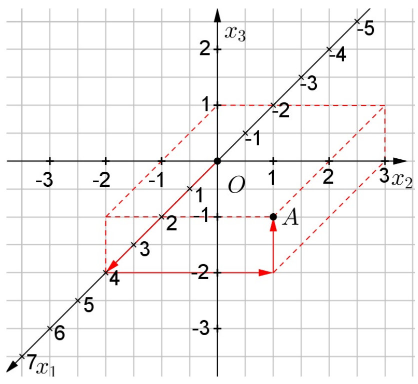
Geben Sie die Punkte P und Q an.



Ein Punkt $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ des Raumes besitzt drei Koordinaten a_1, a_2 und a_3, die die Position des Punktes auf der x_1-, x_2- und der x_3-Achse angeben. Die x_1-Achse zeigt meist nach vorne, die x_2-Achse nach rechts und die x_3-Achse nach oben. Den Koordinatenursprung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezeichnen wir mit dem Buchstaben O. Die Menge aller Punkte des Raumes bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^3$ *(in Worten: „R drei“)*.

Um einen räumlichen Eindruck zu erhalten, zeichnen wir die x_1-Achse und die x_2-Achse so, dass sie einen Winkel von 45° einschließen.

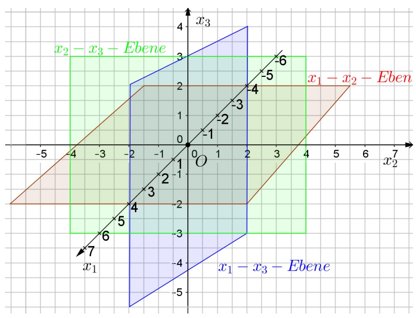
Wählen wir auf der x_2- und x_3-Achse als Einheit $1cm$, so wählen wir auf der x_1-Achse als Einheit $\frac{1}{\sqrt{2}}cm$. Im Heft entspricht dies genau einer Kästchendiagonalen.



Um den Punkt $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ einzuzeichnen, bewegen wir uns 4 Einheiten in Richtung der x_1-Achse, 3 Einheiten in Richtung der x_2-Achse und eine Einheit in Richtung der x_3-Achse. Zu beachten ist, dass wir die Punkte $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ an derselben Stelle einzeichnen wie den Punkt A. Wir können die Koordinaten eines Punktes also nur dann ablesen, wenn wir die *Hilfslinien zum Punkt* mit einzeichnen.

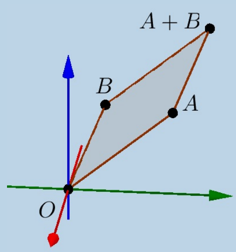
Es gibt drei *Koordinatenebenen*.

x_1-x_2-Ebene E_{12}	festgelegt durch die x_1-Achse und die x_2-Achse
x_1-x_3-Ebene E_{13}	festgelegt durch die x_1-Achse und die x_3-Achse
x_2-x_3-Ebene E_{23}	festgelegt durch die x_2-Achse und die x_3-Achse



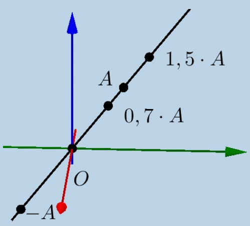
Wir addieren und vervielfachen Punkte des Raumes genauso wie Punkte der Ebene.

Summe zweier Punkte:
Zwei Punkte $A, B \in \mathbb{R}^3$ des Raumes werden koordinatenweise *addiert*:
$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$
Dadurch entsteht ein Parallelogramm.



Vielfaches eines Punktes:
Ein Punkt $A \in \mathbb{R}^3$ des Raumes wird koordinatenweise mit einer reellen Zahl r *vervielfacht*: $r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$.

Außerdem definieren wir: $-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$.



Für das Rechnen mit Punkten des Raumes gelten dieselben Rechenregeln wir für Punkte der Ebene.

Rechengesetze für Punkte:
Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ Punkte des Raumes, $r, s \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Dann gilt

(1) $A + B = B + A$
(Kommutativgesetz)

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(Assoziativgesetz)

(3) $A + O = A$

(4) $A + (-A) = O$

(5) $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$
(Distributivgesetz I)

(6) $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$
(Distributivgesetz II)

(7) $(rs) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$

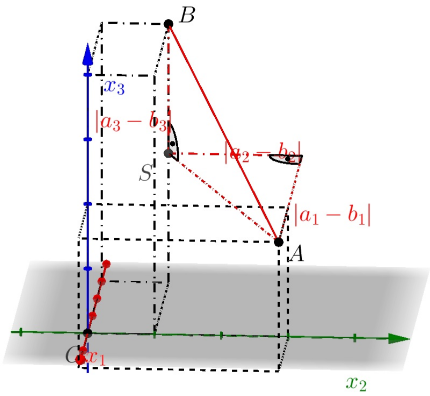
(8) $1 \cdot A = A$.

Das Punktprodukt wird auch für Punkte des Raumes definiert:

Punktprodukt:
Für Punkte $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des Raumes $\mathbb{R}^3$ definieren wir das *Punktprodukt* $A \bullet B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
$A \bullet A$ ist eine reelle Zahl. Für $A \bullet A$ schreiben wir kurz A^2.

Für die Länge der Strecke AB erhalten wir mit dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} \\ &= \sqrt{(A - B) \bullet (A - B)} \\ &= \sqrt{(A - B)^2}. \end{aligned}$$



Für den Betrag eines Punktes gilt

$$|A| = |AO| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{A \bullet A} = \sqrt{A^2}.$$

Für den Betrag eines Punktes $A \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{A \bullet A} = \sqrt{A^2}.$$

Für die Länge einer Strecke AB gilt

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \\ &= \sqrt{(B - A) \bullet (B - A)} \\ &= \sqrt{(B - A)^2} = |A - B|\,. \end{aligned}$$

Das Dreieck ABO ist genau dann rechtwinklig bei O, wenn $A \bullet B = 0$ ist.

Die Berechnung von Winkelgrößen erfolgt auch für Punkte des Raumes wie gehabt.

Winkel:
Für die Größe des am Koordinatenursprung durch zwei Punkte $A \neq O$ und $B \neq O$ eingeschlossenen Winkels gilt

$$\cos \measuredangle(A, B) = \frac{A \bullet B}{|A|\,|B|} \quad \text{und} \quad 0 \leq \measuredangle(A, B) \leq 180°.$$

Für die Größe des Innenwinkels $\measuredangle(A, C, B)$ eines Dreiecks ABC an der Ecke C gilt

$$\cos \measuredangle(A, C, B) = \cos \measuredangle(A - C, B - C) = \frac{(A - C) \bullet (B - C)}{|A - C|\,|B - C|}.$$

Übungen

1. (a) Zeichnen Sie die Punkte $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A + B$ in ein Koordinatensystem. Beschreiben Sie die Lage des Punktes $A + B$.

(b) Gegeben ist der Punkt $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie für $r = 1$, $r = -1$, $r = 0,5$, $r = 2$ den Punkt rA in ein Koordinatensystem. Beschreiben Sie die Lage der Punkte rA.

2. Alle Punkte in der x_1-x_2-Ebene E_{12} zeichnen sich dadurch aus, dass die x_3-Koordinate 0 ist. Es gilt folglich

$$E_{12} = \{X \mid X \in \mathbb{R}^3, x_3 = 0\}.$$

Geben Sie die x_1-x_3-Ebene E_{13} und die x_2-x_3-Ebene E_{23} ebenfalls in der Mengenschreibweise an.

3. Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie vorteilhaft.
$(a) 2(B + A) - (A + 2B)$ $\quad (b) \frac{1}{2}(4B + 3A) - 3(\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B)$ $\quad (c)(2A + 2B) - (B + A)$

4. Die x_1-Achse, x_2-Achse und die x_3-Achse sind Geraden. Geben Sie diese Geraden in Parameterdarstellung an.

5. (a) Zeichnen Sie die Gerade $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$ in ein Koordinatensystem.

(b) Geben Sie die Gerade $g(A, B)$ mit $A = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$ in Parameterdarstellung an und zeichnen Sie die Gerade.

6. (a) Der Punkt $A = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$ wird am Punkt S gespiegelt. Es entsteht der Punkt $A' = \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Koordinaten von S.

(b) Der Punkt $B = \begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}$ wird ebenfalls am Punkt S gespiegelt. Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes B'.

(c) Stellen Sie beide Spiegelungen in einem Koordinatensystem dar.

7. Zeigen Sie jeweils anhand eines Beispiels, dass die Rechenregeln für das Punktprodukt auch für Punkte des Raumes gelten.

8. Seien $A = \begin{pmatrix}3\\-7\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix}6\\-6\\11\end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

(b) Berechnen Sie den Umfang der Dreiecks ABC.

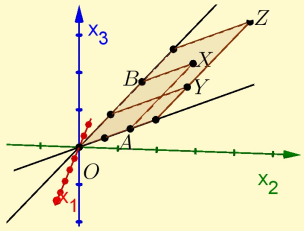
(c) Geben Sie einen Punkt D an, der das Dreieck ABC zu einem Rechteck ergänzt.

(d) Berechnen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks CDB.

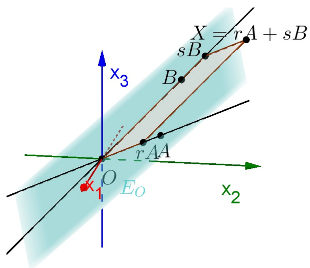
12.1.2 Ebenen

Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte X, Y, Z.



Durch zwei nicht-parallele Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ wird eine Ebene E_O durch den Koordinatenursprung festgelegt. Jeder Punkt X dieser Ebene E_O ist die Summe eines Punktes rA auf der Geraden $\mathbb{R}A$ und eines Punktes sB auf der Geraden $\mathbb{R}B$, also



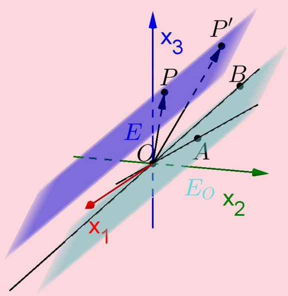
$$X = rA + sB,$$

da das Viereck mit den Ecken O, rA, X, sB ein Parallelogramm ist.
Es ist also

$$\begin{aligned} E_O &= \mathbb{R}A + \mathbb{R}B \\ &= \{X \mid \text{es existieren reelle Zahlen } r \text{ und } s, \text{ so dass } X = rA + sB \text{ ist}\} \\ &= \{rA + sB \mid r, s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Die Darstellung einer Ursprungsebene ist nicht eindeutig: Sind $A' = rA + sB$ und $B' = tA + uB$ zwei Punkte der Ursprungsebene E_O, die nicht auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen, so legen die Geraden $\mathbb{R}A'$ und $\mathbb{R}B'$ die gleiche Ebene fest. Es ist also $E_O = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B = \mathbb{R}A' + \mathbb{R}B'$.

Parameterdarstellung von Ebenen:
Eine beliebige Ebene E durch einen Punkt P erhalten wir, indem wir *jeden* Punkt einer Ursprungsebene $E_O = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ parallel zur gerichteten Strecke OP verschieben. Wir müssen also zu jedem Punkt der Ursprungsebene den Punkt P addieren:



$$\begin{aligned} E &= \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P \\ &= \{X \mid \text{es existieren reelle Zahlen } r, s, \\ &\qquad \text{so dass } X = rA + sB + P \text{ ist}\} \\ &= \{rA + sB + P \mid r, s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung heißt *Parameterdarstellung der Ebene*.

Parallele Ebenen:
Zwei Ebenen $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ und $E' = \mathbb{R}A' + \mathbb{R}B' + P'$ sind genau dann parallel zueinander, wenn sie aus der gleichen Ursprungsebene durch Verschiebung hervorgegangen sind, wenn also $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B = \mathbb{R}A' + \mathbb{R}B'$ ist.

Uneindeutigkeit der Parameterdarstellung:
Die Parameterdarstellung der Ebene ist nicht eindeutig: Ist P' ein weiterer Punkt der Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$, so ist $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P'$.

Drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, legen eine Ebene $E(A, B, C)$ fest. Die Ebene $\mathbb{R}(A - C) + \mathbb{R}(B - C) + C$ enthält sowohl die Punkte A, B und C, da

$$\begin{aligned}
A &= 1 \cdot (A - C) + 0 \cdot (B - C) + C \in \mathbb{R}(A - C) + \mathbb{R}(B - C) + C, \\
B &= 0 \cdot (A - C) + 1 \cdot (B - C) + C \in \mathbb{R}(A - C) + \mathbb{R}(B - C) + C, \\
C &= 0 \cdot (A - C) + 0 \cdot (B - C) + C \in \mathbb{R}(A - C) + \mathbb{R}(B - C) + C
\end{aligned}$$

ist.

Ebene durch 3 Punkte:
Drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen, definieren die Ebene

$$E(A, B, C) = \mathbb{R}(A - C) + \mathbb{R}(B - C) + C.$$

Da die Ebene $\mathbb{R}(B - C) + \mathbb{R}(B - A) + A$ ebenfalls die Punkte A, B, C enthält, gilt auch

$$E(A, B, C) = \mathbb{R}(B - C) + \mathbb{R}(B - A) + A,$$

wir können die Differenzen also vertauschen.

Beispiel 1
Geben Sie $E(A, B, C)$ in Parameterdarstellung an.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) $E(A,B,C) = \mathbb{R}(A-C) + \mathbb{R}(B-C) + C = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\-2\\-5\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-7\\-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$

(b) Es ist $A-C = \begin{pmatrix}-16\\4\\8\end{pmatrix}$, $B-C = \begin{pmatrix}-8\\2\\4\end{pmatrix}$.
Diese beiden Punkte liegen auf derselben Ursprungsgeraden, da $A-C = 2(B-C)$ ist. Also legen die Punkte A, B und C keine Ebene fest.

Beispiel 2: Punktprobe

Untersuchen Sie, ob der Punkt $P = \begin{pmatrix}5\\17\\7\end{pmatrix}$ und der Punkt $Q = \begin{pmatrix}6\\16\\6\end{pmatrix}$ in der Ebene $E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix}$ liegt.

Lösung:

Der Punkt P liegt genau dann in der Ebene E, wenn er von der Form $\begin{pmatrix}5\\17\\7\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ ist. Der Punkt P liegt also genau dann in der Ebene, wenn dieses Gleichungssystem eine Lösung besitzt.

Das Gleichungssystem besitzt eine Lösung.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix}5\\17\\7\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & r\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\8\\1\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{bmatrix} 1r & -1s & = & 3 \\ 5r & +2s & = & 8 \\ 2r & +3s & = & 1 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & s = -1 \text{ und } r = 2
\end{aligned}$$

Es ist $P = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix}$, der Punkt P liegt also in der Ebene E.

Der Punkt Q liegt genau dann in der Ebene E, wenn er von der Form $\begin{pmatrix}6\\16\\6\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ ist. Der Punkt P liegt also genau dann in der Ebene, wenn dieses Gleichungssystem eine Lösung besitzt.

Da $0 = 30$ eine falsche Aussage ist, besitzt das Gleichungssystem keine Lösung und der Punkt Q liegt nicht in der Ebene E.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix}6\\16\\6\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\9\\6\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & r\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix}1r & -1s & = & 4\\ 5r & +2s & = & 7\\ 2r & +3s & = & 3\end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix}1r & -1s & = & 4\\ & s & = & -\frac{13}{7}\\ & 0 & = & 30\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

12.1.3 Linearkombinationen

(a) Liegen die Punkte A und B auf derselben Ursprungsgeraden?

(i) $A = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) Liegen die Punkte A, B und C in derselben Ursprungsebene?

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Linearkombinationen:
Sind Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und reelle Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gegeben, so nennt man die Summe $r_1A_1 + r_2A_2 + \ldots + r_nA_n$ eine *Linearkombination der Punkte* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Ein Punkt B ist *als Linearkombination der Punkte* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *darstellbar*, falls es reelle Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gibt, so dass $B = r_1A_1 + r_2A_2 + \ldots + r_nA_n$ ist.

Zwei Punkte A und B liegen auf derselben Ursprungsgeraden, falls es eine reelle Zahl r gibt, so dass $A = rB$ ist, oder falls es eine reelle Zahl r gibt, so dass $B = rA$ ist, falls also der Punkt A als Linearkombination von B darstellbar ist, oder falls der Punkt B als Linearkombination von A darstellbar ist.

Drei Punkte A, B und C liegen in derselben Ursprungsebene, falls es reelle Zahlen r und s gibt, so dass $A = rB + rC$ ist oder falls es reelle Zahlen r und s gibt, so dass $B = rA + rC$ ist oder falls es reelle Zahlen r und s gibt, so dass $C = rA + rB$ ist, falls also einer der Punkte A, B, C als Linearkombination der anderen Punkte darstellbar ist.

Dies verallgemeinern wir auf n Punkte.

Linear abhängig/unabhängig:
Die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen *linear abhängig*, falls sich mindestens einer der Punkte als Linearkombination der verbleibenden Punkte darstellen lässt. Sind die Punkte nicht linear abhängig, so heißen sie *linear unabhängig*.

Um zu entscheiden, ob drei Punkte linear abhängig oder linear unabhängig sind, müssen also bis zu 3 lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Es geht jedoch auch einfacher:
Sind die Punkte A, B und C linear abhängig, so ist beispielsweise C als Linearkombination von A und B darstellbar. Dann gibt es reelle Zahlen r, s mit $C = rA + sB$, also:

$$rA + sB + (-1) \cdot C = O.$$

Das bedeutet, dass das lineare Gleichungssystem

$$rA + sB + tC = O$$

neben der *trivialen Lösung* $r = 0, s = 0, t = 0$ noch eine weitere Lösung besitzt, in der mindestens eine der Variablen ungleich 0 ist.

Besitzt umgekehrt das lineare Gleichungssystem

$$rA + sB + tC = O$$

neben der trivialen Lösung $r = s = t = 0$ noch eine weitere Lösung, in der zum Beispiel $r \neq 0$ ist, so ist

$$A = -\frac{s}{r}B - \frac{r}{r}C.$$

Das bedeutet, dass sich A als Linearkombination von B und C darstellen lässt, die Punkte A, B und C also linear abhängig sind.
Wir verallgemeinern dies:

Kriterium für lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit:
Die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn das lineare Gleichungssystem

$$r_1A_1 + r_2A_2 + \ldots + r_nA_n = O$$

nur die *triviale Lösung* $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ besitzt.
Die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind genau dann *linear abhängig*, wenn das lineare Gleichungssystem

$$r_1A_1 + r_2A_2 + \ldots + r_nA_n = O$$

neben der trivialen Lösung noch mindestens eine weitere Lösung $r_1, r_s, \ldots, r_n$ besitzt, bei der eine der Zahlen r_1, $r_2, \ldots, r_n$ ungleich 0 ist.

Beispiel 1

Untersuchen Sie, die Punkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf lineare Abhängigkeit.

Lösung:

Wir untersuchen, ob sich A als Linearkombination von B und C darstellen lässt:

$$\begin{aligned} & A = rB + sC \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} 2r & +s & = & 1 \\ 2r & +2s & = & 6 \\ 1r & +3s & = & -1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} 2r & +s & = & 1 \\ & -s & = & -5 \\ & 0 & = & -28 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Deshalb lässt sich A nicht als Linearkombination von B und C darstellen.

Wir untersuchen, ob sich C als Linearkombination von A und B darstellen lässt:

$$\begin{aligned} & C = rA + sB \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} r & +2s & = & 1 \\ 6r & +2s & = & 2 \\ r & +s & = & 3 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} r & +2s & = & 1 \\ & 10s & = & 4 \\ & 0 & = & -16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Deshalb lässt sich C nicht als Linearkombination von A und B darstellen.

Wir untersuchen, ob sich B als Linearkombination von A und C darstellen lässt:

$$\begin{aligned} & B = rA + sC \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} r & +s & = & 2 \\ 6r & +2s & = & 2 \\ r & +3s & = & 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} r & +s & = & 2 \\ & 4s & = & 10 \\ & 0 & = & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Deshalb lässt sich B nicht als Linearkombination von A und C darstellen.

Da sich keiner der Punkte A, B und C als Linearkombination der anderen Punkte darstellen lässt, sind die Punkte A, B und C linear unabhängig.

Beispiel 2
Untersuchen Sie, ob die folgenden Punkte linear abhängig sind.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}7\\6\\-1\end{pmatrix}$$

Lösung:

(a)

$$rA + sB = 0 \quad\Leftrightarrow\quad r\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}2 + s\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{llcl} r & +2s & = & 0\\ 3r & +2s & = & 0\\ 2r & +5s & = & 0\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{llcl} r & +2s & = & 0\\ & 4s & = & 0\\ & s & = & 0\end{array}\right] \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{lcl} r & = & 0\\ s & = & 0\end{array}\right]$$

Das lineare Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung $r = s = 0$. Also sind die Punkte A, B linear unabhängig.

(b)

$$rA + sB + tC = 0 \quad\Leftrightarrow\quad r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\6\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{lllcl} r & +-2s & +7t & = & 0\\ 2r & & +6t & = & 0\\ 3r & +5s & -t & = & 0\end{array}\right] \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{lllcl} r & +-2s & +7t & = & 0\\ & -4s & +8t & = & 0\\ & -11 & +22 & = & 0\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{lllcl} r & +-2s & +7t & = & 0\\ & -4s & +8t & = & 0\\ & & 0 & = & 0\end{array}\right] \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{lllcl} r & +-2s & +7t & = & 0\\ & & s & = & 2t\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{lcr} r & = & -3t\\ s & = & 2t\end{array}\right]$$

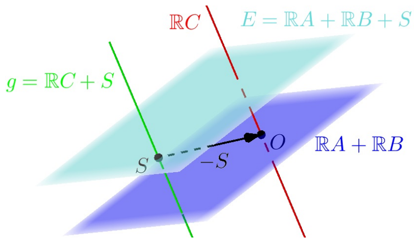
Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen: Neben der trivialen Lösung $r = s = t = 0$ hat es zum Beispiel auch noch die Lösung $t = 1, s = 2, r = -3$. Also sind die Punkte A, B, C linear abhängig.

12.1.4 Orthogonalität

Ist die Gerade g orthogonal zur Ebene E, wobei

$$g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}?$$

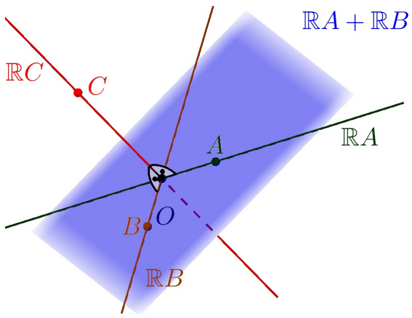
Eine Gerade $g = \mathbb{R}C + Q = \mathbb{R}C + S$ ist *orthogonal* zu einer Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + S$, wenn die Ursprungsgerade $\mathbb{R}C$ orthogonal zur Ursprungsebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ ist.



Eine Ursprungsgerade $\mathbb{R}C$ ist *orthogonal* zu einer Ursprungsebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$, wenn $\mathbb{R}C$ orthogonal zu $\mathbb{R}A$ und wenn $\mathbb{R}C$ orthogonal zu $\mathbb{R}B$ ist, wenn also

$$A \bullet C = 0 \text{ und } B \bullet C = 0$$

gilt.



Um eine zu $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ orthogonale Gerade $\mathbb{R}C$ zu finden, müssen wir also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} a_1c_1 & +a_2c_2 & +a_3c_3 & = & 0 \\ b_1c_1 & +b_2c_2 & +b_3c_3 & = & 0 \end{bmatrix}$$

mit den Unbekannten c_1, c_2 und c_3 lösen.

Da wir jeden Punkt auf der Geraden $\mathbb{R}C$ zur Darstellung dieser Geraden verwenden können, besitzt dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Eine dieser Lösungen ist durch den Punkt $C = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$ gegeben, da

$$\begin{aligned} & A \bullet C \\ = \; & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ = \; & a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) \\ & +a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ = \; & 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & B \bullet C \\ = \; & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ = \; & b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) \\ & +b_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

ist.

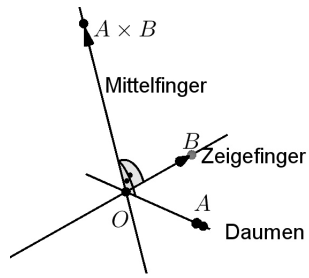
Für den Punkt $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ schreiben wir kurz $A \times B$.

Kreuzprodukt:
Für zwei Punkte A und B des Raumes heißt

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

das *Kreuzprodukt* von A und B.
Es ist $A \bullet (A \times B) = 0$ und $B \bullet (A \times B) = 0$, die Gerade $\mathbb{R}(A \times B)$ ist also orthogonal zur Geraden $\mathbb{R}A$ und zur Geraden $\mathbb{R}B$ und damit zur Ebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$.

Die Punkte A, B und $A \times B$ bilden ein *Rechtssystem*:
Zeigt der Daumen der rechten Hand vom Koordinatenursprung zum Punkt A und der Zeigefinger zum Punkt B, so zeigt der Mittelfinger zum Punkt $A \times B$.



Das Kreuzprodukt zweier Punkte kann auch mit CAS berechnet werden. Bei GeoGebra verwenden Sie dafür in der CAS-Ansicht den Befehl $Kreuzprodukt(A, B)$, in der Eingabezeile können sie zusätzlich $A \otimes B$ verwenden.

Punktprodukt $A \bullet B$	**Kreuzprodukt** $A \times B$
ist für Punkte der Ebene und des Raumes definiert	ist nur für Punkte des Raumes definiert
ist eine reelle Zahl	ist ein Punkt des Raumes

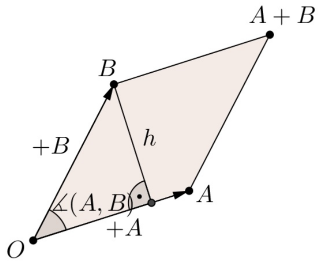
Rechengesetze für das Kreuzprodukt:
Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ Punkte sowie $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann gilt

(*i*) $A \times B = -B \times A$ (Anti-Kommutativgesetz)

(*ii*) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (Distributivgesetze)
$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

(*iii*) $(r \cdot A) \times B = r \cdot (A \times B) = A \times (r \cdot B)$.

Flächeninhalt eines Parallelogramms
Zwei Punkte A und B, die nicht auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen, definieren das Parallelogramm $OA(A+B)B$.
Für den Flächeninhalt $\mathscr{A}$ des Parallelogramms gilt



$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \text{Länge der Grundseite} \cdot \text{Länge der Höhe}\\ &= |A| \cdot |B| \cdot \sin \measuredangle(A,B).\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
|A\times B|^2 &= (A\times B)^2\\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2\\ a_3b_1 - a_1b_3\\ a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}^2\\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2\\
&= (a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2) + (a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_3^2)\\
&\quad +(a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2)\\
&= (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_3^2)\\
&\quad -(a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 + 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_3^2)\\
&= (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_3^2)\\
&\quad -((a_1b_1 + a_2b_2)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)a_3b_3 + a_3^2b_3^2)\\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^3 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\\
&= |A|^2\,|B|^2 - (A \bullet B)^2\\
&= |A|^2\,|B|^2 - (|A|\,|B| \cos\measuredangle(A,B))^2\\
&= |A|^2\,|B|^2\,(1-\cos^2\measuredangle(A,B))\\
&= |A|^2\,|B|^2 \sin^2\measuredangle(A,B).
\end{aligned}$$

Da $0° \leq \measuredangle(A,B) \leq 180°$ ist, ist $\sin\measuredangle(A,B) \geq 0$. Durch Wurzelziehen erhalten wir

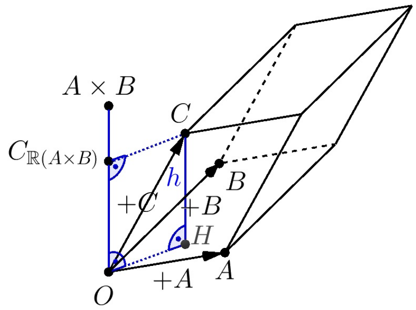
$$|A\times B| = |A|\,|B| \sin\measuredangle(A,B) = \mathscr{A}.$$

Flächeninhalt eines Parallelogramms:
Für den Flächeninhalt $\mathscr{A}$ des durch A und B definierten Parallelogramms mit den Ecken O, A, $A+B$, B gilt

$$\mathscr{A} = |A\times B| = |A| \cdot |B| \cdot \sin\measuredangle(A,B)$$

Volumen eines Spats

Drei Punkte A, B und C, die nicht in einer gemeinsamen Ursprungsebene liegen, definieren einen *Spat* - d.h. ein Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist - mit den Eckpunkten O, A, B, C, $A+B$, $A+C$, $B+C$ und $A+B+C$.
Für das Volumen $\mathscr{V}$ des Spats gilt



$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \text{Flächeninhalt der Grundfläche} \cdot \text{Länge der Höhe}\\ &= |A \times B| \cdot h.\end{aligned}$$

Die Gerade $\mathbb{R}(A \times B)$ ist orthogonal zur Ebene $E(A, B, O)$ und deshalb parallel zur Höhenlinie. Bezeichnen wir mit $C_{\mathbb{R}(A\times B)}$ den Lotfußpunkt von C auf $\mathbb{R}(A \times B)$, so ist das Viereck $OHCC_{\mathbb{R}(A\times B)}$ ein Rechteck.
Setzen wir $A' := \frac{1}{|A\times B|} \cdot A \times B$, so ist $|A'| = 1$ und es gilt wegen der Projektionseigenschaft des Skalarproduktes

$$h = \left|C_{\mathbb{R}(A\times B)}\right| = |(A' \bullet C') \cdot A'| = |A' \bullet C| = \frac{|(A \times B) \bullet C|}{|A \times B|}$$

und damit

$$\mathscr{V} = |(A \times B) \bullet C| \, .$$

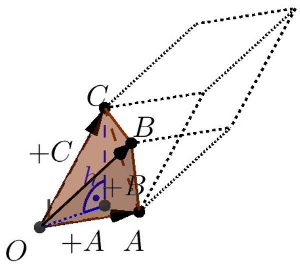
Volumen eines Spats:
Für das Volumen $\mathscr{V}$ des durch die Punkte A, B, C definierten Spats gilt

$$\mathscr{V} = |(A \times B) \bullet C| \, .$$

Der Term $(A \times B) \bullet C$ wird deshalb auch *Spatprodukt* genannt.

Volumen einer Pyramide

Drei Punkte A, B, C, die nicht in einer gemeinsamen Ursprungsebene liegen, definieren eine *Pyramide* mit dreieckiger Grundfläche ABO und Spitze C. Die Grundfläche ist halb so groß wie die Grundfläche des dazugehörigen Spats. Deshalb gilt für das Volumen $\mathscr{V}$ der Pyramide



$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \frac{1}{3} \cdot \text{Flächeninhalt der Grundfläche} \cdot \text{Länge der Höhe}\\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |A \times B| \frac{|(A \times B) \bullet C|}{|A \times B|}\\ &= \frac{1}{6} |(A \times B) \bullet C| \, .\end{aligned}$$

Volumen einer Pyramide:
Für das Volumen $\mathscr{V}$ der durch die Punkte A, B und C definierten Pyramide $OABC$ gilt

$$\mathscr{V} = \frac{1}{6}\left|(A \times B) \bullet C\right|.$$

Beispiel 1
Beweisen Sie die Distributivgesetze (ii).

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned}
(A+B)\times C &= \begin{pmatrix}(a_2+b_2)c_3-(a_3+b_3)c_2\\(a_3+b_3)c_1-(a_1+b_1)c_3\\(a_1+b_1)c_2-(a_2+b_2)c_1\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}a_2c_3-a_3c_2+b_2c_3-b_3c_2\\a_3c_1-a_1c_3+b_3c_1-b_1c_3\\a_1c_2-a_2c_1+b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a_2c_3-a_3c_2\\a_3c_1-a_1c_3\\a_1c_2-a_2c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix} &&= A\times C + B\times C
\end{aligned}$$

und damit auch

$$A\times(B+C) \overset{(i)}{=} -(B+C)\times A \overset{(ii)}{=} -(B\times A+C\times A) = -B\times A-C\times A \overset{(i)}{=} A\times B+A\times C.$$

Beispiel 2.
Beweisen Sie: Liegen zwei Punkte A und B auf derselben Ursprungsgeraden, so ist $A\times B = O$.

Lösung:
Liegt etwa B auf der Geraden $\mathbb{R}A$, so ist $B = rA$ für ein $r\in\mathbb{R}$ und damit

$$A\times B = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}ra_1\\ra_2\\ra_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2(ra_3)-a_3(ra_2)\\a_3(ra_1)-a_1(ra_3)\\a_1(ra_2)-a_2(ra_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Beispiel 3
Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix}3\\9\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Lösung:

$(a)\quad M_{AC}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\9\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix},\ M_{BD}=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}$

Die Diagonalen besitzen einen gemeinsamen Mittelpunkt, das Viereck ist also ein Parallelogramm.

(b) Das Parallelogramm wird durch die Punkte $B-A$ und $D-A$ definiert. Deshalb gilt für den Flächeninhalt $\mathscr{A}$ des Parallelogramms

$$\mathscr{A}=|(B-A)\times(D-A)|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-5\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\-6\\2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-16\\4\\-4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{288}\approx 16,97.$$

Beispiel 4

Berechnen Sie das Volumen des Spats $ABCDEFGH$ mit den Eckpunkten

$A=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\8\\-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\8\\-1\end{pmatrix}$ und $E=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$.

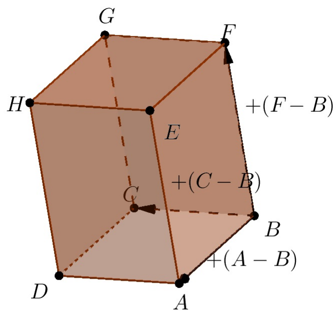
Fertigen Sie ein Schrägbild an.

Lösung:

Das Spat wird durch die Punkte $A-B=\begin{pmatrix}0\\-7\\0\end{pmatrix}$,

$C-B=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$ und $F-B=E-A=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ definiert:

$$\mathscr{V}=\left|\left(\begin{pmatrix}0\\-7\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}\right)\bullet\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}\right|=84.$$



Beispiel 5

Gegeben sind die Punkte $A=\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ und $D=\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie das Volumen $\mathscr{V}$ der Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C, D.

Lösung:

Die Pyramide wird durch die Punkte $B-A=\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$, $C-A=\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$ und

$D-A=\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix}$ definiert. Also ist $\mathscr{V}=\frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}\right)\bullet\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix}\right|=\frac{5}{3}$.

12.1.5 Koordinatendarstellung und Normalendarstellung von Ebenen

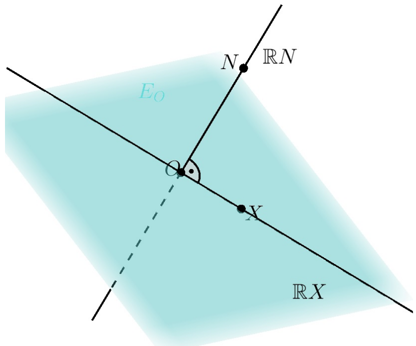
Damit die Crêpe gleichmäßig dünn wird, wird der Teigrechen gedreht.

Wir betrachten eine Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ und die dazugehörige Ursprungsebene $E_O = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$.

Ist $\mathbb{R}N$ orthogonal zur Ursprungsebene E_O, so besteht die Ursprungsebene E_O aus allen Punkten X, für die $N \bullet X = 0$ ist. Es ist also

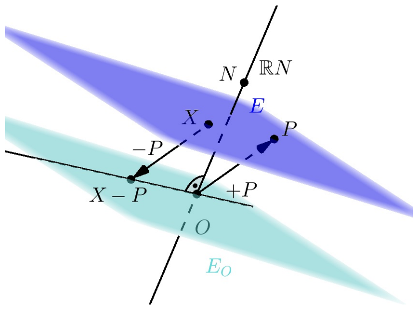
$$E_O = \{X \mid X \bullet N = 0\}.$$

Wir können zum Beispiel $N = A \times B$ wählen.



Ein Punkt X liegt genau dann in einer Ebene E durch den Punkt P, wenn der Punkt $X - P$ in der dazugehörigen Ursprungsebene E_O liegt, wenn also $(X - P) \bullet N = 0$ ist. Es ist also

$$E = \{X \mid (X - P) \bullet N = 0\}.$$



Die Darstellungsform $E = \{X \mid (X - P) \bullet N = 0\}$ heißt *Normalendarstellung der Ebene E*.

Ist $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e = P \bullet N = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$, so ist

$$\begin{aligned} E &= \{X \mid (X - P) \bullet N = 0\} \\ &= \{X \mid X \bullet N - P \bullet N = 0\} \\ &= \{X \mid X \bullet N = P \bullet N\} \\ &= \{X \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = e\}. \end{aligned}$$

Die letzte Darstellungsform heißt *Koordinatendarstellung der Ebene E*.

Jede Ebene E lässt sich in

- *Parameterdarstellung* $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$,
  die parallel zur Ursprungsebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ ist und den Punkt P beinhaltet,
- *Normalendarstellung* $E = \{X \mid (X - P) \bullet N = 0\}$,
  wobei P ein Punkt auf der Ebene und die Gerade $\mathbb{R}N$ orthogonal zur Ebene ist,
- *Koordinatendarstellung* $E = \{X \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = e\}$,
  wobei mindestens eine der Variablen a, b oder c ungleich 0 sein muss,

angeben.
Ist $E = \{X \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = e\}$ eine Koordinatendarstellung von E, so ist die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal zur Ebene E.
Ist $|N| = 1$, so heißt $E = \{X \mid (X - P) \bullet N = 0\}$ *Hessesche Normalendarstellung von* E.

Beipiel 1: Von der Parameterdarstellung zur Normalendarstellung und Koordinatendarstellung

Geben Sie die Ebene $E = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in Normalendarstellung, Koordinatendarstellung und Hessescher Normalendarstellung an.

Lösung:

Mithilfe des Kreuzproduktes erhalten wir einen Punkt N, so dass $\mathbb{R}N$ orthogonal zu E ist.

$$N = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir eine Normalendarstellung von E.

$$E = \left\{ X \mid \left(X - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Eine Koordinatendarstellung erhalten wir durch Umformung der definierenden Gleichung und Berechnung des Punktproduktes.

$$E = \left\{ X \mid X \bullet \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \{X \mid 9x_1 + 19x_2 + 13x_3 = 54\}$$

Es ist $|N| = \sqrt{611}$. Durch Normierung von N erhalten wir eine Hessesche Normalendarstellung von E.

$$E = \left\{ X \mid \left(X - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{611}} \\ \frac{19}{\sqrt{611}} \\ \frac{13}{\sqrt{611}} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Beipiel 2: Von der Koordinatendarstellung zur Parameterdarstellung und Normalendarstellung
Geben Sie die Ebene $E = \{X \mid 9x_1 + 19x_2 + 13x_3 = 54\}$ in Parameterdarstellung und Normalendarstellung an.

Lösung:

Für jeden Punkt X der Ebene ist $9x_1 + 19x_2 + 13x_3 = 54$ und damit $x_1 = -\frac{19}{9}x_2 - \frac{13}{9}x_3 + \frac{54}{9}$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{9}x_2 - \frac{13}{9}x_3 + \frac{54}{9} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{19}{9} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{13}{9} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{54}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir eine Parameterdarstellung der Ebene E.

$$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\frac{19}{9} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\frac{13}{9} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{54}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Koordinatendarstellung entnehmen wir, dass $\mathbb{R}N$ orthogonal zu E ist. Aus der Parameterstellung entnehmen wir, dass der Punkt P in der Ebene E liegt.

$$N = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{54}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten damit eine Normalendarstellung von E.

$$E = \left\{ X \mid \left(X - \begin{pmatrix} \frac{54}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Beipiel 3: Von der Normalendarstellung zur Parameterdarstellung
Geben Sie die Ebene $E = \left\{ X \mid \left(X - \begin{pmatrix} \frac{54}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ in Parameterdarstellung und in Koordinatendarstellung an.

Lösung:

Wir könnten die Ebene E zunächst in Koordinatendarstellung und anschließend in Parameterdarstellung überführen. Es geht aber auch kürzer:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{54}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Aus der Normalendarstellung entnehmen wir, dass $P \in E$ und $R \perp E$ ist. Außerdem ist $\mathbb{R}A \perp \mathbb{R}N$ und $\mathbb{R}B \perp \mathbb{R}N$.

$$A = \begin{pmatrix} -19 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir eine Parameterdarstellung von E.

$$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -19 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{54}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.2 Lagebeziehungen

12.2.1 Lagebeziehungen zweier Geraden

Schneiden sich die Flugbahnen der Flugzeuge?

In der Ebene schneiden sich zwei nicht-parallele Geraden stets in einem Punkt. Im Raum können sich zwei nicht-parallele Geraden in einem Punkt schneiden, sie können jedoch auch keinen Schnittpunkt besitzen. Derartige Geraden nennen wir *windschief*.

Damit gibt es folgende Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ und $g' = \mathbb{R}A' + P'$ im Raum.

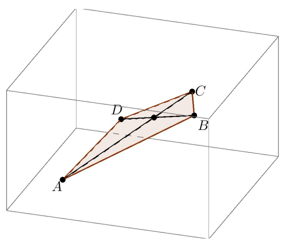
<table>
<tr><td colspan="2">parallel, $g \parallel g'$
A ist ein Vielfaches von A'
(es gibt ein $r \in \mathbb{R}$ mit $A = rA'$)</td><td colspan="2">nicht parallel, $g \nparallel g'$
A ist kein Vielfaches von A'
(es gibt kein $r \in \mathbb{R}$ mit $A = rA'$)</td></tr>
<tr><td>verschieden
P' liegt nicht auf g</td><td>gleich
P' liegt auf g</td><td>schneidend
g und g' haben einen gemeinsamen Punkt</td><td>windschief
g und g' haben keinen gemeinsamen Punkt</td></tr>
</table>

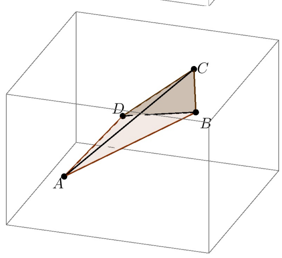
Beispiel 1: Ebene Vierecke

Ein Viereck $ABCD$ setzt sich aus den Dreiecken ABD und BCD zusammen. Diese beiden Dreiecke können in einer Ebene liegen, oder sie können einen „*Knick*" bilden. Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Vierecken $ABCD$ um ebene Vierecke handelt.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$





Lösung:
Die Vierecke sind eben, wenn die Diagonalen $g(A,C)$ und $g(B,D)$ nicht windschief sind.

(a) An den Parameterdarstellungen der Diagonalen sehen wir, dass diese nicht parallel zueinander sind. Die Geraden können also windschief sein oder sich in einem Punkt schneiden.

$$g(A,C) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-5\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$g(B,D) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$$

Wir suchen gemeinsame Punkte der Diagonalen.

$$r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-5\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-r & -4s & = & 2\\-5r & -s & = & 3\\-4r & -s & = & 1\end{bmatrix}$$

Die Diagonalen besitzen keine gemeinsamen Punkte und sind folglich windschief. Das Viereck ist nicht eben.

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-r & -4s & = & 2\\ & -19s & = & 7\\ & -15s & = & 7\end{bmatrix}$$

(b) An den Parameterdarstellungen der Diagonalen sehen wir, dass diese nicht parallel zueinander sind. Die Geraden können also windschief sein oder sich in einem Punkt schneiden.

$$g(A,C) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$g(B,D) = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

Wir suchen gemeinsame Punkte der Diagonalen.

$$r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-r & -s & = & 1\\-3r & +3s & = & 0\\-r & -s & = & 1\end{bmatrix}$$

Die Diagonalen besitzen genau einen gemeinsamen Punkt und sind folglich nicht windschief. Das Viereck ist eben.

$$\Leftrightarrow s = -\frac{1}{2}, r = -\frac{1}{2}$$

Beispiel 2: Abstand Punkt-Gerade

Sei $X = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$. Sonja möchte den Abstand des Punktes X von der Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ berechnen. Sie schreibt:

Da $\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$ *ist, ist die Gerade* $l = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$ *das Lot auf* g *durch* X*. Der Lotfußpunkt* X_g *ist der Schnittpunkt von* g *und* l*, der Abstand des Punktes* X *von der Geraden* g *ist also gleich der Länge der Strecke* XX_g*.*

(a) Führen Sie das Verfahren von Sonja aus und begründen Sie, weshalb das Verfahren nicht funktioniert.

(b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes X von der Geraden g, indem Sie den Abstand des Punktes $X' := X - P$ von der Geraden $\mathbb{R}A$ berechnen. Berechnen Sie dazu den Lotfußpunkt $X'_{\mathbb{R}A}$ mithilfe der Projektionseigenschaft des Punktproduktes.

Lösung:

(a) Wir suchen zunächst gemeinsame Punkte der Geraden g und l.

$$r \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -r & +2s & = & 2 \\ 2r & +s & = & 2 \\ 4r & & = & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -r & +2s & = & 2 \\ -4r & & = & -2 \\ & 0 & = & -1 \end{bmatrix}$$

Die Geraden g und l besitzen also keine gemeinsamen Punkte. Da sie auch nicht parallel zueinander sind, sind sie windschief. Die Gerade l ist also *nicht* das Lot auf g durch X. Sonjas Verfahren funktioniert nur in der Ebene.

(b) Der Abstand des Punktes X von der Geraden g ist gleich dem Abstand des Punktes $X' := X - P = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ von der Geraden $\mathbb{R}A$.

Normierung von A

$$|A| = \sqrt{21}, A' = \frac{1}{|A|} \cdot A = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot A$$

Berechnung des Lotfußpunktes

$$X'_{\mathbb{R}A} = (X' \bullet A') \cdot A' = \begin{pmatrix}\frac{2}{21}\\\frac{-4}{21}\\\frac{-8}{21}\end{pmatrix}$$

Abstandsberechnung

$$d = |X' - X'_{\mathbb{R}A}| = \left|\begin{pmatrix}\frac{40}{21}\\\frac{46}{21}\\\frac{-13}{21}\end{pmatrix}\right| \approx 2,97$$

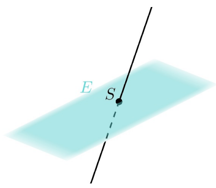
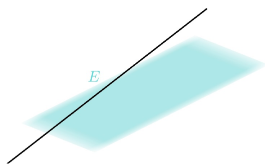
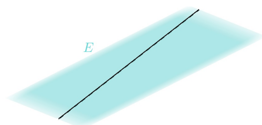
12.2.2 Lagebeziehungen von Gerade und Ebene

(a) Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen der Lage einer Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ und einer Geraden $g = \mathbb{R}C + Q$ im Raum und der Anzahl der Lösungstripel (r, s, t) des linearen Gleichungssystems $rA + sB + P = tC + Q$.

(b) Untersuchen Sie die Lage der Ebene E und der Geraden g, wobei

$$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-6\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Für die Lage einer Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ und einer Geraden $g = \mathbb{R}C + Q$ gibt es drei mögliche Fälle:

Die Gerade g schneidet die Ebene E in genau einem Punkt S	Die Gerade g ist parallel zur Ebene E, jedoch nicht in der Ebene enthalten	Die Gerade g ist parallel zur Ebene E und in der Ebene enthalten
		
Das Gleichungssystem $rA + sB + P = tC + Q$ hat genau eine Lösung.	Das Gleichungssystem $rA + sB + P = tC + Q$ hat keine Lösung.	Das Gleichungssystem $rA + sB + P = tC + Q$ hat mehr als eine Lösung.

Beispiel

Untersuchen Sie die Lage der Ebene $E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ und der Geraden g.

(a) $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ $\quad(b)$ $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ $\quad(c)$ $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Die Anzahl der gemeinsamen Punkte ist gleich der Anzahl der Lösungstripel (r, s, t) der nebenstehenden Gleichung. Wir bestimmen die Lösungen durch Äquivalenzumformungen.

$$r\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{llllr}3r & +2s & -2t & = & 2\\ -6r & +4s & & = & 0\\ 3r & & -t & = & 1\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{llllr}3r & +2s & -2t & = & 2\\ -6r & +4s & & = & 0\\ & & 0 & = & 0\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow s=\frac{3}{2}r \text{ und } t=3r-1$$

Das Gleichungssystem hat mehr als eine Lösung, nämlich beispielsweise $r=0$, $s=0$, $t=-1$ und $r=2$, $s=3$, $t=5$. Die Gerade g und die Ebene E besitzen mehr als einen gemeinsamen Punkt. Die Gerade g verläuft in der Ebene E.

(b) Die Anzahl der gemeinsamen Punkte ist gleich der Anzahl der Lösungstripel (r, s, t) der nebenstehenden Gleichung. Wir bestimmen die Lösungen durch Äquivalenzumformungen.

$$r\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\6\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{llllr}3r & +2s & t & = & 3\\ -6r & +4s & -6t & = & -1\\ 3r & & +2t & = & 0\end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{llllr}3r & +2s & t & = & 3\\ 12r & & +8t & = & 7\\ & & 0 & = & 14\end{array}\right]$$

Die letzte Gleichung ist nicht erfüllbar. Also hat das Gleichungssystem keine Lösung. Die Gerade g und die Ebene E besitzen keine gemeinsamen Punkte. Also ist g parallel zu E.

(c) Die Anzahl der gemeinsamen Punkte ist gleich der Anzahl der Lösungstripel (r, s, t) der nebenstehenden Gleichung. Wir bestimmen die Lösungen durch Äquivalenzumformungen.

$$r\begin{pmatrix}3\\-6\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{llllr}3r & +2s & -t & = & -1\\ -6r & +4s & +t & = & 6\\ 3r & & -2t & = & -2\end{array}\right]$$

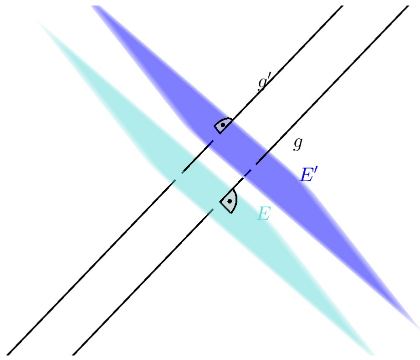
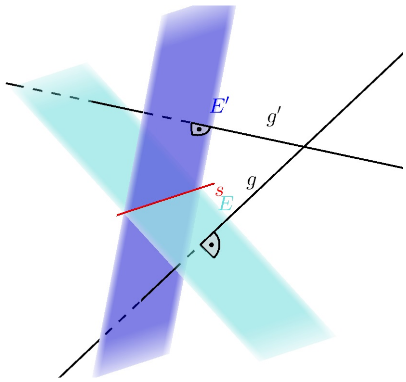
$$\Leftrightarrow t=0, r=-\frac{2}{3}, s=\frac{1}{2}$$

$$S=0\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung, nämlich $r=-\frac{2}{3}, s=\frac{1}{2}, t=0$. Die Gerade g und die Ebene E haben also genau einen gemeinsamen Schnittpunkt S.

12.2.3 Lagebeziehungen zweier Ebenen

Sind die Ebenen des Kratzbaumes parallel zueinander?

Parallele Ebenen	**Nichtparallele Ebenen**
Zwei Ebenen E und E' sind genau dann parallel zueinander, wenn es eine zu E orthogonale Gerade gibt, die auch zu E' orthogonal ist. Ist g orthogonal zu E und g' orthogonal zu E', so ist g parallel zu g'.	Zwei Ebenen E und E' sind genau dann nicht parallel zueinander, wenn es eine zu E orthogonale Gerade gibt, die *nicht* zu E' orthogonal ist. Ist g orthogonal zu E und g' orthogonal zu E', so ist g *nicht* parallel zu g'. Die Ebenen besitzen eine gemeinsame *Schnittgerade* s.
	
$g' \perp E$ $g' \parallel g$	$g' \not\perp E$ $g' \nparallel g$

Zwei Ebenen sind entweder parallel zueinander oder sie haben eine gemeinsame *Schnittgerade*. Schneidet eine Ebene E eine der Koordinatenebenen, so nennen wir die Schnittgerade auch *Spurgerade*, die wir mit $g_{x_1x_2}$, $g_{x_2x_3}$ bzw. $g_{x_1x_3}$ bezeichnen.
Besitzen zwei parallele Ebenen einen gemeinsamen Punkt, so sind sie gleich.

Beispiel 1: Parameterdarstellung/Koordinatenform
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen

$$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \text{ und } E' = \{X \mid 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 14\}.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden.

Lösung:
Aus der Koordinatendarstellung von E' entnehmen wir, dass $\mathbb{R}N' \perp E'$ ist.

$$N' = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}N'$ ist aber nicht orthogonal zu E. Deshalb sind die Ebenen E und E' nicht parallel zueinander und schneiden sich in einer Geraden g

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

Wir bestimmen die Gleichung der Schnittgeraden, indem wir gemeinsame Punkte der Ebenen E und E' suchen.Es sind äquivalent:

X ist ein gemeinsamer Punkt der Ebenen E und E'

$$\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

und

$14 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

und

$14 = 2(r+2) + 3(2r+s) + 4(-3r-s+2) = -4r - s + 12$

$$\Leftrightarrow \quad X = r\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + (-4r-2)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad X \text{ liegt auf der Geraden } \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}.$$

Die Ebenen E und E' schneiden sich also in der Geraden $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Beispiel 2: Koordinatenform/Koordinatenform
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen

$$E = \{X \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 8\} \text{ und } E' = \{X \mid 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 14\}.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden.

Lösung:

Die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ist orthogonal zur Ebene E, die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ ist orthogonal zur Ebene E', aber die Geraden sind nicht parallel zueinander. Die Ebenen E und E' sind also nicht parallel zueinander, sondern schneiden sich in einer Geraden g.

Wir bestimmen die gemeinsamen Punkte von E und E'. Ein Punkt X liegt genau dann in der Ebene E und in der Ebene E', wenn seine Koordinaten das nebenstehende Gleichungssystem erfüllen.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 14 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow &\begin{bmatrix} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 8 \\ & x_2 & -2x_3 & = & 2 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow &\begin{bmatrix} x_2 & = & 2x_3 + 2 \\ x_1 & = & -2x_2 + x_3 + 8 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow &\begin{bmatrix} x_2 & = & 2x_3 + 2 \\ x_1 & = & -3x_3 + 4 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow X = &\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 + 4 \\ 2x_3 + 2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow X \in \mathbb{R} &\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Schnittgerade ist also

$$g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3: Normalenform/Parameterdarstellung
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen

$$E = \left\{ X \mid \left(X - \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \text{ und } E' = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden.

Lösung:

Die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ ist orthogonal zur Ebene E. Da $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix} = 0$ ist, ist die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ auch orthogonal zur Ebene E'. Deshalb sind die Ebenen E und E' parallel zueinander. Der Punkt $P = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$ liegt in der Ebene E'. Da

$$\left(\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\16\\7\end{pmatrix}\right)\bullet\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-14\\-2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = 0$$

ist, liegt der Punkt P ebenfalls in der Ebene E'. Die parallelen Ebenen E und E' besitzen also einen gemeinsamen Punkt und sind deshalb gleich.

Beispiel 4: Parameterdarstellung/Parameterdarstellung
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen

$$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ und } E' = \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden.

Lösung:

Es ist $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\\6\end{pmatrix}$, also ist die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-4\\1\\6\end{pmatrix}$ orthogonal zur Ebene E. Es ist $\begin{pmatrix}-4\\1\\6\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = -5 \neq 0$, also ist die Gerade $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-4\\1\\6\end{pmatrix}$ nicht orthogonal zur Ebene E'. Deshalb sind die Ebenen E und E' nicht parallel zueinander, sie schneiden sich also in einer Geraden g.

Ein Punkt X ist genau dann ein gemeinsamer Punkt von E und E', wenn er sowohl von der Form $X = r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ als auch von der Form $t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$ ist. Wir erhalten das nebenstehende Gleichungssystem und können aus der letzten Gleichung t in Abgängigkeit von u ermitteln:
$t = \frac{4}{17} - \frac{15}{17}u$.

Wir setzen dies in die Darstellung von X ein und erhalten, dass der Punkt X auf der Schnittgeraden $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}6\\36\\-32\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{63}{17}\\\frac{38}{17}\\\frac{89}{17}\end{pmatrix}$ liegt.

$$\begin{aligned}
&r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\
&= t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{rrrrcr} r & +2s & -3t & -3u & = & 2\\ -2r & +2s & -t & -3u & = & 0\\ r & +s & -t & +u & = & 2\end{array}\right]\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{rrrrcr} r & +2s & -3t & -3u & = & 2\\ & 6s & -7t & -9u & = & 4\\ & & 17t & +15u & = & 4\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &= t\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\\
&= (\frac{4}{17}-\frac{15}{17}u)\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}\\
&= u\begin{pmatrix}\frac{6}{17}\\\frac{36}{17}\\-\frac{32}{17}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{63}{17}\\\frac{38}{17}\\\frac{89}{17}\end{pmatrix}\\
g &= \mathbb{R}\begin{pmatrix}\frac{6}{17}\\\frac{36}{17}\\-\frac{32}{17}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{63}{17}\\\frac{38}{17}\\\frac{89}{17}\end{pmatrix}\\
&= \mathbb{R}\begin{pmatrix}6\\36\\-32\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{63}{17}\\\frac{38}{17}\\\frac{89}{17}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel 5: Spurgerade
Bestimmen Sie die Spurgerade $g_{x_1x_2}$ der Ebene

$$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}5\\12\\12\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}5\\-8\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\8\\-9\end{pmatrix}.$$

Lösung:

Ein Punkt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ liegt genau dann auf der Spurgeraden $g_{x_1x_2}$, wenn er in der Ebene E und der Koordinatenebene $E_{x_1x_2}$ liegt, wenn er also von der Form

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

ist und wenn $x_3 = 0$ ist. $x_3 = 0$ bedeutet $12r + 3s - 9 = 0$. Setzen wir dies in die Darstellung von X ein, so erhalten wir für die Spurgerade

$$g_{x_1x_2} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -15 \\ 44 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = r \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

und $12r + 3s - 9 = 0$

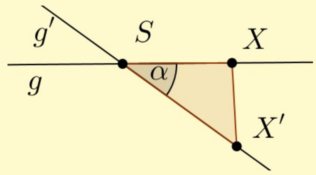
$$\Leftrightarrow X = r \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} + (3 - 4r) \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} -15 \\ 44 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} -15 \\ 44 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

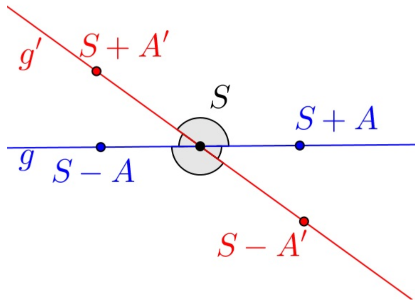
12.2.4 Schnittwinkel

Nehmen Sie Stellung zu der folgenden Aussage:
Um die Größe α des Winkels zwischen zwei Geraden g und g' zu berechnen, wählen wir zwei beliebige Punkte X und X' auf diesen Geraden und berechnen $\measuredangle(X, S, X')$.



Schnittwinkel zweier Geraden
Wenn sich zwei Geraden $g = \mathbb{R}A + S$ und $g' = \mathbb{R}A' + S$ im Punkt S schneiden, entstehen vier Winkel. Unter der *Größe des Schnittwinkels $\measuredangle(g, g')$ der Geraden g und g'* verstehen wir die Größe der Winkel, die kleiner oder gleich 90° sind.

Es ist



$$\begin{aligned}
\cos\measuredangle(S + A', S, S + A) &= \cos\measuredangle(A', A) \\
&= \frac{A \bullet A'}{|A|\,|A'|}, \\
\cos\measuredangle(S + A', S, S - A) &= \cos\measuredangle(A', -A) \\
&= \frac{A \bullet (-A')}{|A|\,|-A'|} \\
&= -\frac{A \bullet A'}{|A|\,|A'|} \\
&= -\cos\measuredangle(S + A', S, S + A).
\end{aligned}$$

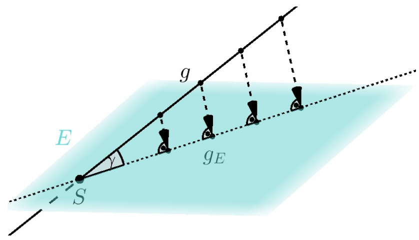
Da $\cos(\alpha) \geq 0$ genau dann, wenn $0 \leq \alpha \leq 90°$ ist, erhalten wir den kleineren der beiden Winkel, indem wir Betragsstriche setzen:

$$\cos\measuredangle(g, g') = \frac{|A \bullet A'|}{|A|\,|A'|}.$$

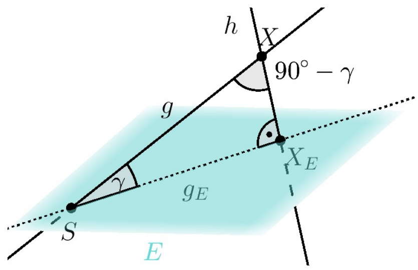
Schnittwinkel Gerade/Gerade:
Für die Größe $\measuredangle(g, g')$ des Schnittwinkels zweier sich schneidender Geraden $g = \mathbb{R}A + S$ und $g' = \mathbb{R}A' + S$ gilt

$$\cos\measuredangle(g, g') = \frac{|A \bullet A'|}{|A|\,|A'|}.$$

Schnittwinkel von Gerade und Ebene
Schneidet eine Gerade $g = \mathbb{R}C + S$ eine Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + S$, so verstehen wir unter dem *Schnittwinkel* $\measuredangle(g, E)$ *der Geraden* g *mit der Ebene* E den Winkel zwischen der Geraden g und der Projektionsgeraden g_E, die wir erhalten, wenn wir jeden Punkt der Geraden g orthogonal auf die Ebene E projizieren.



Ist X ein Punkt auf der Geraden $g = \mathbb{R}C + S$ und $h = \mathbb{R}N + X$ das Lot durch X auf E mit Lotfußpunkt X_E, so ist das Dreieck SXX_E rechtwinklig bei X_E. Deshalb sind alle Innenwinkel kleiner als $90°$ und es ist $\measuredangle(h, g) = 90° - \gamma$.



Wir erhalten

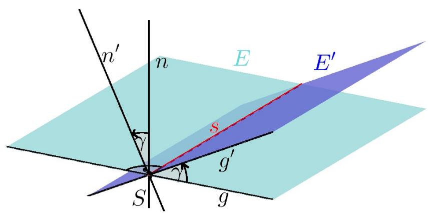
$$\sin \measuredangle(g, E) \;=\; \sin\gamma = \cos(90° - \gamma) = \cos \measuredangle(h, g) = \frac{|N \bullet C|}{|N|\,|C|}.$$

Schnittwinkel Gerade/Ebene:
Schneidet eine Gerade $g = \mathbb{R}C + S$ eine Ebene E und ist $\mathbb{R}N \perp E$, so gilt für die Größe $\measuredangle(g, E)$ des Schnittwinkels

$$\sin \measuredangle(g, E) = \frac{|N \bullet C|}{|N|\,|C|}.$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

Unter der Größe des *Schnittwinkels* $\measuredangle(E, E')$ zweier sich schneidender Ebenen E und E' verstehen wir die Größe des Schnittwinkels der Geraden g in der Ebene E und der Geraden g' in der Ebene E', die orthogonal zur Schnittgeraden s sind und durch einen gemeinsamen Punkt S verlaufen.
Dieser Winkel ist gleich dem Schnittwinkel $\measuredangle(n, n')$ der zur Ebene E orthogonalen Geraden $n = \mathbb{R}N + S$ und der zur Ebene E' orthogonalen Geraden $n' = \mathbb{R}N' + S$.



Schnittwinkel Ebene/Ebene:
Schneiden sich zwei Ebenen E und E' und ist $\mathbb{R}N \perp E$ und $\mathbb{R}N' \perp E'$, so gilt für die Größe des Schnittwinkels $\measuredangle(E, E')$ der Ebenen

$$\cos\measuredangle(E, E') = \cos\measuredangle(\mathbb{R}N, \mathbb{R}N') = \frac{|N \bullet N'|}{|N|\,|N'|}.$$

Beispiel 1: Schnittwinkel Gerade/Gerade
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden

$$g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \text{ und } g' = \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Lösung:
Da $1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ ist, schneiden sich die beiden Geraden im Punkt $S = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$. Für die Größe des Schnittwinkels gilt:

$$\cos\measuredangle(g, g') = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{7}}, \text{ also } \measuredangle(g, g') = \arccos(\tfrac{2}{\sqrt{7}}) \approx 40,89°.$$

Beispiel 2: Schnittwinkel Gerade/Ebene
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Geraden $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ und der Ebene E.

(a) $E = \left\{X \mid \left(X - \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} = 0\right\}$ $\quad$ (b) $E = \{X \mid 3x_1 - 4x_2 + x_1 = 7\}$

(c) $E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$

Lösung:

(a) E und g schneiden sich im Punkt $\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$. Es ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}\perp E$, also

$$\sin\measuredangle(g,E) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{30}\sqrt{6}}.$$

Der Schnittwinkel ist $\measuredangle(g,E) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{30}\sqrt{6}} \approx 4,27°$.

(b) Da $3\cdot 4 - 4\cdot 2 + 1\cdot 3 = 7$ ist, schneiden sich E und g im Punkt $\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$.

Es ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\perp E$, also $\sin\measuredangle(g,E) = \frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{11}{\sqrt{26}\sqrt{6}}$.

Der Schnittwinkel ist $\measuredangle(g,E) = \arcsin\frac{11}{\sqrt{26}\sqrt{6}} \approx 61,73°$.

(c) E und g schneiden sich im Punkt $\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$. Es ist $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\6\\-7\end{pmatrix}$, also

ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\6\\-7\end{pmatrix}\perp E$. Damit ist $\sin\measuredangle(g,E) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\6\\-7\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-2\\6\\-7\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{17}{\sqrt{89}\sqrt{6}}$.

Der Schnittwinkel ist $\measuredangle(g,E) = \arcsin\frac{17}{\sqrt{89}\sqrt{6}} \approx 47,36°$.

Beispiel 3: Schnittwinkel Ebene/Ebene
Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen

$$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{und } E' = \{X \mid 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5\}.$$

Lösung:

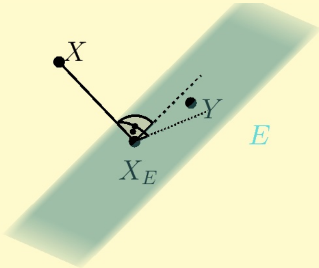
Ist $N = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $N' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, so ist $\mathbb{R}N \perp E$ und $\mathbb{R}N' \perp E'$.
Da $\mathbb{R}N \neq \mathbb{R}N'$ ist, sind die Ebenen nicht parallel zueinander und schneiden sich deshalb. Für die Größe des Schnittwinkels ergibt sich

$$\cos \measuredangle(E, E') = \frac{|N \bullet N'|}{|N|\,|N'|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{25}{5\sqrt{2}\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{42}},$$

also ist $\measuredangle(E, E') = \arccos \frac{5}{\sqrt{42}} \approx 39,51^\circ$.

12.2.5 Abstand Punkt-Ebene

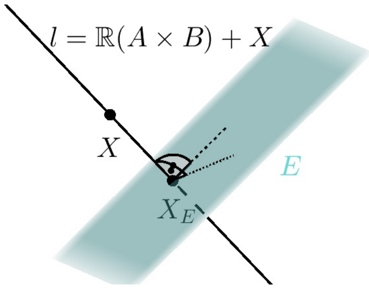
(a) Begründen Sie, weshalb der Lotfußpunkt X_E der Punkt der Ebene E ist, der den kleinsten Abstand vom Punkt X hat.



(b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $X = \begin{pmatrix} -21 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}$ von der Ebene

$$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abstandsberechnung mithilfe der Lotgeraden



Der Abstand eines Punktes X von einer Ebene

$$E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$$

ist die kürzeste Entfernung eines Punktes der Ebene und dem Punkt X.
Der Lotfußpunkt X_E ist der Punkt der Ebene E, der den kleinsten Abstand von X hat. Er ist der Schnittpunkt der Lotgeraden $l = \mathbb{R}(A \times B) + X$ mit der Ebene E.
Der Abstand des Punktes X von der Ebene E ist also gleich der Länge der Strecke XX_E.

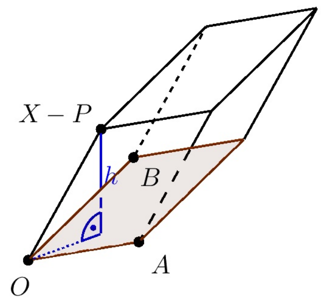
Berechnung des Abstandes Punkt/Ebene:
Der Abstand des Punktes X von der Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ kann folgendermaßen berechnet werden:

- Aufstellen der Lotgeraden l durch X auf E

$$l = \mathbb{R}(A \times B) + X,$$

- Berechnung des Lotfußpunktes X_E als Schnittpunkt von l und E,
- Berechnung der Länge der Strecke XX_E.

Abstandsberechnung mithilfe des Spatproduktes



Der Abstand des Punktes X von der Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ ist gleich dem Abstand des Punktes $X - P$ von der Ursprungsebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$. Dieser Abstand ist wiederum gleich der Länge der Höhe h in dem durch die Punkte A, B und $X - P$ definierten Spat.
Die Grundfläche ist ein Parallelogramm und hat den Flächeninhalt $\mathscr{A} = |A \times B|$.
Das Volumen des Spats ist

$$\mathscr{V} = |(A \times B) \bullet (X - P)|\,.$$

Aus der Formel $\mathscr{V} = \mathscr{A} \cdot h$ erhalten wir

$$h = \frac{\mathscr{V}}{\mathscr{A}} = \frac{|(A \times B) \bullet (X - P)|}{|A \times B|}.$$

Abstandsformel Punkt/Ebene:
Der Abstand d des Punktes X von der Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ ist gleich der Länge der Höhe in dem durch A, B und $X - P$ definierten Spat:

$$d = \frac{\text{Volumen des Spats}}{\text{Flächeninhalt der Grundfläche}} = \frac{|(A \times B) \bullet (X - P)|}{|A \times B|}.$$

Ist $\mathbb{R}N \perp E$, so ist folglich

$$d = \frac{|N \bullet (X - P)|}{|N|}.$$

Ist die Ebene E in Hessescher Normalendarstellung $E = \{Y \mid (Y - P) \bullet N = 0\}$, $|N| = 1$ gegeben, so vereinfacht sich dies zu

$$d = |N \bullet (X - P)|\,.$$

Wir erhalten den Abstand des Punktes X von der Ebene E also, indem wir ihn in die definierende Gleichung der Ebene in Hessescher Normalendarstellung einsetzen.

Ist $E = \{Y \mid ay_1 + by_2 + cy_3 = e\}$, so gilt für $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, dass $\mathbb{R}N \perp E$ ist. Außerdem gilt für jeden Punkt P der Ebene, dass $P \bullet N = e$ ist. Also gilt für den Abstand des Punktes X von der Ebene E

$$d = \frac{|N \bullet X - N \bullet P|}{|N|} = \frac{|N \bullet X - e|}{|N|}.$$

Abstandsformel Punkt/Ebene in Koordinatendarstellung:
Für den Abstand d des Punktes X von der Ebene $E = \{Y \mid ay_1 + by_2 + cy_3 = e\}$ gilt

$$d = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 - e|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Beispiel 1

Berechnen Sie den Abstand d des Punktes $X = \begin{pmatrix} 25 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix}$ von der Ebene

$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Lösung:
Das Lot auf E durch X ist die Gerade

$$l = \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 25 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Der Lotfußpunkt X_E ist ein gemeinsamer Punkt von E und l, also von der Form $X_E = r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $X_E = t\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix}$. Wir lösen das sich daraus ergebende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} r\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= t\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3r & -s & -5t & = & 21 \\ 3r & +2s & +11t & = & -17 \\ 2r & +3s & -9t & = & 18 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow t = -2, s = -2, r = 3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Lotfußpunkt X_E, womit wir den Abstand d des Punktes X von der Ebene E berechnen können.

$$\begin{aligned} X_E &= t\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix} \\ &= -2\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -13 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \\ d = |X - X_E| &= \left|\begin{pmatrix} 10 \\ -21 \\ 17 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{830} \end{aligned}$$

Beispiel 2

Berechnen Sie den Abstand d des Punktes $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ von der Ebene

$E = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Es ist

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \bullet \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|6|}{3\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Beispiel 3: Abstand paralleler Ebenen
Berechnen Sie den Abstand der beiden parallelen Ebenen

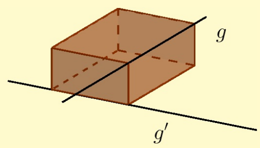
$$E = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } E' = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Der Abstand der parallelen Ebenen E und E' ist gleich dem Abstand *irgendeines* Punktes der Ebene E' von der Ebene E. Der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt in der Ebene E', und damit gilt für den Abstand d der Ebenen

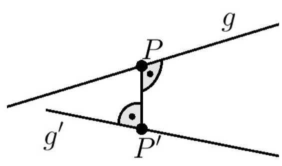
$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \bullet \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{33}{\sqrt{195}}.$$

12.2.6 Abstand windschiefer Geraden

Die Geraden g und g' entlang der Kanten des Quaders schneiden sich nicht. Welche Punkte auf den Geraden haben den kleinsten Abstand voneinander?



Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden $g = \mathbb{R}C + Q$ und $g' = \mathbb{R}C' + Q'$ verstehen wir den Abstand der Punkte P und P' auf den Geraden, die den kleinsten Abstand voneinander haben.
P muss der Fußpunkt des Lotes durch P' auf g sein, P' muss der Fußpunkt des Lotes durch P auf g' sein.



Die Gerade $g(P, P')$ durch diese Punkte muss sowohl zu g als auch zu g' orthogonal sein, sie ist das *gemeinsame Lot* der Geraden g und g'.

1. Möglichkeit der Abstandsberechnung
Ist $P_r = rC + Q$ ein Punkt auf der Geraden g und $P'_s = sC' + Q'$ ein Punkt auf der Geraden g', so erhalten wir aus der Forderung

$$(P_r - P'_s) \bullet C = 0 \text{ und } (P_r - P'_s) \bullet C' = 0$$

ein lineares Gleichungssystem, mit dem wir die Parameter r und s der Punkte P und P' bestimmen können.

Abstand windschiefer Geraden:
Den Abstand d zweier windschiefer Geraden $g = \mathbb{R}C + Q$ und $g' = \mathbb{R}C' + Q'$ erhalten wir folgendermaßen

- Löse das lineare Gleichungssystem

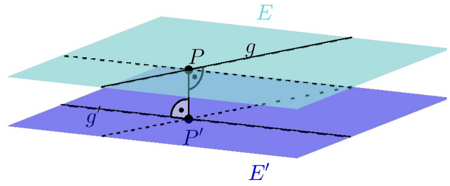
  $$(P_r - P'_s) \bullet C = 0 \text{ und } (P_r - P'_s) \bullet C' = 0,$$

  wobei $P_r = rC + Q$ ein Punkt auf der Geraden g und $P'_s = sC' + Q'$ ein Punkt auf der Geraden g' ist.

- $P = rC + Q$ und $P' = sC' + Q'$ sind die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes. Der Abstand der Geraden g und g' ist gleich dem Abstand der Punkte P und P', also gleich

  $$|PP'|\,.$$

2. Möglichkeit der Abstandsberechnung
Der Abstand der windschiefen Geraden g und g' ist gleich dem Abstand der durch die Geraden g und g' festgelegten parallelen Ebenen



$$E = \mathbb{R}C + \mathbb{R}C' + P = \mathbb{R}C + \mathbb{R}C' + Q$$

und

$$E = \mathbb{R}C + \mathbb{R}C' + P' = \mathbb{R}C + \mathbb{R}C' + Q'.$$

Der Abstand d der Ebenen ist also

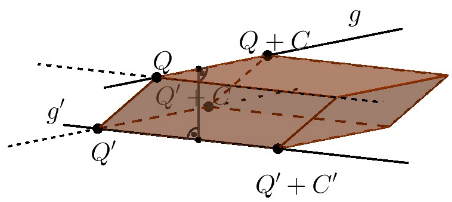
$$d = \frac{|(C \times C') \bullet (Q - Q')|}{|C \times C'|}.$$

Abstandsformel windschiefer Geraden:
Der Abstand d zweier windschiefer Geraden $g = \mathbb{R}C + Q$ und $g' = \mathbb{R}C' + Q'$ ist gleich dem Abstand der durch g und g' definierten parallelen Ebenen $E = \mathbb{R}C + \mathbb{R}C' + Q$ und $E' = \mathbb{R}C + \mathbb{R}C' + Q'$, also

$$d = \frac{|(C \times C') \bullet (Q - Q')|}{|C \times C'|}.$$

---

3. Möglichkeit der Abstandsberechnung
Der Abstand d der Geraden g und g' ist gleich der Länge h der Höhe im Spat. Subtrahieren wir Q' von den Eckpunkten, so erhalten wir das entlang der gerichteten Strecke $Q'O$ verschobene Spat, das durch die Punkte C, C', $Q - Q'$ und den Koordinatenursprung definiert wird. Dieses hat das Volumen



$$\mathscr{V} = |(C \times C') \bullet (Q - Q')|,$$

die Grundfläche ist ein Parallelogramm und hat den Flächeninhalt $\mathscr{A} = |C \times C'|$. Damit ergibt sich ebenfalls

$$d = h = \frac{\mathscr{V}}{\mathscr{A}} = \frac{|(C \times C') \bullet (Q - Q')|}{|C \times C'|}.$$

Beispiel
Bezogen auf ein geeignetes Koordinatensystem startet eine Fliege im Koordinatenursprung zu einem geradlinigen Flug zum Punkt $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$. In derselben Zeit (und mit demselben Startzeitpunkt) fliegt eine Wespe geradlinig von $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ nach $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Beide Tiere fliegen mit konstanter Geschwindigkeit. Berechnen Sie den minimalen Abstand der Tiere und den minimalen Abstand ihrer Flugbahnen.

Lösung:

Die Flugbahn der Fliege ist die Gerade $f = \mathbb{R}(P - O) + O = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Flugbahn der Wespe ist die Gerade $w = \mathbb{R}(B - A) + A = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Der Abstand d der Flugbahnen ist also

$$d = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \bullet \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 32 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 32 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}\right|} = \frac{120}{40} = 3.$$

Der Abstand der Flugbahnen beträgt 3 Längeneinheiten.

Nach t Zeiteinheiten befindet sich die Fliege am Punkt $F_t = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Nach t Zeiteinheiten befindet sich die Wespe am Punkt $W_t = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Das Quadrat des Abstandes der Tiere zum Zeitpunkt t ist

$$\begin{aligned}
f(t) &:= |F_tW_t|^2 \\
&= (F_t - W_t)^2 \\
&= F_t^2 - 2F_tW_t + W_t^2 \\
&= t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}^2 - 2t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} (t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}) + (t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix})^2 \\
&= 169t^2 + 192t^2 - 280t + 64t^2 - 160t + 125 \\
&= 425t^2 - 440t + 125.
\end{aligned}$$

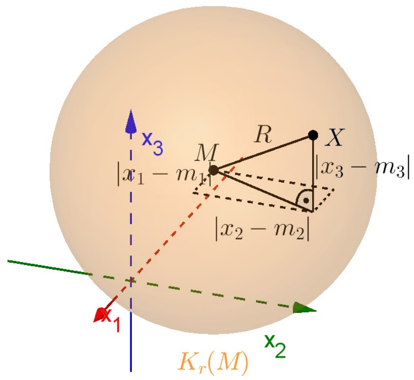
Wir suchen das Minimum der Funktion $f(t)$. Notwendige Bedingung dafür ist, dass $f'(t) = 0$ ist.
Es ist $f'(t) = 850t - 440$, also ist $f'(t) = 0$ genau dann, wenn $t = \frac{440}{850} = \frac{44}{85}$ ist. Außerdem ist $f''(t) = 850$ und damit $f''(\frac{44}{85}) = 850 > 0$. Also befindet sich an der Stelle $t = \frac{44}{85}$ tatsächlich ein Minimum, nämlich $f(\frac{44}{85}) = \frac{189}{17}$.

Der minimale Abstand der beiden Tiere beträgt also $\sqrt{\frac{189}{17}} \approx 3,3343$ Längeneinheiten.

12.3 Kugeln

Überprüfen Sie, ob die Punkte $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf der Kugel mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und Radius $R = 3$ liegen.

Ein Punkt $X \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann auf der *Kugel* $K_R(M)$ mit Mittelpunkt M und Radius $R > 0$, wenn $|XM| = R$ ist.
Die Kugel $K_R(M)$ besteht also aus allen Punkten X, für die $|XM| = R$ ist.



Ist $M \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt und R eine positive reelle Zahl, so ist die Punktmenge

$$\begin{aligned} K_R(M) &= \{X \mid |MX| = R\} \\ &= \{X \mid \sqrt{(M-X)^2} = R\} \\ &= \{X \mid (X-M)^2 = R^2\} \\ &= \{X \mid (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = R^2\} \end{aligned}$$

eine *Kugel mit Mittelpunkt M und Radius R.*

Beispiel 1

Geben Sie die Kugel $K_R(M)$ mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und Radius $R = 3$ als Punktmenge an.

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned} K_R(M) &= \left\{ X \mid \left(X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)^2 = 3^2 \right\} \\ &= \left\{ X \mid \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)^2 = 9 \right\} \\ &= \{X \mid (x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3+2)^2 = 9\} \\ &= \{X \mid (x_1^2 - 6x_1 + 9) + (x_2^2 - x_2 + 1) + (x_3^2 + 4x_3 + 4) = 9\} \\ &= \{X \mid x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - x_2 + x_3^2 + 4x_3 = -5\}. \end{aligned}$$

Bei den ersten drei Darstellungen kann der Mittelpunkt und der Radius des Kreises sofort abgelesen werden. Bei den letzten beiden Darstellungen ist dies nicht mehr so einfach möglich.

Beispiel 2
Zeigen Sie, dass die Punktmenge

$$\{X \mid x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 4x_2 + x_3^2 - 2x_3 = -26\}$$

eine Kugel ist und bestimmen Sie deren Mittelpunkt und Radius.

Lösung
Wir führen die quadratische Ergänzung durch für die Terme, die die Variablen x_1, x_2 bzw. x_3 enthalten, so dass wir die binomische Formel anwenden können:

$$\begin{aligned} & \{X \mid x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 4x_2 + x_3^2 - 2x_3 = -26\} \\ = & \{X \mid (x_1^2 - 10x_1 + 25) + (x_2^2 - 4x_2 + 4) + (x_3^2 - 2x_2 + 1) = -26 + 25 + 4 + 1\} \\ = & \{X \mid (x_1-5)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-1)^2 = 4\} \\ = & \left\{ X \mid \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 = 2^2 \right\} \\ = & \left\{ X \mid \left(X - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 = 2^2 \right\}. \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Darstellungen können wir den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Radius $R = 2$ direkt ablesen.

Beispiel 3
Liegt der Punkt A innerhalb, außerhalb oder auf der Kugel

$$K = \{X \mid (x_1+3)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-2)^2 = 25\} \text{ ?}$$

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung

Die Kugel hat den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und den Radius $R = 5$.

Ist $|AM| < R$, so liegt A innerhalb der Kugel. Ist $|AM| = R$, so liegt A auf der Kugel. Ist $|AM| > R$, so liegt A außerhalb der Kugel.

(a) Es ist $|AM|^2 = (0+3)^2 + (5-1)^2 + (2-2)^2 = 25 = R^2$, also liegt der Punkt A auf der Kugel.

(b) Es ist $|AM|^2 = (-4+3)^2 + (2-1)^2 + (5-2)^2 = 11 < 25 = R^2$, also liegt der Punkt A innerhalb der Kugel.

(c) Es ist $|AM|^2 = (1+3)^2 + (4-1)^2 + (1-2)^2 = 26 > 25 = R^2$, also liegt der Punkt A außerhalb der Kugel.

Beispiel 4: Kugel durch vier Punkte
Eine Kugel ist durch den Mittelpunkt M und den Radius r bzw. den Mittelpunkt M und einen Punkt A auf der Oberfläche der Kugel eindeutig festgelegt. Ist der Mittelpunkt nicht gegeben, so benötigen wir um eine Kugel festzulegen 4 Punkte auf der Oberfläche, die nicht alle in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Gegeben sind die Punkte $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Punktmenge der Kugel durch die Punkte A, B, C und D.

Lösung:
Da die Punkte A, B, C, D auf der Kugel liegen, gelten für den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$ und den Radius R die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} I & : & (a_1 - m_1)^2 + (a_2 - m_2)^2 + (a_3 - m_3)^2 & = & R^2 \\ II & : & (b_1 - m_1)^2 + (b_2 - m_2)^2 + (b_3 - m_3)^2 & = & R^2 \\ III & : & (c_1 - m_1)^2 + (c_2 - m_2)^2 + (c_3 - m_3)^2 & = & R^2 \\ IV & : & (d_1 - m_1)^2 + (d_2 - m_2)^2 + (d_3 - m_3)^2 & = & R^2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & : & (3 - m_1)^2 + (2 - m_2)^2 + (0 - m_3)^2 & = & R^2 \\ II & : & (0 - m_1)^2 + (-1 - m_2)^2 + (8 - m_3)^2 & = & R^2 \\ III & : & (6 - m_1)^2 + (3 - m_2)^2 + (4 - m_3)^2 & = & R^2 \\ IV & : & (3 - m_1)^2 + (3 - m_2)^2 + (1 - m_3)^2 & = & R^2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & : & 9 - 6m_1 & +m_1^2 & +4 - 4m_2 & +m_2^2 & & +m_3^2 & = & R^2 \\ II & : & & m_1^2 & +1 + 2m_2 & +m_2^2 & +64 - 16m_3 & +m_3^2 & = & R^2 \\ III & : & 36 - 12m_1 & +m_1^2 & +9 - 6m_2 & +m_2^2 & +16 - 8m_3 & +m_3^2 & = & R^2 \\ IV & : & 9 - 6m_1 & +m_1^2 & +9 - 6m_2 & +m_2^2 & +1 - 2m_3 & +m_3^2 & = & R^2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & : & (3 - m_1)^2 + (2 - m_2)^2 + m_3^2 & = & R^2 \\ I - II & : & -6m_1 - 6m_2 + 16m_3 & = & 52 \\ II - III & : & 12m_1 + 8m_2 - 8m_3 & = & -4 \\ I - IV & : & 2m_2 + 2m_3 & = & 6 \end{bmatrix}$$

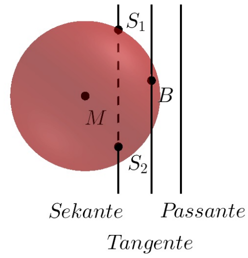
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & : & (3 - m_1)^2 + (2 - m_2)^2 + m_3^2 & = & R^2 \\ II & : & -6m_1 - 6m_2 + 16m_3 & = & 52 \\ 2II + III & : & -4m_2 + 24m_3 & = & 100 \\ I - IV & : & 2m_2 + 2m_3 & = & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & : & (3 - m_1)^2 + (2 - m_2)^2 + m_3^2 & = & R^2 \\ II & : & -6m_1 - 6m_2 + 16m_3 & = & 52 \\ III & : & -4m_2 + 24m_3 & = & 100 \\ III + 2IV & : & +28m_3 & = & 112 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_3 = 4, m_2 = -1, m_1 = 3, R = 5.$$

Es ist also $K = \{X \mid (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 4)^2 = 5^2\}$.

Beispiel 5: Lage Kugel/Gerade
Gegeben ist die Kugel $K_R(M)$ mit Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}$ und Radius $R = \sqrt{32}$ sowie die Gerade g.



(a) $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ (c) $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$

(b) $g = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$

Untersuchen Sie die Lage der Geraden g und der Kugel $K_R(M)$. Berechnen Sie gegebenenfalls die Schnittpunkte.

Lösung:
Es ist $K_R(M) = \{X \mid (x_1+2)^2 + (x_2-5)^2 + (x_3-3)^2 = 32\}$. Wir bestimmen jeweils die gemeinsamen Punkte der Kugel $K_R(M)$ und der Geraden g.

(a) Ein Punkt X ist genau dann ein gemeinsamer Punkt der Kugel $K_R(M)$ und der Geraden g, wenn er von der Form $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ ist und wenn

$$\begin{aligned}32 &= (x_1+2)^2 + (x_2-5)^2 + (x_3-3)^2\\ &= (-2t+4+2)^2 + (-2t+3-5)^2 + (5t-2-3)^2 = 33t^2 - 66t + 65,\end{aligned}$$

also $0 = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ ist. Letztere Aussage ist genau dann erfüllt, wenn $t = 1$ ist. Es gibt also nur einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Berührpunkt $B = \begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$. Die Gerade g ist eine Tangente an die Kugel $K_R(M)$.

(b) Ein Punkt X ist genau dann ein gemeinsamer Punkt der Kugel $K_R(M)$ und der Geraden g, wenn er von der Form $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ ist und wenn

$$\begin{aligned}32 &= (x_1+2)^2 + (x_2-5)^2 + (x_3-3)^2\\ &= (-4t+4+2)^2 + (-3t+3-5)^2 + (-2-3)^2\\ &= 25t^2 - 36t + 65,\end{aligned}$$

also $0 = t^2 - \frac{36}{25}t + \frac{33}{25}$ ist. Da diese Gleichung keine Lösung hat, besitzen die Gerade g und die Kugel $K_R(M)$ keine gemeinsamen Punkte. Die Gerade g ist also eine Passante.

(c) Ein Punkt X ist genau dann ein gemeinsamer Punkt der Kugel $K_R(M)$ und der Geraden g, wenn er von der Form $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist und wenn

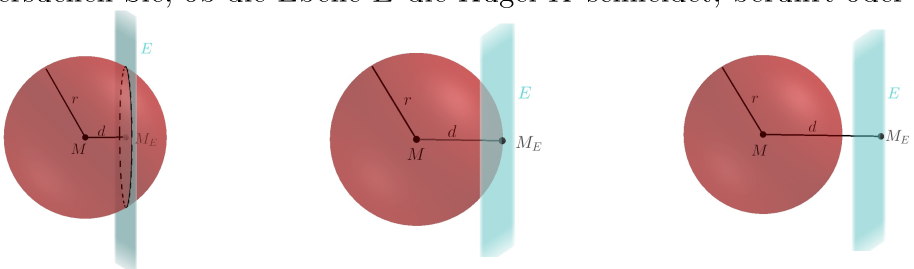
$$\begin{aligned} 32 &= (x_1+2)^2 + (x_2-5)^2 + (x_3-3)^2 \\ &= (2t-2+2)^2 + (t+3-5)^2 + (t+5-3)^2 = 6t^2+8, \end{aligned}$$

also $t^2 = 4$ ist. Letztere Aussage ist genau dann erfüllt, wenn $t = 2$ oder $t = -2$ ist. Es gibt also zwei gemeinsame Punkte, nämlich die Schnittpunkte

$$S_1 = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = -2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Gerade g ist also eine Sekante.

Beispiel 6: Lage Kugel/Ebene
Untersuchen Sie, ob die Ebene E die Kugel K schneidet, berührt oder verfehlt.



(a) $K = \{X \mid (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-1)^2 = 35\}$,
$E = \{X \mid x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 49\}$

(b) $K = \{X \mid (x_1+1)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-4)^2 = 9\}$,
$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:
Wir bestimmen jeweils den Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene.

(a) Ist $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, so ist $\mathbb{R}N \perp E$. Der Punkt $M = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der Mittelpunkt der Kugel K. Für den Abstand d des Punktes M von der Kugel K erhalten wir

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 49 \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{35}{\sqrt{35}} = \sqrt{35}.$$

Der Abstand ist also gleich dem Radius der Kugel. Deshalb berühren sich die Kugel K und die Ebene E.

(b) Ist $N = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$, so ist $\mathbb{R}N \perp E$. Der Punkt $M = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist der Mittelpunkt der Kugel K. Für den Abstand d des Kugelmittelpunktes M von der Ebene E erhalten wir

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} \right|} = \frac{114}{3\sqrt{93}} \approx 3,94.$$

Da der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene größer als der Kugelradius ist, schneiden sich die Ebene und die Kugel nicht.

Beispiel 7: Schnittkreis von Kugel und Ebene
Zeigen Sie, dass sich die Kugel

$$K_R(M) = \{X \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 5)^2 = 35\}$$

und die Ebene

$$E = \left\{ X \mid X \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -15 \right\}$$

schneiden. Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises.

Lösung:

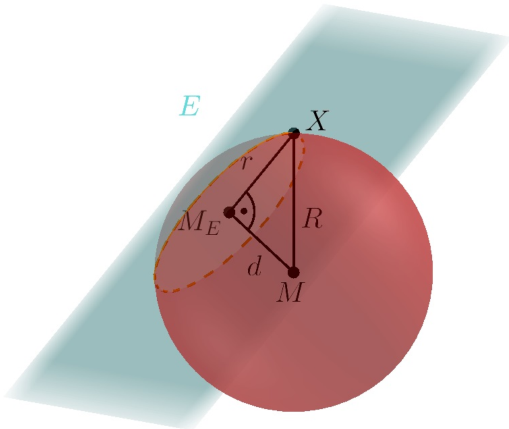
Wir berechnen den Abstand d des Kugelmittelpunktes $M = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ von der Ebene E.

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + 15\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right|} = 2$$

Da der Abstand kleiner als der Kugelradius $R = 3$ ist, schneiden sich die Kugel und die Ebene.

Den Radius r des Schnittkreises berechnen wir mithilfe des Satzes des Pythagoras:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}.$$



Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist der Lotfußpunkt M_E des Lotes l durch M auf die Ebene E. Es ist

$$l = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}.$$

Da M_E ein gemeinsamer Punkt von l und E ist, ist er von der Form $M_E = t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ und es ist

$$-15 = M_E \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

Setzen wir die erste Gleichung in die zweite Gleichung ein, so können wir t und damit den Punkt M_E berechnen.

$$\begin{aligned}-15 &= M_E \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\\ &= \left(t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\\ &= 9t - 9\\ t &= -\frac{2}{3}\\ M_E &= -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{19}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Radius des Schnittkreises ist $r = \sqrt{5}$, der Mittelpunkt ist $M_E = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\\ \frac{19}{3}\end{pmatrix}$.

Beispiel 8: Tangentialebene

Der Punkt $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt auf der Kugel

$$K_R(M) = \{X \mid (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 + 1)^2 = 18\}.$$

Bestimmen Sie die Tangentialebene E, die die Kugel K im Punkt B berührt.

Lösung:

Ein Punkt X liegt genau dann in der Tangentialebene E, wenn $g(X, B) \perp g(B, M)$ ist, wenn also $(X - B) \bullet (B - M) = 0$ ist.

Durch Einsetzen von $M = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und B erhalten wir eine Normalendarstellung und eine Koordinatendarstellung der Tangentialebene E.

$$\begin{aligned}
E &= \{X \mid (X - B) \bullet (B - M) = 0\} \\
&= \left\{ X \mid \left(X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ X \mid \left(X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ X \mid X \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \right\} \\
&= \{X \mid -x_2 + x_3 = 1\}
\end{aligned}$$

Beispiel 9: Zu einer Ebene parallele Tangentialebene

Bestimmen Sie die zur Ebene $E = \{X \mid x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -42\}$ parallelen Tangentialebenen an die Kugel

$$K_R(M) = \{X \mid (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 3)^2 = 19\}.$$

Lösung:

Die Berührpunkte der Tangentialebenen sind die Schnittpunkte der Lotgeraden l durch M auf E mit der Kugel $K_R(M)$. Die Lotgerade durch M auf die Ebene E ist $l = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ein Punkt X ist genau dann ein gemeinsamer Punkt von l und $K_R(M)$, wenn er von der Form $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist und wenn

$$\begin{aligned}
19 &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 3)^2 \\
&= (t + 2 - 2)^2 + (3t + 1 - 1)^2 + (-3t + 3 - 3)^2 = 19t^2,
\end{aligned}$$

also $t = 1$ oder $t = -1$, ist. Damit erhalten wir die Berührpunkte der Tangentialebenen mit der Kugel K

$$B_1 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialebenen sind damit

$$T_1 = \{X \mid x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 15\} \quad \text{und} \quad T_2 = \{X \mid x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -23\}.$$

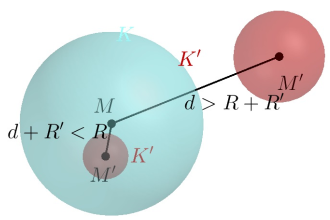
Beispiel 10: Lage Kugel/Kugel
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Kugeln K und K'.
Vergleichen Sie dazu den Abstand der Mittelpunkte mit den Radien.

(a) $K = \{X \mid (x_1 - 6)^2 + (x_2 + 6)^2 + (x_2 + 1)^2 = 6\}$ und
$K' = \{X \mid (x_1 - 3)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 = 24\}$,

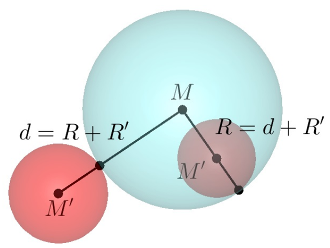
(b) $K = \{X \mid (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 24\}$ und
$K' = \{X \mid (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 - 3)^2 = 6\}$.

Lösung:
Es gibt folgende Lagemöglichkeiten zweier Kugeln $K_R(M)$ und $K'_{R'}(M')$ mit dem Abstand $d = |MM'|$ der Mittelpunkte:

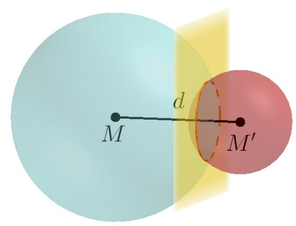
Kein Schnittpunkt
$d > R + R'$ oder
$d < |R - R'|$



Berührpunkt
$d = R + R'$ oder
$d = |R - R'|$



Schnittkreis
$|R - R'| < d < R + R'$



(a) Der Abstand der Mittelpunkte ist $d = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{6}$.

Außerdem ist $R + R' = 3\sqrt{6}$. Da $d = R + R'$ ist, berühren sich die Kugeln. Die Kugel K' liegt außerhalb von K.

(b) Der Abstand der Mittelpunkte ist $d = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 4\sqrt{6}$.

Außerdem ist $R + R' = 3\sqrt{6}$. Da $d > R + R'$ ist, haben die Kugeln keinen Schnittpunkt. K' liegt außerhalb von K.

Beispiel 11: Schnittebene und Schnittkreis zweier Kugeln
Gegeben sind die Kugeln $K = \{X \mid (x_1-5)^2 + (x_2-18)^2 + (x_3-20)^2 = 17^2\}$ und $K' = \{X \mid (x_1+2)^2 + (x_2-4)^2 + (x_3-6)^2 = 10^2\}$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Kugeln K und K' schneiden.

(b) Bestimmen Sie die *Schnittebene* E, in der sich der Schnittkreis befindet.

(c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises.

Lösung:

(a) Der Abstand der Kugelmittelpunkte ist $d = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix} \right| = 21.$

Es ist $R + R' = 17 + 10 = 27 > d$ und $|R - R'| = 7 < d$. Da $|R - R'| < d < R + R'$ ist, schneiden sich die Kugeln K und K' in einem Kreis.

(b) Es sind äquivalent:

$$\begin{aligned} & X \text{ ist ein gemeinsamer Punkt von } K \text{ und } K' \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} I & : & (x_1-5)^2 + (x_2-18)^2 + (x_3-20)^2 & = & 289 \\ II & : & (x_1+2)^2 + (x_2-4)^2 + (x_3-6)^2 & = & 100 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} I & : & x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 36x_2 + x_3^2 - 40x_3 & = & -460 \\ II & : & x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + x_3^2 - 12x_3 & = & 44 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} I & : & x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 36x_2 + x_3^2 - 40x_3 & = & -460 \\ I - II & : & -14x_1 - 28x_2 - 28x_3 & = & -504 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung bedeutet, dass der Punkt X in der Ebene $E = \{X \mid x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 36\}$ liegt.

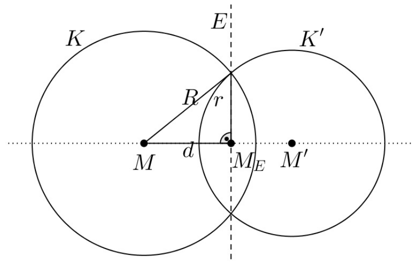
(c) Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist der Fußpunkt M_E des Lotes l durch M auf die Ebene E. Es ist $l = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Da M_E auf l und in E liegt, ist $M_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$ und

$$36 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 = (t+5) + 2(2t+18) + 2(2t+20) = 9t + 81,$$

also $t = -5$. Es folgt $M_E = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Den Radius r des Schnittkreises berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, wobei



$$d = |M - M_E| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = 15$$

der Abstand des Schnittkreismittelpunktes M_E vom Mittelpunkt M der Kugel K ist.
Damit erhalten wir $r = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$.

Der Schnittkreis hat also den Mittelpunkt $M_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ und den Radius $r = 8$.

Teil III

Didaktische Analyse

13 Vorbetrachtungen

In diesem Teil der Arbeit sollen die einzelnen Kapitel des Unterrichtswerkes aus Teil II einer didaktischen Analyse unterzogen werden, in der grundsätzliche Überlegungen und Begründungen zur Auswahl der Unterrichtsinhalte dargelegt werden. Dabei beschreiben wir zunächst grundlegende Überlegungen zur Einführung von Zahlenpaaren und Zahlentripeln und damit von Punkten der Ebene und des Raumes als Zahlbereichserweiterungen der reellen Zahlen. Im Anschluss daran stellen wir die Reduktionsprinzipien vor, mit denen die fachlichen Inhalte für die Schule zugänglich gemacht werden. Die darauf folgenden Kapitel orientieren sich am Aufbau des Unterrichtswerkes aus Teil II und beinhalten didaktische Kommentare zu den entsprechenden Kapiteln im Unterrichtswerk.

13.1 Zahlbereiche und Zahlbereichserweiterungen

Als Richtlinie für die Auswahl der Unterrichtsinhalte haben wir die Fachanforderungen des Landes Schleswig-Holstein für die Sekundarstufe II [12] gewählt. Die dort geforderten Inhalte der analytischen Geometrie lassen sich überwiegend den Leitideen *Algorithmus und Zahl (L1)*, *Messen (L2)*, *Raum und Form (L3)* zuordnen. Gemäß der Leitidee $L1$ soll in der Sekundarstufe II der Zahlbegriff der Sekundarstufe I zu Tupeln und Matrizen einschließlich zugehöriger Operationen erweitert werden.

Wir wollen zunächst begründen, weshalb wir die Interpretation der Tupel, also der Elemente des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, als Punkte der Ebene und des Raumes als geeignete Interpretation für diese Erweiterung halten. Außerdem wollen wir begründen, weshalb die Vektorraumstruktur eine geeignete Algebraisierung der Ebene und des Raumes ist. Dazu betrachten wir zunächst die Erweiterung der Zahlbereiche im Laufe der Schullaufbahn.

Die natürlichen Zahlen werden von Kindern schon vor Eintritt in die Primarstufe mit unterschiedlichen Gesichtspunkten verwendet (siehe [35]). Dazu zählen unter anderem der

- Kardinalzahlaspekt: Die natürlichen Zahlen dienen dazu, Mächtigkeiten von Mengen anzugeben (*„Ich habe 2 Geschwister“*, *„Ich habe 12 Bauklötze“*).

- Ordinalzahlaspekt: Die natürlichen Zahlen dienen dazu, Ordnungen und Reihenfolgen anzugeben („*Ich habe den 2. Platz gemacht*“, „*Ich habe am 22. April Geburtstag*“, „*Ich lese Seite 248 dieser Arbeit*“).

- Codierungsaspekt: Informationen werden durch Zahlen verschlüsselt („*Meine Telefonnummer ist 23041*“).

- Maßzahlaspekt: Natürliche Zahlen werden als Maßzahlen verwendet („*Ich bin 184cm groß*“). Interpretiert man den Messvorgang einer Streckenlänge als Vergleich mit einer gegebenen Einheitslänge, so fällt der Maßzahlaspekt unter den Kardinalzahlaspekt.

- Rechenzahlaspekt: Mit natürlichen Zahlen wird gerechnet. Dabei werden algebraische Gesetzmäßigkeiten und algorithmische Aspekte angesprochen. Genauso wie der Maßzahlaspekt kann auch der Rechenzahlaspekt nicht strikt von den ersten beiden Aspekten getrennt werden.

Es ist das Ergebnis einer langen historischen Entwicklung, dass Zahlen von den zu zählenden Gegenständen abstrahiert werden, die Zahl 3 also nicht mit den Geschwistern *Tick, Trick und Track* identisch ist, sondern eine Eigenschaft, die alle derartigen Trios von Geschwistern gemeinsam haben (siehe auch [42]). Unabhängig davon, unter welchem Aspekt die natürlichen Zahlen betrachtet werden, handelt es sich dabei stets um dasselbe mathematische Objekt.

Bereits in der Primarstufe werden das Kommutativgesetz der Addition und der Multiplikation, das Assoziativgesetz der Addition und der Multiplikation sowie das Distributivgesetz zum vorteilhaften Rechnen verwendet, spätestens zu Beginn der Sekundarstufe I werden diese Rechengesetze auch unter den entsprechenden Namen thematisiert. Diese Gesetze behalten auch nach der ersten Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}_0$ ihre Gültigkeit.

Das Rechnen mit den natürlichen Zahlen stößt jedoch an seine Grenzen, sobald es um die Lösungen $x \in \mathbb{N}$ von Gleichungen der Form $a+x = b$ und $a \cdot x = b$ geht, wobei $a, b \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen sind. Ist nämlich $a \geq b$, so besitzt die Gleichung $a+x = b$ keine Lösung in $\mathbb{N}$. Die Gleichung $a \cdot x = b$ besitzt nur dann eine Lösung $x \in \mathbb{N}$, wenn a ein Teiler von b ist. Dies begründet die Notwendigkeit, den Zahlbereich der natürlichen Zahlen zu erweitern. Während in der Fachwissenschaft aus strukturellen Gründen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zur Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitert werden, werden gemäß der aktuellen Fachanforderungen in Schleswig-Holstein[1] die natürlichen Zahlen zunächst zur Menge der Bruchzahlen, also der nichtnegativen rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_0^+$, erweitert. Erst im Anschluss daran wird dieser Zahlbereich um die negativen Bruchzahlen ergänzt, worin dann auch die negativen ganzen Zahlen enthalten sind. Der Grund dafür ist einerseits die höhere Alltagsrelevanz der Bruchzahlen gegenüber den negativen ganzen Zahlen, aber auch die historische Entwicklung sowie

[1](andere Bundesländer gehen dabei durchaus andere Wege)

die einfachere Veranschaulichung der Rechenoperationen bei positiven Zahlen. Die Zahlbereichserweiterungen verlaufen dabei nach folgendem Schema, welches anhand der Erweiterung von $\mathbb{N}_0$ zu $\mathbb{Q}_0^+$ illustriert werden soll.

- *Erkennen der Grenzen eines Zahlbereiches:*
  Verwendet man zum Messen von Streckenlängen beispielsweise die Maßeinheit *Meter*, so sind Streckenlängen, die kleiner als ein Meter sind, nicht immer durch Übergang zu kleineren Maßeinheiten bestimmbar. Dazu reicht es schon aus, die Ausgangsstrecke in drei gleichlange Teile zerlegen zu wollen. Auch das Verteilen von Pizzen ist nicht immer ohne Zerschneiden ebendieser möglich. Die Division ist nicht immer ohne Rest durchführbar, Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ besitzen nicht immer ein Lösung in $\mathbb{N}$.
  Die nun als notwendig erkannte Neuschöpfung eines Zahlbereiches ist ein definitorischer Akt.

- *Erkunden des neuen Bereiches:*
  Dabei soll Vertrautes wiedergefunden und Neues entdeckt werden. Ein Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Gültigkeit der Rechengesetze auch im neuen Zahlbereich. Gemäß dem Permanenzprinzip sollen die neuen Rechenoperationen so geschaffen sein, dass die bekannten Rechengesetze ihre Gültigkeit behalten. Eine neu zu entdeckende Eigenschaft hingegen ist, dass durch die Multiplikation zweier Bruchzahlen die Ausgangszahl nicht immer vergrößert wird. Diese überraschende Erkenntnis muss bei den Schülern zu einer überarbeiteten Grundvorstellung der Multiplikation führen.

- *Einbettung des alten Bereiches in den neuen Bereich:*
  Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ findet sich durch die Bruchzahl, die durch den Bruch $\frac{n}{1}$ repräsentiert wird, in der Menge der Bruchzahlen wieder.

Der Zahlbereich $\mathbb{Q}_0^+$ der Bruchzahlen weist ebenfalls erkennbare Grenzen auf, wenn symmetrische Skalen wie die Celsius-Temperaturskala oder Zustandsänderungen beschrieben werden sollen. Auch ist die Subtraktion in $\mathbb{Q}_0^+$ nicht immer durchführbar und Gleichungen der Form $a + x = b$ sind nicht immer lösbar. Dies motiviert die Erweiterung der Bruchzahlen $\mathbb{Q}_0^+$ zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Während die Fachwissenschaft zur Erweiterung der natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen durch eine Neukonstruktion vornimmt, werden in der Schule bei der Erweiterung von $\mathbb{Q}_0^+$ zu $\mathbb{Q}$ die Bruchzahlen nur um die negativen Bruchzahlen *ergänzt*. Die Bruchzahlen bleiben als Teilmenge in den rationalen Zahlen enthalten.

Die Addition natürlicher Zahlen kann als Addition von Zuständen interpretiert werden. 4+3 bedeutet in diesem Kontext, dass zwei disjunkte Mengen der Mächtigkeit 4 respektive 3 vereinigt werden. Die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge ist 7. Natürliche Zahlen und Bruchzahlen gestatten jedoch auch die Interpretation als *Zustände* und *Zustandsänderungen*, die sich auf die negativen Zahlen übertragen lässt und somit auch nach der Zahlbereichserweiterung der positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_0^+$ zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ eine mögliche Interpretation bleibt.

Damit erhält auch die Addition rationaler Zahlung unterschiedliche Bedeutungen:

- *Auf einen Ausgangszustand wird eine Zustandsänderung angewandt. Wir erhalten einen Endzustand.*
  $(+4) + (+3) = +7$ kann in diesem Kontext so interpretiert werden, dass der Wasserstand in einem Stausee 4 Meter beträgt. Wenn der Wasserstand um 3 Meter steigt, so betrangt der Endzustand 7 Meter über dem Normalniveau.
  Entsprechend wird $(+4) + (-3) = +1$ in dem Sinne so interpretiert, dass der Wasserstand um 3 Meter fällt.

- *Zwei Zustandsänderungen werden zu einer Zustandsänderung zusammengefasst.*
  $(+4) + (+3) = +7$ kann in diesem Kontext so interpretiert werden, das der Wasserstand in einem Stausee zunächst um 4 Meter steigt und dann um 3 Meter steigt, insgesamt steigt der Wasserstand also um 7 Meter.
  $(-4)+(+3) = -1$ bedeutet in diesem Kontext, dass der Wasserstand zunächst um 4 Meter sinkt und anschließend um 3 Meter steigt. Insgesamt sinkt das Wasser also um einen Meter.

Wichtig ist es hierbei zu beachten, dass all diese Interpretationen lediglich verschiedene Vorstellungen ein und desselben mathematischen Objektes sind, nämlich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Ziel des Mathematikunterrichtes ist es, die Schüler zum abstrakten Begriffsverständnis dieses mathematischen Objektes zu begleiten. Die Veranschaulichungen dienen lediglich als Vehikel, um diesen Weg gangbar zu machen.

Mit der Erweiterung der natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen kann auch die Multiplikation nicht mehr ausschließlich als wiederholtes Addieren interpretiert werden. Die Multiplikation gewinnt nun zusätzlich die Bedeutung des kontinuierlichen Vergrößerns.

Die Notwendigkeit der Einführung der reellen Zahlen basiert auf der Grundvorstellung einer lückenlosen Zahlengeraden. Gemäß dieser Grundvorstellung können wir auf der Zahlengeraden die Diagonalenlänge eines Quadrates mit Seitenlänge 1 zwar abtragen, diese Länge jedoch nicht als Bruchzahl darstellen. Die Lückenlosigkeit der Zahlengeraden äußert sich in den reellen Zahlen in der Eigenschaft, dass es zu jeder Intervallschachtelung $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$ eine Zahl gibt, die in allen Intervallen enthalten ist. Eine Konstruktion der reellen Zahlen kann neben der Intervallschachtelung auch über Cauchy-Folgen, dedekindsche Schnitte oder Dezimalzahlen erfolgen.

Die Struktur, die den reellen Zahlen zugrunde liegt, ist die Struktur eines vollständig angeordneten Körpers. Eine zentrale Einsicht äußert sich in folgendem Satz.

Satz 13.1. *Bis auf Isomorphie gibt es nur einen vollständigen, angeordneten Körper.*

Demnach beschreiben also alle angegebenen Konstruktionen der reellen Zahlen dasselbe mathematische Objekt. Wählen wir eine Konstruktion aus, so nennen wir diese *Konkretisierung* des Objektes.

Auch die reellen Zahlen besitzen ihre Grenzen. Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$. Daraus ergibt sich, dass die Gleichung $x^2 = -1$ keine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt. Bei der damit begründeten Erweiterung des reellen Zahlenkörpers zum Körper der komplexen Zahlen wird in der Schulmathematik erneut von dem in der Fachwissenschaft üblicherweise eingeschlagenen Weg abgewichen. Der Körper der komplexen Zahlen wird nicht als neue Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ konstruiert, in die anschließend die bereits vorhandene Menge eingebettet wird, sondern es wird die Existenz eines Elementes i postuliert, welches die Bedingung $i^2 = -1$ erfüllt. Anschließend wird gemäß dem Permanenzprinzip gefordert, dass der nun geschaffene Zahlbereich die bekannten Rechengesetze - insbesondere das Distributivgesetz und die Kommutativgesetze - erfüllt, womit sich die Multiplikation komplexer Zahlen

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdii = ac - bd + (ad + bc)i$$

ergibt.

Die Einführung der komplexen Zahlen in die Mathematik ist nicht das Werk einzelner Mathematiker, sondern ein langer Prozess, der sich sich über einen Zeitraum von mehr als drei Jahrhunderten erstreckte (vgl. [35], S. 214). Die komplexen Zahlen arbeiten oftmals im Verborgenen. Wollen wir beispielsweise die reelle Version des Fundamentalsatzes der Algebra

> *„Jedes reelle Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ zerfällt in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten.“*

beweisen, so kann dieser Nachweis elegant mithilfe des Fundamentalsatzes der Algebra erfolgen. Nach diesem Satz ist nämlich $p(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - z_k)$ mit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Wegen $0 = p(z_k) = p(\overline{z_k})$ treten imaginäre Nullstellen von p stets zusammen mit ihrem konjugiert komplexen Partner auf und führen somit zu dem quadratischen Faktor $(x - z_k) \cdot (x - \overline{z_k})$ mit reellen Koeffizienten. Zur Formulierung des Satzes werden keinerlei Kenntnisse über komplexe Zahlen benötigt. Der Beweis hingegen macht in seiner oben angegebenen Form im Verborgenen von den komplexen Zahlen Gebrauch. Es ist den Arbeiten von Carl Friedrich Gauß zu verdanken, dass die komplexen Zahlen von ihrem Schattendasein befreit und durch Veranschaulichung in der *Gaußschen Zahlenebene* mit einer konkreten Vorstellung verbunden wurden. Auch hierbei handelt es sich nur um eine Vorstellung der komplexen Zahlen, es wird durch diese Veranschaulichung jedoch kein neues mathematisches Objekt erschaffen.

Umgekehrt liefern wiederum die komplexen Zahlen eine Möglichkeit, mit Punkten der Ebene zu rechnen. Die komplexen Zahlen stellen also eine Algebraisierung der Zahlenebene dar. Diese Algebraisierung hat jedoch gravierende Unzulänglichkeiten.

- Sie lässt sich nicht auf den $\mathbb{R}^3$ sowie allgemein auf Räume, deren Dimension keine Zweierpotenz ist, erweitern, da dort die Existenz multiplikativ inverser

Elemente nicht mehr gesichert ist. Diese Existenz ist bei der Algebraisierung des $\mathbb{R}^4$ in Form der hamiltonschen Quaternionen zwar gewährleistet, die Multiplikation der Quaternionen ist jedoch nicht mehr kommutativ.

- Die Veranschaulichung der Multiplikation komplexer Zahlen ist außerdem aufgrund ihrer Komplexität als Einführung in die Algebraisierung geometrischer Sachverhalte in der Schule ungeeignet; die Vektorraumstruktur der komplexen Zahlen beziehungsweise des $\mathbb{R}^2$ ist dazu vollkommen ausreichend, wie wir in Teil I dieser Arbeit gesehen haben. Deshalb nutzen wir die dort eingeführten algebraischen Operationen zur Algebraisierung der Zeichenebene.

In der Schulmathematik wird die Zahlenebene unabhängig von den komplexen Zahlen eingeführt. In den Fachanforderungen Mathematik [12] wird bereits in der Sekundarstufe I von den Schülerinnen und Schülern erwartet, dass sie *„das Koordinatensystem zur Darstellung von ebenen Figuren nutzen. Die frühe Einführung aller vier Quadranten kann propädeutisch für die Zahlbereichserweiterung genutzt werden.“*

Die Zahlenebene stellt eine Erweiterung des Zahlenstrahls dar. Die Notwendigkeit der Erweiterung eines Zahlbereiches zur entsprechenden Zahlenebene resultiert jedoch nun nicht mehr aus den Grenzen der Lösbarkeit von Gleichungen, sondern dient der Erweiterung unseres Anschauungsraumes, um ebene geometrische Figuren darstellen zu können. Diese Erweiterung hat zur Folge, dass nun nicht mehr der alte Zahlbereich durch Hinzufügen neuer Zahlen *ergänzt* wird, sondern dass tatsächlich eine *Neukonstruktion* stattfindet. Jedoch findet sich auch in dieser Neukonstruktion der alte Zahlbereich wieder: Die Zahlengerade ist in der Zeichenebene und damit in der Zahlenebene nicht nur in Form der x_1 Achse auf kanonische Art eingebettet, auch die x_2-Achse und jede Gerade ist isomorph zur Zahlengeraden und kann somit als diese interpretiert werden. Diese Einbettung ist nun jedoch nur auf der Anschauungsebene erkennbar. Auf der algebraischen Ebene ist zunächst für die Schüler nicht einsichtig, warum die Menge $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ eine Version des alten Zahlbereiches $\mathbb{R}$ darstellt. Die Geraden sind damit die Objekte, die es ermöglichen, den alten Zahlbereich in dem neuen Zahlbereich wiederzufinden.

13.2 Der $\mathbb{R}^2$ als Zahlbereichserweiterung

Wir haben erläutert, weshalb die Vektorraumstruktur für die Algebraisierung des $\mathbb{R}^2$ geeignet ist. Wir wollen nun darlegen, wie diese Algebraisierung in der Schule eingeführt werden kann. Dazu begründen wir zunächst, weshalb wir eine axiomatische Einführung der Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^2$ für ungeeignet halten und geben anschließend Alternativen dazu an.

Wir beginnen mit Anmerkungen zur Einführung von Begriffen im Unterricht. In [16] werden folgende Stufen der Begriffsgewinnung unterschieden:

1. Intuitives Begriffsverständnis,
2. Inhaltliches Begriffsverständnis,
3. Integriertes Begriffsverständnis,
4. Formales Begriffsverständnis.

Demnach werden in der Schule die Begriffe *„im Unterricht nicht eingeführt - d.h. nicht von außen an den Schüler herangeführt - sondern über aktive Auseinandersetzung auf sprachlicher und handelnder Ebene gewonnen."* ([16], S. 111) Eine axiomatische Einführung des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ als Vektorraum würde beim formalen Begriffsverständnis ansetzen und ist demnach für die Schule ungeeignet. Nach [30] bilden *„die Axiome eines Vektorraumes [...] zwar die Rahmenbedingungen, die ein schulischer Vektorbegriff erfüllen muss, es geht aber im Unterricht zunächst um etwas ganz anderes: Es müssen inhaltliche Vorstellungen von Vektoren entwickelt werden."* Zur Entwicklung dieser Vorstellungen dienen die nun ergänzten Interpretationen des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bzw. dessen (affiner) Teilräume als

1. Lösungsmengen homogener und inhomogener linearer Gleichungssysteme,
2. Äquivalenzklassen von Pfeilen, in der analytischen Geometrie der Schule auch *Vektoren* genannt,
3. Stücklisten bei Produktionsprozessen,
4. Menge der Punkte der Ebene bzw. des Raumes.

Diese vielfältigen Interpretationsmöglichkeiten des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind Fluch und Segen zugleich. So gestatten sie einerseits einen vielschichtigen Zugang, erfordern jedoch auch vom Lehrer, dass er die jeweilige Interpretationsmöglichkeit stets bewusst wählt und sich Gedanken über Vorzüge und Grenzen der jeweiligen Veranschaulichung macht. Ein erstrebenswertes Ziel ist es, diese Reichhaltigkeit an Varianten auch den Schülern zu vermitteln und aufzuzeigen, dass es sich bei allen Zugängen stets um die gleichen mathematischen Objekte handelt, nämlich Zahlenpaare und Zahlentripel, die als Elemente der Vektorräume $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^3$ Vektoren sind. In diesem Sinne behaupten wir auch nicht, dass der hier präsentierte Zugang der *einzig* sinnvolle ist, wir geben jedoch einen *möglichen* Zugang an und diskutieren dessen Vor- und Nachteile.

Wir haben in Kapitel 2.3.1 skizziert, dass das Pfeilklassenmodell mathematisch korrekt ist. Malle nennt in [30] didaktische Gründe, die gegen die Verwendung des Pfeilklassenmodells im Unterricht sprechen. Als wesentlichen Aspekt zitieren wir:

> *„Das Pfeilklassenmodell ist unbrauchbar für die analytische Geometrie, da man in der analytischen Geometrie sowohl in Punkten als auch in Pfeilen denkt. Man benötigt also stets beide Objekte." (Malle, [30])*

Diese doppelte Denkweise äußert sich in Schulbüchern in der Einführung des *Ortsvektors eines Punktes*. Der Ortsvektor ist zwar eine Pfeilklasse und damit ein ursprungsunabhängiges Objekt, andererseits irgendwie doch nicht so ganz ursprungsunabhängig, da diese Pfeilklasse stets durch den Repräsentanten dargestellt wird, der am Koordinatenursprung beginnt. Man arbeitet also offiziell mit Äquivalenzklassen, vertuscht diesen mathematischen Charakter jedoch, indem man einen ganz bestimmten Repräsentanten auswählt. Wir werden dieses Phänomen im Laufe unserer Analyse wiederholt beschreiben.

Generell beinhaltet die fachwissenschaftliche Definition des Begriffes *Vektor* keinerlei Aussagen über Äquivalenzklassen, weshalb sich die Frage stellt, warum der schlichte Begriff des Vektors durch die Einführung von Pfeilklassen unnötig aufgebläht werden soll, so dass der Blick für die wesentliche mathematische Struktur verschleiert wird. Je beladener ein Begriff ist, desto schwieriger wird es sein, Objektklarheit zu schaffen.

Obiges Argument von Malle können wir jedoch auch als Argument gegen die ausschließliche Verwendung von Punkten verwenden: da wir sowohl in Punkten als auch in Pfeilen denken, könnten wir schlussfolgern, dass wir stets beide Objekte benötigen. Was bedeutet nun dieses *„In-Pfeilen-Denken“*?

Dazu unterscheiden wir zwischen den zugrundeliegenden mathematischen Objekten sowie deren Veranschaulichungen. Die fachwissenschaftliche Analyse in Teil I hat gezeigt, dass wir für den Aufbau der analytischen Geometrie weder Pfeile noch Äquivalenzklassen von Pfeilen benötigen, sondern ausschließlich mit dem Objekt *Zahlentupel* und den entsprechenden Verknüpfungen auf der Menge der Zahlenpaare auskommen. Ein Ziel des Unterrichts ist es somit, dieses Rechnen mit Zahlenpaaren zu etablieren. Um dieses Ziel zu erreichen werden verschiedene Veranschaulichungen des Objektes Zahlenpaar verwendet, wobei Pfeile eine mögliche Veranschaulichung sind. Es stellt sich die Frage, ob wir für jede mögliche Veranschaulichung ein neues mathematisches Objekt erfinden müssen.

Diese Frage wollen wir an dieser Stelle eindeutig mit *nein* beantworten. Wir erläutern dies am Beispiel der mathematischen Objekte *Funktion* und *Zahlenfolge*. Eine Funktion $f : A \to B$ ist vom fachlichen Standpunkt aus eine rechtseindeutige Relation und damit eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$. Von diesem mathematischen Objekt werden im Unterricht unterschiedliche Vorstellungen eingesetzt.

- Eine *statische Vorstellung* äußert sich in der Verwendung von Wertetabellen und Funktionsgraphen. Diese Vorstellung kommt der fachlichen Definition als Menge von Paaren am nächsten.

- Eine *dynamische Vorstellung* äußert sich in der Angabe einer Funktionsvorschrift oder in der Verwendung von Pfeilen, die den Zuordnungsvorgang visualisieren. Eine Funktion wird dadurch zu einer Maschine, die aus einer Zahl x eine Zahl $f(x)$ erzeugt.

An dieser Stelle würde niemand fordern, für die Funktionsvorschrift oder die Pfeile ein neues mathematisches Objekt einführen zu müssen. Es ist ja lediglich die *Vorstellung* ein und desselben mathematischen Objektes, die je nach Bedarf gewechselt wird.

Als weiteres Beispiel sollen Zahlenfolgen betrachtet werden. Vom fachlichen Standpunkt aus ist eine (reelle) Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Je nach Bedarf werden Folgen dargestellt als

- Graph in einem (zweidimensionalen) Koordinatensystem,
- Ansammlung von Punkten auf dem Zahlenstrahl (unter Weglassung der x_2-Achse),
- „unendlich langes“ Zahlentupel,

ohne dass dabei für diese Darstellungen ein neues mathematische Objekt eingeführt wird. Genauso ist auch das *„Denken in Pfeilen“* lediglich eine Möglichkeit, sich Zahlenpaare vorzustellen und rechtfertigt mitnichten die Einführung eines neuen mathematischen Objektes.

Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.1 identifizieren wir die Menge der Zahlenpaare $\mathbb{R}^2$ mit der Menge der Punkte der Ebene und die Menge der Zahlentripel $\mathbb{R}^3$ mit der Menge der Punkte des Raumes. Diese Interpretation des $\mathbb{R}^2$ als Erweiterung der vollständigen Zahlengeraden zur vollständigen Zeichenebene ist gemäß unseren vorherigen Ausführungen den Schülern mit Eintritt in die gymnasiale Oberstufe auf kanonische Weise bekannt. Die Elemente des $\mathbb{R}^2$ sind auch in den Vorstellungen der Schüler Punkte der Ebene. Zur Algebraisierung des $\mathbb{R}^2$ ist es deshalb naheliegend, an diese Grundvorstellung anzuknüpfen und Punkte als einziges mathematisches Objekt zu verwenden.

Zu beantworten bleibt noch die Frage, warum wir mit dem $\mathbb{R}^2$ und damit mit Punkten der Ebene beginnen und nicht gleich den $\mathbb{R}^3$ mit behandeln. Liegt der Fokus auf der Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens, so wäre dies an dieser Stelle gewiss denkbar. Unser Hauptanliegen ist es jedoch, den Schülern folgende Tatsache nahezubringen:

Mit Punkten kann man rechnen.

Dazu wollen wir den Schülern ein Lernumfeld bieten, bei dem so viel Vertrautes wie möglich beibehalten und nicht an mehreren Baustellen zugleich gearbeitet wird. Letztendlich können viele dreidimensionale Probleme dadurch gelöst werden, dass eine geeignete Ebene betrachtet und dort ein zweidimensionales Problem gelöst wird, so dass auch deshalb ein Beginn mit der zweidimensionalen analytischen Geometrie gerechtfertigt ist.

13.3 Didaktische Reduktion

Im Teil I werden die mathematischen Objekte formal definiert, bevor wir im Anschluss daran die Eigenschaften dieser Objekte untersuchen. Dieser deduktive Ansatz beim formalen Begriffsverständnis ist gemäß den Erläuterungen aus Abschnitt 13.2 für die Schule ungeeignet; wir müssen die Unterrichtsinhalte folglich für den Einsatz in der Schule aufbereiten. Ein Teil dieser Aufbereitung besteht in der didaktischen Reduktion.

Der wesentliche Aspekt unserer didaktischen Reduktion der fachlichen Inhalte besteht in der Identifikation des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Ebene bzw. dem uns umgebenden Raum. Dadurch werden die mathematischen Objekte nicht mehr im Rahmen einer deduktiven Theorie *definiert*, sondern als aus der Elementargeometrie bekannt *vorausgesetzt* und lediglich mit Methoden der analytischen Geometrie *beschrieben*. Als bekannt vorausgesetzt werden die Begriffe *Gerade, Strecke, Dreieck und Viereck*. Durch diese Beschreibung mit Methoden der analytischen Geometrie findet eine begriffliche Präzisierung und Verschärfung statt.

Mathematik ist eine *beweisende Disziplin*, und es ist erstrebenswert, dass dieser Charakter der Mathematik in der Schule einen großen Stellenwert einnimmt. Andererseits haben Schüler oftmals *„kein Beweisbedürfnis“* ([51]). Um dieses Dilemma zu umgehen, stellen Meyer und Prediger in [34] die Frage, wann ein Beweis ein Beweis ist und fordern *„soziale Akzeptanz statt absolute[r] Sicherheit“*. Die soziale Akzeptanz vieler Aussagen wird durch die Identifikation des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Ebene bzw. dem uns umgebenden Raum erzeugt. Dadurch müssen nicht mehr sämtliche Sachverhalte innerhalb der dargelegten Theorie bewiesen werden, sondern man kann sowohl auf die Anschauung als auch auf elementargeometrische Sätze als Vorwissen zurückgreifen.

Durch einen Rückgriff auf die Anschauung können wir unter Zuhilfenahme geeigneter Skizzen an vielen Stellen auf formale Beweise verzichten und so einen wesentlichen Beitrag zur Reduktion der Unterrichtsinhalte leisten. So wird beispielsweise nicht formal bewiesen, dass die Menge der gemeinsamen Punkte zweier nicht-paralleler Ebenen stets eine Gerade ist. Diese Aussage wird einerseits durch eine Zeichnung plausibel gemacht, andererseits ersetzen beispielhafte Rechnungen einen formalen Beweis. Dadurch werden zusätzlich die kalkülorientierten Teile in Zeitaufwand und Wertigkeit zugunsten der inhaltlich orientierten Teile reduziert (vergleiche dazu die Forderungen von Borneleit et al. in [6], S. 81). Allerdings ist an dieser Stelle Vorsicht geboten: Es ist nämlich ein erstrebenswertes Ziel des Mathematikunterrichtes, den Schülern zu illustrieren, dass die Anschauung nur mit Vorsicht in Argumentationsketten einzusetzen ist, da sie zu trügerischen Fehlschlüssen verleiten kann. Der Lehrer befindet sich somit auf einem schmalen Grat zwischen notwendiger Vereinfachung und der Gefahr, den Charakter der Mathematik zu verfälschen. Umso wichtiger ist es für den Lehrer, an derartigen Stellen von einer fachwissenschaftlichen Basis aus zu handeln, die ihm die Sicherheit gibt zu entscheiden, an welchen Stellen

Vereinfachungen zulässig sind und an welchen diese zu Fehlschlüssen führen können.

Als grundlegende Sätze der Elementargeometrie verwenden wir den Satz des Pythagoras, den Strahlensatz sowie den Kosinussatz. Durch Rückgriff auf diese Sätze vereinfachen wir nicht nur die Darstellung der Unterrichtsinhalte, wir vernetzen dadurch auch die Grundlagen der Vektorraumtheorie horizontal mit anderen Themenbereichen, nämlich einer an die Inhalte der Sekundarstufe I anknüpfenden analytischen Geometrie (siehe auch die Forderungen in [6]). Dieser Rückgriff auf elementargeometrische Sätze wird wieder durch die fachwissenschaftliche Basis legitimiert.

14 Didaktische Bemerkungen zur Geometrie der Ebene

Der Aufbau dieses Kapitels orientiert sich am Aufbau des Kapitels 11 des Unterrichtswerkes. Wir kommentieren hier die dort vorgestellten Lerneinheiten, begründen die Auswahl der gewählten Zugänge und zeigen Alternativen auf.

14.1 Affine Geometrie

14.1.1 Rechnen mit Koordinaten

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe

In der Sekundarstufe I werden Zahlenpaare verwendet, um Situationen zu beschreiben und diese geometrisch darzustellen. Dabei sind für Schüler Zahlenpaare und Punkte im Koordinatensystem ein und dasselbe Objekt. Nun soll ein neuer Aspekt hinzukommen: Mit Zahlenpaaren kann man rechnen. Das erspart einem keine Rechenarbeit, da die Berechnungen für jede Koordinate durchgeführt werden. Der Vorteil, zwei reelle Zahlen als neues *Denkobjekt* zusammenzufassen, besteht darin, Rechenanweisungen und Beziehungen *„in knapper und übersichtlicher Form anzuschreiben, ohne alle Einzelschritte angeben zu müssen“* ([32]). Ebendort wird empfohlen, den Rechenaspekt gänzlich von der Anschauung zu trennen und zunächst einmal nur Zahlenpaare zu betrachten. Die Zahlenpaare werden dort etwa als Flug- und Hotelkosten bei einer Reiseplanung interpretiert. Damit kann die Summe zweier Zahlenpaare als Gesamtkosten zweier Reisender, die Vervielfachung als Verteuerung der Einzelposten gesehen werden. Die Erwartungshaltung der Schüler zu Beginn einer mit *analytische Geometrie* betitelten Unterrichtseinheit ist jedoch eine ganz andere, nämlich die, dass geometrische Fragestellungen bearbeitet werden. Die Schüler haben Zahlenpaare bisher nur als Punkte in der Ebene kennengelernt, so dass es für die Schüler nicht nachvollziehbar ist, warum Zahlenpaare plötzlich etwas anderes bedeuten sollen. Eine vollständige Trennung des Rechenaspektes von der Anschauung verhindert zusätzlich, dass *Phantasieverknüpfungen*, wie etwa die komponentenweise Multiplikation von Punkten, nicht mehr mit dem Argument der fehlenden anschaulichen Interpretation ausgeschlossen werden können, sondern man kann nur noch auf formaler Ebene mithilfe der Verletztheit der Nullteilerfreiheit argumentieren. Deshalb halten wir es für sinnvoll, an die geometrische Interpretation von Zahlenpaaren anzuknüpfen und hier gleich die Zahlenpaare als Punkte der Ebene zu veranschaulichen.

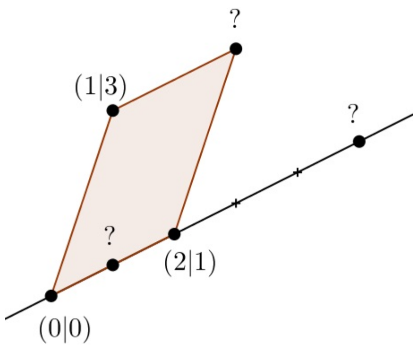
Auf der fachlichen Ebene haben wir zunächst die Definition des Vektorraumes gegeben und erst im Anschluss daran gezeigt, dass der $\mathbb{R}^2$ ein Vektorraum ist. In der Schule beschreiten wir den umgekehrten Weg, wir bewegen uns vom Konkreten zum Abstrakten; die Schüler durchlaufen also einen zweischrittigen kognitiven Prozess, in dessen Verlauf der Abstraktionsgrad zunimmt.

Der erste Schritt besteht darin, die Addition und die Vervielfachung von Zahlenpaaren kennenzulernen. Dieses Kennenlernen der Addition ist vom fachlichen Standpunkt aus die Erzeugung eines Beispiels für einen Vektorraum.

Der zweite Schritt besteht darin, Zahlenpaare als neues Denkobjekt zu erfassen. Dieses Erfassen entspricht auf der fachlichen Ebene dem Übergang von einem Beispiel zum Erkennen einer grundlegenden Struktur.

Wir bilden diesen Prozess im Unterrichtswerk ab, indem wir das Rechnen mit Zahlenpaaren in zwei Lerneinheiten unterteilen: Zunächst werden koordinatenbasierte Rechnungen durchgeführt, erst im Anschluss daran werden die Punkte als eigenständiges mathematisches Objekt erkannt.

Addition von Punkten



Der Einstiegsimpuls verwendet Punkte als Interpretation des $\mathbb{R}^2$, betont aber trotzdem den Rechenaspekt. Die Koordinatenachsen lassen wir in der Einstiegsaufgabe gänzlich weg, damit die Koordinaten der fehlenden Punkte nicht einfach abgelesen werden können. Um den 4. Parallelogrammpunkt zu berechnen, kann auf das Konzept des Steigungsdreiecks zurückgegriffen werden. Um vom Punkt $(2|1)$ zum 4. Parallelgrammpunkt zu gelangen, müssen wir um 1 Einheit nach rechts und 3 Einheiten nach oben gehen. Dadurch erhöhen sich die einzelnen Koordinaten des Punktes $(2|1)$ um 1 bzw. 3 Einheiten. Wir erhalten den Punkt $(2|4)$. Hierfür schreiben wir

$$(2|1) + (1|3) = (2 + 1|1 + 3) = (3|4).$$

Diese Einstiegsaufgabe ist ein Beispiel dafür, dass der Einstiegsimpuls nicht den Weg vorgibt, der anschließend im Lehrtext beschrieben wird. Während der Einstiegsimpuls mit einem geometrischen Objekt, nämlich dem Parallelogramm, beginnt und anhand dieses Objektes die entsprechenden Punkte gefunden werden sollen, haben wir im Lehrtext den deduktiven Weg beschritten, indem wir zuerst beispielgebunden die Addition von Zahlenpaaren definieren und diese erst Addition im Anschluss geometrisch interpretieren. Nun könnte man fordern, die geometrische Interpretation der Addition komplett auszulagern und sie erst dann zu geben, nachdem man Mittelpunkte thematisiert hat und damit rechnerisch nachweisen kann, dass gewisse Vierecke Parallelogramme sind. Das Bild, dass die Summe $A + B$ der vierte Parallelogrammpunkt der Punkte A, B und O ist, ist jedoch ein so häufig auftretendes Fragment der analytischen Geometrie und deshalb so elementar und tragend, dass es schon gleich in der ersten Lerneinheit im Rahmen der Definition der Addition gegeben werden soll.

Wir können die Addition auf vielfältige Weise veranschaulichen. Dabei ist es wichtig, diesen Prozess der Veranschaulichung für die Schüler transparent zu gestalten und aufzuzeigen, dass diese Veranschaulichungen keine *Definitionen* einer Operation sind, sondern lediglich *Möglichkeiten*, was man sich unter einer Operation vorstellen kann. Letztendlich obliegt es den Schülern, sich unter den angebotenen Interpretationsmöglichkeiten die jeweils bevorzugte auszuwählen.

Eine Möglichkeit zur Veranschaulichung der Addition von Zahlenpaaren erfolgt durch Analogiebildung der Addition natürlicher Zahlen. Die Addition $2+3 = 5$ kann nämlich nicht nur als Vereinigung von disjunkten Mengen der Mächtigkeiten 2 und 3 veranschaulicht werden, wodurch wir eine Menge der Mächtigkeit 5 erhalten. Als weitere Veranschaulichung der Addition $2+3 = 5$ dient der Zahlenstrahl: Wir gehen von der Zahl 2 um 3 Einheiten nach rechts und landen bei der Zahl 5. Inhaltlich kann dies so interpretiert werden, dass wir auf den Anfangszustand 2 eine Zustandsänderung $+3$ anwenden und den Endzustand 5 erhalten. Diese Vorstellung lässt sich auf Zahlenpaare übertragen: Die Rechnung $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ kann derart interpretiert werden, dass wir vom Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ um 2 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach oben gehen und beim Punkt $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ landen. Durch die Addition des Punktes $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird die Abfolge zweier Schritte zu einem simultanen Schritt zusammengefasst. Man kann diesen Vorgang durch einen Pfeil kennzeichnen, ohne dafür Pfeile als eigenständiges mathematisches Objekt einführen zu müssen, da der Pfeil ja nicht das Zahlenpaar $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ repräsentiert, sondern lediglich die mathematische Operation $+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ veranschaulicht. Wir halten fest:

Rechenoperationen können mit Pfeilen veranschaulicht werden. Diese Pfeile stellen jedoch keine neuen mathematischen Objekte dar.

Eine weitere Interpretation der Addition ist, dass die Summe $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ zusammen mit dem Ursprung und den Punkten $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ein Parallelogramm bildet. Eine formale Begründung der Aussage *„wenn wir zwei Punkte koordinatenweise addieren, so ist die Summe der vierte Parallelogrammpunkt“* wie in Satz 6.11 entfällt an dieser Stelle, auf Nachfrage kann jedoch eine Plausibilitätserklärung mithilfe des Steigungsdreiecks gegeben werden: Da wir vom Punkt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ zum Punkt $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ in gleicher Weise gelangen wie vom Punkt $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ zum Punkt $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, haben die Geraden durch die beiden Punkte jeweils dieselbe Steigung, womit das Viereck ein Parallelogramm ist. Auch hier ist der Pfeil wiederum lediglich eine Veranschaulichung einer Rechenoperation. Diese Interpretation der Addition wird im Merkkasten festgehalten.

Die Entstehung des vierten Parallelogrammpunktes können wir auch derart *deuten*, dass der Punkt $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ parallel zur gerichteten Strecke mit dem Anfangspunkt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und dem Endpunkt $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ verschoben wurde. Auch wenn eine Verschiebung eine Funktion vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ ist, wäre es auch an dieser Stelle legitim, die Addition als Verschiebung zu veranschaulichen, ohne dabei die Verschiebung als neues mathematisches Objekt einzuführen, da es sich ja wieder um die Veranschaulichung einer mathematischen Operation handelt. Jedoch suggeriert das Wort *Verschiebung*, dass sich der zu verschiebende Punkt bewegt und damit nach dem Vorgang des Verschiebens nicht mehr an seiner ursprünglichen Position vorhanden ist, was im vorliegenden Fall nicht mit dem Bild übereinstimmt. Außerdem wäre zusätzlich zu klären, was man denn unter der gerichteten Strecke $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ zu verstehen hat. Deshalb verzichten wir an dieser Stelle auf Interpretation der Addition als Verschiebung, werden jedoch an späterer Stelle beim Verschieben von Ursprungsgeraden kommentarlos darauf zurückgreifen.

Vervielfachung von Punkten

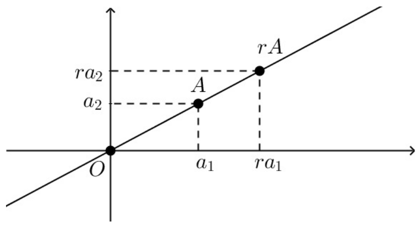
In der Einstiegsaufgabe wird den Schülern durch Einzeichnen der Geraden durch den Koordinatenursprung $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und den Punkt $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ eine Kopie der Zahlengeraden als Hilfsmittel zur Verfügung gestellt. Durch diese Gerade wird der alte Zahlbereich in den neuen Zahlbereich eingebettet. Die beiden fehlenden Punkte sollen durch

Stauchung bzw. Streckung aus dem Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hervorgehen.

Dass dazu die einzelnen Koordinaten der Punkte mit dem entsprechenden Faktor multipliziert werden müssen, können sich die Schüler an dieser Stelle durch die Projektion der Punkte auf die Koordinatenachsen überlegen. Allerdings ist durch Analogiebildung mit der Multiplikation reeller Zahlen an dieser Stelle davon auszugehen, dass die Schüler dies erfassen.

Auch an dieser Stelle wird wieder der Unterschied zwischen dem durch die Einstiegsaufgabe beschrittenen Weg und dem Lehrtext deutlich. Im Lehrtext wird erneut der deduktive Weg gewählt, wobei die Definition vor der geometrischen Interpretation steht.

Die Begründung, dass der Punkt rA den r-fachen Abstand vom Koordinatenursprung hat wie der Punkt A, liefert der 1. Strahlensatz.



Wir betrachten beispielhaft den Fall, dass A im ersten Quadranten liegt und dass $r > 0$ ist. Dann ist nämlich

$$\frac{|rA|}{|A|} = \frac{x}{a_1} = r,$$

also

$$|rA| = r\,|A|\,,$$

wobei hier mit $|rA|$ der intuitiv verwendete Abstand von rA vom Koordinatenursprung gemeint ist.

Auf einen Beweis dieser Tatsache wird an dieser Stelle jedoch verzichtet, weil diese Tatsache durch Analogiebildung zur Zahlengeraden offensichtlich ist und sich somit für die Schüler die Frage der Beweiswürdigkeit dieser Aussage stellt. Bei der Definition der Vervielfachung von Zahlenpaaren wird bewusst der Begriff *Vervielfachung* anstelle des Begriffes *Multiplikation* verwendet, um den Fehlschluss zu vermeiden, dass es sich bei der Multiplikation um eine Verknüpfung zwischen zwei Zahlenpaaren handelt.

Für den Lehrer ist es an dieser Stelle wichtig, gegebenenfalls Argumente gegen eine analog zur Addition von Zahlenpaaren definierte koordinatenweise Multiplikation von Zahlenpaaren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 b_2 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$ angeben zu können. Mögliche Gegenargumente liefert beispielsweise das Permanenzprinzip:

1. Wir wollen, dass die von den reellen Zahlen bekannte Nullteilerfreiheit

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \ a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

auch für die neu eingeführten Verknüpfungen gilt. Obige Multiplikation würde jedoch gestatten, dass beispielsweise $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = O$ ist, obwohl keiner der

Faktoren gleich O ist.

2. Wir wollen, dass die von den reellen Zahlen bekannte Kürzungsregel
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ (a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y)$$
auch für die neu eingeführten Verknüpfungen gilt. Für $A := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ erhielten wir jedoch mit der naiven Multiplikation von Punkten
$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot Y,$$
obwohl $X \neq Y$ ist.

Überzeugender als diese Argumente dürfte es jedoch sein, die Schüler aufzufordern, eine koordinatenweise definierte Multiplikation in einem Koordinatensystem zu veranschaulichen und zu versuchen diese zu interpretieren, was nicht gelingen wird. Dieses Argument ist aber nur dann tragfähig, wenn wir die Definition der Vervielfachung mit einer unmittelbaren geometrischen Interpretation verbinden. Auch deshalb plädieren wir an dieser Stelle dafür, den Rechenaspekt nicht vollends von der Anschauung zu trennen.

14.1.2 Anmerkungen zur Symbolik

Bei der Bearbeitung der Einstiegsaufgabe muss festgelegt werden, ob Punkte bzw. Zahlenpaare als Zeilen oder Spalten geschrieben werden sollen. Die in der Mittelstufe gebräuchliche Schreibweise für den Punkt A ist $A = (2|1)$ oder auch $A = (2; 1)$. Diese Schreibweise kann somit aus Kontinuitätsgründen auch hier beibehalten werden, solange keine linearen Abbildungen thematisiert werden, also Matrizen mit Punkten multipliziert werden [1]. Im Fließtext lässt sich die Zeilenschreibweise wegen des geringeren Platzbedarfs besser darstellen. Dies wird allerdings mit dem Nachteil erkauft, dass die Rechnungen an Übersicht verlieren und sich die Übersetzung von Punktgleichungen in lineare Gleichungssysteme durch die Zeilenschreibweise erschwert. Dieser Nachteil ist so gravierend, dass wir schon gleich zu Anfang vereinbaren, Punkte von nun an in Spaltenschreibweise zu schreiben. Bei der Besprechung der Einstiegsaufgabe sollten deshalb die Schreibweisen
$$(2|1) + (1|3) = (2 + 1|1 + 3) = (3|4)$$
und
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[1] Dies wäre nur dann durchgängig möglich, wenn wie die Matrizen von rechts mit Punkten multiplizieren.

gegenübergestellt werden. Bei der Spaltenschreibweise müssen lediglich die direkt nebeneinanderstehenden Koordinaten addiert werden, bei der Zeilenschreibweise muss hingegen bei der Addition eine Koordinate „übersprungen" werden.

In Schulbüchern der Sekundarstufe I findet man auch die Schreibweise $A(2|1)$, um dem Punkt mit den Koordinaten 2 und 1 den Namen A zuzuweisen. Diese Schreibweise erinnert an die Funktionsschreibweise $f(x)$ und suggeriert, dass durch $A(2|1)$ dem Punkt A die Koordinaten 2 und 1 zugeordnet werden, der Punkt A jedoch ein anderes mathematisches Objekt ist als das Zahlenpaar $(2|1)$. Für uns sind jedoch Punkte und Zahlenpaare dasselbe mathematische Objekt, weshalb wir die Schreibweise $A = (2|1)$ bzw. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwenden.

Die Addition von Punkten ist eine Funktion von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und damit eine andere Funktion als die Addition reeller Zahlen $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Da die reellen Zahlen in der Menge $\mathbb{R}^2$ nicht als Teilmenge enthalten, sondern lediglich isomorph eingebettet sind, ist die Addition von Punkten auch keine Erweiterung der Addition reeller Zahlen. Somit wäre ein neues Symbol für die Verwendung der Addition von Punkten, etwa $\hat{+}$, gerechtfertigt. Dass es sich dabei um zwei verschiedene Verknüpfungen handelt, sollte den Schülern auch mitgeteilt werden. Wir verzichten jedoch aus folgenden Gründen auf die Einführung eines neuen Symbols für die Addition:

- Gemäß den Untersuchungen in [36] verharren Lernanfänger beim Lesen mathematischer Texte besonders intensiv bei unbekannten Symbolen, anstatt sich mit den Beziehungen zwischen einzelnen Textzeilen auseinanderzusetzen.
- Der Unterschied zwischen den beiden Verknüpfungen ist schon allein durch die Unterschiede in den Operanden zu erkennen - diese sind ja nun Zahlenpaare und keine Zahlen mehr.

Genauso ist die Vervielfachung von Punkten eine Funktion von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und damit eine andere Funktion als die Vervielfachung reeller Zahlen $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Somit wäre auch hier ein neues Symbol für die Vervielfachung von Punkten, etwa $\hat{\cdot}$, gerechtfertigt. Da bei der Multiplikation reeller Zahlen der Malpunkt jedoch üblicherweise weggelassen wird, macht hier die Verwendung des Malpunktes schon ersichtlich, dass es sich um eine neue Verknüpfung handelt. Deshalb halten wir auch hier den Anteil an neuen Symbolen so gering wie möglich und verwenden den Malpunkt $\cdot$ zur Kennzeichnung der Vervielfachung von Punkten. Später werden wir auch diesen Malpunkt weglassen.

14.1.3 Anmerkungen zu den Beispielaufgaben

Die auf den ersten Blick triviale Aussage, dass zwei Zahlenpaare genau dann gleich sind, wenn ihre Koordinaten gleich sind, stellt sogar häufig Studenten der Mathematik am Beginn des Studiums vor große Probleme. Malle liefert in [31] eine mögliche

Erklärung für dieses Phänomen durch eine so tiefgreifende Belegung des Begriffs *Zahlenpaar* mit der Vorstellung des Pfeils in der Schulzeit, dass diese Vorstellung auch dann herangezogen wird, wenn sie eigentlich vollkommen unangemessen ist. In einer von ihm angestellten Untersuchung beantwortete kaum jemand die Frage, ob die *„Vektoren* $\begin{pmatrix}150\\7\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}70\\150\end{pmatrix}$ *gleich oder verschieden"* seien ([31], S. 17) mit der paarweisen Nicht-Übereinstimmung der Koordinaten. Stattdessen wurden diese Zahlenpaare als Pfeile gezeichnet und erst anhand der Grafik wurde entschieden, ob diese gleich sind. Zahlenpaare werden damit nicht als algebraisches Objekt gesehen, sondern nur in ihrem geometrischen Kontext. Deshalb ist in Beispielaufgabe 1 eine rein algebraische Fragestellung gegeben, die die Gleichheit zweier Punkte thematisiert. Diese Aufgabe kann nicht durch eine Zeichnung bearbeitet werden, sondern bedarf der Erkenntnis, dass zwei Zahlenpaare genau dann gleich sind, wenn ihre Koordinaten paarweise gleich sind.

In Beispielaufgabe 2 werden die Pfeile nicht als eigenständiges mathematisches Objekt identifiziert, sondern sie werden lediglich verwendet um Rechenoperationen, in diesem Fall Addition und die Subtraktion, zu veranschaulichen. Selbst wenn die Schüler ganz individuelle Vorstellungen von diesen Veranschaulichungen haben können - seien es Verschiebungen oder Wegbeschreibungen - so bedeuten die Pfeile in diesem Kontext nichts anderes als eine Visualisierung der Addition und Subtraktion, die unmittelbar zu algebraischen Rechnungen führen.

14.1.4 Rechnen mit Punkten

Nachdem die neuen Rechenoperationen formal eingeführt wurden, geht es im nächsten Schritt darum, die Koordinaten eines Punktes als eigenständiges Denkobjekt zusammenzufassen. Dadurch wird die Zahlenebene zu einem Zahlbereich. Zur Erkundung des neuen Zahlbereiches gehört die Untersuchung, welche der bekannten Rechenregeln im erweiterten Zahlbereich gelten. Die Rechengesetze dienen dabei folgendem Zweck:

- Rechengesetze ermöglichen es, vorteilhaft zu rechnen. Mit dieser Absicht des vorteilhaften Rechnens wurden schon beim Übergang von der Primarstufe zur Sekundarstufe *I* die Rechengesetze thematisiert.

- Rechengesetze ermöglichen es zu begründen, dass Aussagen allgemeingültig sind. Dieser Aspekt wird beispielsweise in der Sekundarstufe *I* eingesetzt, um nachzuweisen, dass zwei Terme wertgleich sind, also für *jede* Belegung der verwendeten Variablen stets denselben Wert ergeben.

Von der fachlichen Seite wird durch die in dieser Lerneinheit etablierten Rechenregeln der $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum erkannt, ohne dass dabei der Begriff *Vektorraum* fallen muss.

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe

In dieser Lerneinheit werden keine neuen Verknüpfungen eingeführt, die auf ihre Sinnhaftigkeit untersucht werden müssen. Außerdem ist die Interpretation der Menge der Zahlenpaare $\mathbb{R}^2$ als Punktmenge nur eine mögliche Interpretation dieses Vektorraumes. Deshalb trennen wir an dieser Stelle die Untersuchung der algebraischen Struktur des $\mathbb{R}^2$ von der geometrischen Interpretation und untersuchen nun die algebraische Struktur, losgelöst von der Anschauung. Wir verwenden als Einstieg eine Aufgabe, die den Aspekt des vorteilhaften Rechnens betont und die in abgewandelter Form aus [32] übernommen wurde.

Die Einstiegsaufgabe kann auf zweierlei Arten bearbeitet werden. Wir können einerseits A und B einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}2\cdot(B+A)-(A+2\cdot B) &= 2\cdot\left(\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)-\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}\right)\\ &= 2\cdot\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\10\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Rechnung vereinfacht sich jedoch, wenn wir zunächst den Term vereinfachen und erst am Ende die gegebenen Punkte einsetzen:

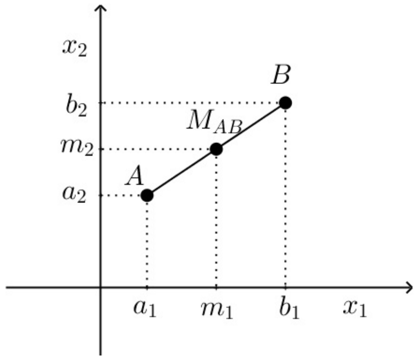
$$2\cdot(B+A)-(A+2\cdot B)=2\cdot B+2\cdot A-A-2\cdot B=A=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Wird die Rechnung zuvor koordinatenbasiert durchgeführt, wird es die Schüler an dieser Stelle nicht überraschen, dass für Punkte ähnliche Rechengesetze gelten wie für reelle Zahlen, so dass die Rechengesetze auch ohne formalen Beweis gesammelt werden können. Exemplarisch ist jedoch ein formaler Beweis des Distributivgesetzes I in Beispielaufgabe 4 gegeben, um zu verdeutlichen, dass dieses tatsächlich auf dem Distributivgesetz für reelle Zahlen basiert. Ein formaler Beweis weiterer Rechengesetze kann optional als Übung erfolgen. Im Gegensatz zum Distributivgesetz der Addition und Multiplikation reeller Zahlen unterscheidet sich bei den neu eingeführten Verknüpfungen das linksseitige Distributivgesetz strukturell vom rechtsseitigen Distributivgesetz. Bei dem Distributivgesetz I wird eine reelle Zahl mit zwei Punkten, bei dem Distributivgesetz II werden zwei reelle Zahlen mit einem Punkt verknüpft. Auch wenn die Rechenregel (7) dem Assoziativgesetz der Multiplikation reeller Zahlen ähnelt, sollte dieses Gesetz an dieser Stelle nicht so benannt werden. Der Grund dafür ist, dass dieses Gesetz keine Aussage über eine multiplikative Verknüpfung macht, sondern zwei unterschiedliche Verknüpfungen in Beziehung setzt: einerseits die Multiplikation reeller Zahlen, andererseits die Vervielfachung von Punkten. Zur Verdeutlichung dieser Tatsache wird an dieser Stelle die Vervielfachung durch die Verwendung des Malpunktes gekennzeichnet, bei der Multiplikation reeller Zahlen jedoch der Malpunkt weggelassen. Nachdem die Bedeutung der unterschiedlichen Malpunkte thematisiert wurde, kann jedoch genauso wie bei der Multiplikation reeller Zahlen auch bei der Vervielfachung von Punkten der Malpunkt weggelassen werden.

Alternative Einstiegsmöglichkeiten

Ein alternativer Einstieg in diese Lerneinheit wäre eine Aufstellung von Punkttermen, wie zum Beispiel $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A+B)$ zur Berechnung des Mittelpunktes zweier Punkte A und B:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}(a_1+b_1) \\ m_2 &= \frac{1}{2}(a_2+b_2) \\ \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1+b_1) \\ \frac{1}{2}(a_2+b_2) \end{pmatrix} \\ M &= \frac{1}{2}(A+B) \end{aligned}$$



Hieraus wird ersichtlich, dass das Rechnen mit Punkten nur eine Kurzschreibweise für zwei getrennte Rechnungen ist, nämlich eine Rechnung mit der ersten und eine mit der zweiten Koordinate, weshalb sich die Rechengesetze der reellen Zahlen auf Rechnungen mit Punkten übertragen.

Allerdings soll das primäre Lernziel dieser Lerneinheit nicht in der Berechnung des Mittelpunktes liegen, sondern in der Etablierung der Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^2$, da diese das wesentliche Werkzeug der analytischen Geometrie darstellt, auch wenn der Begriff des Vektorraumes an dieser Stelle nicht erwähnt wird. Um diesen algebraischen Aspekt hervorzuheben, verwenden wir einen algebraischen Einstieg und verlagern die Berechnung des Mittelpunktes in die Beispielaufgaben.

Anmerkungen zu den Beispielaufgaben

Beispiel 1
Diese Aufgabe hat dieselbe Intention wie die Einstiegsaufgabe und kann ebenso wie diese auf zweierlei Arten bearbeiten werden. Hier wird bewusst die elegantere zweite Variante, bei der vor der Einsetzung der Variablen zunächst die Punktterme vereinfacht werden, gegeben, um diese Variante zu sichern.

Beispiel 2
Eine häufige Beobachtung im Rahmen meiner Lehrtätigkeit ist, dass Lernende die Gültigkeit einer Gleichung bevorzugt durch Äquivalenzumformungen nachweisen. Das Anwenden dieser Strategie führt bei der vorliegenden Aufgabe zu folgender Lösung:

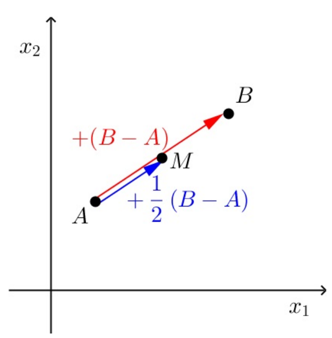
$$A+2B = 3D-2C \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Hintergrund dieses Ansatzes ist die reflexartige Interpretation des Wortes *Gleichung* als *Bestimmungsgleichung*. Interpretiert man die Gleichung als Bestimmungsgleichung, so ergibt sich daraus unmittelbar der Arbeitsauftrag, die *Lösungsmenge* dieser Gleichung zu bestimmen, was letztendlich die Anwendung von Äquivalenzumformungen initiiert. Nach Abschluss der Äquivalenzumformungen muss nun die Aussage $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ interpretiert werden. Die richtige Schlussfolgerung ist, dass dies eine wahre Aussage ist, und damit auch die Ausgangsaussage wahr ist. Eine Betrachtung der Gleichung als *Bestimmungsgleichung* kann jedoch zu dem Fehlschluss führen, dass aus der Aussage $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$, bzw. nach einem weiteren Schritt $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, die Schlussfolgerung gezogen wird, dass die Lösungsmenge aus allen reellen Zahlen beziehungsweise Punkten besteht, die beiden Terme der Ausgangsgleichung also für *jede* Belegung der Variablen A, B, C und D dasselbe Ergebnis liefern und damit wertgleich sind. Im vorliegenden Fall ist die Gleichung jedoch nicht unter dem Aspekt *Bestimmungsgleichung* zu sehen, sondern als Aussage, deren Wahrheitswert zu bestimmen ist. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass wir einfach den Wert der linken und der rechten Seite der Gleichung berechnen und sehen, dass wir jeweils dasselbe Ergebnis erhalten. Wir wollen mit dieser Beispielaufgabe und der präsentierten Lösung die Schüler von der ausschließlichen Betrachtung von Gleichungen als Bestimmungsgleichung und der reflexartigen Anwendung von Äquivalenzumformungen wegbewegen und fördern, dass Gleichungen als Aussagen gesehen werden.

Beispiel 3

Wie oben erwähnt, kann die Mittelpunktsberechnung als alternativer Einstieg in diese Lernumgebung dienen, um die Zusammenfassung zweier Koordinaten als neues Denkobjekt zu motivieren. Bei der hier präsentierten Lösung zu Aufgabenteil (a) geschieht diese Zusammenfassung durch die Vorstellung, dass zwei getrennte Rechnungen - eine für die x_1-Koordinate und eine für die x_2-Koordinate - zu einer Rechnung zusammengefasst und simultan aufgeschrieben werden. Diese Einzelrechnungen erhalten wir jeweils, indem wir die Projektionen auf die Koordinatenachsen betrachten.

Eine alternative Vorstellung, dass wir eine Schrittfolge aus einem Schritt in x_1-Richtung und einem Schritt in x_2-Richtung zu einem simultanen Schritt zusammenfassen, würde zu nebenstehender Lösung führen. Auch hier dient der Pfeil lediglich zur Veranschaulichung der Rechenoperationen, nicht jedoch als mathematisches Objekt:
Um von A nach B zu kommen, müssen wir zu A die Differenz $B-A$ addieren. Um zum Mittelpunkt von A und B zu kommen müssen wir zu A dementsprechend die Hälfte von $B-A$ addieren.



$$M = A + \tfrac{1}{2}(B-A) = \tfrac{1}{2}(A+B)$$

Aufgabenteile (b) und (c) sind von der Rechnung her identisch. Durch sie wird illustriert, dass wir mit Punkten genauso rechnen können wie mit reellen Zahlen und deshalb in der Lage sind Gleichungen zu lösen. Der Unterschied besteht lediglich in einer anderen geometrischen Interpretation des Mittelpunktes.

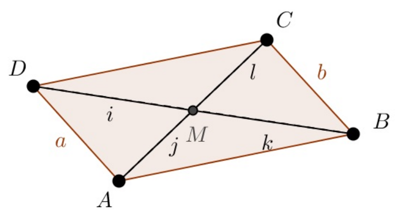
Betrachten wir ähnliche Aufgaben in Lehrbüchern, die einen klassischen Aufbau der analytischen Geometrie beschreiten, so stellen wir fest, dass sich dort an die Rechnungen jeweils ein Antwortsatz anschließt. Das Ergebnis der Rechnungen ist nämlich stets der Ortsvektor des gesuchten Punktes, in dem Antwortsatz wird aus diesem Ortsvektor dann ein Punkt generiert. Da bei uns das Ergebnis der Rechnung schon ein Punkt ist, ist diese Transformation nicht notwendig. Wir verzichten deshalb hier und im weiteren Verlauf bei den Beispielaufgaben auf Antwortsätze.

Beispiel 5
Der Begriff des Mittelpunktes ermöglicht es uns, Parallelogramme zu charakterisieren, bevor wir uns mit Geraden und deren Parallelität beschäftigt haben. Hintergrund ist der folgende aus der Sekundarstufe I bekannte Satz, der im Rahmen dieser Aufgabe als Hinweis gegeben wird.

Satz 14.1. *Sei $ABCD$ ein echtes Viereck, dessen Diagonalen sich in einem Punkt M schneiden. Dann ist $ABCD$ genau dann ein Parallelogramm, wenn M sowohl der Mittelpunkt von AC als auch der Mittelpunkt von BD ist.*

Die Gültigkeit des Satzes haben wir in Satz 6.9 im Rahmen der vorliegenden Theorie bewiesen. Ein auf den Strahlensätzen basierender elementargeometrischer Beweis lautet folgendermaßen.

Beweis.
Die Längen der Strecken seien wie in der Zeichnung definiert.



Wir setzen zunächst voraus, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Da das Viereck $ABCD$ echt ist, ist $g(D,B) \neq g(A,C)$.

Da $g(D,A) \parallel g(B,C)$ ist, folgt $\frac{i}{k} = \frac{j}{l}$ aus dem 1. Strahlensatz. Da aber auch $g(D,C) \parallel g(A,B)$ ist, folgt ebenfalls $\frac{i}{k} = \frac{l}{j}$. Insgesamt erhalten wir $\frac{j}{l} = \frac{l}{j}$ und damit $j = l$, da Streckenlängen stets positiv sind. Damit ist M der Mittelpunkt von AC. Analog zeigen wir, dass M der Mittelpunkt von BD ist.

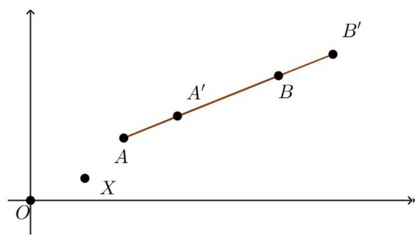
Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass M der Mittelpunkt von AC und BD ist. Dann ist $\frac{j}{l} = 1 = \frac{l}{j}$ und es ist $g(D,A) \parallel g(B,C)$ nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes. Analog zeigen wir, dass $g(D,C) \parallel g(A,B)$ ist. $\square$

In dieser Übung soll einerseits der Nachweis erbracht werden, dass der Punkt X das gegebene Dreieck CAB zu einem Parallelogramm ergänzt. Dafür muss die Gleichung $M_{AX} = M_{BC}$ als Aussage betrachtet werden, deren Wahrheitswert durch

Ausrechnen der linken und der rechten Seite zu verifizieren ist. Andererseits sollen *alle* Punkte gefunden werden, die das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzen. Dafür müssen die entsprechenden Gleichungen $M_{BX} = M_{AC}$ und $M_{CX} = M_{AB}$ als Bestimmungsgleichungen betrachtet werden.

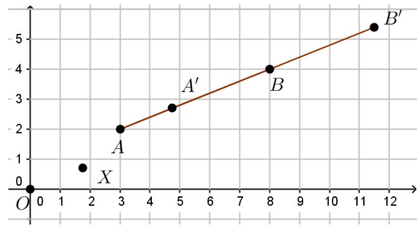
Aufgabenteil (a) haben wir durch Angabe des Vierecks $ABXC$ entschärft, wodurch - bei richtiger Interpretation der Schreibweise als 4-Tupel - ersichtlich ist, dass AX und BC die Diagonalen im Parallelogramm sein sollen. Eine Schwierigkeit besteht jedoch darin, dass die Bezeichnungen des Vierecks nicht mit denen des Hinweises übereinstimmen. Die Schüler müssen sich also gedanklich von der Gegenständlichkeit der Variablen A, B, C und D lösen und diese als frei belegbare Objekte sehen. Mit Aufgabenteil (b) schließt sich an die Grundaufgabe (a) eine Bestimmungsaufgabe an, wodurch diese Aufgabe selbstdifferenzierend wird im Sinne von [44], S. 143. Eine Skizze ist hier ein Hilfsmittel, um die Bestimmungsgleichung aufzustellen, aus der dann mit algebraischen Mitteln die jeweiligen Punkte bestimmt werden.

Beispiel 6
Die Hauptintention dieser Aufgabe ist nicht die *Formulierung* der Verschiebungsregel. Stattdessen soll anhand der Verschiebungsregel der Unterschied zwischen koordinatenbasierten Rechnungen und koordinatenunabhängigen Beweisen verdeutlicht werden. In Aufgabenteil (b) werden dazu die Rechenregeln und damit die Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^2$ nicht mehr unter dem Aspekt des vorteilhaften Rechnens verwendet, sondern unter dem Aspekt, die Allgemeingültigkeit von Aussagen nachzuweisen: Während in Aufgabenteil (a) durch die koordinatenbasierte Rechnung lediglich gezeigt wird, dass es sich bei dem vorliegenden Viereck um ein Parallelogramm handelt, geht Aufgabenteil (b) einen wesentlichen Schritt weiter. *Unabhängig* von der Wahl der Punkte A, B und X ist das Viereck $ABB'A'$ *immer* ein Parallelogramm. An dieser Stelle ist es sinnvoll, mit den Schülern den qualitativen Unterschied zwischen diesen beiden Aufgabenteilen zu diskutieren. In beiden Aufgabenteilen ist die Gleichung $M_{AB'} = M_{BA'}$ nicht als Bestimmungsgleichung zu interpretieren, sondern als Aussageform.



Im Rahmen der didaktischen Reduktion wird in dieser Aufgabe die Echtheit des Vierecks $ABB'A'$ nicht weiter thematisiert. Sind X und $A - B$ jedoch linear abhängig, so ist das Viereck $ABB'A'$ nicht mehr echt. Sofern $X \neq O$ ist, sind gegenüberliegende Seiten aber trotzdem parallel zueinander, so dass man auch derart „entartete“ Vierecke in die Definition des Parallelogramms mit aufnehmen könnte.

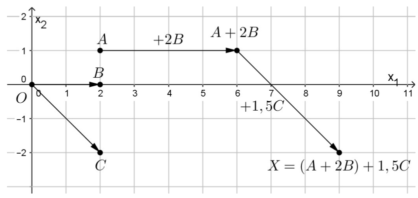
Die Mittelpunktsbedingung der Diagonalen wird im Fall unechter Vierecke jedoch zu einer stärkeren Forderung als die Parallelität gegenüberliegender Seiten: Beim nebenstehenden Viereck $ABB'A'$ sind zwar gegenüberliegende Seiten parallel zueinander, die Mittelpunkte der Diagonalen stimmen jedoch nicht überein.



Nur wenn die Mittelpunktsbedingung erfüllt ist, bleiben weitere Eigenschaften von Parallelogrammen - wie beispielsweise die Kongruenz gegenüberliegender Seiten - erhalten, so dass es sich anbietet, ein Viereck $ABCD$ nur dann als Parallelogramm zu bezeichnen, wenn die Mittelpunkte der Diagonalen AC und BD übereinstimmen, und es aus der Menge der Parallelogramme auszuschließen, wenn zwar gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind, die Diagonalen aber keinen gemeinsamen Mittelpunkt besitzen. In einer Definition sollte man jedoch immer von dem zu definierenden Begriff ausgehen, und da das Wort *Parallelogramm* das Wort *parallel* beinhaltet, könnte es auf Schüler unnatürlich wirken, Parallelogramme über die Mittelpunktsbedingung zu definieren. Wir nehmen deshalb in Kauf, dass die Definition des Parallelogramms über die Parallelität gegenüberliegender Seiten nur für echte Vierecke sinnvoll ist und im Fall unechter Vierecke zu pathologischen Situationen führen kann, während aus der Mittelpunktsbedingung selbst im Fall unechter Vierecke stets die Parallelität gegenüberliegender Seiten folgen würde, sofern benachbarte Ecken verschieden sind.

Beispiel 7
In klassischen Unterrichtsgängen der analytischen Geometrie werden Vektorzüge verwendet, um Linearkombinationen von Vektoren darzustellen. Dies ist auch in diesem Unterrichtsgang möglich, wenn wir die Addition von Punkten als Verschiebungen oder als Zusammenfassung von zwei Bewegungsschritten - einen in x_1- und einen in x_2-Richtung - interpretieren.

Eine zeichnerische Lösung ist nebenstehend abgebildet. Wir haben zunächst die gerichteten Strecken OB und OC in der Zeichnung durch Pfeile eingezeichnet. Der Punkt A wird nun parallel zu einem Vielfachen dieser Strecken verschoben.



Im Unterschied zu Vektorzügen eines klassischen Durchganges beginnt unser *„Vektorzug“* nun nicht am Koordinatenursprung, sondern am Punkt A. Das Ergebnis ist wieder ein Punkt. In der im Unterrichtswerk angegebenen Lösung verwenden wir jedoch eine rein statische Interpretation der Addition, um die Linearkombination zeichnerisch darzustellen. Wir konstruieren zunächst durch Streckung die Punkte $2B$ und $1,5C$ und zeichnen anschließend die Punkte $A+2B$ bzw. $(A+2B)+1,5C$ als vierten Parallelogrammpunkt ein. Egal welche Interpretation wir verwenden, eines bleibt gleich: Sämtliche zugrundeliegenden Objekte sind Punkte.

Beispiel 8
Wurden in Beispiel 6 konkrete Punkte verwendet, um eine Vermutung aufzustellen, soll dazu in dieser Aufgabe die dynamische Geometriesoftware GeoGebra verwendet werden. Durch den Einsatz von dynamischer Geometriesoftware ist es möglich, die Punkte A, B, C und D zu verschieben, sich dadurch von einem konkreten Viereck zu lösen und die Beliebigkeit der Wahl der Punkte A, B, C und D zu verdeutlichen. Die Software passt instantan die Punkte E, F, G und H der neuen Ausgangssituation an. Dadurch entfallen die koordinatenbasierten Rechnungen, die sonst notwendig wären, um eine geeignete Behauptung aufstellen zu können. Für die Schüler ergibt sich dadurch allerdings die Frage nach der Notwendigkeit eines Beweises der aufgestellten Behauptung, da durch die Generierung einer großen Anzahl an Beispielen die Vermutung, dass das Seitenmittenviereck stets ein Parallelogramm ist, schnell sozial akzeptiert wird. Trotzdem ist auch eine Verifizierung anhand einer großen Zahl an Beispielen noch kein Beweis der Allgemeingültigkeit einer Vermutung. Der Nachweis, dass es sich tatsächlich bei *jedem* echten Seitenmittenviereck um ein Parallelogramm handelt, erfolgt nun ausschließlich durch Anwendung der Vektorraumaxiome, die sich in den aufgestellten Rechengesetzen widerspiegeln.

Beispiel 9
Die Formel $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ zur Berechnung des 2:1-Teilungspunktes kann auf mehrere Arten hergeleitet werden:

- Durch Projektion auf die Koordinatenachsen ergibt sich $t_1 = a_1 + \frac{2}{3}(b_1 - a_1)$ und $t_2 = a_2 + \frac{2}{3}(b_2 - a_2)$ und damit $T = A + \frac{2}{3}(B - A) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. Durch die Punktgleichung $T = A + \frac{2}{3}(B - A)$ werden also zwei identische Rechnungen simultan aufgeschrieben.

- Um vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen, müssen wir zu A den Punkt $B - A$ addieren. Um von A zu T zu gelangen, müssen wir zu A folglich den Punkt $\frac{2}{3}(B - A)$ addieren und erhalten $T = A + \frac{2}{3}(B - A) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. Diese Rechnung können wir durch einen Pfeil veranschaulichen. Der Pfeil visualisiert dabei wieder lediglich die Addition.

- Der Mittelpunkt von AT muss der Spiegelpunkt von B an T sein, woraus wir $\frac{1}{2}(A + T) = 2T - B$ und damit $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ erhalten.

Wir geben in der Übungsaufgabe die koordinatenbasierte erste Möglichkeit an, um zu der Gleichung $T = A + \frac{2}{3}(B - A)$ zu gelangen. Durch die in der Zeichnung eingetragenen Pfeile wird diese Gleichung jedoch auch koordinatenfrei gemäß der zweiten Möglichkeit plausibilisiert. Diese Plausibilisierung ist kein Beweis und keine Herleitung, es wird nicht genauer spezifiziert, was dieser Pfeil zu bedeuten hat, und es obliegt der Freiheit der Schüler, sich darunter beispielsweise eine Verschiebung vorzustellen. Der Pfeil dient für uns einzig der Veranschaulichung der Addition. Die dritte Möglichkeit führt die Berechnung des 2:1-Teilungspunktes auf die bereits thematisierte Mittelpunktsberechnung zurück und demonstriert auf elegante Art, wie eine geometrische Eigenschaft in eine algebraische Gleichung übersetzt werden kann, was eine algebraische Lösung des geometrischen Problems ermöglicht. Allerdings ist die dafür notwendige Charakterisierung des 2:1-Teilungspunktes, nämlich, dass der Mittelpunkt von AT gleich dem Spiegelpunkt von B an T sein muss, weniger intuitiv als die Vorstellung, dass wir von A aus $\frac{2}{3}$ des Weges nach B gehen. Deshalb verwenden wir diese Argumentation an dieser Stelle nicht.

Beispiel 10
Die Formel zur Berechnung des 2:1-Teilungspunktes einer Strecke soll nun genutzt werden, um zu zeigen, dass sich in einem Dreieck die Seitenhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Die in Aufgabenteil (a) geforderte Rechnung dient dazu, zunächst mit der zu zeigenden Aussage vertraut zu werden, indem die Aussage koordinatenbasiert für ein konkretes Dreieck beispielhaft gezeigt wird. Die Variablen A, B und C werden in diesem Fall im Gegenstandsaspekt verwendet. In Aufgabenteil (b) werden die Variablen A, B und C hingegen im Einsetzungsaspekt betrachtet. Uns stehen zur Argumentation der Gleichheit für *jede beliebige* Belegung der Variablen A, B und C also nicht mehr die Koordinaten der Punkte zur Verfügung, sondern die Vektorraumaxiome, die in den Rechenregeln für Punkte manifestiert sind.

Anmerkungen zum Exkurs: Zahlenpaare in neuem Gewand

Wir haben bisher die Menge $\mathbb{R}^2$ der Zahlenpaare mit der Ebene identifiziert. Wir haben jedoch auch gefordert, den Veranschaulichungsprozess mathematischer Objekte für die Schüler transparent zu gestalten. Deshalb sollte auch erwähnt werden, dass die Interpretation von Zahlenpaaren als Punkte der Ebene nur eine mögliche Veranschaulichung ist. Dazu dient dieser Exkurs, dessen Einstiegsaufgabe in abgewandelter Form aus [19] übernommen wurde. Sie festigt die Grundvorstellung, dass die neu eingeführten Rechenoperationen nur eine Schreibweise sind, um identische Rechnungen für zwei reelle Zahlen gleichzeitig aufzuschreiben. Ebenso ist sie dazu geeignet, die Verknüpfungen für Zahlenpaare zu motivieren, wenn der Schwerpunkt der Unterrichtseinheit nicht auf der analytischen Geometrie liegen soll.

14.1.5 Geraden

Parameterdarstellung von Geraden

In der Sekundarstufe I werden die Lösungsmengen linearer Gleichungen $ax + by = c$ bzw. $ax_1 + bx_2 = c$ als Geraden in der Ebene erkannt. Diese Darstellungsform von Geraden wird als *Koordinatendarstellung* bezeichnet. Im Gegensatz zu der Geradengleichung $y = ax + b$ bzw. $x_2 = ax_1 + b$ können auf diese Art auch zur y- bzw. x_2-Achse parallele Geraden dargestellt werden. Die Koordinatendarstellung kennzeichnet eine Gerade als *Hyperebene*: Eine Hyperebene ist ein affiner Teilraum eines (endlich dimensionalen) Vektorraumes mit Codimension 1. Jede Hyperebene lässt sich darstellen als Urbildmenge einer Linearform[2], also einer linearen Abbildung des Vektorraumes in den zugrundeliegenden Körper, wobei im Falle des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ sämtliche Linearformen von der Bauart

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$$

sind. Deshalb ist jede Hyperebene die Lösungsmenge einer Gleichung

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = c$$

mit n Unbekannten, wobei nicht alle Koeffizienten a_i gleich Null sind. Die Koordinatendarstellung von Geraden ist also ein Beispiel für eine Hyperebene im $\mathbb{R}^2$.

Intuitiv ist eine Gerade jedoch etwas anderes, nämlich ein Objekt, das nur in eine „Richtung" ausgedehnt ist. Deshalb ist es naheliegend, Geraden nicht über die Codimension, sondern wie in Definition 4.4 über die Dimension als eindimensionalen affinen Teilraum zu definieren. Diese Definition ist nicht nur intuitiv, weil sie Geraden als eindimensionales Objekt kennzeichnet, sie hat auch einen weiteren entscheidenden Vorteil. Es ist nämlich lediglich eine Besonderheit der Ebene $\mathbb{R}^2$, dass die Menge der eindimensionalen affinen Teilräume identisch ist mit der Menge der Hyperebenen, also der affinen Teilräume mit Codimension 1. Da die eindimensionalen affinen Teilräume im $\mathbb{R}^3$ jedoch Codimension 2 besitzen, lassen sich diese nicht durch *eine* Koordinatengleichung darstellen. Um also auch Geraden im $\mathbb{R}^3$ behandeln zu können, benötigen die Schüler die Parameterdarstellung als neues Konzept zur Beschreibung von Geraden.

Wir erläutern im Folgenden, was wir unter dem Wort *Parameter* verstehen. Der Begriff *Parameter* wurde vom französischem Mathematiker Claude Mydorge (1585-1647) erstmals bei der Übersetzung und Vereinfachung griechischer Werke als Komposition der beiden griechischen Wörter ‚para' und ‚metron' verwendet und kann frei mit ‚Nebenmaß' übersetzt werden (siehe [24]). Mit einem Parameter bezeichnete Mydorge den Abstand von Brennpunkt und Leitlinie eines Kegelschnittes, der die Streckung und Stauchung beeinflusst. Leibniz und Newton verwendeten Parameter als konstante Größe bei der Untersuchung algebraischer Gleichungen zweiten Grades und waren somit in der Lage, mehrere algebraische Gleichungen simultan zu untersuchen. In der Schulmathematik wird der Begriff *Parameter* in folgenden Zusammenhängen verwendet (siehe [24]):

- in der Analysis der Sekundarstufe I und II und linearen Algebra, um Funktionenscharen und parameterabhängige Matrizen und parameterabhängige lineare Gleichungssysteme zu behandeln,
- in der analytischen Geometrie im Rahmen der Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen.

[2]ungleich der Nullform

Vom fachmathematischen Standpunkt aus ist die parameterabhängige Funktion $f_t(x) = tx^2 + 3$ nichts anderes als eine von zwei Variablen abhängige Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t, x),$$

wobei $f_t(x) := f(t, x)$ gesetzt wird. Aus fachlicher Sicht ist es deshalb nicht gerechtfertigt, die Variablen t und x begrifflich zu unterscheiden. Die Variablen t und x besitzen aus didaktischer Sicht jedoch unterschiedliche Bedeutungen. Malle beschreibt die folgenden drei Grundvorstellungen zu Variablen:

- *„Gegenstandsaspekt: Variable als Name einer Lösungsvariablen oder unbestimmten oder nicht näher bestimmbaren Zahl“*,
- *„Einsetzungsaspekt: Variable als Platzhalter für gewisse Zahlen bzw. als Leerstelle, in die man Zahlen einsetzen darf“* ,
- *„Kalkülaspekt: Variable als bedeutungsloses Zeichen, mit dem nach gewissen Regeln operiert werden darf“ (Malle [33], S. 46).*

Aus didaktischer Sicht wird die Funktionsvariable t bei der obigen parameterabhängigen Funktion im Gegenstandsaspekt verwendet, die Funktionsvariable x im Einsetzungsaspekt. Wir halten also fest:

Unter einem Parameter verstehen wir eine Variable, die im Gegenstandsaspekt verwendet wird.

Probleme des klassischen Zuganges

In klassischen Unterrichtsgängen der analytischen Geometrie werden Geraden durch eine *Punktrichtungsgleichung* $g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{a} \ \ (r \in \mathbb{R})$ angegeben, siehe beispielsweise [4], S. 93. Da der Variablen g nicht durch ein Gleichheitszeichen ein konkretes mathematisches Objekt zugewiesen wird, bleibt die Frage unbeantwortet, um welche Art von Objekt es sich bei den Geraden überhaupt handelt. Der zur Beschreibung der Geraden verwendete Doppelpunkt ist zunächst frei interpretierbar, wir können ihn beispielsweise durch die Formulierung *"g wird beschrieben durch die Gleichung“* versprachlichen, womit allerdings noch immer nicht geklärt wird, was wir unter diesem *„wird beschrieben durch“* zu verstehen haben, es herrscht hier also keine Objektklarheit. Eine mögliche dynamische Vorstellung von Geraden kann folgende sein:

Eine Gerade besteht aus den Punkten, die wir erhalten, wenn wir vom Koordinatenursprung in Richtung des Ortsvektor $\vec{a}$ gehen und dann eine bestimmtes Vielfaches in Richtung des Richtungsvektors $\vec{m}$.

Dadurch würden wir eine Gerade sprachlich als Menge von Punkten charakterisieren. Diese gewünschte Vorstellung wird jedoch nicht durch die Gleichung

$g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m} \quad (r \in \mathbb{R})$ induziert. Gemäß dieser Gleichung ist die Gerade nämlich eine Menge von Vektoren im Sinne von Äquivalenzklassen von Pfeilen, und nicht von Punkten. Dadurch, dass wir diese Vektoren nun Ortsvektoren nennen, bekommt plötzlich der am Koordinatenursprung beginnende Repräsentant eine besondere Bedeutung, es wird also versucht die Äquivalenzklasseneigenschaft zu verwässern, die Entscheidung, um welche Art von Objekt es sich bei einer Geraden handelt, eine Menge von Punkten oder eine Menge von Äquivalenzklassen, wird jedoch nicht gefällt. Abhilfe können wir schaffen, indem wir die gewünschte Vorstellung folgendermaßen abändern:

Eine Gerade besteht aus den Punkten, die wir erhalten, wenn wir einen Punkt A um ein bestimmtes Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{m}$ verschieben.

Dazu könnten wir obige Schreibweise in $g : X = A + r \cdot \vec{m} \quad (r \in \mathbb{R})$ abändern, wodurch das Objekt Gerade als Punktmenge definiert wird, sofern wir uns den Doppelpunkt gedanklich als Gleichheitszeichen vorstellen und uns etwaige Mengenklammern hinzudenken. Im Gegensatz zur ersten Definition beginnen wir nun gedanklich unseren dynamischen Konstruktionsprozess am Punkt A und nicht am Koordinatenursprung. Was jedoch bleibt, ist die Addition zweier verschiedener mathematischer Objekte, nämlich eines Punktes mit einem Vektor. Diese Addition könnten wir definieren als den Punkt, den wir erhalten, wenn wir den Punkt A verschieben. Aber selbst wenn wir das erste Zahlenpaar als Punkt interpretieren, so fehlt bei Geraden auf Schülerseite oft ein Verständnis der zugrunde liegenden Objekte, wie sich an Schülerinterviews belegen lässt. So anwortet beispielsweise in [31] ein Schüler auf die Frage, ob sie die Parameterdarstellung einer Geraden angeben könne:
„$g = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, das ist zum Beispiel irgendein Punkt, zum Beispiel $(2|4)$, plus Lambda mal $(5|6)$ ist gleich die Gerade g.“
Weiterführende Fragen, warum es sich bei diesem Objekt um eine Gerade handelt, konnten nicht beantwortet werden. In der Vorstellung des Schülers ist eine Gerade ein Tripel $(\binom{2}{4}, \lambda, \binom{5}{6})$. Das erste Zahlenpaar ist in ihrer Vorstellung ein Punkt, das letzte ein Parameter, und das Lambda gehört irgendwie dazu. Eine Gerade wird damit zu einem statischen Objekt, das nicht mit den in der Sekundarstufe I entwickelten Grundvorstellungen verknüpft wurde. Es ist eine traurige Wahrheit, dass die Schüler trotz dieser eklatanten Verständnisdefizite häufig durchaus in der Lage sind, die gestellten Schulbuchaufgaben kalkülhaft zu bearbeiten. Malle kritisiert in [31] diese Tatsache als *„Learning without understanding“*. Auch wenn wir eine einzige Schülerantwort gewiss nicht verallgemeinern können, so lassen sich daraus jedoch Fehlvorstellungen erkennen, die im Rahmen eines Unterrichtswerkes vermieden werden sollten. Wir schlagen folgende Lösung vor:

- Vereinfachung und Vereinheitlichung der zugrundeliegenden Objekte,
- Verknüpfung der Vorstellung von Geraden mit dem Wissen aus der Sekundarstufe *I*.

Vereinheitlichung der zugrundeliegenden Objekte

Mit der Vereinfachung und Vereinheitlichung der zugrundeliegenden Objekte geht eine größere Objektklarheit einher. Diese Vereinfachung erreichen wir dadurch, dass wir lediglich mit einem einzigen Objekt operieren, nämlich mit dem Objekt Punkt. Ausgehend von diesem Objekt definieren wir die Ursprungsgeraden:

Eine Ursprungsgerade $\mathbb{R}A = \{X \mid \exists r \in \mathbb{R} : X = r \cdot A\}$ *besteht aus allen Vielfachen des Punktes* A.

Damit ist eindeutig festgelegt, worum es sich bei einer Ursprungsgeraden handelt, nämlich um eine Menge von Punkten. Ist g_O eine Ursprungsgerade, so verwenden wir deshalb auch das Gleichheitszeichen $g_0 = \mathbb{R}A$. Diese Definition wird nun erweitert zur Definition einer Geraden $\mathbb{R}A+P$. Auf der fachlichen Seite ist dies zwar zunächst eine Addition zweier unterschiedlicher Objekte - nämlich einer Menge von Punkten und einem Punkt. Diese Schreibweise wird jedoch durch die übliche Konvention $\mathbb{R}A+P := \mathbb{R}A+\{P\}$ gerechtfertigt, womit nun zwei Mengen addiert werden, deren Elemente jeweils Punkte sind, so dass wir die Addition elementweise durchführen können. Das Ergebnis ist wieder eine Punktmenge. Auf der Anschauungsseite können wir diese Addition als Verschiebung *interpretieren* und visualisieren und damit die Definition der Ursprungsgeraden erweitern:

Eine Gerade ist eine verschobene Ursprungsgerade.

Durch die kompakte, aber mathematisch präzise Schreibweise $\mathbb{R}A$ wird die Ursprungsgerade als Menge simultan erfasst und durch die Addition von P verschoben. Bei der geometrischen Interpretation der Addition in Abschnitt 14.1.1 haben wir aus psychologischen Gründen das Wort *Verschiebung* vermieden, weil dieses Wort suggeriert, dass sich der zu verschiebende Punkt bewegt. Die dort verwendeten Pfeile lassen sich jedoch ohne nähere Begründung als Verschiebung interpretieren, so dass wir an dieser Stelle das Wort Verschiebung kommentarlos verwenden werden. In der Situation der Geraden ist dieses Wort auch gerechtfertigt: wir haben eine Ursprungsgerade und bewegen diese.

Bei dieser Darstellungsform von Geraden dient der Parameter lediglich als Hilfsmittel zur Beschreibung dieser Mengen und kommt nur in den ersten beiden Schreibweisen vor:

$$\begin{aligned} g &= \{X \mid \text{es existiert eine reelle Zahl } r, \text{ so dass } X = r \cdot A + P\} \\ &= \{r \cdot A + P \mid r \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}A + P. \end{aligned}$$

Alle drei Schreibweisen beschreiben das gleiche mathematische Objekt, nämlich eine Punktmenge. Die Quantorisierung der ersten Schreibweise ist notwendig, wenn die Frage beantwortet werden soll, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt: Hierfür ist nämlich eine Existenzaussage zu beantworten. Auch wenn diese Schreibweise technisch aufwändig und damit verwirrend erscheint, empfinden einige Lernende diese Genauigkeit als hilfreich. Im regulären Unterricht kann hierauf verzichtet und stattdessen die quantorenfreie Schreibweise $\mathbb{R}A + P$ verwendet werden. Für den ambitionierten Leser geben wir jedoch auch die Quantorenschreibweise mit an, auch wenn diese für den Schulalltag zu formal sein könnte.

Betrachten wir die Gerade g als Funktion (und damit als Kurve)

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, r \mapsto rA + P,$$

so werden A und P entweder direkt als Zahlenpaare angegeben oder als Variablen unter dem Gegenstandsaspekt betrachtet. Die Variable r übernimmt den Zweck einer Funktionsvariablen im Einsetzungsaspekt und ist deshalb kein Parameter gemäß unserer obigen Definition, weshalb wir die Unterscheidung in *explizit* und *implizit* definierte Punktmengen bevorzugen. Trotzdem verwenden wir den Begriff *Parameterdarstellung* aus Kompatibilitätsgründen. Der Parameter, der in der Schreibweise $\mathbb{R}A + P$ verborgen bleibt, kommt erst bei der Behandlung von Inzidenzfragen zum Vorschein. Sobald wir nämlich aus der Inzidenz $X \in \mathbb{R}A + P$ folgern, dass dann ein $r \in \mathbb{R}$ existiert mit $X = rA + P$ und dieses existierende r wählen, so wird damit die Variable r unter dem Gegenstandsaspekt betrachtet.

Die Betrachtung der Parameterdarstellung der Geraden $\mathbb{R}A + P$ als Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, r \mapsto rA + P$ zeigt, dass sich in der Parameterdarstellung weit mehr Informationen verbergen als die reine Angabe von Punkten. Durch diese Betrachtung der Geraden überträgt sich die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen auf die Gerade, wir haben damit also eine Durchlaufrichtung und sogar eine Durchlaufgeschwindigkeit. Somit stellen zwei verschiedene Parameterdarstellungen einer Geraden zwar dieselbe Punktmenge dar, induzieren jedoch unterschiedliche Kurven.

Die Herleitung der Gleichung einer Geraden durch zwei vorgegebene Punkte erfolgt rein algebraisch. Ist $P \neq Q$, so stellt die Punktmenge $\mathbb{R}(P - Q) + Q$ eine Gerade dar, die die Punkte P und Q enthält. Damit ist die *Existenz* von $g(P, Q)$ gezeigt. Im Rahmen der didaktischen Reduktion wird die Eindeutigkeit dieser Geraden nicht bewiesen, sondern als anschaulich klar vorausgesetzt. Auch wenn die Gerade $g(P, Q)$ als Punktmenge eindeutig ist, so ist die Darstellung uneindeutig: $\mathbb{R}(P - Q) + Q$, $\mathbb{R}(Q - P) + P$ und $\mathbb{R}(Q - P) + Q$ stellen beispielsweise dasselbe mathematische Objekt $g(P, Q)$ dar. Die Argumentation, warum diese Mengen gleich sind, verdeutlicht das Grundprinzip der von uns verwendeten didaktischen Reduktion. Anstatt die Mengengleichheiten

$$\mathbb{R}(P - Q) + Q = \mathbb{R}(Q - P) + P = \mathbb{R}(Q - P) + Q$$

formal zu beweisen, geometrisieren wir diese algebraischen Objekte und deuten sie damit als Geraden in der Ebene, die die Punkte P und Q enthalten. Aus der anschaulich klaren Eindeutigkeit dieser Geraden folgt die Gleichheit der Mengen. Bei einer derartigen Argumentation werden bewusst algebraische und geometrische Argumente durchmischt. Für die Schüler ergibt sich dadurch ein sozial akzeptierter

Beweis. Der Lehrer hingegen weiß durch die fachliche Hintergrundtheorie, dass diese Schlussfolgerungen richtig sind.

Auch die Uneindeutigkeit der Geradendarstellung beweisen wir nicht formal, sondern wir verwenden eine Zeichnung zur didaktischen Reduktion. Die Frage, wann zwei Geraden gleich sind, wird in Satz 4.3 bewiesen. Wir behandeln diese Thematik im Unterrichtswerk nochmals gesondert in einer eigenen Lerneinheit.

Verknüpfung mit Vorwissen

Die Verknüpfung der Geraden mit dem Vorwissen aus der Sekundarstufe I erfolgt durch die Einstiegsaufgabe. Zu Beginn der Sekundarstufe II haben die Schüler bereits eine anschauliche Vorstellung von Geraden erworben: Geraden werden dabei nicht nur in der Geometrie thematisiert, sondern auch wie oben erwähnt als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme sowie in der Analysis als Graphen (affin) linearer Funktionen, wobei in der Sekundarstufe I begrifflich nicht zwischen affin linearen und linearen Funktionen unterschieden wird. Im Rahmen des Unterrichts werden dort vier wesentliche Grundvorstellungen von Funktionen aufgebaut und miteinander verknüpft. Eine Funktion kann dargestellt werden durch

- eine Wertetabelle,
- eine Funktionsvorschrift,
- einen Graphen,
- eine Sachsituation.

Da die Schüler bereits wissen, dass der Graph einer linearen Funktion eine Gerade ist, knüpfen wir an dieses Vorwissen an und erarbeiten daran ein Konzept zur Beschreibung von Geraden, das sich in den späteren Kapiteln auf den $\mathbb{R}^3$ übertragen lässt. Wir betrachten die lineare Funktion $g(x) = 3x + 1$ als Ausgangsobjekt. Aus mathematischer Sicht ist die Funktion g und der Funktionsgraph ein und dasselbe Objekt, nämlich die implizit definierte Punktmenge $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 3x + 1\right\}$, die Funktion *ist* also tatsächlich eine Gerade. Wir drücken diese Objektgleichheit aus, indem wir für die Funktion den Namen g verwenden. Ziel ist es nun, diese implizit definierte Punktmenge in die explizite Darstellung

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

zu überführen und damit ein tragfähiges Konzept zur Übertragung der Definition einer Geraden auf den Raum $\mathbb{R}^3$ zu etablieren.

x	$f(x)$
0	1
1	4
2	7
r	$3r+1$

Die Aufgabe kann mithilfe einer Wertetabelle gelöst werden. Hieraus lassen sich die Punkte $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}r\\3r+1\end{pmatrix}$ ablesen, wobei wir letzteren schreiben können als

$$\begin{pmatrix}r\\3r+1\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Wir können also einen Punkt auf der Geraden angeben, indem wir in den Punktterm $r\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ irgendeine reelle Zahl r einsetzen. Umgekehrt finden wir für jeden Punkt auf der Geraden eine reelle Zahl r, so dass der Punkt durch den Punktterm $r\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ gegeben ist.

Die Gerade g ist also die Menge aller Punkte X, für die eine reelle Zahl r existiert, so dass $X = r\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ist.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} g &= \left\{X \mid \text{es existiert eine reelle Zahl } r \text{, so dass } X = r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu der Vorgehensweise im Lehrtext haben wir auf diese Weise nicht einen Punktterm mithilfe geometrischer Überlegungen konstruiert, sondern wir haben den Punktterm durch algebraische Umformungen aus einer bereits bekannten Darstellungsform von Geraden hergeleitet. Zur nun notwendigen geometrischen Interpretation dieses Punkttermes zerlegen wir die Summe $\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ in ihre Bestandteile $\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und deuten diese nun als Ursprungsgerade und als Verschiebung der Ursprungsgeraden.

Anmerkungen zu den Beispielaufgaben

Die Beispielaufgaben gliedern sich in drei Gruppen: In der ersten werden Ursprungsgeraden, in der zweiten beliebige Geraden und in der dritten Geraden durch zwei Punkte thematisiert. Die Inzidenzprobleme für beliebige Geraden in Beispiel 4 und 8 werden dabei analog zu denen der Ursprungsgeraden in Beispiel 1 bearbeitet, nur dass bei der Lösung der linearen Gleichung ein zusätzlicher Umformungsschritt notwendig ist. Die Frage der Inzidenz wird dabei auf die Lösbarkeit eines Gleichungssystems zurückgeführt. Dabei wird in den Äquivalenzumformungen hier und im Folgenden bewusst auf die Einführung des Parameters r verzichtet und damit verschwiegen, dass die Aussage $X \in \mathbb{R}A$ in Wirklichkeit äquivalent zur Aussage *es existiert ein* $r \in \mathbb{R}$, *so dass* $X = rA$ *ist*. Stattdessen schreiben wir *der Punkt* X *ist von der Form* $X = rA$ *mit* $r \in \mathbb{R}$, was mit den Worten *„X ist ein Vielfaches von A“* versprachlicht werden kann.

Die Frage der Gleichheit von Ursprungsgeraden in Beispiel 2 und 3 dient als Vorbereitung zur Untersuchung der Parallelität von Geraden. Die Äquivalenz $\mathbb{R}A = \mathbb{R}A' \Leftrightarrow A = rA'$ kann dabei durch eine Inzidenzuntersuchung begründet werden: die Ursprungsgeraden sind gleich, wenn der Punkt A auf der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A'$ liegt. In Aufgabe 2(a) sind die Zahlen bewusst einfach gewählt um zu demonstrieren, dass man oft schon durch *„scharfes Hingucken“* die Frage der Gleichheit beantworten kann.

In Aufgabe 5 sind sowohl in Aufgabenteil (a) als auch in Aufgabenteil (b) die Ursprungsgeraden identisch, weshalb diese Aufgabe mit dem Satz über die Uneindeutigkeit der Geradendarstellung beantwortet werden kann.

14.1.6 Lagebeziehungen von Geraden

Vorbetrachtungen

Im Gegensatz zur Vorgehensweise in Teil I wird die Parallelität zweier Geraden an dieser Stelle nicht definiert. Da wir im Sinne der didaktischen Reduktion den $\mathbb{R}^2$ und die Ebene miteinander identifizieren, setzen wir den Begriff *parallel* als aus der Elementargeometrie bekannt voraus und *beschreiben* diesen Begriff lediglich mit Methoden der analytischen Geometrie. Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:

- Wir können die Parallelität zweier Geraden g und g' gemäß Definition 4.7 an der Gleichheit der dazugehörigen Ursprungsgeraden g_O und g'_O erkennen. Aus Schülersicht setzt dies die Einsicht voraus, dass aus $g \parallel g_0 = g'_O \parallel g'$ die Parallelität von g und g' folgt, dass also die Relation der Parallelität transitiv ist.

- Im Fall der ebenen Geometrie können wir die Parallelität gemäß Satz 6.4 durch Bestimmung der Anzahl gemeinsamer Punkte, also der Mächtigkeit der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, erkennen. Wir verwenden hier das Wort *gemeinsame Punkte* statt *Schnittpunkt*, weil das Wort Schnittpunkt suggeriert, es gäbe nur einen gemeinsamen Punkt, was wir jedoch erst am Ende der Suche feststellen können.

Die Suche nach gemeinsamen Punkten ist ein Standardverfahren, das auch bei der Lageuntersuchung Gerade/Ebene und Ebene/Ebene verwendet werden kann, weshalb wir es im Lehrtext als universelles Werkzeug präsentieren. Dabei variiert lediglich die Komplexität der zugrunde liegenden Gleichungssysteme, nicht jedoch die prinzipielle Vorgehensweise. Bei den Lageuntersuchungen handelt es sich damit überwiegend um ein Training der Anwendung von Rechenverfahren, die in Beispielaufgaben präsentiert werden. Bei Lageuntersuchungen von Geraden in der Ebene lassen sich alle Lageuntersuchungen auf Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten zurückführen, die mit den in der Sekundarstufe I entwickelten Verfahren (Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additionsverfahren) gelöst werden können, ohne dass der Gauss-Algorithmus thematisiert werden muss.

Das Bestimmen der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten x_1 und x_2 bedeutet formal das Finden einer Menge L, so dass folgende Aussagen äquivalent sind:

$$\begin{bmatrix} ax_1 & + & bx_2 & = & c \\ dx_1 & + & ex_2 & = & f \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in L.$$

Dies ist gleichwertig zur Mengengleichheit

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} ax_1 & + & bx_2 & = & c \\ dx_1 & + & ex_2 & = & f \end{bmatrix} \right\} = L.$$

Bei der Verwendung von unstrukturierten Lösungsverfahren, die mit dem Gleichungssystem beginnen und daraus Eigenschaften der gesuchten Unbekannten x_1 und x_2 ableiten, besteht jedoch die Gefahr, dass lediglich eine Implikation beziehungsweise eine Mengeninklusion gezeigt wird, nämlich

$$\begin{bmatrix} ax_1 & + & bx_2 & = & c \\ dx_1 & + & ex_2 & = & f \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in L$$

respektive

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} ax_1 & + & bx_2 & = & c \\ dx_1 & + & ex_2 & = & f \end{bmatrix} \right\} \subseteq L.$$

Die in der Sekundarstufe I etablierte Probe am Ende des Lösevorgangs dient damit nicht nur zur Kontrolle des Ergebnisses, sondern zugleich zum Nachweis der verbleibenden Implikation bzw. Mengeninklusion. Ein Verzicht auf die Probe ist nur dann legitim, wenn alle behandelten Gleichungssysteme unter kontrollierten Bedingungen auftreten, in denen es nur eine Lösung gibt. Im vorliegenden Unterrichtswerk treten jedoch auch Gleichungssysteme auf, bei denen es mehr als eine Lösung gibt. Bei der Lageuntersuchung von Ebenen geht es außerdem nicht nur um die Bestimmung der Anzahl der Lösungen, sondern zusätzlich auch um die Angabe der Dimension des Lösungsraumes. Deshalb ist es hier notwendig, die Schüler an eine gewisse Systematik beim Lösen linearer Gleichungssysteme zu gewöhnen und darauf zu achten, dass beim Lösen der Gleichungssysteme stets Äquivalenzumformungen angewandt werden. Somit ist sichergestellt, dass im Laufe des Lösungsprozesses keine zusätzlichen Lösungen hinzuerfunden werden.

Ein Verständnis dafür, dass die Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems Aussagen über die Lage zweier Geraden liefert, setzt die Einsicht voraus, dass durch das Lösen des Gleichungssystems die Anzahl gemeinsamer Punkte der Geraden bestimmt wird, wofür es wiederum essentiell ist, Geraden als Punktmengen zu erkennen. Ohne diese Einsicht werden Schüler diese Rechenverfahren nur kalkülhaft anwenden und die Interpretation der Lösungen auswendig lernen, ohne den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems und der Lage zweier Geraden zu erkennen.

Die Lageuntersuchung zweier geometrischer Objekte durch die Bestimmung der Anzahl gemeinsamer Punkte stößt jedoch an ihre Grenzen, wenn parallele (aber verschiedene) und windschiefe Geraden im $\mathbb{R}^3$ unterschieden werden sollen. Deshalb demonstrieren wir schon hier in Vorbereitung auf den hinteren Teil des Lehrwerkes die Untersuchung der dazugehörigen Ursprungsgeraden, womit wir auch die Parallelität von Geraden im $\mathbb{R}^3$ nachweisen können werden. Dieses Verfahren führt zu einem zweischrittigen Rechenschema, wobei in jedem Schritt ein Gleichungssystem mit einer Unbekannten gelöst werden muss: Im ersten Schritt muss die Gleichung $A = rA'$ gelöst werden, im zweiten Schritt die Gleichung $P = rA' + P'$.

Gleichungen mit einer Unbekannten haben den Vorteil, dass die Lösung häufig schon durch *„scharfes Hingucken“* gesehen werden kann. Aber das Verfahren hat noch einen weiteren Vorteil: die Zweischrittigkeit ist angelehnt an den zweischrittigen Konstruktionsprozess der Geraden in der vorangegangen Lerneinheit, wodurch diese geometrisch motivierte Konstruktion stets erneut durchdacht werden kann. Dadurch wird das Verfahren weniger kalkülhaft, auch wenn es sich natürlich - wie jedes Verfahren - auswendig lernen und kalkülhaft anwenden lässt.

Es kann ratsam sein, die Anzahl der verwendeten Rechenverfahren so gering wie möglich zu halten und sich nur auf eines der hier vorgestellten zu beschränken. Trotzdem kann es im Hinblick auf den weiteren Unterrichtsverlauf notwendig sein, mehr als ein Verfahren zu thematisieren. Diese didaktische Entscheidung obliegt letztendlich der unterrichtenden Lehrkraft unter Berücksichtigung des geplanten Unterrichtsverlaufes.

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe und zum Lehrtext

Ziel der Einstiegsaufgabe ist es, die Schüler die im Lehrtext genannten Kriterien eigenständig entwickeln zu lassen. Die Aufgabe ist insofern offen, da nicht festgelegt ist, ob Lagebeziehungen mithilfe der dazugehörigen Ursprungsgeraden oder mithilfe der Anzahl gemeinsamer Punkte untersucht werden sollen. Die Punkte in der Einstiegsaufgabe sind so gewählt, dass der Zusammenhang $A' = (-2) \cdot A$ durch *„scharfes Hinsehen“* entdeckt werden kann. Aber auch die Tatsache, dass P' auf der Geraden g liegt, ist ohne großen Rechenaufwand einsehbar, da $P' = 1 \cdot A + P$ ist. Die Aussage von Max kann einerseits direkt durch Lösung des entsprechenden Gleichungssystems überprüft werden, andererseits ergibt sie sich die aber auch unmittelbar aus der Aussage von Paul.

Im Lehrtext werden beide Verfahren erläutert. Die sich jeweils anschließenden Beispielaufgaben übernehmen dabei folgende Funktion:

- Es sollen die jeweiligen Rechenschemata beispielhaft präsentiert werden.
- Die Beispiele dienen als Ersatz für einen allgemeinen Beweis von Satz 6.4 und sind damit Teil der didaktischen Reduktion.

Beispiel 1
Bei der Suche nach gemeinsamen Punkten stellt sich die Frage, wie man die dazugehörige Rechnung sauber aufschreibt. Ein Ansatz durch Mengenumformungen

$$\begin{aligned} g \cap g' &= \{X \mid \exists r \in \mathbb{R} : X = rA + P\} \cap \{X \mid \exists r \in \mathbb{R} : X = rA' + P'\} \\ &= \{X \mid (\exists r \in \mathbb{R} : X = rA + P) \wedge (\exists r \in \mathbb{R} : X = rA' + P')\} \\ &= \{X \mid \exists r \in \mathbb{R} \exists s \in \mathbb{R} : X = rA + P = sA' + P'\} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

scheidet in der Schule aus, da die Schüler mit Mengenoperationen nicht vertraut sind.

Eine Möglichkeit sind die folgenden Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} & X \text{ ist ein gemeinsamer Punkt von } g \text{ und } g' \\ \Leftrightarrow\quad & r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = X = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{bmatrix} I & : & 5r & -2s & = & -1 \\ II & : & 2r & +1s & = & -4 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & \begin{bmatrix} I & : & 5r & -2s & = & -1 \\ I+2II & : & 9r & & = & -9 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & r = -1 \text{ und } s = -2 \\ \Leftrightarrow\quad & X = -1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde der eigentlich notwendige Zusatz „*Es existieren* $r, s \in \mathbb{R}$*...*“ zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen. Zeile zwei und Zeile drei sind trotzdem keine äquivalenten Aussagen, da die Variable X bei der Implikation *Zeile* 3 $\Rightarrow$ *Zeile* 2 noch gar nicht eingeführt wurde. Die letzte Äquivalenz ist nur durch

Rückgriff auf Vorwissen aus der zweiten Zeile zu verstehen. Eine Möglichkeit, diese Missstände zu umgehen, ist folgende Schreibweise:
Sei $X \in \mathbb{R}^2$. Dann sind äquivalent:

$$
\begin{aligned}
& X \text{ ist ein gemeinsamer Punkt von } g \text{ und } g' \\
\Leftrightarrow\quad & X = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und} \\
& X = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & X = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und} \\
& r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = X = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & X = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und} \\
& r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & X = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und} \\
& \begin{bmatrix} I & : & 5r & -2s & = & -1 \\ II & : & 2r & +1s & = & -4 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & X = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und} \\
& \begin{bmatrix} I & : & 5r & -2s & = & -1 \\ I + 2II & : & 9r & & = & -9 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & X = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und} \\
& r = -1 \text{ und } s = -2 \\
\Leftrightarrow\quad & X = -1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dadurch wird der Aufschrieb jedoch übertrieben lang, obwohl er durch Vernachlässigung der Existenzquantoren schon verkürzt wurde. Verkürzen können wir den Aufschrieb, wenn wir zuvor den Punkt X als Punkt auf der Geraden g einführen, was unter erneuter Vernachlässigung des Existenzquantors durch die Schreibweise
„*Sei* $X = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ein Punkt auf der Geraden g.*“
geschehen kann. Dann können wir uns nämlich stets auf diese Tatsache berufen,

wodurch folgende Aussagen tatsächlich äquivalent zueinander sind:

$$
\begin{aligned}
& X \textit{ ist ein gemeinsamer Punkt von } g \textit{ und } g' \\
\Leftrightarrow \quad & X \textit{ liegt auf der Geraden } g' \\
\Leftrightarrow \quad & X = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} I & : & 5r & -2s & = & -1 \\ II & : & 2r & +1s & = & -4 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} I & : & 5r & -2s & = & -1 \\ I + 2II & : & 9r & & = & -9 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & r = -1 \textit{ und } s = -2.
\end{aligned}
$$

Nun können wir uns auf die Voraussetzung $X = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ berufen und erhalten somit die Koordinaten des Punktes X.

Allerdings ist es in der Schule unüblich, Variablen vor Verwendung einzuführen, weshalb es auch an dieser Stelle schwierig sein wird, die Schüler davon zu überzeugen, die Variable X als Punkt auf der Geraden g einzuführen. Deshalb behelfen wir uns mit folgendem Trick: Im Lehrtext haben wir durch eine sprachliche Plausibilitätserklärung festgestellt, dass die Anzahl der gemeinsamen Punkte gleich der Anzahl der Lösungspaare (r, s) des Gleichungssystems $rA + P = sA' + P'$ ist. Wir bestimmen deshalb zunächst lediglich die Lösungen dieses Gleichungssystems, ohne damit einen Punkt zu betrachten, der auf beiden Geraden liegt. Haben wir ein Lösungspaar (r, s) gefunden, so generieren wir erst im Anschluss aus diesem Lösungspaar einen gemeinsamen Punkt, indem wir die so gewonnenen Zahlen r und s als Parameter in die Parameterdarstellung der Geraden einsetzen.

Wir reden von Lösungspaaren, um die Fehlvorstellung zu vermeiden, dass es im vorliegenden Beispiel zwei Lösungen gibt, nämlich $r = 1$ als eine Lösung und $s = -2$ als zweite Lösung. Wir kennzeichnen diese Zusammengehörigkeit durch Klammern und weichen damit von unser bisherigen Schreibweise $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ für Zahlenpaare ab. Die Klammern sollen lediglich die Zusammengehörigkeit der beiden Variablen zum Ausdruck bringen, wir wollen die Lösungen jedoch nicht als eigenständiges mathematisches Objekt sehen und Lösungen von Gleichungssystemen selbst wieder als Punkte interpretieren. Wenn unser Zahlenpaar mit Werten belegt wird, schreiben wir deshalb auch *„das Gleichungssystem besitzt nur ein Lösungspaar, nämlich* $r = -1$ *und* $s = -2$*“* anstelle von *„das Gleichungssystem besitzt nur ein Lösungspaar, nämlich*

$(r, s) = (-1, -2)$“.

Die Lösung der linearen Gleichungssysteme ist in den Beispielaufgaben verkürzt aufgeschrieben. Das zur Punktgleichung äquivalente lineare Gleichungssystem steht zwar noch da, auf eine Wiedergabe der Lösungsschritte wird jedoch verzichtet. Später werden wir auch auf die Notation des Gleichungssystems verzichten und direkt nach der Punktgleichung die Lösung hinschreiben.

Beispiele 3 und 4
Die Beschreibung der Parallelität durch die Gleichheit der entsprechenden Ursprungsgeraden ermöglicht es, den bereits aus der Mittelstufe bekannten Diagonalensatz für Parallelogramme zu beweisen. Der Beweis erfolgt dabei analog zu Satz 6.9. Wir geben den Beweis der Äquivalenz von Aussage 1. und 3. des Satzes als Beispiel. Dabei teilen wir die Aussage in zwei Beispielaufgaben auf. Bei der Formulierung der Aufgaben verzichten wir auf die Echtheit des Vierecks $ABCD$ und setzen im Beweis stillschweigend voraus, dass $\mathbb{R}(A-B)$ überhaupt eine Ursprungsgerade darstellt und dass je drei Punkte des Vierecks nicht auf einer Geraden liegen dürfen. Zur weiteren Vereinfachung legen wir das Koordinatensystem so, dass der Koordinatenursprung mit der Ecke C zusammenfällt.

Die Äquivalenz von Aussage 1. und 2. in Satz 6.9 erfolgt in zwei Übungsaufgaben, deren Bearbeitung analog zu den Beispielaufgaben erfolgt. Hierbei bedarf es nur einer geringfügigen Abänderung der Beispielaufgaben, der wesentliche Teil kann einfach abgeschrieben werden. Nun ist die Frage, ob dadurch tatsächlich ein Lerneffekt erzielt wird. Wir behaupten, dass dies der Fall ist. Denn um den Beweis entsprechend abändern zu können, müssen die Schüler ihn verstanden haben, und zwar derart, dass sie ihn selbstständig reproduzieren können. Dadurch haben die Schüler zwar keinen eigenständigen Beweis entwickelt, aber sie haben ihr Repertoire an mathematischen Werkzeugen und Strategien erweitert, die sie zur Problemlösung einsetzen können. Das Nachvollziehen und Verinnerlichen von Argumentationswegen, auch wenn diese nicht selbstständig entwickelt wurden, ist ein wesentlicher Teil der Ausbildung zum Mathematiker, der dazu beiträgt, dass Mathematik zu einer Disziplin wird, die man lernen kann. Wir halten es für sinnvoll, den Schülern diese Lernbarkeit der Mathematik aufzuzeigen.

14.1.7 Koordiatendarstellung von Geraden

In der Einstiegsaufgabe zur Lerneinheit über Geraden haben wir an das Vorwissen angeknüpft, dass die Graphen affin linearer Funktionen eine Gerade in der Ebene darstellen. In dieser Lerneinheit soll die ebenfalls aus der Sekundarstufe I bekannte Tatsache, dass die Lösungsmengen linearer Gleichungen eine Gerade darstellen, mit der neu hinzugekommenen Parameterdarstellung von Geraden verknüpft werden. Anders als durch Graphen linearer Funktionen können dadurch auch Geraden dargestellt werden, die parallel zur y- bzw. x_2-Achse sind. Dabei ist zu beachten, dass es sich bei einer Geraden unabhängig von der Darstellungsform um dasselbe mathematische Objekt handelt, nämlich um eine Menge von Punkten bzw. Zahlenpaaren. Um diesen Aspekt zu verdeutlichen, werden die Geraden in Koordinatenform als Punktmengen angegeben und nicht wie in der Sekundarstufe I üblich, lediglich durch Angabe der definierenden Gleichung.

Der Unterschied besteht also nicht in der Art der mathematischen Objekte, sondern lediglich darin, dass die definierende Eigenschaft einmal als Existenzaussage und einmal als von den Koordinaten x_1 und x_2 abhängige Aussage gegeben ist. Die Variable der Parameterdarstellung wird im Einsetzungsaspekt betrachtet, die Variablen x_1 und x_2 in der Koordinatendarstellung im Simultanaspekt. Dabei ist es einfach, Punkte zu erzeugen, die die Existenzaussage erfüllen: es muss lediglich der Parameter r mit einem beliebigen Wert belegt werden. Für die Inzidenzfrage eines Punktes X muss jedoch eine Existenzaussage überprüft werden, was in der Regel mit Arbeit verbunden ist, sofern die Aufgabenstellung nicht eine offensichtliche Wahl des Parameters zulässt. Umgekehrt ist es ohne größere Mühen möglich, die Erfülltheit der Gleichung $ax_1 + bx_2 = c$ für einen Punkt X zu überprüfen. Schwieriger ist es jedoch Punkte anzugeben, die diese Bedingung erfüllen.

Ein Unterrichtsgang der analytischen Geometrie kann sich durchaus auf eine Darstellungsform von Geraden und Ebenen beschränken, sofern nur diese beiden Objekte thematisiert werden sollen. Beabsichtigt man jedoch, neben Geraden und Ebenen auch noch weitere mathematische Objekte, wie beispielsweise Kreise und Ellipsen, zu betrachten, so sollte an dem bekannten Objekt *Gerade* der Unterschied zwischen expliziter und impliziter Darstellung thematisiert werden.

Bei der Darstellung von Ebenen im Raum werden wir als zusätzlichen Zwischenschritt die Normalendarstellung verwenden, um die Gleichwertigkeit der unterschiedlichen Darstellungsformen geometrisch zu plausibilisieren. Auf diesen Zwischenschritt verzichten wir an dieser Stelle, da die Hauptintention dieser Lerneinheit sein soll, die Parameterdarstellung auf direktem Wege mit dem Vorwissen aus der Sekundarstufe I zu verknüpfen und ein Beispiel für eine implizit definierte Punktmenge zu geben.

Die Einstiegsaufgabe bietet verschiedene Zugänge. Einerseits kann durch algebraische Umformungen die Äquivalenz der Aussage *„es existiert ein $r \in \mathbb{R}$, so dass $X = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$“* und der Aussage $2x_1 - x_2 = 4$ gezeigt werden. Andererseits können hier aber auch algebraische und geometrische Argumente vermischt werden. Identifiziert man nämlich beide Punktmengen als Geraden, so ist es ausreichend, durch Raten, systematisches Probieren oder durch Rechnung zwei verschiedene Punkte zu finden, die auf beiden Geraden liegen.

In den Beispielaufgaben 1 und 2 werden die Umwandlungen von einer Darstellungsform in die andere demonstriert. Diese Beispielaufgaben sind wieder ein wesentlicher Teil der didaktischen Reduktion: Durch die Beispiele wird plausibilisiert, dass die beiden Darstellungen von Geraden tatsächlich gleichwertig sind, ohne dass dafür ein allgemeingültiger Beweis erbracht wird. Dabei werden in jeder Umwandlung lediglich Implikationen statt Äquivalenzumformungen verwendet. Erst durch das Zusammenwirken dieser beiden Beispiele werden auch die umgekehrten Implikationen deutlich.

Bei der Umwandlung der Koordinatendarstellung in die Parameterdarstellung ergibt sich die Schwierigkeit, dass der Parameter nicht mehr wie üblich mit r, sondern stattdessen mit x_2 bezeichnet wird. In Schulbüchern sieht man deshalb häufig als abschließenden Schritt, dass die Variable x_2 in r bzw. in die Variable, mit der üblicherweise der Parameter bezeichnet wird, umbenannt wird. Wir verzichten an dieser Stelle bewusst auf diesen überflüssigen Schritt, weil es letztendlich vollkommen egal ist, ob wir den Parameter x_2 oder r nennen. Die Umbenennung des Parameters von x_2 in r ist ein Hilfsmittel, um einen Leser, der im freien Umgang mit Variablen nicht geübt ist, zu unterstützen. Es stellt sich jedoch die Frage, ob diese permanente Unterstützung nicht gerade der Grund dafür ist, dass viele Schüler die Variablen nicht als freie Objekte sehen, sondern stets mit einem bestimmten Buchstaben ein festes Objekt verbinden. Dies führt dazu, dass die Variable r automatisch mit dem Wort *Parameter* verknüpft wird, ohne dass den Schülern die Bedeutung dieses Wortes bewusst ist.

14.1.8 Aufgaben zur affinen Geometrie

Das Lösen von Inzidenzproblemen und die Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden stellt einen eher inhaltsarmen Aspekt der analytischen Geometrie dar, in dem es überwiegend um die Abarbeitung eingeführter Rechenschemata geht und weniger um mathematische Argumentation. Deshalb werden in dieser Lernumgebung Aufgaben präsentiert, die zwar keine neuen inhaltlichen Gebiete erschließen, sich jedoch dafür eignen, mathematische Argumentationsweisen zu vertiefen. In diesen Aufgaben verstecken sich zwar mitunter Lageuntersuchungen zweier Geraden, aber es sind keine Rechnenschemata anzuwenden, sondern Eigenschaften von Punkten rechnerisch nachzuweisen. Zum Nachweis dieser Eigenschaften dienen die Rechenregeln, in denen sich die Vektorraumaxiome manifestieren. Eine Eigenschaft von Punkten, die ohne Einführung eines Abstandsbegriffs nachweisbar ist, ist die Eigenschaft, Teilungspunkt einer Strecke zu sein. Die Bestimmung des Mittelpunktes und des 2:1-Teilungspunktes ist ohne die Einführung eines Abstandsbegriffs möglich. Genauso lassen sich andere rationale Teilverhältnisse bestimmen, ohne dass ein Abstandsbegriff eingeführt werden muss. Dies eröffnet ein großes Repertoire an Übungsaufgaben, die in dieser Lernumgebung behandelt werden sollen.

Der Begriff des Teilungspunktes, der bisher nur in Form des Mittelpunktes und des 2:1-Teilungspunktes aufgetreten ist, wird in Beispielaufgabe 1 verallgemeinert. Dabei kann sowohl mittels Projektion auf die Koordinatenachsen argumentiert werden, als auch mittels Verschiebung des Punktes A in Richtung der gerichteten Strecke $O(B-A)$. Die Berechnungsvorschrift zum Berechnen des $p:q$-Teilungspunktes T

lässt sich dabei folgendermaßen interpretieren:

- Bei der Berechnungsvorschrift $T = A + \frac{p}{p+q}(B - A)$ unterteilen wir die Differenz $B - A$ in $p+q$ Teilstücke und gehen dann von A aus p dieser Teilstücke. Diesen Vorgang könnten wir wieder durch Pfeile veranschaulichen.
- Durch die Berechnungsvorschrift $T = \frac{q}{p+q}A + \frac{p}{p+q}B$ wird der Punkt T als Konvexkombination der Punkte A und B dargestellt. Wir können uns dabei die Punkte A und B als Massepunkte vorstellen, die den Punkt T anziehen. Die Vorfaktoren vor den Punkten A und B geben jeweils die Gewichtung dieser Punkte an. Je weiter der Punkt T von A entfernt ist (also je größer p ist), desto stärker muss die Gewichtung des Punktes B sein. Deshalb steht p dort im Nenner des Vorfaktors.

Aussagen über Teilungspunkte ersetzen in dieser Lerneinheit die koordinatenbasierten Schnittpunktberechnungen. Um diese Aussagen für Schüler handhabbar und beweisbar zu machen, wird beim Beweis jeder Beispielaufgabe ein einheitliches Schema verwendet, das den Schülern als Orientierung dienen soll. Dabei gliedern sich die Beweise in zwei Spalten: in der linken Spalte werden geometrische Sachverhalte beschrieben, in der rechten Spalte werden diese in algebraische Gleichungen übersetzt. Auf diese Weise werden den Schülern die Prozesse des Geometrisierens und des Algebraisierens transparent gemacht. Zusätzlich werden die Beweise horizontal in drei Bereiche gegliedert, nämlich in *Voraussetzungen*, in *Behauptung* und in eine *Rechnung*, die zum Nachweis der Behauptung führt. Dadurch werden den Schülern die zur Verfügung stehenden Werkzeuge in Form von Gleichungen präsentiert. Die Übersetzung der zu zeigenden Behauptung in eine algebraische Gleichung ist oftmals schon der wesentliche Schritt, um diese zu beweisen.

Entgegen unserer üblichen Vorgehensweise bezieht sich der Lehrtext direkt auf die Einstiegsaufgabe, um das verwendete Beweisschema vorzustellen. Die Einstiegsaufgabe, die wir in Satz 6.8 im Rahmen unserer Theorie fachlich rigide bewiesen haben, enthält eine Äquivalenzaussage als Behauptung, um das Konzept von Satz und Umkehrsatz vorzustellen. Sowohl zum Verständnis der Hinrichtung als auch der Rückrichtung des Beweises müssen die Schüler in der Lage sein, die Parallelität zweier Geraden nicht nur anhand der Anzahl gemeinsamer Punkte zu erkennen, sondern auch durch die Gleichheit der dazugehörigen Ursprungsgeraden. Der wesentliche Bestandteil der Hinrichtung des Beweises ist eine Schnittpunktberechnung. Da wir jedoch keine Koordinaten zur Verfügung haben, muss zur Berechnung der Parameter r und s argumentativ anders vorgegangen werden. Das hier zum Tragen kommende Argument ist die zur Voraussetzung der Echtheit des Dreiecks ABC äquivalente Aussage, dass die Punkte $A - C$ und $B - C$ linear unabhängig sind, bzw. wegen unserer Annahme, dass $C = O$ ist, zur Aussage, dass die Punkte A und B linear unabhängig sind. Der Beweis besteht daraus, dass eine Linearkombination des Koordinatenursprungs O hergestellt wird, woraus wir folgern können, dass die Vorfaktoren wegen der linearen Unabhängigkeit verschwinden müssen. Wir kommen an dieser Stelle jedoch ohne den Begriff der linearen Unabhängigkeit aus. Wir können die Gleichung $(r + \frac{1}{2})A = (1 + r + s)B$ nämlich auch geometrisch interpretieren: Sie besagt, dass der Punkt $(r + \frac{1}{2})A$ respektive $(1 + r + s)B$ der Schnittpunkt der verschiedenen Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ ist. Damit wird die Argumentation in den Kontext der Schnittpunktberechnung des vorherigen Kapitels eingeordnet.

Vergleichen wir die Beispielaufgaben 4 und 5, so stellen wir fest, dass Beispielaufgabe 4 die Behauptung von Aufgabe 5 umfasst, dass jedoch die Behauptung um eine weitere Aussage ergänzt wurde. Der Beweis der umfangreicheren Behauptung entpuppt sich letztendlich als einfacher. Der Grund dafür ist, dass durch die doppelte Aussage zusätzliche Informationen zur Verfügung stehen, mit denen lediglich nachgewiesen werden muss, dass die zu betrachtenden Punkte der verschiedenen Geraden identisch sind und deshalb mit dem Schnittpunkt übereinstimmen müssen. Hierbei wird aus der Echtheit des Dreiecks ohne formalen Beweis geschlossen, dass die Geraden $g(A, S)$ und $g(M, B)$ genau einen gemeinsamen Punkt besitzen. Bei Aufgabe 5 hingegen muss der Schnittpunkt explizit berechnet werden, wobei die gleiche Argumentation wie bei der Einstiegsaufgabe verwendet werden kann. Diese beiden Aufgaben zeigen, wie wir Aufgaben zur Differenzierung abwandeln können. Die Aussage von Aufgabe 5 ist die Umkehraussage von Aufgabe 3.

Die Tatsache, dass umfangreichere Behauptungen gelegentlich einfacher zu zeigen sein können, ist auch ein bei Induktionsaufgaben beobachtbares Phänomen. Verschärft man dort nämlich die zu zeigende Behauptung, so steht einem damit eine stärkere Induktionsvoraussetzung zur Verfügung, die letztendlich den Beweis vereinfachen kann.

Bei Aufgabe 6 setzen wir wieder voraus, dass sich die betrachteten Geraden in genau einem Punkt schneiden, was aus der nicht weiter thematisierten Echtheit des Parallelogramms folgt. Ansonsten müssten wir auch hier wieder eine Schnittpunktberechnung durchführen und die Echtheit des Vierecks als Argument verwenden, um die Parameter zu bestimmen.

14.2 Metrische Geometrie

14.2.1 Das Punktprodukt

Vorbetrachtungen

Mithilfe der Addition und der Vervielfachung von Punkten haben wir dem $\mathbb{R}^2$ eine Vektorraumstruktur gegeben. Damit sind wir in der Lage, geometrische Probleme wie die Parallelität von Geraden, Schnittpunktberechnungen und Teilverhältnisse zu behandeln. Diese Begriffe sind invariant unter affin linearen Abbildungen, weshalb wir diesen Teil der analytischen Geometrie als *affine Geometrie* bezeichnen. In dieser Lerneinheit werden nun die nicht-invarianten Längen- und Winkelmessungen thematisiert. Zur Durchführung dieser Messungen erweitern wir den zugrundeliegenden Raum um eine zusätzliche Struktur. Dabei ergibt sich folgende Hierarchie möglicher Erweiterungen:

Raum		zugehörige Struktur
euklidischer Raum	hat ein	Skalarprodukt
ist ein		induziert eine
normierter Raum	hat eine	Norm
ist ein		induziert eine
metrischer Raum	hat eine	Metrik

Haben wir nämlich einen euklidischen Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so wird durch

$$\|A\| := \sqrt{\langle\, A\,,\; A\,\rangle}$$

eine Norm induziert. Ist hingegen $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem Vektorraum, so wird durch

$$d(A, B) := \|A - B\|$$

eine Metrik induziert (siehe etwa [20]). Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Im vorliegenden Fall des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ induziert jedoch die Metrik

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

auf dem $\mathbb{R}^2$ die Norm

$$\|A\| := d(A, 0) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

welche wiederum das Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle := \frac{1}{4}(\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2)$$

induziert (siehe etwa [49]).

Deshalb könnten wir uns im vorliegenden Fall auf die Einführung *eines* der nun gleichwertigen mathematischen Objekte *Metrik, Norm* oder *Skalarprodukt bzw. Punktprodukt* beschränken. Gemäß obiger Hierarchie ist die Struktur des Skalarproduktes die am weitesten spezialisierte und damit das stärkste Werkzeug und sollte deshalb in dieser Lerneinheit den Schülern zur Verfügung gestellt werden. Die Metrik ist den Schülern jedoch in Form von Streckenlängen bekannt und bietet damit den notwendigen Anknüpfungspunkt an vorhandenes Wissen, weshalb auch diese im Unterricht eingeführt werden sollte. Deshalb gehen wir in dieser Lerneinheit den Weg von der Metrik über die Norm zum Skalarprodukt nach. Dieser Weg ist im Einklang mit den Fachanforderungen, nach denen *„bereits vor Einführung des Skalarprodukts [...] Beträge von Vektoren mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden“* sollen ([12], S.74).

Wir wollen das Skalarprodukt hier nicht unter dem Aspekt der bilinearen Abbildung betrachten, sondern als weitere Verknüpfung auf dem $\mathbb{R}^2$, und verwenden deshalb als Symbol den dick gedruckten Malpunkt $\bullet$. Dies hat den Vorteil, dass sich die Bilinearität in den strukturell bekannten Rechengesetzen widerspiegelt. Wegen dieses dick gedruckten Malpunktes hat sich in der Literatur die Bezeichnung *Punktprodukt* etabliert, während die Bilearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auch mit *Skalarprodukt* bezeichnet wird. Die Bezeichnung *Punktprodukt* halten wir jedoch nicht nur wegen des fett gedruckten Malpunktes im vorliegenden Fall für treffender, sondern auch, weil Punkte miteinander multipliziert werden und keine Skalare. Wir diskutieren im Folgenden, wie das Punktprodukt im Unterricht eingeführt werden kann.

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe und zum Unterrichtstext

Die Einführung des Punktproduktes kann geometrisch oder algebraisch erfolgen. Unter der geometrischen Einführung des Punktproduktes verstehen wir die Definition $A \bullet B := \|A\|\|B\| \cos(\measuredangle(A, B))$, unter der algebraischen Einführung verstehen wir die Definition $A \bullet B := a_1b_1 + a_2b_2$. Satz 8.20 besagt, dass diese beiden Definitionen gleichwertig zueinander sind. Für einen Unwissenden ist es zunächst erstaunlich, dass eine derart schlichte Definition wie die algebraische eine so umfangreiche geometrische Bedeutung hat.

Betrachten wir die Frage der Projektion eines Punktes auf eine Ursprungsgerade, so können wir daraus den geometrischen Zugang zum Punktprodukt induktiv herleiten und damit der Forderung entsprechen, Begriffe im Unterricht nicht einfach einzuführen, sondern durch aktive Auseinandersetzung mit einer Sachsituation zu gewinnen. Trotzdem entscheiden wir uns gegen diesen Weg. Das Punktprodukt dient nämlich nicht nur zur Berechnung von Winkelgrößen, sondern es erweitert die Ebene zu einem euklidischen Raum. Damit steht ein universelles Werkzeug in mathematischen Argumentationsketten zur Verfügung, mit dem geometrische Aussagen durch algebraische Rechnungen bewiesen werden können. Dazu muss das Punktprodukt jedoch in einer Form an die Schüler herangeführt werden, in der die algebraische Struktur sichtbar wird. Der Nachweis der algebraischen Struktur wird durch die geometrische Einführung jedoch unnötig verkompliziert. Sie nimmt dem Punktprodukt einen ganz wesentlichen Aspekt, nämlich den der Schlichtheit.

Einen Weg aus dem Dilemma, die algebraische Definition nutzen zu wollen, diese aber trotzdem an die Schüler heranzuführen, besteht in der ebenfalls erstaunlichen Tatsache, dass alle zur Winkelberechnung notwendigen Informationen schon in der Frage der Orthogonalität von Dreiecken stecken, die wir mit Hilfe des Satzes des Pythagoras auch ohne konkrete Winkelberechnungen beantworten können. Diese Fragestellung führt sofort zu dem Term $a_1b_1 + a_2b_2$, wodurch wir einen Rechenausdruck haben, den wir nun nur noch mit einem geeigneten Namen benennen müssen. Damit wählen wir zwar den auf den ersten Blick deduktiven Weg der algebraischen Definition, gehen hier aber über die Frage der Orthogonalität wiederum induktiv vor.

Alternativ kann der Rechenausdruck $a_1b_1 + a_2b_2$ auch auf folgende Art motiviert werden: Beschreibt $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ die Preise zweier Produkte und $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ die gewünschte Anzahl des ersten und des zweiten Produktes, so gibt $A \bullet B = a_1b_1 + a_2b_2$ die Gesamtkosten an.

Dies liefert noch zielgerichteter die gewünschte Definition des Punktproduktes, hat jedoch den Nachteil, dass wir das Gebiet der Geometrie verlassen müssten, weshalb wir diesen Weg nicht als Einstieg verwenden. Diese Interpretation kann jedoch im weiteren Verlauf genutzt werden, um den Schülern erneut zu demonstrieren, dass man ein mathematisches Objekt auf unterschiedliche Arten interpretieren kann.

Um die Rechtwinkligkeit von Dreiecken mithilfe des Satzes des Pythagoras untersuchen zu können, benötigen wir zwar den Begriff des Abstandes zweier Punkte, können zur Einführung dieses Begriffes jedoch an Wissen aus der Sekundarstufe I anknüpfen: der Abstand zweier Punkte A und B ist nämlich gleich der Länge der Strecke AB, womit den Schülern die Ebene bereits als metrischer Raum bekannt ist. Um sparsam mit Begriffen und Symbolen umzugehen, führen wir keine Metrik $d(A, B)$ als eigenständiges Symbol ein, sondern verwenden die üblicherweise mit $|AB|$ bezeichnete Streckenlänge. Auch die Norm führen wir nicht als eigenständigen Begriff und eigenständiges Symbol ein, sondern bilden eine Analogie zum Betrag einer reellen Zahl a. Der Betrag $|a|$ einer reellen Zahl a gibt nämlich auf dem Zahlenstrahl den Abstand dieser Zahl vom Ursprung an. Genauso soll $|A|$ den Abstand eines Punktes A vom Koordinatenursprung angeben, also die Länge $|AO|$ der Strecke AO. Die Verschiebungsregel gewährleistet nun die Gültigkeit der prägnanten Gleichung

$$|AB| = |B - A| .$$

Mit dem Punktprodukt haben wir nun drei verschiedene multiplikative Verknüpfungen:

- die Multiplikation reeller Zahlen als Verknüpfung auf $\mathbb{R}$,
- die Vervielfachung als Verknüpfung zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$,
- das Punktprodukt als Verknüpfung auf dem $\mathbb{R}^2$.

Wir können diese dadurch unterscheiden, indem wir bei der Multiplikation reeller Zahlen den Malpunkt weglassen, beim Punktprodukt hingegen einen fetten Punkt verwenden. Es ist jedoch auch stets aus der Art der Operanden ersichtlich, um welche Multiplikation es sich handelt, so dass bei zunehmender Vertrautheit für sämtliche Operatoren dasselbe Symbol verwendet oder das Symbol ganz weggelassen werden kann. Es empfiehlt sich jedoch zumindest beim Punktprodukt nicht gänzlich auf den Malpunkt zu verzichten, da sonst das Produkt $A \bullet B$ nicht von der Strecke AB

zu unterscheiden ist. Im Unterrichtswerk behalten wir jedoch zur Verdeutlichung den Malpunkt $\bullet$ für das Punktprodukt bei, auch wenn dieser bei handschriftlichen Aufzeichnungen der Schüler schwerer zu schreiben ist als der gewöhnlicher Malpunkt.

Die abkürzende Schreibweise A^2 für $A \bullet A$ ermöglicht die prägnante Formulierung der binomischen Formeln, welche in Beispiel 2 erarbeitet werden. Mit dieser Abkürzung ergibt sich die den Schülern schon von den reellen Zahlen bekannte Identität

$$\sqrt{A^2} = |A| \, .$$

Anmerkungen zu den Beispielaufgaben

Beispiele 1-3
Die algebraische Struktur des Punktproduktes wird im Lehrtext in Form von Rechenregeln formuliert, ein Beweis dieser Rechenregeln bleibt jedoch aus. Dieser Beweis wird in Beispielaufgabe 1 exemplarisch nachgeholt, die Beweise der restlichen Regeln können als Übungsaufgabe erfolgen. Interessanter als das Wiederfinden vertrauter Rechengesetze ist jedoch die Erkenntnis, dass einige Rechenrelgen für das Punktprodukt nicht gelten. Da das Anwenden von *„gefühlt richtigen Rechenregeln“* eine beliebte Fehlerquelle ist, werden die ungültigen Rechenregeln in Beispielaufgabe 3 gesondert thematisiert. Hier fehlt das ebenfalls falsche *„Assoziativgesetz“* $(A \bullet B) \cdot C = A \cdot (B \bullet C)$, weil dieses Gesetz schon aus strukturellen Gründen nicht existieren kann: Die rechte Seite ist nämlich ein Produkt aus einem Punkt und einer reellen Zahl, die Vervielfachung haben wir jedoch nur für den Fall definiert, dass links vom Operator eine reelle Zahl und rechts vom Operator ein Punkt steht. Aber auch wenn wir dies berücksichtigen, indem wir die Reihenfolge der Operanden auf der rechten Seite vertauschen, erhalten wir kein allgemeingültiges Rechengesetz. Wählen wir beispielsweise $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so ist

$$(A \bullet B) \cdot C = 8 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \text{jedoch} \quad (B \bullet C) \cdot A = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

also ist auch $(A \bullet B) \cdot C = (B \bullet C) \cdot A$ im Allgemeinen falsch. Das zweite Rechengesetz des Punktproduktes ähnelt zwar dem Assoziativgesetz der Multiplikation reeller Zahlen, es sollte aber nicht so benannt werden. Der Grund dafür ist, dass dieses Gesetz keine Aussage über eine multiplikative Verknüpfung macht, sondern zwei unterschiedliche Verknüpfungen in Beziehung setzt: einerseits die Vervielfachung von Punkten, andererseits das Punktprodukt.

Beispiel 4
Beispiel 4 dient als Vorbereitung für das Folgekapitel, in dem zu einer gegebenen Geraden die Lotgerade gefunden werden soll. In Aufgabenteil (a) können zunächst durch *„scharfes Hingucken“* die ersten beiden in der Lösung angegebenen Punkte gefunden werden. Durch die Aufforderung, noch einen dritten Punkt anzugeben,

werden die Schüler angehalten sich Gedanken über alternative Lösungsstrategien machen. Dadurch und durch Aufgabenteil (b), in dem nun *alle* derartigen Punkte gefunden werden sollen, bietet diese Aufgabe Differenzierungspotential.

Beispiel 5
Bisher wurden nur Dreiecke am Koordinatenursprung auf Rechtwinkligkeit untersucht. Unter Anwendung der Rechengesetze für das Punktprodukt lassen sich diese Resultate jedoch durch koordinatenfreie Rechnungen auf beliebige Dreiecke übertragen. Diese Verallgemeinerung erfolgt in der Beispielaufgabe 5.

Beispiel 6
Gemäß den Fachanforderungen Mathematik *„[...] soll sich beispielsweise die Einführung des Skalarprodukts nicht auf das formale Rechenverfahren beschränken, sondern die geometrische Bedeutung der Rechenoperation, nämlich die orientierte Länge der Projektion eines Vektors auf einen Einheitsvektor ins Zentrum stellen. Bei weitergehenden Fragestellungen (zum Beispiel Abstandsbestimmungen) sollte dann auf diese Grundvorstellung zurückgegriffen werden.“* ([12], S. 49)

In der Sprache der linearen Algebra lautet diese Grundvorstellung: Ist ein Punkt A normiert, d.h. $|A| = 1$, so ist $(X \bullet A)A$ die *Orthogonalprojektion* des Punktes X auf den eindimensionalen Teilraum $\mathbb{R}A$. In der Sprache des vorliegenden Unterrichtswerkes lautet die entsprechende Grundvorstellung: $(X \bullet A)A$ ist der Fußpunkt des Lotes durch X auf $\mathbb{R}A$. Diese Tatsache ermöglicht es uns Lotfußpunkte zu bestimmen (und damit Abstandsberechnungen durchzuführen), ohne zuvor ein Schnittproblem zweier Geraden bearbeiten zu müssen. Diese Grundvorstellung soll in Beispiel 6 gefördert werden. Dazu wird zunächst mit einem konkreten Dreieck gearbeitet, bevor die Aussage für beliebige Dreiecke XOY gezeigt werden soll. Durch den steigenden Abstraktionsgrad ist diese Aufgabe selbstdifferenzierend.

Beispiel 7
Die Behauptung in Beispiel 7 kann mithilfe des zweiten Strahlensatzes gezeigt werden, da nach dem Satz über die Mittelparallele 6.8 $g(K, L) \parallel g(A, B)$ ist. Der hier angegebene direkten Beweis wurde aus [29], S. 233, übernommen. Diese Aufgabe ist deshalb lehrreich, weil sie erneut zeigt, wie kurz mathematische Beweise werden können, wenn wir Methoden der analytischen Geometrie einsetzen. Wir benötigen keinerlei Spezialwissen in Form von Sätzen; alles, was wir benötigen ist die in den Rechenregeln der Addition und Vervielfachung von Punkten manifestierte Vektorraumstruktur bzw. die in den Rechenregeln des Punktproduktes manifestierte Struktur des euklidischen Raumes.

14.2.2 Orthogonale Geraden

Vorbetrachtungen

Die Definition des Abstandes eines Punktes von einer Geraden ist den Schülern bereits aus der Sekundarstufe *I* bekannt. So wird beispielsweise in [3], S. 50, definiert:

> *„Der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g ist die kürzeste Entfernung zwischen g und P. Er lässt sich bestimmen, indem man die Länge der Strecke bestimmt, die von P aus senkrecht zu g führt."*

Durch diese Definition wird die Frage nach dem Abstand eines Punktes X von einer Geraden g unmittelbar mit der Frage der Orthogonalität von Geraden verbunden und soll deshalb als Motivation dienen, um die Orthogonalität von Geraden zu thematisieren. Den theoretischen Hintergrund zur Berechnung dieses Abstandes liefert Satz 5.7, in dem zusätzlich eine Formel zur Berechnung des Abstandes gegeben wird. Dazu ist es notwendig, den Fußpunkt X_g des Lotes durch X auf $g = \mathbb{R}A + P$ zu bestimmen, was auf folgende Arten geschehen kann:

(1) Projektion des Punktes $X - P$ auf den eindimensionalen Teilraum $\mathbb{R}A$,

(2) direkte Konstruktion der Lotgeraden mit anschließender Schnittpunktberechnung.

Da wir den $\mathbb{R}^2$ mit der Ebene identifizieren, setzen wir die Begriffe *Lotgerade, Lotfußpunkt* und *orthogonale Gerade* als aus der Elementargeometrie als bekannt voraus, wie gehabt werden die Begriffe an dieser Stelle also nicht definiert, sondern lediglich mit neuen Methoden beschrieben.

zu (1) Der Abstand des Punktes X von der Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ ist gleich dem Abstand des Punktes $X - P$ von der Geraden $g - X = \mathbb{R}A$, also dem Abstand eines Punktes von einem eindimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Da dieser Teilraum unabhängig von Dimension n des umgebenden Raumes die Dimension 1 besitzt, funktioniert die folgende Argumentation sowohl im Fall $n = 2$ als auch im Fall $n = 3$. Der Teilraum $\mathbb{R}A$ bildet zusammen mit seinem orthogonalen Komplement $(\mathbb{R}A)^\perp := \{X | X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in \mathbb{R}A : X \bullet Y = 0\}$ eine direkte Zerlegung des $\mathbb{R}^n$, gemäß [15], S. 101, lässt sich also jeder Punkt $X \in \mathbb{R}^n$ eindeutig darstellen als $X = X_1 + X_2$, wobei $X_1 \in \mathbb{R}A$ und $X_2 \in (\mathbb{R}A)^\perp$ ist. X_1 und X_2 werden die *Orthogonalprojektionen* des Punktes X auf den Teilraum $\mathbb{R}A$ respektive $(\mathbb{R}A)^\perp$ genannt. Ist eine Orthonormalbasis eines Teilraumes gegeben, so können wir diese Projektion mithilfe des Punktproduktes berechnen. Da der Teilraum $\mathbb{R}A$ eindimensional ist, lässt sich in diesem Fall eine Orthonormalbasis $A' := \frac{1}{|A|}A$ durch Normierung von A herstellen, und somit ist der Lotfußpunkt $(X - P)_{\mathbb{R}A}$ gegeben durch

$$(X - P)_{\mathbb{R}A} = ((X - P) \bullet A') \cdot A'.$$

Es ergibt sich damit folgendes Verfahren zur Abstandsbestimmung eines Punktes X von einer Geraden $g = \mathbb{R}A + P$:

- wir normieren A und erhalten $A' := \frac{1}{|A|}A$,
- der Fußpunkt $(X-P)_{\mathbb{R}A}$ des Lotes auf $\mathbb{R}A$ durch $X - P$ ist

$$(X-P)_{\mathbb{R}A} = ((X-P) \bullet A') \cdot A',$$

- der Abstand des Punktes X von der Geraden g ist gleich dem Abstand des Punktes $X - P$ von der Geraden $\mathbb{R}A$, also gleich

$$|(X-P) - (X-P)_{\mathbb{R}A}|\,.$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass es sowohl im $\mathbb{R}^2$ als auch im $\mathbb{R}^3$ angewendet werden kann. Zusätzlich lassen sich die hier angegebenen Schritte in einer einzigen Formel zusammenfassen, die in einer Formelsammlung gesichert und ohne Kenntnis der Entstehung der Formel zur Abstandsberechnung verwendet werden kann.

zu (2) Im $\mathbb{R}^2$ ist das orthogonale Komplement von $\mathbb{R}A$ ebenfalls ein eindimensionaler Teilraum, nämlich

$$(\mathbb{R}A)^\perp = \mathbb{R}(A^\perp) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

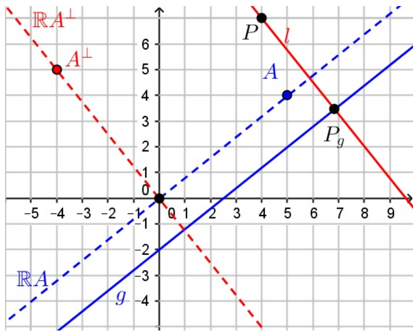
Deshalb lässt sich die Abstandsberechnung mit deutlich weniger theoretischem Aufwand durchgeführen, indem wir die Lotgerade gemäß Satz 6.2 konstruieren und den Lotfußpunkt als Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Geraden berechnen. Dies entspricht der Vorgehensweise in der Sekundarstufe I, wir knüpfen damit also unmittelbar an das Vorwissen der Schüler an. Diese Einfachheit wird aber mit einem höheren Rechenaufwand erkauft, da ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Das Verfahren lässt sich nicht auf die Abstandsberechnung Punkt-Gerade im $\mathbb{R}^3$ übertragen. Allerdings erhalten wir für den $\mathbb{R}^3$ ein ähnliches Konzept für die Abstandsberechnung Punkt-Ebene, wodurch dieses Verfahren auch im $\mathbb{R}^3$ seine Daseinsberechtigung erhält.

Da wir sowohl ein Verfahren in Anlehnung an den Abstandsbegriff aus der Sekundarstufe I als auch ein auf den $\mathbb{R}^3$ übertragbares Verfahren für wertvoll halten, werden beide Verfahren im Unterrichtswerk thematisiert.

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe

Die Einführung der Lotgeraden wird durch die Einstiegsaufgabe motiviert.

Die Gerade l, entlang derer das Anschlusskabel verlaufen soll, muss senkrecht zur Geraden g sein. Da sie zusätzlich durch den Punkt P verlaufen soll, ist sie von der Form $l = \mathbb{R}A^{\perp} + P$. Gesucht ist also ein Punkt $A^{\perp} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, so dass



$$0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5x_1 + 4x_2$$

ist.
Die Zahlen sind dabei so gewählt, dass die Koordinaten des Anschlusspunktes nicht aus einer Zeichnung abgelesen werden können. Fertigt man jedoch eine Skizze an, in die man die Geraden und die dazugehörigen Ursprungsgeraden einträgt, so sieht man, dass $A^{\perp} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein Punkt ist, der die Bedingung $A \bullet A^{\perp} = 0$ erfüllt. Das Lot l ist also die Gerade

$$l = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass das Lot in diesem Setting nicht definiert, sondern bereits als ein aus der Elementargeometrie bekannter Begriff vorausgesetzt wird, der lediglich mit Methoden der analytischen Geometrie beschrieben wird. Die Eindeutigkeitsaussage aus Satz 6.2 wird an dieser Stelle im Rahmen der didaktischen Reduktion nicht weiter thematisiert, sondern als intuitiv klar vorausgesetzt. Deshalb reicht es aus, einen einzigen Punkt $A^{\perp}$ zu finden, der die Bedingung $A \bullet A^{\perp} = 0$ erfüllt, anstatt alle Punkte zu charakterisieren, die diese Bedingung erfüllen. Zur Berechnung des Anschlusspunktes müssen wir ein Schnittproblem zweier Geraden lösen, was mit Methoden des vorangegangenen Kapitels möglich ist. Der Schnittpunkt der Geraden g und l ist $X_g = \begin{pmatrix} \frac{280}{41} \\ \frac{142}{41} \end{pmatrix}$, die Länge des Anschlusskabels ist damit $|XX_g| = \sqrt{(4 - \frac{280}{41})^2 + (7 - \frac{142}{41})^2} \approx 4,53$ Längeneinheiten.

Es ergibt sich folgendes Schema zur Abstandsbestimmung eines Punktes X von einer Geraden g:

- Bestimmung der Lotgeraden l auf g durch X,
- Berechnung des Lotfußpunktes X_g als Schnittpunkt der Lotgeraden l und der Geraden g,
- Berechnung des Abstandes der Punkte X und X_g.

Anmerkungen zu den Beispielaufgaben

Beispiel 1
Da sowohl das Verfahren (1), das auf der bekannten Interpretation des Punktproduktes beruht, als auch das Verfahren (2), das auf dem neuen Konzept der orthogonalen Geraden beruht, ihre Daseinsberechtigung haben, sollen diese beiden Verfahren in der Lösung dieser Beispielaufgabe präsentiert werden. Diese Lösungen dienen zur Demonstration der Rechenschemata.

Beispiel 2
Lotgeraden treten nicht nur bei Abstandsberechnungen in Erscheinung. Die *Mittelsenkrechte* ist ein weiteres Beispiel für eine spezielle Lotgerade. Dabei können wir die Mittelsenkrechte unter zwei Sichtweisen betrachten:

- *Betrachtung als explizit definierte Punktmenge* $\mathbb{R}(A-B)^{\perp}+M_{AB}$
  Durch diese Betrachtungsweise wird die Mittelsenkrechte als Gerade in Parameterdarstellung erkannt, Inzidenzfragen werden durch die Lösung von Gleichungssystemen beantwortet.

- *Betrachtung als implizit definierte Punktmenge* $\{X \mid (M_{AB}-X)\bullet(A-B)=0\}$
  Diese Betrachtungsweise ist geeigneter, um allgemeine Aussagen über die Mittelsenkrechten zu beweisen, da wir für Inzidenzfragen nun keine Gleichungssysteme mehr lösen müssen, sondern die Bedingung $(M_{AB}-X)\bullet(A-B)=0$ mithilfe der Rechenregeln des Punktproduktes nachweisen können.

Der Beweis von Satz 6.13, der die Mittelsenkrechte m_{AB} als Menge von Punkten charakterisiert, die von A und B den gleichen Abstand besitzen, basiert somit auf der zweiten Interpretation. Um diesen Beweis für die Schüler zugänglich zu machen, soll die Mittelsenkrechte zunächst als explizit definierte Gerade erkannt und vertraut gemacht werden. Deshalb werden die Schüler in Aufgabenteil (a) aufgefordert, die Geradengleichung - womit in diesem Fall die Parameterdarstellung gemeint ist - der Mittelsenkrechten anzugeben, auch wenn diese zum Beweis des Charakterisierungssatzes nicht benötigt wird.

Aufgabenteil (b) hat zweierlei Funktionen: einerseits sollen die Schüler mit der Aussage des Charakterisierungssatzes vertraut gemacht werden indem die Aussage durch ein konkretes Zahlenbeispiel illustriert wird, andererseits soll durch die angegebenen Lösungsvarianten dargelegt werden, dass wir auf zweierlei Arten nachweisen können, dass ein Punkt auf der Mittelsenkrechten liegt. Aus der Eindeutigkeit des Lotes folgt nämlich, dass ein Punkt X genau dann auf der Mittelsenkrechten liegt, wenn die Gerade $g(X, M_{AB})$ orthogonal zur Geraden $g(A, B)$ ist, wenn also $(A-B)\bullet(M_{AB}-X)=0$ ist.

In der Lösung zu Aufgabenteil (c) vereinfachen wir den Beweis von Satz 6.13, indem wir das Koordinatensystem so legen, dass $A=O$ ist. Würden wir den Beweis in zwei Implikationen zerlegen, so hätten wir beim Nachweis der Implikation

$X \in m_{AB} \Rightarrow |AX| = |BX|$ das Problem, dass wir quadratisch ergänzen, also den Term X^2 hinzuerfinden müssen. Dies ist erheblich schwieriger als das Eliminieren dieses Terms durch Subtraktion bei der Implikation $|AX| = |BX| \Rightarrow X \in m_{AB}$. Dafür muss bei dieser Implikation der Term $\frac{1}{2}B$ als Mittelpunkt $\frac{1}{2}(A + B)$ der Strecke AB erkannt werden, man muss also gedanklich den Punkt $A = O$ addieren. Diese Interpretation kann jedoch durch eine geeignete Skizze angeregt werden. Deshalb ist auch hier, selbst wenn die Argumentation rein algebraisch erfolgt, ein permanentes Zusammenspiel von Algebra und Geometrie hilfreich. Dies ist ein weiteres Argument dafür, dass wir eine strikte Trennung von algebraischer Struktur und geometrischer Anschauung nicht für sinnvoll erachten. Aufgrund der Schwierigkeiten bei der Implikation $X \in m_{AB} \Rightarrow |AX| = |BX|$ beginnen wir mit der umgekehrten Implikation, vergewissern uns dabei jedoch bei jedem Schritt, dass dieser Schritt auch in umgekehrter Richtung gilt, und führen damit den Beweis letztendlich durch Äquivalenzumformungen. Dabei weichen wir von unserer bisherigen Art des Aufschriebs ab.

Beispiele 3 und 4
Die Beispielaufgabe 3 besteht aus zwei Teilen mit zunehmendem Abstraktheitsgrad.

(a) Ziel dieser Teilaufgabe ist es zunächst, die zu zeigende Aussage anhand eines Zahlenbeispiels zu illustieren, indem die Mittelsenkrechten in Parameterdarstellung angegeben werden und der Schnittpunkt berechnet wird. Auch hier kann der Nachweis, dass dieser Schnittpunkt auf der dritten Mittelsenkrechten liegt, wieder auf zweierlei Arten erfolgen. Zum Beweis in Aufgabenteil (b) benötigen wir die Interpretation dieser Mittelsenkrechten als implizit definierte Punktmenge, weshalb wir als zusätzliche Aufgabe den Nachweis ohne Verwendung der Parameterdarstellung der Mittelsenkrechten fordern.

(b) Wir setzen stillschweigend voraus, dass das Dreieck ABC echt ist und sich deshalb die Mittellote m_{AB} und m_{BC} in genau einem Punkt U schneiden. Durch die Vorbereitung aus Aufgabenteil (a) können nun die Voraussetzungen an den Punkt U und die zu zeigende Aussagen algebraisiert werden, indem wir die Mittelsenkrechten als impliziert definierte Punktmenge betrachten. Wir führen hier schon einen Teil des Beweises durch, indem wir die Voraussetzungen vereinfachen. An dieser Stelle besteht diese Vereinfachung lediglich darin, den Punkt $U = O$ einzusetzen. Allerdings werden wir bei den folgenden Aufgaben häufig auch schon zielgerichtete Vereinfachungen und Uminterpretationen der Voraussetzung durchführen, die eigentlich schon als Teil des Beweises zu betrachten sind. Der eigentliche Beweis ähnelt der Vorgehensweise in Aufgabenteil (a), mit dem Unterschied, dass der Schnittpunkt U nun als Variable im Gegenstandsaspekt betrachtet wird.

Höhenlinien sind - genauso wie die Mittelsenkrechten - weitere Beispiele für spezielle Lotgeraden, die wir sowohl unter dem impliziten als auch unter dem expliziten Aspekt betrachten können. Die grundlegenden Überlegungen zu dieser Aufgabe ähneln deshalb denen von Beispiel 3, weshalb wir diese hier nicht weiter ausführen.

Beispiel 5: Besondere Linien im Dreieck
In dieser Aufgabe werden die Mittelsenkrechten und Höhenlinien miteinander in Beziehung gesetzt. Der wesentliche Trick beim Bearbeiten dieser Aufgabe ist die Ausnutzung der Tatsache, dass sowohl die Höhenlinien als auch die Mittelsenkrechten orthogonal zur jeweiligen Grundseitenlinie des Dreiecks sind, die Höhenlinien also durch Verschiebung der gleichen Ursprungsgeraden entstehen wie die entsprechende Mittelsenkrechte. Dadurch können wir den Höhenlinienschnittpunkt durch Betrachtung eines Schnittproblems zweier Geraden berechnen, die durch den Umkreismittelpunkt U gegeben sind. Da das Dreieck nun nicht mehr durch konkrete Punkte gegeben ist, müssen wir das Schnittproblem allgemein lösen. Wir ermitteln die Parameter des Schnittpunktes durch einen Vergleich der Koeffizienten. Im Sinne der didaktischen Reduktion ignorieren wir die Frage, ob es noch weitere Lösungen geben könnte: Die Eindeutigkeit folgt aus der Echtheit des Dreiecks und wird als anschaulich klar vorausgesetzt.

Beispiel 8
In dieser Aufgabe wird die Umkehrung der Aussage aus Beispiel 7 gezeigt. Da das Dreieck ACB rechtwinklig in B ist, gilt

$$0 = (A - B) \bullet (C - B) = A \bullet C - A \bullet B - B \bullet C + B^2,$$

also

$$B^2 = -A \bullet C + A \bullet B + B \bullet C.$$

Wir können damit die Behauptung durch Äquivalenzumformungen zeigen:

$$\begin{aligned}
& \text{Das Dreieck } BCM \text{ ist gleichschenklig bei } M \\
\Leftrightarrow\ & |BM| = |CM| \\
\Leftrightarrow\ & (B - M)^2 = (C - M)^2 \\
\Leftrightarrow\ & B^2 - 2B \bullet M + M^2 = C^2 - 2C \bullet M + M^2 \\
\Leftrightarrow\ & B^2 - B \bullet (A + C) = C^2 - C \bullet (A + C) \\
\Leftrightarrow\ & -A \bullet C + A \bullet B + B \bullet C - B \bullet (A + C) = C^2 - C \bullet (A + C) \\
\Leftrightarrow\ & -A \bullet C + A \bullet B + B \bullet C - B \bullet A - B \bullet C = C^2 - C \bullet A - C^2 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist eine wahre Aussage. Damit ist das Dreieck BCM gleichschenklig bei M.

Wir bevorzugen hier jedoch den gegebenen Nachweis der Gleichschenkligkeit durch direkte Rechnung. Niemand würde zum Beispiel bei der Frage, ob die Summen $7 + 2 + 5$ und $5 + 6 + 2$ gleich sind, einen Nachweis durch Äquivalenzumformungen führen, sondern stattdessen nachweisen, dass beide Summen den Wert 14 ergeben. Ein Beweis durch Äquivalenzumformungen wird geleitet durch das Bedürfnis ein Rechenschema zur Verfügung zu haben, mit dem man Beweise durchführen kann, genauso wie man mit Äquivalenzumformungen lineare Gleichungssysteme lösen kann.

Ein Beweis ist jedoch keine Rechnung, sondern eine Abfolge von logischen Implikationen.

Beispiel 9: Höhensatz

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe ist es notwendig zu erkennen, dass der Punkt H zwischen den Punkten A und B liegt. Anschaulich ist dies wegen der spitzen Winkel im Dreieck klar, formal folgt dies durch zweifache Anwendung der Tatsache, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Katheten kürzer als die Hypotenusen sind, was letztendlich eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz des Pythagoras ist. Dieser Satz wird unbewusst jedoch auch an anderen Stellen verwendet: Das Punktprodukt zweier Punkte wurde ja gerade so definiert, dass es genau dann 0 ist, wenn das entsprechende Ursprungsdreieck rechtwinklig ist. Somit verwenden *alle* Beweise, die die Orthogonalität mithilfe des Punktproduktes beschreiben, indirekt den Satz des Pythagoras.

Noch kürzer - allerdings auch weniger elementar - wird der Beweis, wenn wir den Kosinussatz zuhilfe nehmen. Nehmen wir wieder an, dass $C = 0$ ist, so wird die Voraussetzung zu $A \bullet B = 0$, $(A-H) \bullet H = 0$ und $(B-H) \bullet H = 0$, also $A \bullet H - H^2 = 0$ und $B \bullet H = H^2$ und wir erhalten mit dem Kosinussatz

$$\begin{aligned} pq &= |A-H| \cdot |B-H| = (A-H) \bullet (B-H) \cdot \cos \measuredangle(A-H, B-H) \\ &= (A-H) \bullet (B-H) \cdot \cos \measuredangle(A, H, B) = (A-H) \bullet (B-H) \cdot \cos 180^\circ \\ &= (A \bullet B + H^2 - A \bullet H - H \bullet B)(-1) = (0 - 0 - H^2)(-1) \\ &= |H|^2 = h^2. \end{aligned}$$

Beispiel 12
Diese Aufgabe entstammt der Landesrunde der 55. Mathematikolympiade und wurde so umgewandelt, dass der Beweis mit den vorhandenen Methoden erbracht werden kann. Die Geometrie-Aufgaben der Mathematikolympiade zeichnen sich oft dadurch aus, dass zu deren Lösung spezielle Sätze benötigt werden, die häufig über das übliche Schulwissen hinaus gehen und erst durch spezielles Training erworben werden. Die bisher vorgestellten Methoden ermöglichen es, derartige Aufgaben ohne Spezialwissen bearbeiten zu können. Durch Algebraisierung geometrischer Sachverhalte erfolgt der Beweis durch Rechnungen.

Da die zu zeigende Aussage eine Existenzaussage ist, befreien einen diese Rechnungen jedoch nicht davon, zunächst einen Punkt M anzugeben, für den die geforderten Eigenschaften nachzuweisen sind. Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe haben tatsächlich einige Teilnehmer der Mathematikolympiade einen Beweis mit Methoden der analytischen Geometrie gewählt. Diese Beweise waren dann allerdings unter dem Aspekt des Koordinatisierens einzuordnen und nicht unter dem des Algebraisierens. Dazu wurde versucht, für unterschiedliche Punkte A und B und in Abhängigkeit des Winkels zwischen den beiden Strahlen eine Parametergleichung der Mittelsenkrechten aufzustellen, im Anschluss daran den Schnittpunkt dieser Geraden zu berechnen und diesen Schnittpunkt dann als Punkt M zu wählen, der sich dann als unabhängig vom betrachteten Winkel erweisrn sollte. Es ist jedoch keinem Schüler gelungen, für die Mittelsenkrechte eine technisch handhabbare Parameterdarstellung zu finden, mit der diese Schnittpunktberechnung erfolgreich durchgeführt werden konnte. Letztendlich sind alle derartigen Ansätze an der Komplexität der zugrunde liegenden Gleichungen aufgrund der verwendeten trigonometrischen Funktionen gescheitert. Ein derartiger Ansatz ist von dem Wunsch geprägt, den gesuchten Punkt M berechnen und für diese Berechnung bekannte Verfahren anwenden zu können. Der von uns gegebene Beweis geht genau den umgekehrten Weg: die Anfangs geäußerte Vermutung ersetzt die Schnittpunktberechnung. Zum Aufstellen von Vermutungen gibt es jedoch keine Rechenverfahren, sondern es bedarf einer gewissen mathematischen Intuition. Aber auch diese mathematische Intuition kann geschult werden. Eine Möglichkeit, sich den Punkt M zu erschließen, ist die Betrachtung von Extrempositionen der Punkte A und B. Dadurch wird deutlich, dass der Punkt M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck $O(l \cdot X)(l \cdot Y)$ sein muss. Zum Nachweis, dass alle Mittelsenkrechten m_{AB} durch diesen Punkt verlaufen, müssen in unserem eigentlichen Beweis diese Extrempositionen gesondert betrachtet werden. Dies setzt voraus, dass die Schüler mit dem Beweisprinzip der Fallunterscheidung vertraut sind.

14.2.3 Winkel

Vorbetrachtungen

In der hilbertschen Axiomatik ([22], S. 8) wird ein *Winkel* als ein Paar von verschiedenen Halbstrahlen definiert, die von einem gemeinsamen Punkt O ausgehen und verschiedenen Geraden angehören. Wir können auf den Begriff des Halbstrahls verzichten, indem wir statt der beiden Strahlen jeweils nur einen Punkt auf dem jeweiligen Strahl wählen. Dadurch wird ein Winkel zu einer Äquivalenzklasse von Punkttripeln, da die Wahl dieser Punkte nicht eindeutig ist.

In [28] definiert Lorenzen den Winkel eines echten Dreiecks ABC an der Ecke B als Paar von Strecken (AB, BC), führt das Winkelmaß axiomatisch ein und verzichtet im weiteren Verlauf auf die gesonderte Betrachtung des abstrakten Objektes *Winkel* und arbeitet ausschließlich mit dem Winkelmaß. Das dort eingeführte Winkelmaß ist orientierungsunabhängig, es werden nur Werte zwischen 0 und π angenommen.

Wir benötigen in diesem Unterrichtsgang ebenfalls keine rigide Definition des Objektes *Winkel*, sondern wir beschränken uns im Wesentlichen auf die *Größe von Winkeln*. In Kapitel 8.4 definieren wir den Winkelbegriff zunächst ursprungsbezogen. Damit reduziert sich die Definition in [28] zu einem Paar von Punkten (A, B), $A \neq O$ und $B \neq O$. Wir vernachlässigen Problemfelder wie beispielsweise das Aneinanderfügen von Winkeln, welches unter anderem in [38] aufgegriffen wird. Dort werden die orthogonalen Abbildungen in Drehungen und Spiegelungen unterteilt.

Die Drehungen $\mathscr{D}$ bilden mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine kommutative Gruppe, die vermöge der Abbildung

$$\mathscr{D} \to k_1(O), \varphi \mapsto \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

isomorph zum Einheitskreis $k_1(O)$ ist. Ein Winkel besteht aus zwei Punkten auf dem Einheitskreis, das Aneinanderfügen von Winkeln geschieht über die Hintereinanderausführung der entsprechenden Drehungen. So wird verhindert, dass durch Aneinanderfügen Winkel mit einem Winkelmaß von mehr als π entstehen können.

Das Winkelmaß führen wir in Anlehnung an unsere bisherige Vorgehensweise nicht axiomatisch ein, sondern verwenden eine konkreten Funktion. Eine mögliche Definition der Winkelgröße kann über die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 5.4) erfolgen. Demnach gilt für alle $A, B \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ die Ungleichung

$$-1 \leq \frac{A \bullet B}{\|A\|\|B\|} \leq 1,$$

es existiert folglich ein $\alpha \in]-\pi, \pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{A \bullet B}{\|A\|\|B\|},$$

welches wir die *Größe des Winkels* zwischen A und B nennen. Diese Definition setzt allerdings voraus, dass die trigonometrischen Funktionen zuvor analytisch eingeführt wurden, beispielsweise durch die Reihendarstellung

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$.

In Kapitel 8.4 umgehen wir diese Hürde, indem wir die Größe des Winkels zwischen zwei Punkten A und B als Länge der Kurve auf dem Einheitskreis zwischen den Punkten $\frac{1}{\|A\|}A$ und $\frac{1}{\|B\|}B$ definieren. Die trigonometrischen Funktionen erhalten wir daraus, indem wir die Projektionen auf die Koordinatenachsen bzw. auf eine Orthogonalbasis der Ebene $E(A, B, O)$ betrachten. Dieser Weg ähnelt der Einführung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis in der Sekundarstufe I. Die Bogenlänge kann zunächst als intuitives Maß akzeptiert werden, eine mathematische Präzisierung erfolgt durch eine Parametrisierung des Kreisbogens durch eine Kurve $[0, t] \to \mathbb{R}^n, \eta \mapsto \gamma(\eta)$ (siehe Abschnitt 9.1), deren Längenbestimmung durch Berechnung des Integrals

$$\int_0^t \|\gamma'(\eta)\| d\eta$$

erfolgt. Doch auch dafür werden sowohl Methoden der Differential- als auch der Integralrechnung benötigt.

Diese Schwierigkeiten umgehen wir im vorliegenden Unterrichtwerk, weil wir - wie bereits mehrfach geschehen - durch die Identifikation des $\mathbb{R}^2$ mit der Ebene auf Begriffe der Elementargeometrie zurückgreifen können. An dieser Stelle setzen wir die Begriffe *Winkel* und *Winkelgröße* sowie die trigonometrischen Funktionen als bekannt voraus und arbeiten anstatt mit dem Objekt *Winkel* überwiegend mit *Winkelgrößen*. Sprachlich heben wir zur Vereinfachung die strikte Trennung zwischen *Winkel* und *Winkelgröße* auf, mit $\measuredangle(A, B)$ und den griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bezeichnen wir je nach Kontext sowohl den Winkel als auch die Größe des Winkels.

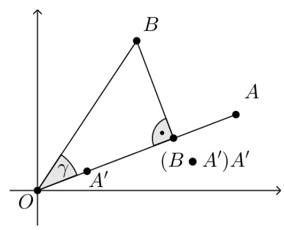
Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe und zum Lehrtext

Berechnungen von Winkelgrößen lassen sich mithilfe des Kosinussatzes auf Längenberechnungen in Dreiecken und damit auf Rechnungen mit dem Punktprodukt, zurückführen. Prinzipiell bestehen nun folgende Möglichkeiten, eine Formel zur Berechnung der Winkelgröße herzuleiten:

- Wir berechnen zunächst die Größe des Winkels am Koordinatenursprung O in Dreiecken ABO. Anschließend berechnen wir Winkelgrößen in beliebigen Dreiecken durch Verschiebung des Dreiecks zum Koordinatenursprung.
- Wir leiten zunächst eine Formel zur Berechnung des Winkels in beliebigen Dreiecken ABC her und erhalten die Formel $\cos\measuredangle(A, B) = \dfrac{A \bullet B}{|A|\,|B|}$ als Spezialfall für $C = O$.

Wegen des geringeren rechnerischen Aufwandes beschreiten wir in der Einstiegsaufgabe und im Lehrtext den ersten ursprungsbezogenen Weg und übertragen erst im Anschluss die Resultate auf beliebige Dreiecke.

Sofern es sich um einen spitzen Winkel handelt, kann die Größe des Winkels γ mithilfe der elementargeometrischen Definition des Kosinus als Länge der Ankathete durch Länge der Hypotenuse berechnet werden.



Es ist nämlich $A' := \frac{1}{|A|}A$ ein Punkt mit Betrag 1, und deshalb ist das Dreieck mit den Ecken B, O und $(B \bullet \frac{1}{|A|}A)\frac{1}{|A|}A = \frac{1}{|A|^2}(B \bullet A)A$ rechtwinklig. Wir erhalten

$$\cos\measuredangle(A, B) = \frac{\text{Länge der Ankathete}}{\text{Länge der Hypothenuse}} = \frac{|(B \bullet A')A'|}{|B|} = \frac{|A \bullet B|}{|A|\,|B|} = \frac{A \bullet B}{|A|\,|B|}.$$

Falls das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig ist, hilft uns der Kosinussatz weiter. Wir setzen $a = |B|$, $b = |A|$, $c = |AB|$ für die Seitenlängen des Dreiecks und erhalten $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ und damit

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{A^2+B^2-(A-B)^2}{2\,|A|\,|B|} = \frac{A \bullet B}{|A|\,|B|} = \frac{15}{\sqrt{13}\sqrt{37}} \approx 0.6839,$$

woraus sich $\gamma = \arccos(\frac{15}{\sqrt{13}\sqrt{37}}) \approx 46,8476°$ ergibt.

Dieser allgemeingültige Weg wird auch im folgenden Lehrtext beschritten. Durch Verschiebung zum Koordinatenursprung erhalten wir eine Berechnungsvorschrift für die Größen der Innenwinkel beliebiger Dreiecke.

Anmerkungen zu den Beispielaufgaben

Aufgabe 1 ist eine Routineaufgabe, in der die Formel zur Winkelberechnung angewendet werden soll. Allerdings wird die Bezeichnung $\measuredangle(A, B, C)$ hier anders verwendet als aus der Sekundarstufe I bekannt: Wir meinen mit $\measuredangle(A, B, C)$ unabhängig von der Reihenfolge der Variablen A, B und C stets den Innenwinkel des Dreiecks, es gibt hier keine Winkel mit einer Größe von mehr als 180°.

Wurden bisher überwiegend geometrische Sachverhalte algebraisiert, so soll durch Aufgabe 2 der umgekehrte Prozess, also die Geometrisierung algebraischer Sachverhalte, gefördert werden. Dazu muss der Term $(B - A) \bullet (C - A)$ als Zähler von $\cos\measuredangle(B, A, C) = \cos\measuredangle(B - A, C - A) = \frac{(B-A)\bullet(C-A)}{|B-A||C-A|}$, und damit geometrisch, interpretiert werden.

14.3 Kreise

Vorbetrachtungen

Geraden sind ein Beispiel für Punktmengen mit einer anschaulichen geometrischen Bedeutung. Ein Unterrichtsgang in analytischer Geometrie sollte sich jedoch nicht allein auf den Umgang mit Geraden (und später Ebenen) beschränken, sondern auch andere Punktmengen thematisieren. Eine elegante Art, Punktmengen implizit zu definieren, ist die Definition über Abstandsbedingungen, wodurch wir nicht nur Kreise erhalten, sondern auch Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln. Weil in den Fachanforderungen [12] lediglich Kreise und Kugeln als zusätzliche Punktmengen gefordert werden, beschränken wir uns in der Darlegung in Teil II auf Kreise, werden hier jedoch auch Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln thematisieren.

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe und zum Lehrtext

Die Einführung der Punktmenge *Kreis* kann beispielsweise durch Diskussion der Funktionsweise eines Behelfszirkels aus einer Schnur und einem Stück Kreide bestehen: die Schnur sorgt dafür, dass alle mit der Kreide gezeichneten Punkte den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben. Wir verwenden hier als Einstieg *GeoGebra*, um uns zwei Punktmengen anzeigen zu lassen. Durch den Einsatz von GeoGebra kann nämlich der Zusammenhang von algebraischen Gleichungen und deren anschaulicher Bedeutung auf einfache Weise visualisiert und die Gleichwertigkeit der Gleichungen gesehen werden. Die Begründung der Gleichwertigkeit erfolgt hingegen auf der algebraischen Ebene, beispielsweise durch Äquivalenzumformungen. Dabei ist zu beachten, dass das Quadrieren nur für nicht-negative Zahlen eine Äquivalenzumformung ist.

In der anschließenden Diskussion werden diese unterschiedlichen Schreibweisen für ein und dasselbe geometrische Objekt thematisiert. Durch Quadrieren eliminieren wir die Wurzel bei der Abstandsberechnung. Da alle Darstellungen den Kreis implizit definieren, verzichten wir aber darauf, unterschiedliche Darstellungen der Punktmenge mit eigenständigen Begriffen (wie beispielsweise *Vektorgleichung des Kreises* oder *Koordinatengleichung des Kreises*) zu bezeichnen und tragen damit zum sparsamen Umgang mit Begriffen bei.

Es folgen die Lageuntersuchungen Punkt/Kreis, Kreis/Gerade und Kreis/Kreis. Hierbei ersetzen im Rahmen der didaktischen Reduktion wieder Beispielaufgaben eine allgemeine Theorie, wie sie in Kapitel 6.3 dargestellt wurde. Grundlegende Lageuntersuchungen ergeben sich wieder aus der Anzahl gemeinsamer Punkte. Die dabei auftretenden Gleichungen sind nun allerdings nicht mehr linear. Möchte man die Lage jedoch genauer untersuchen und beispielsweise herausfinden, ob ein Kreis innerhalb oder außerhalb eines anderen liegt, müssen wir andere Verfahren entwickeln.

Lage Kreis/Punkt
Ein Punkt kann innerhalb eines Kreises, außerhalb eines Kreises sowie auf dem Kreis liegen. Eine Untersuchung der Lage erfolgt durch die Berechnung des Abstandes von Kreismittelpunkt und Punkt. Eine Schwierigkeit ist an dieser Stelle, dass die Schüler die Gleichung des Kreises als Quadrat des Abstandes zweier Punkte erkennen müssen, um nicht nur herausfinden zu können, ob ein Punkt auf dem Kreis liegt oder nicht, sondern auch unterscheiden zu können, ob sich der Punkt innerhalb oder außerhalb des Kreises befindet.

Lage Kreis/Gerade
Die Begriffe *Sekante, Tangente* und *Passante* sind den Schülern aus der Sekundarstufe I bekannt und werden im Rahmen der Identifikation des $\mathbb{R}^2$ mit der Ebene nun lediglich neu beschrieben und präzisiert, aber nicht definiert. Der anschaulich klare Zusammenhang zwischen der Lage von Kreis und Gerade und dem Abstand des Kreismittelpunktes von der Geraden wird in Satz 6.16 bewiesen, ein Beweis entfällt im Unterrichtswerk jedoch im Rahmen der didaktischen Reduktion. Bei der

Schnittpunktberechnung tritt die Schwierigkeit auf, dass eine der Gleichungen des entstandenen Gleichungssystems nicht mehr linear ist. Damit stellt sich die Frage, ob es an dieser Stelle sinnvoll sei, das Lösen des Gleichungssystems dem CAS zu überlassen. Wir begründen im Folgenden, weshalb wir eine Lösung durch CAS an dieser Stelle nicht für sinnvoll erachten. Im Gegensatz zu linearen Gleichungssystemen, die bei Lageuntersuchungen von Geraden und Ebenen in immer gleicher Weise gelöst werden müssen, passiert an dieser Stelle etwas Neues: Die Schüler müssen vorhandenes Wissen über quadratische Gleichungen mit dem vorhandenen Wissen über lineare Gleichungssysteme kombinieren und zu einem Verfahren zum Lösen von gemischten Gleichungssystemen zusammensetzen. Die Strategie, mit der in der quadratischen Gleichung die zweite Variable eliminiert wird, ist dabei das aus der Sekundarstufe I bekannte Einsetzungsverfahren. Diese Reduktionsstrategie kann nun fortgeführt werden, indem die so entstandene quadratische Gleichung durch quadratische Ergänzung auf eine reine quadratische Gleichung zurückgeführt wird. Die auf diese Art durchgeführte Schnittpunktberechnung bietet also einen geeigneten Anlass, mit den Schülern das Zurückführen eines Problems auf bekannte Probleme zu thematisieren.

Gemäß Satz 6.16 ist eine Gerade genau dann eine Tangente an einen Kreis, wenn der Schnittpunkt der Lotfußpunkt ist. Damit lässt sich wie im Beispiel 7 die Tangente an einen Kreis bestimmen. Die dort berechneten Schnittpunkte S_1 und S_2 erhalten wir alternativ als Schnittpunkt des Kreises $k_r(M)$ mit dem Thaleskreis über MP, also dem Kreis $k_{\frac{1}{2}|MP|}(\frac{1}{2}(M+P))$, wodurch die Lageuntersuchung Kreis/Kreis motiviert werden kann.

Lage Kreis/Kreis
In den Beispielaufgaben sollen die Schüler zunächst die Lage zweier Kreise durch Vergleich der Mittelpunktsabstände mit der Summe und der Differenz der Radien charakterisieren, ohne konkrete Schnittpunktberechnungen durchzuführen. Dadurch wird von dem Standardverfahren, nämlich dem Auffinden gemeinsamer Punkte, abgewichen und stattdessen die in Satz 6.17 theoretisch fundierte, jedoch anschaulich klare Charakterisierung verwendet. Dadurch lässt sich nicht nur herausfinden, ob sich die Kreise schneiden, sondern auch, ob ein Kreis im Inneren des anderen liegt. Die Berechnung der Schnittpunkte zweier Kreise erfolgt hingegen nach dem Standardverfahren über die Lösung eines Gleichungssystems. Die Neuerung ist an dieser Stelle jedoch, dass nun *beide* Gleichungen nicht mehr linear sind. Durch Subtraktion der Kreisgleichungen entsteht jedoch eine lineare Gleichung. Damit kann erneut ein Problem auf ein bereits bekanntes Problem zurückgeführt werden, nämlich auf die Schnittpunktberechnung Kreis/Gerade.

Bei der Schnittpunktberechnung zweier Kreise passiert also konzeptionell nichts Neues. Es wird lediglich ein Rechentrick präsentiert, mit dem die quadratischen Terme in einer der beiden Gleichungen eliminiert werden können. Dieser Rechentrick hat eine anschauliche Bedeutung: Die nun entstandene lineare Gleichung ist die Koordinatengleichung der Geraden, auf der die Schnittpunkte der Kreise liegen. Wir können also eine aus einem Rechentrick entstandene algebraische Gleichung geometrisch interpretieren.

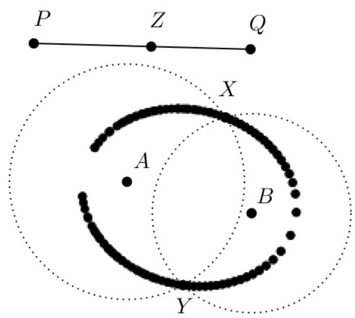
14.3.1 Exkurs zum Einsatz von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln im Unterricht

Zusätzlich zu den in den Teilen I und II thematisierten Kreisen sind *Ellipsen*, *Hyperbeln* und *Parabeln* weitere Beispiele für den Unterricht bereichernde Punktmengen, die wir implizit über Abstandsbedingungen definieren können. Diese Objekte ermöglichen einen Unterricht, der über die Schnittpunktberechnung von Geraden und Ebenen hinausgeht, weshalb wir im Folgenden beschreiben wollen, wie diese Punktmengen im Unterricht eingeführt werden können. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei gegebenen Brennpunkten konstant ist.

Ellipse:
Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ Punkte und a eine positive reelle Zahl. Dann heißt die Punktmenge $e_a(A, B) := \{X \mid |AX| + |BX| = 2a\}$ *Ellipse mit den Brennpunkten* A *und* B.

Diese Definition entspricht der sogenannten *Gärtnerkonstruktion*, die im Gartenbau verwendet wird, um elliptische Beete mithilfe eines gespannten Seils zu konstruieren. Mit GeoGebra kann diese Konstruktion nachempfunden werden. Wir orientieren uns dabei an den Ausführungen in [53].

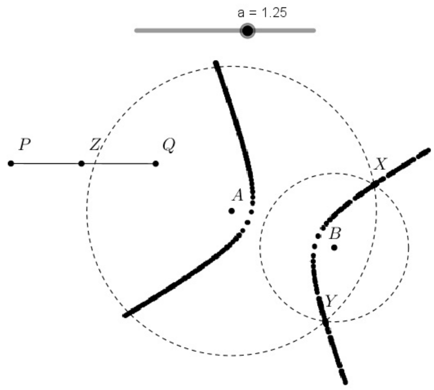
Dazu geben wir uns zwei verschiedene Punkte A und B sowie eine Strecke PQ der Länge $2a$ vor. Auf der Strecke PQ wählen wir einen Punkt Z und zeichnen einen Kreis um A mit Radius $|PZ|$ sowie einen Kreis um B mit Radius $|ZQ|$. Die beiden Schnittpunkte X und Y der Kreise erfüllen nun die Abstandssummenbedingung. Lassen wir uns von X und Y die Spur anzeigen, so erhalten wir durch Verschieben des Punktes Z auf der Strecke PQ die gewünschte Ellipse.



Nachdem Punktmengen mit konstanter Abstandssumme untersucht wurden, bietet sich die innermathematische Fragestellung an, welches Aussehen denn Punktmengen haben, bei denen die Abstandsdifferenz zu zwei gegebenen Brennpunkten konstant ist. Diese Punktmengen wollen wir Hyperbeln nennen.

Hyperbel:
Seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ Punkte und a eine positive reelle Zahl. Dann heißt die Punktmenge $h_a(A, B) := \{X \mid ||AX| - |BX|| = 2a\}$ *Hyperbel mit den Brennpunkten* A *und* B *Halbachsenlänge* a.

Wir beginnen wie in [53] mit einer GeoGebra-Konstruktion. Dazu geben wir uns wieder zwei verschiedene Punkte A und B sowie zwei Punkte P und Q auf einer Geraden vor. Auf der Geraden konstruieren wir einen Punkt Z mit $|PZ| = 2a$. Wir konstruieren nun einen Kreis um A mit Radius $|PQ|$ sowie einen Kreis um B mit Radius $|ZQ|$ und nennen die beiden Schnittpunkte der Kreise X und Y. Verändern wir nun die Lage des Punktes Q, so beschreibt die Spur der Punkte X und Y die beiden Hyperbeläste.

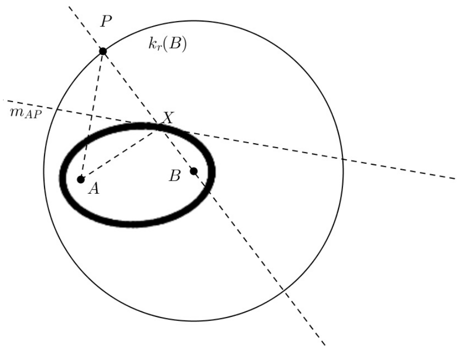


Wir stellen als nächstes die innermathematische Frage, welche Form eine Punktmenge hat, bei der alle Punkte denselben Abstand von einem Punkt A wie von einem Kreis $k_r(B)$ haben. Wir betrachten also die Menge

$$\{X \mid |AX| = d(X, k_r(B))\}.$$

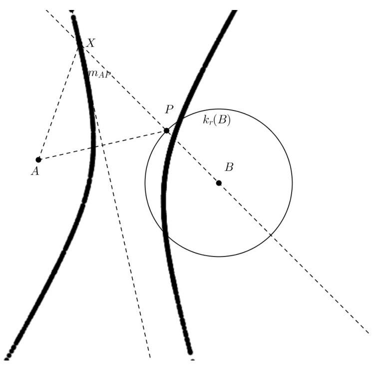
Der Abstand eines Punktes X von einem Kreis ist dabei die Länge der kürzesten Verbindungsstrecke des Punktes zu einem Punkt des Kreises. Die diese Strecke enthaltende Gerade verläuft stets durch den Mittelpunkt des Kreises.

Zur Konstruktion dieser Punktmenge geben wir uns wieder zwei Punkte A und B sowie einen Kreis k um B vor. Wir wählen einen Punkt P auf dem Kreis und wählen den Punkt X als Schnittpunkt des Mittellotes m_{AP} mit der Geraden $g(P, B)$. Aufgrund des Mittellotprinzips hat der Punkt X von A den gleichen Abstand wie von P. Da die Gerade $g(X, P)$ durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, ist dieser Abstand gleich dem Abstand des Punktes X vom Kreis k.



Beim Darstellen dieser Punktmenge gibt es zwei unterschiedliche Fälle. Liegt der Punkt A innerhalb des Kreises um B, so erhalten wir eine Ellipse mit den Brennpunkten A und B, die Abstandssumme entspricht wegen des Mittellotprinzips dem Radius des Kreises um B.

Liegt der Punkt A außerhalb des Kreises um B, so erhalten wir die beiden Äste der Hyperbel mit den Brennpunkten A und B, die Abstandsdifferenz ist - wie wir ebenfalls mit dem Mittellotprinzip einsehen - gleich dem Radius des Kreises.



Auch die den Schülern aus der Sekundarstufe I bekannte Parabel lässt sich wieder durch Abstandsbedingungen implizit definieren: Eine Parabel ist die Menge aller

Punkte, die von einem gegebenen Brennpunkt denselben Abstand haben wie von einer gegebenen Leitgeraden.

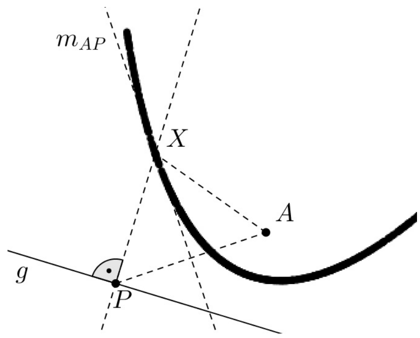
Parabel:
Sei A ein Punkt und g eine Gerade. Dann heißt die Punktmenge

$$p_g(A) := \{X \mid |AX| = d(X,g)\}$$

Parabel mit Brennpunkt A und Leitgerade g.

Die hier gegebene Definition ermöglicht es auch Parabeln zu konstruieren, die nicht nur durch Verschieben und durch Strecken/Stauchen der Normalparabel, sondern zusätzlich durch Drehung der Normalparabel entstehen, obwohl diese Mengen im Allgemeinen nicht mehr der Graph einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind.

Zur Konstruktion der Parabel mit GeoGebra geben wir uns eine Gerade g sowie einen Punkt A vor. Wählen wir einen Punkt P auf der Graden g und wählen wir X als Schnittpunkt des Lotes auf g durch P mit dem Mittellot m_{PA} von P und A, so hat X aufgrund des Mittellotprinzips sowohl von P als auch von A den gleichen Abstand. Da P nun aber der Lotfußpunkt des Lotes auf g durch X ist, ist damit $d(X,g) = |PX| = |AX|$, und damit liegt der Punkt X auf der Parabel mit Brennpunkt A und Leitgerade g.



15 Didaktische Bemerkungen zur Geometrie des Raumes

In diesem Kapitel geben wir didaktische Kommentare zum zweiten Kapitel (Kapitel 12) des Unterrichtswerkes über die Geometrie des Raumes . Viele Anmerkungen aus Kapitel 14 gelten nicht nur für die Geometrie der Ebene, sondern ebenso für die des Raumes, weshalb wir in diesem Kapitel hauptsächlich die Änderungen und nicht mehr jede Überlegung erläutern werden.

15.1 Ebenen

15.1.1 Punkte im Raum

Durch die Erhöhung der Dimension des zugrunde liegenden Vektorraumes von 2 auf 3 besitzen die nichttrivialen echten (affinen) Teilräume nicht mehr zwangsweise Dimension 1, sondern Dimension 1 oder 2. Damit ergeben sich zwei zu untersuchende affin lineare Objekte: *Geraden* und *Ebenen*. Der Unterschied besteht aber nicht nur darin, dass mit der Ebene ein neues Objekt hinzukommt. Auch die Eigenschaften dieser Objekte ändern sich in einigen wesentlichen Details. Geraden im $\mathbb{R}^2$ besitzen nämlich Codimension 1, im $\mathbb{R}^3$ hingegen Codimension 2. Ebenen im $\mathbb{R}^3$ hingegen besitzen Codimension 1 und teilen damit eine wichtige Eigenschaft der Geraden im $\mathbb{R}^2$: Sie sind Hyperebenen des zugrunde liegenden Raumes. Dies führt zu dem für Schüler widersprüchlichen Ergebnis, dass sich Ebenen des Raumes eher wie Geraden der Ebene verhalten, Geraden des Raumes hingegen wesentliche Eigenschaften von Geraden der Ebene nicht erfüllen. Wir können das Verhalten von Geraden und Ebenen also nur dann wirklich verstehen, wenn wir nicht nur die Dimension, sondern zugleich die Codimension mit berücksichtigen. In der Schulmathematik kommt der Aspekt der Codimension in zweierlei Weisen zum Tragen:

- Das orthogonale Komplement einer Ursprungsebene ist eine Gerade, die wir mithilfe des Kreuzproduktes bestimmen können.
- Das orthogonale Komplement einer Ursprungsgeraden ist eine Ursprungsebe-

ne. Diese Tatsache findet in der Normalendarstellung der Ebene ihre Anwendung.

Auf der algebraischen Seite ist der Übergang vom $\mathbb{R}^2$ zum $\mathbb{R}^3$ eine weitere Zahlbereichserweiterung, die aus der schlichten Ergänzung einer weiteren Koordinate an die 2-Tupel besteht. Sowohl der $\mathbb{R}^2$ als auch der $\mathbb{R}^3$ sind euklidische Vektorräume, weshalb sich bei der Addition, der Vervielfachung und dem Punktprodukt keine Änderungen in den Rechenregeln ergeben. Wir erhalten durch diese Erweiterung also kein neues algebraisches Verknüpfungsgebilde.

Eine wesentliche didaktische Hürde bei dieser Erweiterung besteht jedoch in der geometrischen Veranschaulichung dieser 3-Tupel, da die Projektion des dreidimensionalen Punktraumes auf die in Papierform darstellbare zweidimensionale Zeichenebene eine nicht-injektive Abbildung ist und damit Punkte nicht mehr eindeutig auf der Tafel oder im Buch darstellbar sind. Diese Tatsache bedarf zunächst einiger Übungen, auch weil den Schülern der Umgang mit dreidimensionalen Koordinatensystemen nicht aus der Sekundarstufe I bekannt ist. Bei der Veranschaulichung stellt sich außerdem die Frage, wie wir die Achsen des dreidimensionalen Koordinatensystems beschriften. Um den alten Zahlbereich $\mathbb{R}^2$ auch optisch kanonisch in den neuen Zahlbereich einzubetten, bietet es sich an, wie gehabt die Achsen so zu wählen, dass die x_1-Achse nach rechts, die x_2-Achse nach oben und die neu hinzukommende x_3-Achse aus der Zeichenebene hinaus zeigt. Diese Bezeichnungsweise ist jedoch in Schulbüchern unüblich, weshalb wir aus Kompatibilitätsgründen die x_1-Achse nach vorne, die x_2-Achse nach rechts und die x_3-Achse nach oben zeigen lassen. Dadurch wird die bisherige Zeichenebene gekippt. Liegt das Zeichenblatt vor den Schülern auf dem Tisch, so ist die x_1-x_2-Ebene dadurch nicht mehr parallel zur Tischebene und damit zur Erdoberfläche. Verwendet man jedoch die Tafel als Zeichenebene, so ist die x_1-x_2-Ebene parallel zur Erdoberfläche. Diese Situation wird auch in der Einstiegsaufgabe auf Seite 187 nachgebildet. Stellt man das Blatt beim Lesen senkrecht vor sich auf, so befindet sich der Punkt P in einer zur Erdoberfläche parallelen Ebene, der Punkt Q repräsentiert hingehen den hinzugekommenen dritten Freiheitsgrad. Dadurch werden die in der Alltagssprache gebräuchlichen Assoziationen *„Ebene $\leftrightarrow$ Erdoberfläche“* und *„Raum $\leftrightarrow$ Erdoberfläche und alles, was da drüber ist“* in der Mathematik abgebildet.

In einem Unterrichtsgang kann sich nun der offen gehaltene Arbeitsauftrag anschließen zu untersuchen, welche der bisherigen Konzepte auf den dreidimensionalen Fall übertragbar sind. Dazu zählen

- die Addition von Punkten sowie deren geometrische Veranschaulichung,
- die Vervielfachung von Punkten sowie deren geometrische Veranschaulichung,
- die Rechenregeln für Addition und Vervielfachung,

- die Formeln für Mittelpunktberechnungen, Teilverhältnisse von Strecken, Punktspiegelungen,
- die Charakterisierung von Parallelogrammen durch die Mittelpunkte der Diagonalen,
- die Parameterdarstellung von Geraden,
- die Überprüfung, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt,
- die Parallelität von Geraden,
- das Punktprodukt und dessen Rechenregeln,
- der Zusammenhang zwischen Streckenlängen und Punktprodukt,
- der Zusammenhang zwischen rechtwinkligen Dreiecken und Punktprodukt,
- die geometrische Interpretation des Punktproduktes als Projektion auf die Ursprungsgerade,
- die Messung des Winkels $\measuredangle(A, B, C)$.

Diese Tatsachen werden im Lehrtext zusammengefasst und in den Übungsaufgaben wiederholt. Im Sinne eines Spiralcurriculums werden dadurch zusätzlich die grundlegenden bisher behandelten Konzepte gefestigt. Folgende Dinge ändern sich beim Übergang vom $\mathbb{R}^2$ zum $\mathbb{R}^3$:

- nicht-parallele Geraden müssen sich nicht notwendigerweise schneiden, sondern sie können windschief sein,
- der Winkel zwischen zwei Geraden kann nur dann bestimmt werden, wenn sich die Geraden schneiden,
- Geraden lassen sich nicht mehr durch *eine* Koordinatengleichung darstellen,
- setzen wir $A^{\perp} := \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so ist das Dreieck $AA^{\perp}O$ zwar rechtwinklig bei O, das Lot auf die Gerade $g = \mathbb{R}A + P$ durch den Punkt X ist jedoch nicht mehr durch $\mathbb{R}A^{\perp} + X$ gegeben, da sich die Geraden g und $\mathbb{R}A^{\perp} + X$ nicht mehr schneiden müssen,
- die Abstandsberechnung eines Punktes X und einer Geraden $\mathbb{R}A + P$ ist nicht mehr mithilfe der Geraden $\mathbb{R}A^{\perp} + X$ möglich, sondern nur noch mithilfe der Projektion des Punktes $X - P$ auf die Gerade $\mathbb{R}A$,

- Winkel zwischen zwei Geraden können nur noch dann definiert werden, wenn sich die Geraden schneiden,

- es gibt zusätzlich zu den Geraden die Ebenen als echte affine Teilräume, weshalb wir nun auch Abstände zwischen Punkten und Ebenen, Geraden und Ebenen sowie zwischen zwei Ebenen berechnen können,

- mit den Ebenen können nun auch Winkel zwischen Geraden und Ebenen sowie zwischen zwei Ebenen berechnet werden,

- anstelle eines Kreises erhalten wir durch die Abstandsbedingung $|XM| = r$ nun eine Kugel als geometrisches Objekt.

Diese neuen Aspekte werden in den folgenden Lerneinheiten genauer untersucht.

Da die grundlegenden Konzepte zum Rechnen mit Punkten des Raumes denen zum Rechnen mit Punkten der Ebene ähneln, verzichten wir an dieser Stelle auf die Präsentation durchgerechneter Beispielaufgaben und beschränken uns auf die Angabe von Übungsaufgaben, die sich an den Beispielaufgaben der ebenen Geometrie orientieren. Als wesentliche Neuerung kommt bei diesen Aufgaben die zeichnerische Darstellung in Koordinatensystemen mit drei Koordinatenachsen hinzu.

15.1.2 Ebenen

In der Alltagssprache wird eine *Landschaft ohne Erhebungen* als *Ebene* bezeichnet. Die Übertragung des Wortes *Ebene* in die Mathematik geschieht jedoch eher durch das Adjektiv *eben*: Eine glatt verputzte Wand ist eben, man würde diese jedoch im Alltag nicht als Ebene bezeichnen. In der Mathematik kann eine Ebene also durchaus geneigt sein oder sich als Ganzes erheben, sie zeichnet sich jedoch dadurch aus, dass sie ungekrümmt ist. Um diese Ungekrümmtheit zum Ausdruck zu bringen, verwenden wir das bereits aus der Sekundarstufe I bekannte ungekrümmte Objekt *Gerade*, das als Anknüpfungspunkt dienen soll, um Ebenen mathematisch zu definieren. Die Geraden dienen damit sozusagen als Lineal, um die Ebenen zu konstruieren.

Unsere Konstruktion wird sich dabei von der beispielsweise in [4], S. 118 verwendeten *Punktrichtungsgleichung* $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ einer Ebene im Rahmen eines klassischen Unterrichtsganges über analytische Geometrie unterscheiden, da letztere zu ähnlichen Problemen führt wie die entsprechende in Abschnitt 14.1.5.2 diskutierte Darstellung von Geraden. Wir wollen folgende Grundvorstellung von Ebenen etablieren:

> *Eine Ebene ist eine verschobenen Ursprungsebene. Eine Ursprungsebene besteht aus allen Punkten, die Eckpunkt eines Parallelogramms mit zu zwei gegebenen Geraden parallelen Seiten sind.*

Die Hinführung zu dem neuen Objekt erfolgt deshalb zweistufig: Wir beginnen zunächst mit Ebenen durch den Koordinatenursprung und erweitern diese Definition anschließend. Die für die Definition der Ursprungsebene notwendigen Eckpunkte von Parallelogrammen entstehen statisch durch Addition zweier Punkte. Das anschließende Verschieben ist hingehen ein dynamischer Vorgang.

Dieser mehrschrittige Zugang erweist sich auch in der Einstiegsaufgabe als notwendig, da wir im Gegensatz zur Situation bei der Einführung von Geraden nicht an vorhandenes Wissen über Ebenen aus der Sekundarstufe I anknüpfen können. Als Anknüpfungspunkt an Vorwissen dienen stattdessen die in der Einstiegsaufgabe auf Seite 192 gegebenen nicht-parallelen Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$. Die Punkte X, Y und Z sollen jeweils als Eckpunkte eines Parallelogramms gefunden werden. Hier ist $X = A + B$, $Y = 1,5A + 0,5B$ und $Z = 1,5A + 1,5B$.

Im Lehrtext beschreiten wir an dieser Stelle den gleichen Weg wie in der Einstiegsaufgabe, führen die Rechnung jedoch für beliebige Punkte A und B bzw. Ursprungsgeraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ durch und arbeiten damit eine Abstraktionsebene höher. Die Schreibweise $E_O = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ kann folgendermaßen interpretiert werden:

> *Die Menge $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ ist die Menge aller Eckpunkte von Ursprungsparallelogrammen, deren Seitenlinien parallel zu $\mathbb{R}A$ bzw. $\mathbb{R}B$ sind. Wir erhalten diese Eckpunkte, indem wir zu einem Vielfachen von A ein Vielfaches von B addieren.*

Diese Interpretation basiert also auf der geometrischen Interpretation der Addition als 4. Parallelogrammpunkt. Die Parameter r und s kommen erneut nur in den beiden Schreibweisen

$$\begin{aligned} E_O &= \{X \mid \text{es existieren reelle Zahlen } r, s, \text{ so dass } X = rA + sB \text{ ist}\} \\ &= \{rA + sB \mid r, s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

vor. Die Forderung, dass die Punkte A und B linear unabhängig sein müssen, formulieren wir an dieser Stelle dadurch, dass die Punkte A und B nicht auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen dürfen. Dies hat den Vorteil, dass wir bei der Definition der Ebenen auf die Verwendung eines neuen Begriffs verzichten können.

Die Entstehung einer beliebigen Ebene können wir uns derart *vorstellen*, dass eine Ursprungsebene parallel zur gerichteten Strecke OP verschoben wurde. An dieser Stelle ist erneut die Interpretation der Addition als Verschiebung gerechtfertigt, da die Ursprungsebene ja nun nicht mehr vorhanden ist und sich die Ursprungsebene tatsächlich bewegt. Hierbei handelt es sich also um einen dynamischen Vorgang, die zugrundeliegenden Objekte bleiben jedoch Punkte. Genauso wie die Definition der Geraden $g(A, B)$ durch zwei Punkte erfolgt nun die Einführung der Ebene $E(A, B, C)$ durch drei Punkte rein algebraisch.

15.1.3 Linearkombinationen

Die Begriffe *linear unabhängig* und *linear abhängig* spielen im weiteren Verlauf eine untergeordnete Rolle, bieten aber eine Gelegenheit, um über Begriffsbildung in der Mathematik nachzudenken. Die Definition der *linearen Unabhängigkeit* ist nämlich eine der wenigen Stellen, an denen tatsächlich ein neuer Begriff *definiert* und nicht als aus der Sekundarstufe *I* bekannt vorausgesetzt und lediglich mit Methoden der analytischen Geometrie *beschrieben* und gegebenenfalls präzisiert wird. Gemäß [55], S. 256 dienen Begriffe *„dazu, Übersicht und Struktur in eine Welt wirklicher und gedachter Objekte zu bringen. Indem wir immer wieder ähnliche Objekte oder Phänomene begrifflich zu einer Klasse zusammenfassen, können wir auf diese ganze Klasse in gleicher Weise reagieren."* Der Begriff der *linearen Abhängigkeit* fasst in diesem Sinne die Begriffe *auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen* und *in einer gemeinsamen Ursprungsebene liegen* zusammen.

In Definition 7.2 wurde die *lineare Unabhängigkeit* von Punkten $A_1, \ldots, A_m$ über die Implikation

$$r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = O \quad \Rightarrow \quad r_1 = \ldots = r_m = 0$$

und im Anschluss die *lineare Abhängigkeit* durch die Negation dieser Aussage definiert. Der Vorteil dieser Definition ist die einfache technische Handhabbarkeit. Allerdings ist ein auf diese Weise definierter Begriff inhaltsleer: Voraussetzung für die Definition eines neuen Begriffes ist nämlich zunächst die Betrachtung unterschiedlicher Objekte mit anschließender selektiver Bestimmung gemeinsamer Merkmale (vgl. [55]).

Der Charakterisierungssatz 7.1 ermöglicht es, die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit der Punkte $A_1, \ldots, A_m$ über die Frage der Darstellbarkeit eines dieser Punktes als Linearkombination der anderen Punkte einzuführen. Diese Darstellbarkeit als Linearkombination abstrahiert die bekannten Begriffe *auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen* und *in einer gemeinsamen Ursprungsebene liegen*, und ermöglicht es damit, den neuen Begriff als Erweiterung bekannter Eigenschaften aufzufassen. Als Hinführung zur *linearen Abhängigkeit* werden häufig zusätzlich die Begriffe *kolliniear* und *komplanar* eingeführt (siehe zum Beispiel [4], S. 52). Da wir die Anzahl der verwendeten Begriffe jedoch so gering wie möglich halten wollen, verzichten wir hier auf deren Einführung und verwenden stattdessen die Aussage, dass die Punkte auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden bzw. in einer gemeinsamen Ursprungsebene liegen und nehmen dafür die etwas längliche Formulierung in Kauf.

Wir knüpfen deshalb in der Einstiegsaufgabe an die bereits bekannten Fragestellungen an, ob zwei bzw. drei Punkte auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden bzw. Ursprungsebene liegen. Dabei ergibt sich die Problematik, dass bei drei gegebenen Punkten A, B, C der Punkt C zwar in der Ursprungsebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ liegen kann, daraus jedoch nicht folgt, dass auch der Punkt B in der Ursprungsebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}C$

liegen muss. Zur Verifikation dieser Eigenschaft müssen also im schlimmsten Fall drei Aussagen überprüft werden.

(a) (i) Hier ist $A = 2B$, und damit $A \in \mathbb{R}B$. Die Punkte liegen also auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden.
Außerdem ist $B = \frac{1}{2}A$, also $B \in \mathbb{R}A$. Beide Überprüfungen führen also zum Erfolg.

(ii) Hier ist $A \notin \mathbb{R}B$ (in der Definition der Ursprungsgeraden $\mathbb{R}B$ haben wir außerdem vorausgesetzt, dass $B \neq O$ sein muss), es gilt jedoch $B = 0 \cdot A \in \mathbb{R}A$.
An dieser Aufgabe wird damit demonstriert, dass es nicht ausreichend ist lediglich zu überprüfen, ob $A \in \mathbb{R}B$ ist. Falls dies nicht der Fall ist, so muss auch überprüft werden, ob $B \in \mathbb{R}A$ ist.

(iii) Hier ist weder $A \in \mathbb{R}B$ noch $B \in \mathbb{R}A$, die Punkte liegen nicht auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden.

(b) (i) Hier ist $C = \frac{1}{2}A + B \in \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$, die Punkte liegen also in einer gemeinsamen Ursprungsebene.

(ii) Beginnt man bei dieser Aufgabe analog zu Aufgabe $(b)(i)$, so erhält man zunächst $C \notin \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$. Eine weitere Rechnung liefert jedoch

$$A = -\frac{1}{2} \cdot B + 0 \cdot C \in \mathbb{R}B + \mathbb{R}C,$$

die Punkte liegen also in einer gemeinsamen Ursprungsebene. Wir haben hier also das gleiche Phänomen wie in Aufgabenteil $(a)(ii)$, das den Schülern verdeutlicht, dass man im ungünstigsten Fall tatsächlich 3 Gleichungssysteme lösen muss.

(iii) Hier ist tatsächlich $A \notin \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$, $B \notin \mathbb{R}A + \mathbb{R}C$ und $C \notin \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$, die Punkte liegen also nicht in einer gemeinsamen Ursprungsebene. Die Bearbeitung von Aufgabenteil $(b)(iii)$ ist jedoch so aufwändig, dass sich hier die Frage aufdrängt, ob es nicht auch einfachere Möglichkeiten gibt, dies herauszufinden.

In der Beispielaufgabe 1 wird die bereits in der Einstiegsaufgabe durchgeführte Rechnung nochmals durchgeführt, nun jedoch unter Verwendung der neu eingeführten Begriffe. Durch diese Rechnung wird genauso wie in der Einstiegsaufgabe problematisiert, wir umständlich es sein kann, die lineare Unabhängigkeit dreier Punkte nachzuweisen. Durch diese Aufgaben ergeben sich folgende Leitfragen für den weiteren Unterrichtsverlauf:

- Wie lassen sich die Aussagen *„die Punkte liegen auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden“* und *„die Punkte liegen in einer gemeinsamen Ursprungsebene“* mit einem einheitlichen Begriff benennen?

- Gibt es bessere Verfahren als das oben geschilderte, um zu überprüfen, ob Punkte in einer gemeinsamen Ursprungsebene liegen?

Die Herleitung eines einfacheren Kriteriums zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit wird zur Reduktion des technischen Aufwandes nur für drei Punkte durchgeführt, so dass auf eine Indizierung der verwendeten Variablen verzichtet werden kann. Dieses Kriterium kann auf folgende Arten formuliert werden:

- als Implikation „$r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = O \quad \Rightarrow \quad r_1 = \ldots = r_m = 0$“,
- als Aussage *„das lineare Gleichungssystem $r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = O$ besitzt nur eine Lösung“.*

Wir begründen im Folgenden, weshalb die in Definition 7.2 eingesetzte Implikation

$$r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = O \Rightarrow r_1 = \ldots = r_m = 0$$

zur Charakterisierung der linearen Unabhängigkeit in der Schule problematisch ist. Dazu betrachten wir die von Panse und Paravicini in [36] dargestellte Studentenlösung einer Aufgabe zur linearen Unabhängigkeit.

Aufgabe 4 (Lineare Algebra, erstes Semester, gegen Weihnachten)

Sei $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$.
zu zeigen: F injektiv und $v_1, \ldots, v_n$ linear unabh. $\Rightarrow F(v_1), \ldots, F(v_n) \in W$ linear unabh.

Beweis:
$v_1, \ldots, v_n$ linear unabh. $\Rightarrow \lambda_1 v_1, + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$

Wende F an:

$$F(\lambda_1 v_1, + \cdots + \lambda_n v_n) = F(0) \overset{F\text{ inj.}}{=} 0$$

Da F linear ist, gilt:

$$F(\lambda_1 v_1, + \cdots + \lambda_n v_n) = F(\lambda_1 v_1) + \cdots + F(\lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n) = 0$$

Da $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$ gilt, sind nach Def. $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig.

Die grundsätzliche Struktur des „Beweises“ ist stimmig: Die zu zeigende Aussage ist eine Implikation, und deshalb wird zunächst die Prämisse, dass $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, als wahr angenommen. Unter dieser Voraussetzung ist nun die Konklusion, dass $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig sind, zu zeigen. Die Schwierigkeit bei dieser Beweisführung ist jedoch, dass sowohl die Prämisse als auch die Konklusion selbst wieder Implikationen sind.

Um die Aussage $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ *sind linear unabhängig* zu zeigen, muss also erneut deren Prämisse *„Seien $\lambda_1, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_n F(v_n) = 0$“* als wahr angenommen werden und unter dieser Voraussetzung die Aussage $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ gezeigt werden.

Die Voraussetzung „$v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängig*“ kann hingegen nur indirekt angewendet werden. Da diese Voraussetzung selbst wieder eine Implikation ist, muss zu deren Anwendung eine Situation hergestellt werden, in der deren Prämisse $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ wahr ist. Erst wenn die Erfülltheit dieser Prämisse gewährleistet ist, können weitere Schlüsse gefolgert werden.

Der Student beginnt seine Beweisführung jedoch mit der Voraussetzung „$v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängig*“ und zerlegt diese in die beiden Teilaussagen $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ und $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dabei wurde unterschlagen, dass nicht diese Aussagen an sich die Voraussetzung bilden, sondern dass diese Aussagen durch einen Junktor zu einer neuen Aussage verknüpft werden, womit die Voraussetzung eine *Wenn-Dann-Aussage* ist.

Auch bei der zu zeigenden Aussage wurden lediglich die Aussageformen $\lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_n F(v_n) = 0$ und $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ nachgewiesen, die Beziehung zwischen diesen Teilaussagen jedoch unterschlagen.

Diese Aufgabe wurde trotzdem von einer studentischen Hilfskraft mit 4 von 4 Punkten bewertet. Die Hilfskraft hat sich von der prinzipiell richtig angelegten Beweisstruktur und dem Vorhandensein der notwendigen Teilaussagen von der Richtigkeit des Beweises überzeugen lassen. Die fehlerhaften Beziehungen zwischen den Teilaussagen wurden übersehen.

Würden wir nun Definition 7.2 zur Charakterisierung verwenden, so bestünde also die Gefahr, dass die *Wenn-Dann-Aussage* von den Schülern in zwei Teilaussagen zerlegt wird, die nicht miteinander in Beziehung gesetzt werden. Deshalb ersetzen wir diese Implikation durch die Aussage, dass das lineare Gleichungssystem

$$r_1 \cdot A_1 + \ldots + r_m \cdot A_m = O$$

nur die Lösung $r_1 = \ldots = r_m = 0$ besitzt, was eine den Schülern bekannte Fragestellung ist.

15.1.4 Orthogonalität

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe und zum Lehrtext

Die Frage, was wir unter der Orthogonalität einer Geraden $g = \mathbb{R}C + Q$ zu einer Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ verstehen, ist für die Schüler zunächst nicht unmittelbar einsichtig. Wir können jedoch an die Alltagsvorstellung anknüpfen und die Frage stellen, wie viele Winkelmessungen wir durchführen müssen, um einen Pfahl senkrecht in den Erdboden zu rammen. Dazu ist es ausreichend, zwei Messungen durchzuführen. Hieraus resultiert Definition 8.6, die besagt, dass g orthogonal zu E

ist, wenn $\mathbb{R}C$ orthogonal zu $\mathbb{R}A$ ist und wenn $\mathbb{R}C$ orthogonal zu $\mathbb{R}B$ ist. Aufgrund der Linearität des Punktproduktes ist dies genau dann der Fall, wenn g zu *jeder* Geraden, die in E verläuft, orthogonal ist (siehe Bemerkung zu Definition 8.6). Auf einen formalen Beweis dieser Tatsache verzichten wir an dieser Stelle und verweisen auf die Anschauung.

Im Rahmen der Einstiegsaufgabe müssen die Schüler also zunächst darüber diskutieren, wie denn die Relation *orthogonal* zwischen Geraden und Ebenen definiert werden könnte. Die Zahlen in der Aufgabe sind so gewählt, dass die Gerade g zwar orthogonal zur Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$ ist, aber nicht zur Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}$. Die Darstellungen von g und E sind so gewählt, dass wir den Schnittpunkt sofort ablesen können. Dies legt nahe, die Gerade und die Ebene durch Subtraktion dieses Punktes so zu verschieben, dass wir eine Ursprungsgerade und eine Ursprungsebene erhalten. Wir führen die Frage der Orthogonalität also auf eine entsprechende Situation am Koordinatenursprung zurück.

Aus dieser Aufgabe ergibt sich im Rahmen einer offenen Unterrichtssituation die weiterführende Frage, wie denn eine Gerade $\mathbb{R}C$ aussehen könnte, die orthogonal zur Ebene E verläuft. Die Forderungen

$$C \bullet \begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix} = 0 \text{ und } C \bullet \begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} = 0$$

führen zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 4c_1 & +2c_2 & -c_3 & = & 0\\ -2c_1 & +3c_2 & +3c_3 & = & 0\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = -\frac{5}{8}c_3 \text{ und } c_1 = \frac{1}{4}c_3 - \frac{1}{2}c_2.$$

Wählen wir beispielsweise $c_3 = 16 = 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)$, so erhalten wir $c_2 = -10 = (-1) \cdot (-2) - 4 \cdot 3$ und $c_1 = 9 = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 3$, wodurch wir das Kreuzprodukt anhand eines konkreten Zahlenbeispiels einführen können. Durch dieses Beispiel wird verdeutlicht, dass der Punkt C nicht eindeutig bestimmt ist, sondern dass wir eine Koordinate frei wählen können, was mit der Anschauung übereinstimmt, dass die Darstellung der Geraden nicht eindeutig ist.

Im Lehrtext beantworten wir diese Frage nicht nur zahlengebunden, sondern allgemein. Dabei erbringen wir allerdings lediglich den Nachweis, dass die Ursprungsgerade $\mathbb{R}(A \times B)$ orthogonal zur Ebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ ist. Dass es keine weiteren Ursprungsgeraden gibt, die orthogonal zur Ebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ sind, wurde in Satz 6.1 bewiesen. Im Sinne der didaktischen Reduktion verzichten wir an dieser Stelle auf den algebraisch anspruchsvolleren Nachweis der Eindeutigkeit dieser Ursprungsgeraden und verweisen auf die Anschauung.

Genauso wie bei der Einführung des Punktproduktes wird damit die Einführung des Kreuzproduktes durch die Frage der Orthogonalität motiviert, die Einführung erfolgt jedoch auch hier rein algebraisch, so dass wir die Rechengesetze durch einfaches Nachrechnen beweisen können. Die geometrische Interpretation des Kreuzproduktes erfolgt hingegen erst in den Beispielaufgaben.

Die Rechengesetze für das Kreuzprodukt spielen im weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit eine wesentlich geringere Rolle als die Rechenregeln der Vervielfachung und des Punktproduktes, weshalb deren Betrachtung nicht unbedingt notwendig ist. Trotzdem bietet das Kreuzprodukt eine gute Möglichkeit, um zu thematisieren, dass es Verknüpfungen gibt, für die das wohl elementarste Rechengesetz - nämlich das schon aus der Primarstufe bekannte Kommutativgesetz - nicht gilt. Im Gegensatz zum Punktprodukt können wir für das Kreuzprodukt sowohl den Punktterm $(A \times B) \times C$ als auch den Punktterm $A \times (B \times C)$ definieren, weil das Kreuzprodukt zweier Punkte wieder ein Punkt ist. Diese Punktterme sind jedoch nicht wertgleich, stattdessen gilt die *Grassmannidentität*, die wir jedoch im weiteren Verlauf des Unterrichtswerkes nicht weiter benötigen werden. Zur vollständigen Erkundung der neuen Verknüpfung sollte diese Tatsache jedoch in einer Übungsaufgabe thematisiert werden.

Das Distributivgesetz gilt hingegen auch für das Kreuzprodukt, genauso wie die vom Punktprodukt bekannte Homogenität. Deshalb geben wir von den Rechengesetzen für das Kreuzprodukt (Satz 8.1) die ersten drei wieder. Auch an dieser Stelle sollte das Rechengesetz (*iii*) nicht mit dem Namen *Assoziativgesetz* benannt werden, da es eine Aussage über zwei unterschiedliche multiplikative Verknüpfungen macht.

Anschauliche Interpretation des Kreuzproduktes

Als Folgerung aus Satz 8.4 erhalten wir nicht nur einen Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung des Raumes, sondern in Verbindung mit Satz 8.25 eine geometrische Interpretation des Kreuzproduktes. Wir geben diese Interpretation wieder, wobei wir den Flächeninhaltsbegriff aus der Sekundarstufe I kommentarlos auf den dreidimensionalen Fall übertragen und die Flächeninhaltsformel

$$\text{Flächeninhalt Parallelogramm} = \text{Länge der Grundseite} \cdot \text{Länge der Höhe}$$

als bekannt voraussetzen. Die Berechnung von Winkelgrößen übertragen wir ebenfalls kommentarlos vom zweidimensionalen auf den dreidimensionalen Fall. Auch das Volumen des durch die drei Punkte A, B und C definierten Spats können wir mithilfe der aus der Elementargeometrie bekannten Formel

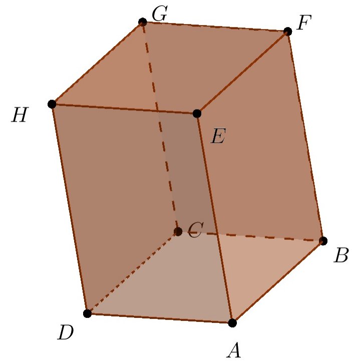
$$\text{Volumen} = \text{Flächeninhalt der Grundfläche} \cdot \text{Länge der Höhe}$$

auf die bereits bekannte Flächeninhaltsberechnung eines Parallelogramms zurückführen. Die Länge der Höhe ist gleich dem Abstand des Punktes C von der Ebene

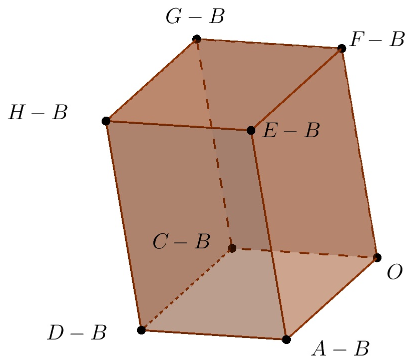
$E(A, B, O)$. Möglichkeiten zur Abstandsberechnung eines Punktes von einer Ebene werden in Abschnitt 15.2.5 ausführlich diskutiert. Wir folgen an dieser Stelle der Forderung in den Fachanforderungen [12] die Projektionseigenschaft des Punktproduktes zu betonen und bestimmen den Abstand durch Projektion auf die zur Ebene orthogonale Gerade.

Sowohl das Parallelogramm als auch das Spat wird zunächst ursprungsbezogen definiert. Es stellt sich die Frage, wie wir den Flächeninhalt eines beliebigen Parallelogramms und das Volumen eines beliebigen Spates berechnen können. Wir diskutieren dies am Beispiel des Spates unter den Gegebenheiten von Beispielaufgabe 4, die wir aus [4], S. 87, entnommen haben.

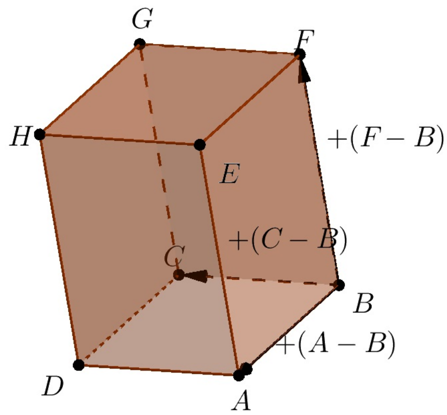
Bei dieser Aufgabe ist zunächst nicht eindeutig festgelegt, welche Strecken die Kanten des Spats darstellen sollen. Beachtet man jedoch die aus der Sekundarstufe I bekannte Konvention der Bezeichnung von Prismen, so erhalten wir nebenstehendes Schaubild. Um das Volumen zu berechnen, ergeben sich folgende Möglichkeiten.



Wir wählen eine Ecke als ausgezeichneten Punkt aus (in diesem Fall die Ecke B) und subtrahieren diesen von sämtlichen Ecken des Spates, was anschaulich einem Verschieben des Spats entspricht. Dadurch erhalten wir ein ursprungsbezogenes Objekt, das Spat wird also durch die Punkte $A - B$, $C - B$ und $F - B$ definiert. Beachten wir nun, dass $F - B = E - A$ ist, so können wir die gegebenen Punkte einsetzen und das Volumen berechnen. Diesen Weg haben wir in der Lösung von Beispielaufgabe 4 gewählt.



Wir können jedoch auch ohne den Vorgang des Verschiebens auskommen, indem wir die Punkte einfach als Rechenobjekt betrachten und die jeweiligen Rechenoperationen durch Pfeile kennzeichnen. Das Spat wird damit durch die Punkte $A-B$, $C-B$ und $F-B$ definiert. Da $F-B=E-A$ ist, können wir nun durch Einsetzen das Volumen berechnen.



Um diesen Weg gangbar zu machen, haben wir bereits bei der Definition der ursprungsbezogenen Objekte die entsprechenden Kanten mit Pfeilen gekennzeichnet. Dadurch bekommen die Punkte A, B und C, die das Spat *„definieren"*, zweierlei Bedeutung: sie bezeichnen einerseits die Eckpunkte des ursprungsbezogenen Spates, andererseits jedoch auch den jeweiligen Punkt, den man zu einer ausgezeichneten Ecke des Spates hinzuaddieren muss, um drei weitere Ecken zu erhalten. Die Aussage *„drei Punkte A, B und C definieren ein Spat"* ist damit eine bewusst schwammige Formulierung, bei der - sobald wir keine ursprungsbezogenen Objekte mehr betrachten - die Punkte lediglich als Rechenobjekt betrachtet werden. Diese Formulierung ist jedoch nicht weniger präzise als die in klassischen Unterrichtsgängen der analytischen Geometrie verwendete Sprechweise, dass drei Vektoren ein Spat *„aufspannen"*. Auch hier ist das Wort *„aufspannen"* nicht im mathematisch präzisen Sinne des Aufspanns dreier Vektoren, also der Menge aller Linearkombinationen, gemeint, sondern es bleibt der Interpretation der Schüler überlassen, was sie sich unter diesem Wort vorstellen. Formal meinen wir damit die Punktmenge $[0,1]\cdot A+[0,1]\cdot B+[0,1]\cdot C$ für ein ursprungsbezogenes Spat, beziehungsweise die Punktmenge $[0,1]\cdot(A-B)+[0,1]\cdot(C-B)+[0,1]\cdot(F-B)+B$ im Fall von Beispielaufgabe 4.

15.1.5 Koordinatendarstellung und Normalendarstellung von Ebenen

Ist die Dimension des zugrunde liegenden Vektorraumes 3, so besitzen die Ebenen Codimension 1 und sind damit Hyperebenen des $\mathbb{R}^3$, genauso wie die Geraden Hyperebenen des $\mathbb{R}^2$ sind. Die Ebenen erben damit die Eigenschaft der Geraden, sich durch *eine* Koordinatengleichung darstellen zu lassen. Sowohl die Koordinatendarstellung als auch die Normalendarstellung sind implizite Darstellungen ein und desselben geometrischen Objektes, deren Gleichwertigkeit zur Parameterdarstellung wir in den Sätzen 8.12 und 8.13 gezeigt haben. Dazu haben wir ein Dimensionsargument verwendet, das in dieser Form für die Schule ungeeignet ist.

Als Alternative dazu kann die Einführung der Koordinatenform rein algebraisch erfolgen: Ist ein Punkt $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E$ gegeben, so können wir durch Lösen des linearen Gleichungssystems $X = rA + sB + P$ die Variablen r und s eliminieren. Die Lösung dieses Gleichungssystems kann in der Schule jedoch nur beispielgebunden erfolgen.

Um nicht ausschließlich anhand von Beispielen argumentieren zu müssen, führen wir zunächst die Normalendarstellung der Ebene ein, die wir anschaulich motivieren können, und leiten daraus algebraisch die Koordinatendarstellung her. Das im Beweis von Satz 8.12 verwendete Dimensionsargument wird durch eine Zeichnung ersetzt, welche durch das Bild[1] in der Einstiegsaufgabe motiviert werden soll: Der Stiel des Teigrechens (der im Bild leider nicht exakt orthogonal zum Crêpe ist) entspricht dabei der orthogonalen Geraden. Da es in den Schulbüchern üblich ist, für die Koordinatendarstellung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = e$ die Variablen a, b und c zu verwenden, bezeichnen wir die Koordinaten von N ebenfalls mit a, b und c statt mit n_1, n_2 und n_3.

Es folgen beispielhaft die Umwandlungen von einer Darstellungsart in die andere, die einerseits im Rahmen der didaktischen Reduktion als *beispielgebundener Beweis*, andererseits auch zur Präsentation von Rechenschemata dienen.

Bei der Umwandlung der Parameterdarstellung in die Koordinatendarstellung in Beispielaufgabe 1 bietet sich noch ein anderer als der vorgestellte Rechenweg an: Ist $E = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ein Punkt der Ebene E, so finden wir reelle Zahlen r, s, so dass

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist. Es folgt $r\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und daraus

$$\begin{bmatrix} 1r & -1s & = & 4 \\ -13r & & = & 3(1-x_1) + 2(1-x_2) = 5 - 3x_1 - 2x_2 \\ 3r & & = & 3 - x_2 - x_3 \end{bmatrix},$$

woraus wir $E = \{X \mid 9x_1 + 19x_2 + 13x_3 = 54\}$ erhalten.

Durch diesen rechnerisch aufwändigen Weg haben wir eine Möglichkeit, eine Ebene in Koordinatendarstellung umzuwandeln, ohne das Kreuzprodukt verwenden zu

[1]entnommen aus [47]

müssen. Da uns jedoch das Kreuzprodukt zur Verfügung steht, geben wir in der Lösung der Beispielaufgabe den wesentlich kürzeren Weg über die Normalendarstellung an.

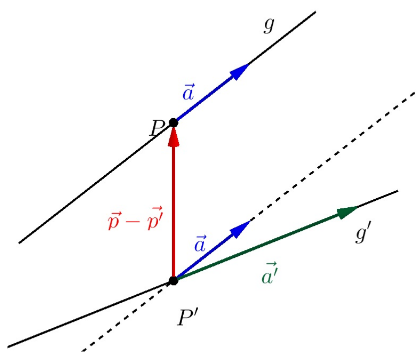
15.2 Lagebeziehungen

15.2.1 Lagebeziehungen zweier Geraden

Die Definition der Windschiefe zweier Geraden $g = \mathbb{R}A+P$ und $g' = \mathbb{R}A'+P'$ im Unterricht kann sowohl analog zu Definition 8.2 erfolgen als auch durch die Verwendung des Charakterisierungssatzes 8.5, in dem die Windschiefe als äquivalent zur linearen Unabhängigkeit von A, A' und $P - P'$ bewiesen wird. Anschaulich sind windschiefe Geraden jedoch nicht-parallele Geraden ohne Schnittpunkt, weshalb wir auch im Unterrichtswerk die Definition 8.2 verwenden werden. Diese Situation wird im Bild[2] in der Einstiegsaufgabe, welche in Anlehnung an [18] erstellt wurde, dargestellt.

Wir wollen im Folgenden darlegen, wie man aus dieser Definition zu der Charakterisierung gemäß Satz 8.5 kommen kann.

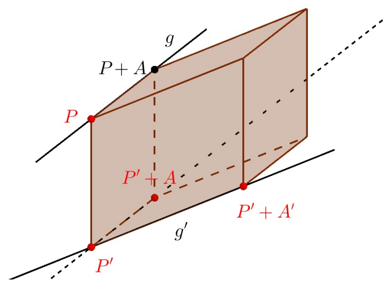
Der Charakterisierungssatz kann in einem klassischen Unterrichtsgang der analytischen Geometrie unter Verwendung des Vektorbegriffs als Klasse von Pfeilen anhand einer Zeichnung plausibilisert werden. Dazu werden die *Richtungsvekoren* $\vec{a}$ und $\vec{a'}$ der Geraden $g : \vec{x} = \vec{p}+r\cdot\vec{a}$ und $g' : \vec{x} = \vec{p'}+r\cdot\vec{a'}$ als Äquivalenzklasse von Pfeilen gedeutet und jeweils die Repräsentanten der Vektoren verwendet, die am Punkt P ansetzen.



Diese Argumentation ist zwiespältig. Zunächst wird die Tatsache ausgenutzt, dass Vektoren Pfeilklassen sind, also Mengen von Pfeilen. Zur Argumentation wird letztendlich jedoch ein ganz spezieller Pfeil ausgewählt.

Da wir letztendlich mit ganz speziellen Repräsentanten arbeiten, ist es sinnvoller, auf Pfeilklassen gänzlich zu verzichten. Die dadurch entstehende rein punktorientierte Argumentation ist begrifflich wesentlich sauberer. Wir geben im Folgenden einen möglichen Argumentationsweg an.

[2] entommen aus [39]



Sind die beiden Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ und $g' = \mathbb{R}A' + P'$ windschief, so ist das abgebildete Polyeder ein Spat, die Punkte P, $P' + A$, $P' + A'$ und P' liegen also nicht in einer gemeinsamen Ebene. Durch Subtraktion von P' erhalten wir, dass die Punkte $P - P'$, A und A' nicht in einer Ursprungsebene liegen und folglich linear unabhängig sind.

Sind die beiden Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ und $g' = \mathbb{R}A' + P'$ nicht windschief, so ist das abgebildete Polyeder kein Spat, die Punkte P, $P' + A$, $P' + A'$ und P' liegen also in einer gemeinsamen Ebene. Durch Subtraktion von P' erhalten wir, dass die Punkte $P - P'$, A und A' in einer Ursprungsebene liegen und folglich linear abhängig sind.

Wir argumentieren bei obiger Untersuchung, ob das vorliegende Viereck ein Spat ist, nicht wie in Satz 8.5 rein algebraisch, sondern verwenden im Sinne der didaktischen Reduktion eine Zeichnung und verweisen auf die Anschauung.

Die Frage ist jedoch, ob es überhaupt sinnvoll ist diese Charakterisierung im Unterricht zu thematisieren. Ein Argument dafür ist, dass sie eine Anwendung der Begriffe *linear abhängig* und *linear unabhängig* bietet, die ansonsten ungenutzt wieder in Vergessenheit geraten würden. Andererseits würde eine Aufgabenstellung üblicherweise nicht den Nachweis verlangen, dass zwei Geraden windschief sind, sondern eher, dass die Lage zweier Geraden untersucht werden soll. Eine generelle Lageuntersuchung wird jedoch entweder mit der Bestimmung gemeinsamer Punkte oder mit der Untersuchung auf Parallelität beginnen.

Besitzen die Geraden keine gemeinsamen Punkte, so ist es rechnerisch wesentlich einfacher, die Geraden auf Parallelität zu untersuchen und damit herauszufinden, ob die Geraden windschief sind, als das Kriterium für windschiefe Geraden anzuwenden.

Sind die Geraden nicht parallel zueinander, so führt die Suche nach gemeinsamen Punkten zu einem Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, welches in der Regel mit einem geringeren Rechenaufwand verbunden ist als die Überprüfung von A, A' und $P - P'$ auf lineare Unabhängigkeit, auch wenn es sich bei Letzterem um ein homogenes Gleichungssystem handelt. Außerdem müssten in dem Fall, dass die Geraden nicht windschief sind, im Anschluss zusätzlich noch die gemeinsamen Punkte bestimmt werden.

Deshalb entscheiden wir uns an dieser Stelle, die Charakterisierung windschiefer Geraden zu übergehen und nur mithilfe der Definition zu arbeiten. Wir betten damit die Frage der Windschiefe in die allgemeine Frage der Lage zweier Geraden ein.

Anmerkungen zu den Beispielaufgaben

Beispiel 1
Die vier Eckpunkte eines echten Vierecks $ABCD$ liegen genau dann in einer Ebene, wenn sich die Diagonalenlinien in einem Punkt schneiden. Schneiden sich die Diagonalenlinien nicht, so sind diese windschief. Interessanter als die Lösung dieser Aufgabe ist die Frage, wie man ebene Vierecke erstellt. Dies kann nämlich unter Zuhilfenahme des Charakterisierungssatzes geschehen: Beginnen wir mit drei linear abhängigen Punkten und addieren zu diesen jeweils einen vierten Punkt, so erhalten wir ein ebenes Viereck.

Beispiel 2
Im Rahmen der ebenen Geometrie wurden zwei Verfahren zur Abstandsberechnung eines Punktes von einer Geraden vorgestellt. Nur eines dieser Verfahren lässt sich auf den Raum $\mathbb{R}^3$ übertragen, weil mit der Windschiefe eine neue Lagebeziehung zweier Geraden hinzukommt. Das Scheitern des ersten Verfahrens ist eine gute Gelegenheit, sich über den Hintergrund der Verfahren Gedanken zu machen und die Funktionsweise zu reflektieren. Letztendlich ist die Entwicklung und Begründung der Funktionsweise von Rechenverfahren wesentlich spannender, als das Anwenden dieser Verfahren.

15.2.2 Lagebeziehungen von Gerade und Ebene

Gemäß Satz 8.14 lässt sich die Untersuchung der Lage von Geraden und Ebenen auf die Ermittlung der Anzahl der gemeinsamen Punkte und damit auf die Interpretation der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten zurückführen. Es handelt sich hierbei also lediglich um eine Erweiterung einer bereits bekannten Vorgehensweise, die in der Einstiegsaufgabe von den Schülern eigenständig entwickelt werden soll. Der Begriff *parallel* wird in diesem Zusammenhang nicht definiert, sondern intuitiv verwendet. Dabei werden Schüler die Parallelität einer Geraden zu einer Ebene eher durch die Tatsache beschreiben, dass beide sich nicht schneiden, als wie in Definition 8.6 die Teilmengenbeziehung der dazugehörigen Ursprungsgeraden bzw. Ursprungsebene zu betrachten. Die in Aufgabenteil (b) gegebene Gerade ist parallel zur gegebenen Ebene. In der Beispielaufgabe werden die drei möglichen Lagen beispielhaft durchgerechnet.

15.2.3 Lagebeziehungen zweier Ebenen

Die Grundlage für die Untersuchung der Lagebeziehung zweier Ebenen $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ und $E' = \mathbb{R}A' + \mathbb{R}B' + P'$ bildet Satz 8.17, der besagt, dass zwei Ebenen entweder parallel zueinander sind oder dass deren Schnittmenge eine Gerade ist. Anschaulich ist sofort ersichtlich, dass einer dieser beiden Fälle vorliegen muss.

Um zu entscheiden, welcher dieser beiden Fälle vorliegt, bietet sich einerseits - analog zu der Analyse der Lagebeziehung von Gerade und Ebene - eine Interpretation der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$rA + sB + P = tA' + uB' + P', \qquad (*)$$

an. Dies ist zunächst eine bekannte Vorgehensweise, wobei sich lediglich die Zahl der Variablen des Gleichungssystems erhöht hat. Als Schwierigkeit kommt hier jedoch hinzu, dass im Falle mehrerer Lösungen die Dimension des Lösungsraumes bestimmt werden muss. Nur damit lässt sich unterscheiden, ob die Ebenen gleich sind oder sich nur in einer Geraden schneiden.

Wegen der Analogie zu bereits durchgeführten Lageuntersuchungen ist dieses Verfahren das intuitiv naheliegende. Zusätzlich hat dieses Verfahren den Vorteil, dass man unmittelbar die Schnittgerade angeben kann. Allerdings ist die Lösung dieses Gleichungssystems rechnerisch aufwändig, so dass es sich anbietet, zunächst mithilfe gemeinsamer orthogonaler Geraden gemäß Satz 8.15 zu untersuchen, ob die Ebenen parallel zueinander sind. Ist eine oder sind sogar beide Ebenen in Koordinatendarstellung bzw. Normalendarstellung gegeben, so können wir orthogonale Geraden bestimmen, ohne das Kreuzprodukt berechnen zu müssen, so dass wir oftmals schon durch *„scharfes Hinsehen“* feststellen können, ob die Ebenen parallel zueinander sind.

In der Einstiegsaufgabe werden die zu den Ebenen orthogonalen Geraden durch die Verbindungsstreben des Kratzbaumes symbolisiert. Bei der daraus folgenden Charakterisierung paralleler und nicht paralleler Ebenen wird in beiden Fällen lediglich von der Existenz orthogonaler Geraden gesprochen, so dass die eine Aussage formal zunächst nicht die Negation der anderen Aussage ist. Allerdings ist die Existenz *einer* Geraden, die zu beiden Ebenen orthogonal ist, wegen Satz 8.3 äquivalent dazu, dass *jede* Gerade g, die zu E orthogonal ist, auch zu E' orthogonal ist, weshalb diese Nachlässigkeit an dieser Stelle zulässig ist.

15.2.4 Schnittwinkel

In Kapitel 8.4 haben wir die Größen folgender Winkel definiert:

(1) Innenwinkel in einem Ursprungsdreieck $\measuredangle(A, B)$,

(2) Innenwinkel im Dreieck $\measuredangle(A, B, C)$,

(3) Schnittwinkel zweier Ursprungsgeraden g_O, g'_O,

(4) Schnittwinkel zweier Geraden g, g',

(5) Schnittwinkel von Gerade g und Ebene E,

(6) Schnittwinkel zweier Ebenen E und E'.

Dabei wird Definition (1) sukzessive gemäß folgendem Schema erweitert

$$(1)\ \measuredangle(A,B) \to \begin{cases} (2)\ \measuredangle(A,B,C) \\ (3)\ \measuredangle(g_O, g'_O) \to (4)\measuredangle(g,g) \to \begin{cases} (5)\ \measuredangle(g,E) \\ (6)\ \measuredangle(E,E') \end{cases} \end{cases} .$$

Aus der Definition der Winkelgröße in einem Ursprungsdreieck werden sowohl die Winkelgrößen in beliebigen Dreiecken als auch die Größen der Schnittwinkel zweier Ursrpungsgeraden abgeleitet. Sowohl die Größe des Schnittwinkels von Gerade und Ebene als auch von Ebene und Ebene sind Erweiterungen der Definition des Schnittwinkels zweier Geraden.

Im Unterrichtswerk (Teil II dieser Arbeit) werden die Begriffe Winkel (1), (2) und (3) hingegen nicht definiert, sondern als gegeben vorausgesetzt und lediglich mit Methoden der analytischen Geometrie beschrieben. Im Abschnitt 11.2.3 wurde die Größe des in der Sekundarstufe I definierten Innenwinkels von Dreiecken lediglich mithilfe des Kosinussatzes berechnet. Wegen der einfacheren Berechnung haben wir auch dort mit der Berechnung der Größe von (1) begonnen und diese dann auf (2) übertragen. Für die Größe des durch zwei Punkte A und B am Koordinatenursprung eingeschlossenen Winkels gilt demnach

$$\cos(\measuredangle(A,B)) = \frac{A \bullet B}{\|A\|\|B\|}. \qquad (*)$$

Winkel zwischen Geraden sind den Schülern aus der Sekundarstufe I in Form von Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln bekannt. Es wird in der Sekundarstufe I jedoch nicht thematisiert, was unter *dem* Winkel zweier Geraden zu verstehen ist. Winkel zwischen Gerade und Ebene sowie zwischen zwei Ebenen sind den Schülern hingegen gänzlich unbekannt. Deshalb müssen die Begriffe (3), (4), (5) und (6) zunächst definiert werden, bevor wir uns der Berechnung der Winkelgrößen widmen können. Da die Definitionen von (5) und (6) auf der Definition von (4) aufbauen, beginnen wir mit Definition (4), also der Definition des Schnittwinkels zweier Geraden. Die Definition (3) ist damit lediglich ein Spezialfall von Definition (4).

Schnittwinkel zweier Geraden

Die Definition von Schnittwinkeln von Geraden ist nur dann sinnvoll, wenn sich die Geraden schneiden. Die Geraden dürfen also nicht windschief sein und müssen im Falle der Parallelität gleich sein.

Dabei ergibt sich das Problem, dass zwei Ursprungsgeraden vier Winkel mit zwei unterschiedlichen Größen einschließen. Die Einstiegsaufgabe orientiert sich an [18], S. 367, und regt die Diskussion an, dass wir uns bei der Betrachtung von Schnittwinkeln von Geraden zunächst darauf einigen müssen, welchen dieser vier Winkel wir als *Winkel zwischen den Geraden* bezeichnen wollen, dass es hier also tatsächlich eines definitorischen Aktes bedarf.

Wir definieren die Winkelgröße analog zu Definition 8.12 als kleinere dieser beiden Winkelgrößen. Satz 8.21 liefert eine Möglichkeit die Größe dieses Winkels mithilfe der Formel

$$\cos \measuredangle(\mathbb{R} \cdot A, \mathbb{R} \cdot B) = \frac{|A \bullet B|}{\|A\| \|B\|} \qquad (**)$$

zu berechnen. Für den Unterricht ergeben sich damit folgende Möglichkeiten:

(1) Berechnung der Winkelgröße α mithilfe von $(*)$, falls dass Ergebnis größer als $90°$ ist, ist die Größe des Schnittwinkels der Geraden $\mathbb{R}A$ und $\mathbb{R}B$ gleich $180° - \alpha$,

(2) Berechnung der Winkelgröße mithilfe von $(**)$.

Möglichkeit (2) bietet den Vorteil einer geschlossenen Formel zur Berechnung der Größe des Schnittwinkels zweier Geraden, hat jedoch den Nachteil, dass mit $(*)$ und $(**)$ zwei nahezu identisch aussehende Formeln zum Einsatz kommen. Wird in einem Unterrichtsgang lediglich der Schnittwinkel zweier Geraden thematisiert, bietet es sich an, auf die Einführung der Formel $(**)$ zu verzichten und stattdessen im Anschluss an die Winkelberechnung lediglich zu überprüfen, ob die Winkelgröße kleiner oder größer als $180°$ ist. Werden jedoch zusätzlich noch Winkel zwischen Geraden und Ebenen sowie zwischen Ebenen und Ebenen thematisiert, so ist die Einführung von $(**)$ lohnenswert.

Schnittwinkel von Gerade und Ebene

Die Definition des Schnittwinkels von Gerade und Ebene wird über die Projektionsgerade auf die Definition des Schnittwinkels zweier Geraden zurückgeführt. Dabei verzichten wir im Rahmen der didaktischen Reduktion auf eine formale Einführung der Projektionsgeraden und motivieren diese lediglich durch eine Zeichnung. Die Berechnung der Größe des Schnittwinkels orientiert sich dabei am Beweis von Satz 8.23.

Schnittwinkel zweier Ebenen

Der Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen E und E$'$ könnte direkt als Schnittwinkel zweier sich schneidender und zur Ebene E respektive E' orthogonaler Geraden n und n' definiert werden. Intuitiver ist jedoch zunächst die Vorstellung, dass die Schnittsituation der Ebenen dadurch entstanden ist, dass die Ebenen entlang der Schnittgeraden s gedreht wurden. Den Winkel dieser Drehung, die wir in der Zeichnung durch Pfeile kenntlich gemacht haben, bezeichnen wir als Schnittwinkel dieser Geraden. Der Nachweis, dass die Größe dieses Winkels mit der Größe des Schnittwinkels der Geraden n und n' übereinstimmt, wurde in Satz 8.24 erbracht.

Im Rahmen der didaktischen Reduktion verzichten wir auf die dort aufgeführte längliche Rechnung und verweisen auf die Anschauung: Die Zeichnung suggeriert, dass bei einer Drehung der Ebenen E und E' die Geraden n und n' in gleichem Maße gedreht werden.

15.2.5 Abstand Punkt-Ebene

Vorbetrachtungen

Die Definition des Abstandes eines Punktes X von einer Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ ist den Schülern noch nicht aus der Elementargeometrie bekannt und muss deshalb im Gegensatz zum Abstand Punkt/Gerade an dieser Stelle definiert werden. Hierzu ist es wichtig, dass die Ebene als Punktmenge erkannt wird. Damit lässt sich der Abstandsbegriff Punkt/Ebene als Erweiterung des Abstandsbegriffs zweier Punkte, und damit der Streckenlänge, definieren: der Abstand eines Punktes X von der Ebene E ist die kürzeste Entfernung eines Punktes $Y \in E$ und X. Mithilfe des Satzes des Pythagoras lässt sich wie in Satz 8.18 begründen, dass Y der Fußpunkt des Lotes durch X auf E sein muss.

Ziel ist es also, diesen Lotfußpunkt zu berechnen. Dazu bieten sich folgende Möglichkeiten an:

(1) Projektion des Punktes $X - P$ auf den zweidimensionalen Teilraum $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$,

(2) Berechnung mithilfe der elementargeometrischen Definition des Cosinus,

(3) Projektion des Punktes $X - P$ auf das orthogonale Komplement des Teilraums $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$,

(4) Konstruktion der Lotgeraden mit anschließender Schnittpunktberechnung.

zu (1) Der Abstand des Punktes X von der Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ ist gleich dem Abstand des Punkte $X - P$ von der Ebene $E - P = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$, also gleich dem Abstand eines Punktes von einem zweidimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^n$, wobei $n \geq 2$ beliebig gewählt sein kann. Der Teilraum $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ bildet zusammen mit seinem orthogonalen Komplement

$$(\mathbb{R}A + \mathbb{R}B)^\perp := \{X \mid X \in \mathbb{R}^n, \forall Y \in \mathbb{R}A + \mathbb{R}B : X \bullet Y = 0\}$$

eine direkte Zerlegung des $\mathbb{R}^n$, gemäß [15], S. 101, lässt sich also jeder Punkt $X \in \mathbb{R}^n$ eindeutig darstellen als $X = X_1 + X_2$, wobei $X_1 \in \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ und $X_2 \in (\mathbb{R}A + \mathbb{R}B)^\perp$ ist. X_1 und X_2 werden die *Orthogonalprojektionen* des Punktes X auf den Teilraum $\mathbb{R}A+\mathbb{R}B$ respektive $(\mathbb{R}A+\mathbb{R}B)^\perp$ genannt. Wir wollen also im Folgenden die Orthogonalprojektion $(X-P)_{\mathbb{R}A+\mathbb{R}B}$ des Punktes $X-P$ auf den Teilraum $\mathbb{R}A+\mathbb{R}B$

berechnen. Ist eine Orthonormalbasis $\{A', B'\}$ des Teilraumes $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ gegeben, d.h. eine Basis mit $|A'| = |B'| = 1$ und $A' \bullet B' = 0$, so ist

$$(X - P)_{\mathbb{R}A+\mathbb{R}B} = ((X - P) \bullet A') \cdot A' + ((X - P) \bullet B') \cdot B'.$$

Da $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ jedoch zweidimensional ist, können wir eine Orthonormalbasis nicht mehr ausschließlich durch Normierung von A und B erzeugen, sondern wir müssen stattdessen andere Verfahren wie beispielsweise das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren (vgl. [15], S. 296) verwenden. Dazu setzen wir $A' := \frac{1}{|A|}$, $\widetilde{B} = B - (B \bullet A') \cdot A'$ und $B' := \frac{1}{|\widetilde{B}|}\widetilde{B}$. Damit erhalten wir folgendes Verfahren zur Berechnung des Abstandes von X und E:

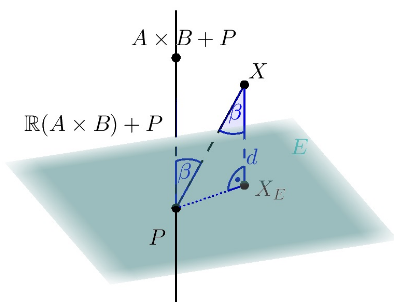
- erzeuge eine Orthonormalbasis $\{A', B'\}$ von $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ durch
$$A' := \frac{1}{|A|}, \widetilde{B} = B - (B \bullet A') \cdot A' \text{ und } B' := \frac{1}{\widetilde{\widetilde{B}}}\widetilde{B},$$
- berechne den Fußpunkt $(X - P)_{\mathbb{R}A+\ B}$ des Lotes durch $X - P$ auf $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$,
$$(X - P)_{\mathbb{R}A+\mathbb{R}B} = ((X - P) \bullet A') \cdot A' + ((X - P) \bullet B') \cdot B',$$
- der Abstand des Punktes X von der Ebene E ist gleich dem Abstand des Punktes $X - P$ von Teilraum $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$, also gleich dem Abstand
$$|(X - P) - (X - P)_{\mathbb{R}A+\mathbb{R}B}|\,.$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass es für beliebige Dimensionen $n \geq 2$ geeignet ist. Allerdings ist es aufgrund des Orthonormalisierungsprozesses sehr rechenaufwändig, weshalb wir es im Folgenden nicht weiter verwenden werden.

zu (2) Im Rahmen der didaktischen Reduktion können wir auf elementargeometrische Sätze zurückgreifen und folgendermaßen argumentieren:

Ist X_E der Fußpunkt des Lotes durch X auf E, so sind wegen $g(X, X_E) \perp E$ und $\mathbb{R}(A \times B) + P \perp E$, die Geraden $g(X, X_E)$ und $\mathbb{R}(A \times B) + P$ parallel zueinander. Nach dem Wechselwinkelsatz an parallelen Geraden ist

$$\measuredangle(X_E, X, P) = \measuredangle(A \times B + P, P, X).$$



Wir erhalten

$$\begin{aligned} d &= |XP| \cdot \cos\measuredangle(X_E, X, P) = |X - P| \cdot \cos\measuredangle(A \times B + P, P, X) \\ &= |X - P| \cdot \cos\measuredangle(A \times B, X - P) = |X - P| \cdot \frac{(A \times B) \bullet (X - P)}{|A \times B|\,|X - P|} \\ &= \frac{(A \times B) \bullet (X - P)}{|A \times B|}. \end{aligned}$$

zu (3) Der Abstand d des Punktes X von der Ebene $E = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + P$ ist gleich dem Abstand des Punktes $X - P$ von der Ebene $E_O = E - P = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$, also gleich dem Abstand eines Punktes von einem zweidimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Im Fall $n = 3$ ist das orthogonale Komplement zu $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ gemäß Satz 8.3 die Ursprungsgerade $\mathbb{R}(A \times B)$, also ein *eindimensionaler* Teilraum. Die Projektion auf diesen Teilraum lässt sich wesentlich einfacher berechnen, da wir eine Orthonormalbasis dieses Teilraums durch Normierung von $A \times B$ erhalten.
Da

$$\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}A + \mathbb{R}B) \oplus (\mathbb{R}A + \mathbb{R}B)^\perp = (\mathbb{R}A + \mathbb{R}B) \oplus \mathbb{R}(A \times B)$$

eine direkte Summe ist, ist

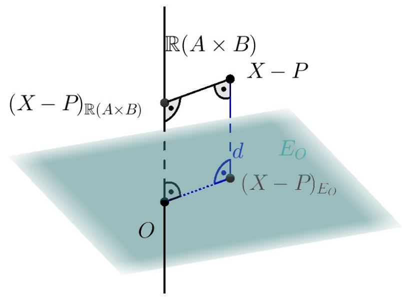
$$(X - P)_{\mathbb{R}A + \mathbb{R}B} = (X - P) - (X - P)_{(\mathbb{R}A + \mathbb{R}B)^\perp}.$$

Setzen wir $N := \frac{1}{|A \times B|} A \times B$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} d &= |(X - P) - (X - P)_E| = \left|(X - P)_{(\mathbb{R}A + \mathbb{R}B)^\perp}\right| = \left|(X - P)_{\mathbb{R}(A \times B)}\right| \\ &= |((X - P) \bullet N) \cdot N| = |(X - P) \bullet N| = \frac{|(X - P) \bullet (A \times B)|}{|A \times B|}. \end{aligned}$$

Dieser Ansatz ist der Grundgedanke hinter dem Beweis von Satz 8.18. Um diesen Beweis für die Schule zugänglich zu machen, nutzen wir erneut die Identifikation des $\mathbb{R}^3$ mit dem Raum und greifen auf die aus der Elementargeometrie bekannte Tatsache zurück, dass in Rechtecken gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Da $\mathbb{R}(A \times B) \perp E_O$ und $g(X - P, (X - P)_E) \perp E_O$ ist, ist das Viereck mit den Ecken $(A \times B) \perp E_O$, $X - P$, $(X - P)_E$ und O ein Rechteck.
Wir erhalten



$$\begin{aligned} d &= |(X - P)(X - P)_{E_O}| \\ &= \left|(X - P)_{\mathbb{R}(A \times B)}\right| \\ &= |((X - P) \bullet N) \cdot N| \\ &= |(X - P) \bullet N|. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgendes Verfahren zur Abstandsbestimmung:

- berechne $N := \frac{1}{|A \times B|} \cdot (A \times B)$,
- der Abstand des Punktes X von der Ebene E ist gleich dem Betrag von $(X - P)_{\mathbb{R}(A \times B)}$, also gleich $|(X - P) \bullet N|$.

Dieses Verfahren zur Abstandsberechnung haben wir bei der Berechnung des Volumens des Spats bereits verwendet. Setzen wir die Berechnungsformel für das Volumen des Spats als bekannt voraus, so können wir den Term $|(X - P) \bullet N|$ durch folgende Rechnung uminterpretieren. Es ist nämlich

$$|(X-P)\bullet N| = \left|(X-P)\bullet(\frac{1}{|A\times B|}\cdot(A\times B))\right| = \frac{|(A\times B)\bullet(X-P)|}{|A\times B|}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist das Volumen des durch die Punkte A, B, $X-P$ und den Koordinatenursprung definierten Spats, der Nenner ist der Flächeninhalt des durch die Punkte A und B definierten Parallelogramms und damit der Grundfläche des Spats. Setzen wir die Formel

$$\text{Volumen des Spats} = \text{Flächeninhalt der Grundfläche} \cdot \text{Länge der Höhe}$$

als bekannt voraus, so liefert der Term

$$\frac{|(A\times B)\bullet(X-P)|}{|A\times B|}$$

also genau die Länge der Höhe des Spats und damit den Abstand des Punktes $X-P$ von der Ebene $E_O = E(A,B,O)$.[3]

zu (4) Da Ebenen des Raumes genauso wie die Geraden der Ebene Hyperebenen des umliegenden Raumes sind, teilen diese wesentliche Eigenschaften. Deshalb lässt sich der Abstand analog zur Abstandberechnung Punkt/Gerade im Rahmen der ebenen Geometrie durch folgendes Verfahren berechnen:

- das Lot l durch X auf E ist gegeben durch

$$l = \mathbb{R}(A\times B) + X,$$

- berechne den Schnittpunkt X_E der Lotgeraden l und der Ebene E,
- der Abstand des Punktes X von der Ebene E ist gleich der Länge der Strecke XX_E.

Von den vier geschilderten Verfahren ist das vierte das intuitivste, weil es ohne weitere theoretische Vorbetrachtungen analog zur Abstandsberechnung Punkt-Gerade im $\mathbb{R}^2$ durchgeführt werden kann. Es hat jedoch den Nachteil, dass zur Schnittpunktberechnung ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Die Existenz genau einer Lösung ist jedoch durch die Orthogonalität der Lotgeraden l zur Ebene E sichergestellt, weshalb die Lösung an dieser Stelle dem Taschenrechner überlassen werden kann. Aber auch das dritte Verfahren soll wegen der anschaulichen Interpretationsmöglichkeit im weiteren Verlauf zur Anwendung kommen, um eine Abstandsformel herzuleiten.

[3] U. Leck, persönliche Kommunikation

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe

Wir setzen hier voraus, dass die Schüler intuitiv unter dem Abstand eines Punktes X von einer Ebene E den kürzesten Abstand eines Punktes $Y \in E$ vom Punkt X verstehen. Ziel der Einstiegsaufgabe soll es sein, diesen kürzesten Abstand mit dem Lotfußpunkt in Verbindung zu bringen, den die Schüler nur aus der ebenen Geometrie kennen. Die Begründung, dass der Punkt X_E tatsächlich der Punkt der Ebene ist, der dem Punkt X am nächsten ist, ist mit Methoden der ebenen Geometrie durchführbar. Dazu müssen die Schüler gedanklich die Ebene $E(X, X_E, Y)$ betrachten. Es wird nicht formal bewiesen, dass das Dreieck XYX_E rechtwinklig bei X_E ist, denn ein Verweis auf die Anschauung ist hier zur Plausibilisierung ausreichend. Aufgabenteil (a) ist somit lediglich eine Anwendung des Satzes des Pythagoras der ebenen Geometrie bzw. der offensichtlichen Tatsache, dass in einem rechtwinkligien Dreieck die Hypothenuse stets länger ist als die Katheten. Allerdings bedarf es des mentalen Operierens (siehe auch [54]) mit geometrischen Objekten, um eine geeignete Ebene zu finden, in der anschließend die Sätze der ebenen Geometrie angewandt werden.

Die in der Zeichnung eingetragene Lotgerade und der dort eingezeichnete Lotfußpunkt X_E legt die Anwendung des 4. Verfahrens zur Abstandsberechnung nahe. Die Lotgerade durch X auf E ist

$$l = \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -21 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -19 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix},$$

der Schnittpunkt von l und E ist $X_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$, der Abstand d von X und E ist

$$d = |XX_E| = |X - X_E| = \left|\begin{pmatrix} -19 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{530}.$$

Dieses intuitiv anwendbare Verfahren ist aufgrund seiner Mehrschrittigkeit für eine Vorbereitung der Schüler auf das Zentralabitur des Landes Schleswig-Holstein unvorteilhaft. Da Abstandsberechnungen von Punkt und Ebene einen zentralen Aufgabentyp im Zentralabitur darstellen, ist es hilfreich, eine geschlossene Formel für diese Abstände zu kennen. Eine Herleitung einer Abstandsformel haben wir bereits bei der Berechnung des Spatvolumens erbracht. Wir gehen an dieser Stelle den umgekehrten Weg, setzen das Spatprodukt als bekannt voraus und nutzen dies für eine Neuinterpretation der Abstandsformel als Höhe im entsprechenden Spat. Der Nachteil dieser Formel ist, dass diese letztendlich auch ohne die geometrisch motivierte Herleitung angewendet werden kann und sich damit die Abstandberechnung auf die

Anweisung *„setze den Punkt in die Hessesche Normalendarstellung ein“* beziehungsweise *„suche in der Formelsammlung nach der Formel und setze ein“* reduziert. Es ist traurige Realität, dass ein sicheres Beherrschen dieser Formel eine wesentliche „Kompetenz“ zum guten Bestehen des Zentralabiturs ist.

15.2.6 Abstand windschiefer Geraden

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe

Bevor wir den Abstand zweier windschiefer Geraden $g = \mathbb{R}C + Q$ und $g' = \mathbb{R}C' + Q'$ berechnen können, müssen wir zunächst definieren, was wir unter diesem Abstand verstehen, nämlich den minimalen Abstand zweier Punkte auf beiden Geraden.

Im Gegensatz zur Abstandsberechnung Punkt-Ebene, bei der ein Punkt fixiert und nur der Punkt in der Ebene variiert wird, kommt an dieser Stelle erschwerend hinzu, dass nun beide Objekte aus mehreren Punkten bestehen und somit zwei Punkte variiert werden müssen. Zerlegt man diesen Vorgang in zeitlich getrennte Prozesse und fixiert zunächst einen Punkt P auf der Geraden g und variiert den Punkt P' auf der Geraden g', so erhält man das Abstandsproblem Punkt-Gerade, P' muss folglich der Fußpunkt des Lotes durch P auf g', um den minimalen Abstand vom Punkt P zu besitzen. Nun muss im nächsten Schritt jedoch P' auf der Geraden g' fixiert und der Punkt P auf der Geraden g variiert werden, wodurch der Punkt P' jedoch mitunter die Eigenschaft, der Lotfußpunkt zu sein, verliert. Diese Schritte beschreiben also - wenn überhaupt - ein iteratives Verfahren, wie wir uns den Punkten minimalen Abstandes nähern könnten. Wir müssen also stattdessen beide Punkte simultan variieren.

Zur Motivation des Abstandsbegriffs dient die Einstiegsaufgabe, die in Anlehnung an [18], S. 361 formuliert ist. Diese Aufgabe stellt den Spezialfall dar, in dem das durch die Geraden g und g' definierte Spat ein Quader ist. Dies hat den Vorteil, dass die dort eingezeichneten Eckpunkte schon die Punkte minimalen Abstandes sind. Wir umgehen damit das Problem der simultanen Variation der Punkte, indem wir die Optimalsituation voraussetzen und aus dieser die dafür *notwendigen* Eigenschaften ableiten. Die Frage, ob diese Eigenschaften auch *hinreichend* sind, übergehen wir im Rahmen der didaktischen Reduktion.

An dieser Aufgabe lassen sich folgende Tatsachen diskutieren:

(1) den Abstand der Punkte auf den Geraden mit geringstem Abstand bezeichnen wir als Abstand der Geraden,

(2) die Verbindungsgerade durch diese Punkte ist orthogonal zu beiden Geraden,

(3) der Abstand der Punkte ist gleich der Höhe des Quaders.

Diese drei Diskussionspunkte liefern jeweils unterschiedliche Zugänge, mit denen wir den Abstand berechnen können.

(1) Wir können die Punkte minimalen Abstandes als Lösung eines Extremwertproblems finden: Für jedes $r \in \mathbb{R}$ sei $P_r := rC + Q$ ein Punkt auf der Geraden g und für jedes $s \in \mathbb{R}$ sei $P'_s := sC' + Q'$ ein Punkt auf der Geraden g'. Wir betrachten die Funktion

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (r, x) \mapsto |P_r P'_s|^2 = (rC - sC' + Q - Q')^2.$$

Um den Abstand der Geraden g und g' zu berechnen, müssen wir das Minimum der Funktion d finden. Eine notwendige Bedingung dafür ist, dass der Gradient

$$\operatorname{grad}(d)(r, s) = (\frac{\partial d}{\partial r}(r, s), \frac{\partial d}{\partial s}(r, s))$$

an der Stelle (r, s) gleich $(0, 0)$ ist. Es ist

$$\frac{\partial d}{\partial r}(r, s) = 2(rC - sC' + Q - Q') \bullet C$$

und

$$\frac{\partial d}{\partial s}(r, s) = 2(rC - sC' + Q - Q') \bullet (-C'),$$

eine notwendige Bedingung zum Vorliegen des Minimus ist also

$$(P_r - P'_s) \bullet C = 0 \text{ und } (P_r - P'_s) \bullet C' = 0,$$

was nichts anderes ist als die Forderung, dass die Verbindungsgerade $g(P, P')$ orthogonal zu beiden Ausgangsgeraden ist. Auch wenn wir im Rahmen der didaktischen Reduktion an dieser Stelle auf den Nachweis verzichten, dass diese Eigenschaft auch hinreichend ist, macht die Anwendung von Methoden der Analysis mehrerer Veränderlicher diesen Zugang ungeeignet für die Sekundarstufe II. Gegenüber dem Zugang (2) hat dieser Zugang keinen Vorteil, da sich auch hier die Frage stellt, wie wir die Punkte P und P' berechnen können.

(2) Wir umgehen die eingangs erwähnte Problematik, dass nun zwei Punkte variiert werden müssen, indem wir statt der Äquivalenzaussage von Satz 8.6 nur die Rückrichtung *„wenn die Punkte P und P' Punkte minimalen Abstandes sind, dann müssen sie jeweils Lotfußpunkte sein“* erwähnen. Dies kann im Rahmen der Einstiegsaufgabe geometrisch begründet werden: Wäre beispielsweise P' nicht der Fußpunkt des Lotes durch P auf g', so hätte der Lotfußpunkt einen geringeren Abstand von P.

Im Falle des Quaders existieren die Fußpunkte eines *gemeinsamen* Lotes offensichtlich. Die Frage, ob dies *immer* der Fall ist, wird sowohl in der Einstiegsaufgabe als auch im Lehrtext im Rahmen der didaktischen Reduktion übergangen.

Um diese Punkte P und P' zu finden, müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$(P_r - P'_s) \bullet C = 0 \text{ und } (P_r - P'_s) \bullet C' = 0$$

mit zwei Unbekannten und zwei Gleichungen lösen, welches äquivalent ist zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} r(C \bullet C) - s(C' \bullet C) &= (Q' - Q) \bullet C \\ r(C \bullet C') - s(C' \bullet C') &= (Q' - Q) \bullet C'. \end{aligned}$$

(3) Die Länge der Höhe des Quaders können wir auf folgende Arten berechnen:

- Die Länge der Höhe des Quaders ist gleich dem Quotienten des Volumens und dem Flächeninhalt der entsprechenden Grundfläche,
- Die Länge der Höhe ist gleich dem Abstand der durch die entsprechenden Seitenflächen definierten Ebenen.

Diese Vorgehensweise lässt sich nun für beliebige windschiefe Geraden g und g' verallgemeinern: Anstatt eines Quaders ist das zugrunde liegende Objekt nun ein Spat. Das Volumen des Spats ist durch das Spatprodukt $|(C \times C') \bullet (Q - Q')|$ gegeben, die Grundfläche ist ein Parallelogramm mit Flächeninhalt $|C \times C'|$, die Länge der Höhe des Spats ist demnach

$$\frac{|(C \times C') \bullet (Q - Q')|}{|C \times C'|}.$$

Die Seitenflächen definieren die parallelen Ebenen $E = \mathbb{R}C + \mathbb{R}C' + Q$ und $E' = \mathbb{R}C + \mathbb{R}C' + Q'$, deren Abstand ebenfalls $\dfrac{|(C \times C') \bullet (Q - Q')|}{|C \times C'|}$ ist.

Anmerkungen zur Beispielaufgabe

In [12] wird verlangt, dass die Schüler *„die Parametergleichung einer Geraden (Ebene) im $\mathbb{R}^3$ als eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$)“* verstehen und so Bewegungen im Raum modellieren.

Um den Abstand der Flugbahnen in der vorliegenden Beispielaufgabe (in Anlehnung an [7], S. 318) berechnen zu können, werden die Flugbahnen als Punktmengen

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix}3\\12\\4\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid \exists r \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}3\\12\\4\end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\10\\5\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mid \exists r \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\10\\5\end{pmatrix} \right\}$$

betrachtet. Zur Berechnung des minimalen Abstandes der Tiere ist jedoch eine weitere Interpretation notwendig, nämlich als Funktion

$$\left\{ (t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \mid t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\left\{ (t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) \mid t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese Interpretation ist nun nicht mehr unabhängig von der Wahl der Darstellung der beiden Geraden. Die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ beziehungsweise $\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind nicht mehr beliebige Punkte auf den jeweiligen Geraden, sondern sie beschreiben die Position der Tiere zum Startzeitpunkt $t = 0$. Ebenso sind die Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$, die die dazugehörigen Ursprungsgeraden beschreiben, nicht mehr beliebig gewählt, sondern sie müssen die Differenz der Position nach Ablauf einer Zeiteinheit und der Startposition sein. Nur so ist gewährleistet, dass wir durch Einsetzen von $t = 1$ die Position der Tiere nach einer Zeiteinheit erhalten. Diese Beispielaufgabe zur Herausarbeitung dieser beiden Sichtweisen auf die Parameterdarstellung von Geraden bietet einen kurzen Einblick in die Theorie der parametrisierten Kurven, wodurch Grundzüge der Leitidee 4 (Funktionaler Zusammenhang) in die analytische Geometrie eingebracht werden.

15.3 Kugeln

Anmerkungen zur Einstiegsaufgabe

Kugeln stellen das dreidimensionale Analogon zu Kreisen dar. Da Kreise bereits im Rahmen der ebenen Geometrie thematisiert wurden, kann auf das dort behandelte Wissen zurückgegriffen werden. Die Einstiegsaufgabe dient dazu, die vorhandenen Begrifflichkeiten der ebenen Geometrie auf die Geometrie des Raumes zu übertragen. Die Lageuntersuchung von Punkt und Kugel kann auf die Abstandsberechnung des Punktes vom Kugelmittelpunkt zurückgeführt werden. Hier liegt der Punkt P auf der Kugel und der Punkt Q außerhalb der Kugel.

Anmerkungen zu den Beispielaufgaben

Mit Einführung eines neuen geometrischen Objektes können wir dessen Lage zu den bereits bekannten Objekten untersuchen. Dies erfolgt im Rahmen von Beispielaufgaben, die sich im Sinne eines Spiralcurriculums an den bereits behandelten Aufgaben zum Kreis orientieren.

Beispiel 4
Im Unterschied zum zweidimensionalen Fall kann der Mittelpunkt einer Kugel durch 4 Punkte (die nicht alle in einer Ebene liegen) nicht mehr als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ermittelt werden. Bei der Thematisierung von Kreisen durch 3 Punkte haben wir jedoch ein weiteres Verfahren etabliert, das sich auf Kugeln übertragen lässt: Wir erstellen ein Gleichungssystem, welches nun aus 4 Gleichungen und 4 Unbekannten besteht - den drei Koordinaten des Kugelmittelpunktes sowie dem Radius r der Kugel. Die Strategie zum Lösen dieses Gleichungssystems ist dieselbe wie die bereits bei den Kreisen angewandte.

Beispiel 5
Auch die Lageuntersuchung einer Kugel K zu einer Geraden g sowie deren Schnittpunktberechnung erfolgt analog zum Fall Kreis/Gerade. Für die Lageuntersuchung bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Berechnung des Abstandes des Kugelmittelpunktes von der Geraden,
- Lösung des Gleichungssystems aus der Kugelgleichung und der Geradengleichung und anschließende Interpretation der Lösungsmenge.

In diesem Fall ist die Lösung des Gleichungssystems nicht wesentlich aufwändiger als die Abstandberechnung, da nur ein Parameter gefunden werden muss. Deshalb bietet sich hier auch dann die zweite Möglichkeit an, wenn in der Aufgabenstellung nicht explizit nach den Schnittpunkten gefragt wird.

Beispiel 6
Bei der Untersuchung der Lage von Kugel und Ebene bietet sich eine Abstandsbetrachtung des Kugelmittelpunktes von der Ebene an, anstatt die Lage durch die Anzahl gemeinsamer Punkte zu bestimmen. Den Schnittkreis erhalten wir in diesem Fall nicht durch Lösung des Gleichungssystems, bestehend aus Kugelgleichung und Ebenengleichung, sondern durch geometrische Betrachtungen. Satz 8.29 stellt sicher, dass der so ermittelte Kreis tatsächlich die Schnittmenge der beiden Kugeln beschreibt, wobei das ursprünglich nur für den zweidimensionalen Fall definierte Wort *Kreis* an dieser Stelle in Bezug auf die Ebene E zu interpretieren ist. Um diese geometrischen Betrachtungen durchzuführen, müssen die Schüler eine geeignete Schnittebene wählen, nämlich die Ebene $E(X, M, M_E)$, in der der Satz des Pythagoras angewendet werden kann. Es werden hierzu also keine neuen Konzepte der analytischen Geometrie benötigt, sondern eine ausgeprägte Raumvorstellung (zur Entwicklung der Raumvorstellung siehe auch [54]).

Beispiele 10 und 11

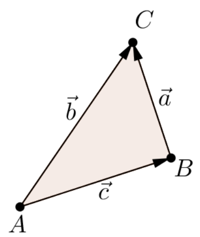
Die Lageuntersuchung zweier Kugeln K und K' erfolgt analog zur Lageuntersuchung zweier Kreise zunächst über Abstandsbetrachungen der Kugelmittelpunkte. Suchen wir anschließend nach gemeinsamen Punkten, so ergibt sich bei der Lösung des aus den beiden Kugelgleichungen bestehenden Gleichungsystems wie bei der Lageuntersuchung zweier Kreise die Situation, dass wir das Ergebnis einer algebraischen Umformung geometrisieren können: Wir erhalten die Koordinatendarstellung der Schnittebene der beiden Kugeln, womit wir das Problem wieder auf ein bekanntes Problem zurückgeführt haben, das wir nun wie in Beispiel 7 mithilfe elementargeometrischer Sätze lösen.

16 Diskussion

Einer unserer Kritikpunkte am klassischen Zugang zur analytischen Geometrie war, dass der Wechsel zwischen den Objekten Punkt und Pfeilklasse bei den Schülern zu einer Objektunsicherheit führt. Die als Pfeilklassen definierten Vektoren werden in der Regel trotzdem punktbezogen verwendet. Dies tritt insbesondere beim Ortsvektor eines Punktes auf, der zwar eine Äquivalenzklasse von Pfeilen ist, aber stets durch einen ganz bestimmten Repräsentanten dargestellt wird. Notwendig wird dieser Weg nur deshalb, um das Dilemma zu umgehen, zwei verschiedene mathematische Objekte addieren zu müssen. Durch diese Verwendung von Äquivalenzklassen wird der klare Blick auf die Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^3$ verwässert: Die grundlegende Eingenschaft von Vektoren ist nämlich nicht, dass sie Äquivalenzklassen sind, sondern dass für sie gewisse Rechenregeln gelten, durch die die Vektorraumstruktur des zugrunde liegenden Raumes zum Ausdruck kommt. Die Definition von Vektoren als Pfeilklassen erschwert es zusätzlich, im Unterrichtsverlauf weitere Beispiele für Vektorräume einbringen zu können.

Wir haben einen Unterrichtsgang präsentiert, der ausschließlich Punkte als grundlegende Objekte verwendet und darauf aufbauend die Objekte Gerade, Ebene, Kreis und Kugel als Punktmengen definiert, womit ein hoher Grad an Objektklarheit gewährleistet ist. In diesem Unterrichtsgang werden aus der Elementargeometrie bekannte Objekte mit der Sprache der analytischen Geometrie beschrieben. Dabei erfolgt eine Präzisierung der den Schülern bekannten Objekte: Geraden, Ebenen, Kreise und Kugeln sind nun *Punktmengen*. Punktmengen können implizit und explizit definiert werden, Lageuntersuchungen können durch das Lösen algebraischer Gleichungen, aber auch durch geometrische Betrachtungen durchgeführt werden.

Bei den Beweisen elementargeometrischer Sätze ergibt sich durch diesen Zugang allerdings ein Nachteil. Die Seiten bzw. Seitenlinien eines Dreiecks ABC werden nun nicht mehr durch die Pfeilklassen $\vec{c} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} := \overrightarrow{AC}$ und $\vec{a} := \overrightarrow{BC}$, sondern durch die Geraden $g(A, B)$, $g(A, C)$ und $g(B, C)$ beschrieben. Letztere sind ursprungsabhängige Objekte, womit uns durch die fehlende Freiheit in der Repräsentantenwahl ein wesentlicher Vereinfachungsschritt in der Beweisführung verlorengeht.



Wir haben diesen Nachteil dadurch kompensiert, dass wir in Beweisen das Koordinatensystem geschickt gelegt haben, wodurch sich die Rechnungen erheblich vereinfachen. Diese Wahl des Koordinatensystems führt jedoch im obigen Fall stets nur zur Vereinfachung von *zwei* der drei Geraden $g(A, B)$, $g(A, C)$ und $g(B, C)$. Beschreibt man die Dreiecksseiten hingegen durch die Pfeilklassen $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, so besitzt man beim Beschreiben *jeder* Dreiecksseite die Freiheit der Wahl des Repräsentanten.

Wollen wir in unserer Theorie die Länge $|A - B|$ einer Dreiecksseite berechnen, so benötigen wir dazu die beiden Eckpunkte A und B, die durch Differenzbildung zu einem neuen Punkt verknüpft werden. Obwohl derartige Differenzen häufiger in der vorliegenden Arbeit aufgetaucht sind, haben wir darauf verzichtet, diese mit einem neuen Begriff zu bezeichnen. Die Differenz $A - B$ ist nichts anderes als *der Punkt, den man zu B hinzu addieren muss, um A zu erhalten*, was nichts anderes ist als die Grundvorstellung des Ergänzens, die die Schüler bereits in der Primarstufe mit der Differenzbildung verbinden. Beim klassischen Zugang hingegen neigen Schüler gemäß der Schilderungen in der Einleitung in Kapitel 1 dazu, selbst bei derart einfachen Fragestellungen mit Pfeilklassen zu arbeiten, zunächst den Vektor $\vec{c} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ zu definieren und anschließend $|\vec{c}|$ zu berechnen. Der rechnerische Aufwand bleibt dabei in diesem Fall gleich, und auch in unserer Theorie könnten wir die Differenz $A - B$ einer neuen Variablen, etwa $X = A - B$, bezeichnen, so dass beide Wege auch bezüglich der Notation gleich aufwändig sind. Die Zugänge unterscheiden sich jedoch erheblich in der Anzahl der verwendeten mathematischen Objektarten. Bei der Berechnung von $|A - B|$ wird aus zwei *Punkten* ein neuer Punkt erstellt und dessen Betrag berechnet. Bei der Berechnung von $\vec{c} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ und $|\vec{c}|$ werden zunächst aus den beiden gegebenen *Punkten* zwei *Ortsvektoren* erstellt. Durch Differenzbildung wird aus den beiden Ortsvektoren ein *Vektor*, von dem dann letztendlich der Betrag gebildet wird. Für die simple Berechnung der Länge einer Dreiecksseite werden also drei verschiedene Begriffe eingeführt.

Die Darstellung der Dreiecksseiten durch die Pfeilklassen $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ ermöglicht es, die Pfeilklassen in Form eines *Vektorzuges* als Linearkombination der anderen darzustellen, etwa $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. Dieser Vorgang entspricht in unserer punktorientieren Sichtweise der Rechnung $B - A = (B - C) + (C - A)$, was auf der algebraischen Ebene durch das Einfügen einer *nahrhaften Null* leicht zu rechtfertigen ist. Geometrisch sind derartige Stellen jedoch schwerer zu veranschaulichen als das Aneinanderfügen von Pfeilen: Von rechts nach links gelesen erhalten wir zwar die Gleichung $(B - C) + (C - A) = B - A$, womit $B - A$ als entsprechender Parallelogrammpunkt identifiziert werden kann. Die geometrische Interpretations der Gleichung $B - A = (B - C) + (C - A)$ ist hingegen weitaus schwieriger, weshalb derartige Stellen in Beweisen leicht wie Zauberei wirken. Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems kann auf das Einführen einer nahrhaften Null jedoch häufig verzichtet werden, weil dadurch Aussagen über Geraden zu Aussagen über Ursprungsgeraden werden.

Durch die ausschließliche Verwendung von Punkten und Punktmengen haben wir also nicht nur die Problematik umgangen, verschiedene Objekte addieren zu müssen und uns dabei nicht entscheiden zu können, ob Vektoren nun Äquivalenzklassen von Pfeilen sind oder doch an konkreten Punkten ansetzen, wir haben auch einen ganz wesentlichen Vorteil erhalten, nämlich den der Schlichtheit. Schlichtheit bedeutet, nur dann einen neuen Begriff oder ein neues mathematisches Objekt einzuführen, wenn dies unbedingt notwendig ist. Und wir haben gezeigt, dass wir nicht mehr benötigen als das bereits aus der Sekundarstufe bekannte Objekt Punkt, und, darauf aufbauend, die Punktmengen Gerade, Kreis, Ebene und Kugel. Sowohl die Addition als auch die Multiplikation können wir rein in der Sprache der Punkte deuten. Bei der Addition haben wir jedoch eine weitere Deutungsmöglichkeit zugelassen, nämlich die der Verschiebung, die wir letztendlich auch durch Pfeile gekennzeichnet haben. Man könnte kritisieren, dass es sich dabei um eine unnötige Einführung eines nicht notwendigen Objektes handelt. Allerdings haben wir betont, dass es sich bei Deutungen nicht um neue Objekte handelt, sondern lediglich um Veranschaulichungen. Die mit Punkten beschrifteten Pfeile dienen damit im Wesentlichen dazu, Punkte als Rechenobjekte zu erkennen und sind damit ein wesentlicher Abstraktionsschritt vom grundvorstellungsbasierten Rechnen hin zu einem abstrakten Zahlverständnis. Vergleichen wir dies beispielsweise mit der Darstellung $3 \stackrel{+2}{\to} 5$ der Rechnung $3 + 2 = 5$, so wird dabei niemand mehr an den Punkt 3 auf dem Zahlenstrahl denken, der um 2 Einheiten nach rechts verschoben wird. Der Pfeil übernimmt die Rolle des Operators, der aus der Zahl 3 die Zahl 5 erzeugt.

Aufgrund der Begriffssparsamkeit ist es nicht nur gerechtfertigt, auf die Einführung eines neuen Begriffs für die Punktedifferenz $A - B$ zu verzichten, sondern auch keinen gesonderten Orthogonalitätsbegriff für Punkte, etwa $A \perp B$, einzuführen. Dieser Begriff hätte zwar an einigen Stellen knappere Formulierungen von Aussagen ermöglicht, in der Vorstellung der Schüler sind jedoch nur Geraden Objekte, die orthogonal zueinander sein können, und deshalb wäre es verwirrend, plötzlich von orthogonalen Punkten zu sprechen.

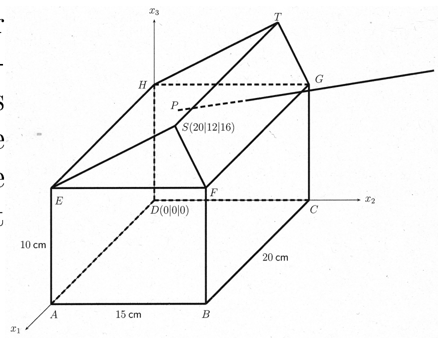
Die zu einer Geraden $g = \mathbb{R}A + P$ gehörige Ursprungsgerade $g_O = \mathbb{R}A$ ist ein weiteres Objekt, dem wir einen zusätzlichen Namen hätten geben können. Geeignete Begriffe wären beispielsweise *„Orientierung der Geraden g“* oder auch *„Richtung der Geraden g“*. Mit diesen Begrifflichkeiten wären Geraden parallel zueinander, wenn sie die gleiche Orientierung haben, was ein plausibel klingender Satz ist. Aber wegen der Begriffssparsamkeit haben wir uns auch an dieser Stelle dagegen entschieden, diese Begriffe einzuführen und bleiben bei der etwas holprig klingenden Formulierung *„die zu g gehörende Ursprungsgerade“*. Damit wird das Objekt g_O stets mit dem Begriff bezeichnet, der Auskunft über die Natur des Objektes gibt: g_O ist eine Ursprungs**gerade**, also eine Gerade. Dies trägt ebenfalls zur Objektklarheit bei.

Analyse der Aufgaben des Zentralabiturs

Bei der Auswahl der Unterrichtsinhalte haben wir uns häufig auf die Fachanforderungen des Landes Schleswig-Holsteins [12] berufen, weil es eine legitime Forderung ist, dass Schüler durch den entwickelten Unterrichtsgang das Abitur in diesem Themenbereich erfolgreich ablegen können. Diese Praxistauglichkeit soll im Folgenden anhand der schriftlichen Abiturprüfung 2016 im Kernfach Mathematik des Landes Schleswig-Holstein [43] beispielhaft untersucht werden, wobei ebenfalls kritisch hinterfragt werden soll, ob die erfolgreiche Bearbeitung der im Zentralabitur gestellten Aufgaben überhaupt ein erstrebenswertes Ziel des Mathematikunterrichts ist.

Wir zerlegen die Abituraufgabe des Themenbereichs analytische Geometrie zunächst in Teilaufgaben und geben die Stellen im Unterrichtswerk an, an denen inhaltsgleiche Aufgaben bearbeitet wurden.

Aufgabe 3: Analytische Geometrie[1]
In einer Miniaturausstellung ist das Modell einer Seilbahn mit einer Gondel aufgebaut. Die Abbildung zeigt die Talstation, die die Form eines Quaders mit einem aufgesetzten Prisma hat. Sie steht auf der Grundfläche der Ausstellung, die in der x_1x_2-Ebene liegt. Eine Einheit entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.



- Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, F, G und T an und bestimmen Sie eine Koordinatenform der Dachebene E_1, die die Punkte F, G und S enthält. [Kontrolle: $E_1 : 2x_2 + x_3 = 40$]
- Das Seil der Seilbahn ist geradlinig zwischen den Punkten $P(6|5|12)$ und $Q(38|133|44)$ (außerhalb der Abbildung) gespannt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R, in dem das Seil die Dachebene E_1 durchstößt.
- Berechnen Sie die Länge und den Steigungswinkel des Seils.

Zum leichteren Verständnis sollte die Aufgabenstellung an die Begrifflichkeiten des vorliegenden Unterrichtswerkes angepasst werden, indem das Wort *Koordinatenform* durch das Wort *Koordinatendarstellung* ersetzt und die Ebene E_1 in der Form $E_1 = \{X \,|\, 2x_2 + x_3 = 40\}$ angegeben wird. Die erste Teilaufgabe entspricht dem Beispiel 1 aus Abschnitt 12.1.5, die zweite Teilaufgabe Beispiel 1 aus Abschnitt 12.2.2 in Verbindung mit Beispiel 1 aus Abschnitt 12.2.3, die dritte Aufgabe entspricht dem Beispiel 2 aus Abschnitt 12.2.4. Da wir die Orthogonalität nur für Geraden und nicht für Punkte definiert haben, muss bei der Bearbeitung der Aufgabe anstelle des Begriffs *Normalenvektor* eine etwas umständlichere Formulierung, etwa *„ist* $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

[1] entnommen aus [12]

so ist $\mathbb{R}N \perp E_1$*“* anstelle von *„ein Normalenvektor ist* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$*“*, verwendet werden.

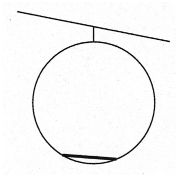
> In der Ausstellung ist eine zweite Seilbahn installiert. Das Seil dieser Bahn ist im Punkt $K(61|81|0)$ befestigt und verläuft in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
>
> - Zeigen Sie, dass sich die Geraden, entlang derer die Seile verlaufen, nicht schneiden.
> - Berechnen Sie den Abstand dieser Geraden voneinander.[2]

Zum besseren Verständnis sollte auch hier die die Formulierung *„in Richtung des Vektors* $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$*“* an unsere Terminologie angepasst werden, etwa in *„parallel zur Geraden* $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$*“*. Ansonsten können die Aufgaben analog zum Beispiel 1 aus Abschnitt 12.2.1 und Beispiel 1 in Abschnitt 12.2.6 bearbeitet werden. Letzteres entspricht einer Anwendung der Abstandsformel.

[2]entnommen aus [12]

Bei der ersten Seilbahn ist eine kugelförmige Gondel so am Seil befestigt, dass ihr Mittelpunkt die Koordinaten $M(10|21|13,5)$ hat. Die Gondel hat einen Durchmesser von $4cm$ und ist aus Plexiglas hergestellt.

- Geben Sie die Gleichung der Kugel K an, die die Gondel beschreibt.
- In der Gondel soll eine kreisförmige Plattform parallel zur Grundfläche positioniert werden. Beim Einkleben ist die Plattform verrutscht. Sie liegt jetzt in der Ebene

  $$E_2 : 19x_1 + 180x_3 = 2292,39.$$

  Ermitteln Sie den Mittelpunkt und den Flächeninhalt der Plattform.
- An der Gondel ist ein Schild mit einem Firmenlogo angebracht worden, sodass es die Gondel tangential in einem Punkt Y berührt und von schräg oben lesbar ist. Ein Normalenvektor zu der Schildebene ist $\vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Y, an dem das Schild an die Kugel geklebt worden ist.[3]

Auch hier sollte das Wort *Normalenvektor* ersetzt werden durch *„die Gerade* $\mathbb{R}J := \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ist orthogonal zur Schildebene"*. Außerdem bietet es sich hier an, anstelle von einer *„Gleichung, die die Kugel beschreibt"* die Angabe der Kugel als Punktmenge zu verlangen. Die ersten beiden Teilaufgaben entsprechen den Beispielen 1 und 6 in Abschnitt 12.3. Die letzte Teilaufgabe kann als Schnittproblem Gerade/Kugel wie in Beispiel 5 im gleichen Abschnitt betrachtet werden. Alternativ können wir den Punkt M um $R = 2$ Längeneinheiten parallel zur Geraden $\mathbb{R}J$ verschieben und erhalten so den Berührpunkt

$$Y = M + 2\frac{J}{|J|} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 13,5 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+\sqrt{2} \\ 21 \\ 13,5+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Hier muss nun zusätzlich begründet werden warum dieser Punkt der Punkt ist, an dem das Schild schräg von oben lesbar ist.

[3] entnommen aus [12]

Gegeben seien zwei windschiefe Geraden k und l mit $k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 61 \\ 81 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gibt einen Punkt U auf k und einen Punkt V auf l, so dass der Vektor $\overrightarrow{UV}$ senkrecht zur x_1x_2-Ebene ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte U und V.[4]

In einer Aufgabenstellung im Sinne des vorliegenden Unterrichtswerkes sollten einerseits die Darstellungen der Geraden abgeändert, andererseits sollte auf die Verwendung des Wortes *Vektor* verzichtet werden. Damit erhalten wir die folgende Aufgabenstellung:

Gegeben seien zwei windschiefe Geraden

$$k = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{und } l = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 61 \\ 81 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt einen Punkt U auf k und einen Punkt V auf l, so dass die Gerade $g(U, V)$ senkrecht zur x_1x_2-Ebene ist. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte U und V.

Eine Lösung ist nun ebenso problemlos mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden möglich. Sei $U = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \in k$ und $V = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 61 \\ 81 \\ 0 \end{pmatrix} \in l$. Es sind äquivalent:

$$g(U, V) \perp E_{x_1,x_2} \Leftrightarrow \mathbb{R}(V - U) \parallel \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V - U = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 61 \\ 81 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} s & = & 24 \\ t & = & 7 \\ r & = & 5 \end{vmatrix},$$

woraus sich $U = \begin{pmatrix} 13 \\ 33 \\ 19 \end{pmatrix}$ und $V = \begin{pmatrix} 13 \\ 33 \\ 24 \end{pmatrix}$ ergibt.

Auffallend ist, dass jede Aufgabenstellung geringfügig abgeändert werden musste, um sie kompatibel zu den in diesem Unterrichtswerk gegebenen Begriffen zu machen. Diese Tatsache hat dazu geführt, dass Lehrer, die den in dieser Arbeit vorgestellten

[4] entnommen aus [12]

Weg in ihrem Unterricht erfolgreich beschritten haben, durch die Einführung des Zentralabiturs gezwungen waren, sich an die zentral vorgegebenen Bezeichnungen und Verfahren zu halten. Es sind jedoch auch Beispiele von Referendaren bekannt, die diesen punktorientierten Ansatz in den Fachseminaren kennengelernt und daraufhin erfolgreich in Unterrichtsversuchen erprobt haben. Nach diesen Unterrichtsversuchen haben die Referendare die Schüler mit den Begrifflichkeiten des klassischen Zugangs vertraut gemacht und dabei betont, dass all diese Begriffe nur verschiedene Bezeichnungen für dasselbe Objekt sind, nämlich Zahlenpaare beziehungsweise Zahlentripel. Die eigentlichen Lehrer dieser Lerngruppe konnten daraufhin ihren klassischen Zugang wie gewohnt fortsetzen. Dies setzt voraus, dass den Schülern stets bewusst gemacht wird, dass auch Punkte und Vektoren nur Veranschaulichungen derselben mathematischen Objekte sind, nämlich von Zahlenpaaren und Zahlentripeln, und dass wir in der Wahl unserer Vorstellungen und Veranschaulichungen frei sind.

Die Schüler weisen durch die erfolgreiche Bearbeitung dieser Abituraufgaben nach, dass sie die Punktmengen von Geraden, Ebenen und Kreisen angeben können, die Kalküle zur Schnittpunktberechnung beherrschen und die Abstands- und Winkelformeln anwenden können. Insbesondere die letzten beiden Tätigkeiten können ohne jegliches Verständnis der dahinterstehenden Mathematik durchgeführt werden, da es ausreichend ist, die Grundlagen der analytischen Geometrie nur so weit verstanden zu haben, dass man in der Lage ist, in der Formelsammlung die richtige Formel herauszufinden und die entsprechenden Zahlen einzusetzen. Aber auch die verbleibenden Tätigkeiten reduzieren sich auf das Aufstellen und Lösen der entsprechenden Gleichungssysteme. Es stellt sich die Frage, welcher Eindruck von Mathematik bei den Schülern verbleibt, wenn diese Aufgaben den Abschluss einer zwölf- oder dreizehnjährigen Ausbildung in Mathematik darstellen.

Diesen faden Eindruck hinterlassen nicht nur die oben abgedruckten Aufgaben. Ziehen wir auch die Aufgaben des Zentralabiturs aus den anderen Jahren hinzu, so ist zu beobachten, dass sich fast ein Drittel der Aufgaben nach Entkernung als versteckte Lageuntersuchungen der geometrischen Objekte Punkt, Gerade, Ebene und Kreis, einschließlich der Berechnung der Schnittpunkte, Schnittgeraden und Schnittkreise entpuppen. Fast ein Fünftel der Aufgaben fällt in die Kategorie Abstands- und Winkelberechnungen. Als Aufgaben mit erhöhtem Anforderungsniveau dienen häufig Aufgaben, in denen Verfahren zur Berechnung gewisser geometrischer Objekte entwickelt oder Punkte mit vorgegebenen Eigenschaften gefunden werden sollen oder in denen die Schwierigkeit der Lageuntersuchungen durch Einführung eines Scharparameters erhöht wird.

Für einen Unterricht, der in dem Sinne als *„gut“* zu bezeichnen ist, dass er die Schüler auf das Zentralabitur vorbereitet, ist es also ausreichend, die geometrischen Objekte Gerade, Ebene und Kreis einzuführen, die Abstandsformeln anzuschreiben und für jede mögliche Lageuntersuchung ein Rechenschema zu präsentieren. Dazu schreibt Freudenthal:

> *„Die Geometrie, die mit linearer Algebra auf der Schule möglich ist, ist ein trübes Abwasser. Der Höhepunkt ist etwa, zu beweisen, dass zwei verschiedene Geraden einen oder keinen Schnittpunkt haben, und dass diese Zahlen für Kreise 0, 1, 2 sind.“ (Freudenthal [17], S. 411)*

Enzensberger fügt dem hinzu:

> *„Die Analytische Geometrie wird vorwiegend als eine Sammlung von Rezepten behandelt, ebenso die Infinitesimalrechnung. Es ist so, als würde man Menschen in die Musik einführen, indem man sie jahrelang Tonleitern üben lässt. Das hat zur Folge, dass man gute Noten erzielen kann, ohne eigentlich verstanden zu haben, was man tut.“ (Enzensberger [11], S. 36)*

Es stellt sich also die Frage nach der Daseinsberechtigung der analytischen Geometrie in der Schule. Haben wir bisher die Auswahl der Unterrichtsinhalte überwiegend durch die Fachanforderungen [12] gerechtfertigt, so soll an dieser Stelle die Sinnhaftigkeit der Unterrichtsinhalte kritisch hinterfragt werden. Holland nennt in [23] folgende Aspekte der Geometrie, die für Schüler von Bedeutung sind:

1. *„Geometrie als Lehre vom Anschauungsraum,*
2. *Geometrie als Beispiel einer deduktiven Theorie,*
3. *Geometrie als Übungsfeld für Problemlösen,*
4. *Geometrie als Vorrat mathematischer Strukturen.“ (Holland [23])*

Eine Orientierung der analytischen Geometrie an Schnittproblemen der Objekte Gerade, Ebene, Kreis und Kugel lässt sich in überwiegendem Maße als Lehre des Anschauungsraumes betrachten, wodurch primär inhaltliche Kompetenzen ausgebildet werden. Zu der Lehre des Anschauungsraumes zählen jedoch auch die prozessbezogenen Kompetenzen der Kategorien *„Entdecken mathematischer Zusammenhänge“* und *„Mathematisieren von Umweltsituationen“* ([23], S. 8). Das Themenfeld der vorliegenden Abituraufgabe, die Miniaturausstellung mit dem Modell einer Talstation, Seilbahn und Gondel, erweckt auf den ersten Blick den Eindruck, als würde dort tatsächlich eine Umweltsituation mathematisiert. Doch diese Umweltsituation ist eine Farce. Zum Bearbeiten der Aufgabe werden keinerlei Modellierungskompetenzen benötigt, was aus der Aufgabe eine Aufgabe mit gerechtfertigtem Anwendungsbezug gemacht hätte. Ein Anwendungsbezug einer Aufgabe wäre aber auch dann gerechtfertigt, wenn er motivierend wirkt, was üblicherweise dann der Fall ist, wenn er aus der Erfahrungswelt der Schüler entspringt oder in irgendeiner Form als witzig empfunden wird. Ob die vorliegende Abituraufgabe dadurch spannender wird, dass die Ebene E_2 eine Ebene ist, in der die Plattform einer Gondel liegt, ist jedoch fraglich. Die Tatsache, dass die Plattform beim Einkleben verrutscht ist, klingt absurd. Deshalb wäre es an dieser Stelle ehrlicher gewesen, einfach *„berechnen Sie den Mittelpunkt und den Flächeninhalt der Schnittkreises der Ebene E_2 mit der Kugel“*

zu schreiben. Ebenso kaschiert die Formulierung *„ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R, an dem das Seil die Dachebene E_1 durchstößt“* nur die eigentliche Aufgabenstellung *„ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden $g(P, Q)$ und der Ebene E_1“*, und auch hier wäre es ehrlicher gewesen, genau diese Formulierung zu verwenden. Es ist keinem Schüler zu verübeln, wenn sich durch die Bearbeitung dieser Aufgabe der Eindruck manifestiert, dass Mathematik zu nichts zu gebrauchen sei.

Der zweite Aspekt, der Geometrie als Beispiel einer deduktiven Geometrie sieht, kommt in der üblichen Behandlung der analytischen Geometrie so gut wie gar nicht zum Tragen. Ziel der analytischen Geometrie ist es nicht, die Begriffe und Sätze auf nicht weiter reduzierbare Grundbegriffe und Axiome zu reduzieren, denn die betrachteten Objekte werden als durch die Elementargeometrie gegeben betrachtet und lediglich mit neuen Methoden *beschrieben* und dabei gegebenenfalls *präzisiert*.

Der dritte Aspekt sieht Geometrie als ein Übungsfeld für das Lösen von Problemen. Hier bietet die analytische Geometrie ein reichhaltiges Repertoire an Problemen, das schon mit geringen begrifflichen Anforderungen den Schülern zugänglich gemacht werden kann. Schon in Abschnitt 11.1.6 des Unterrichtswerkes - vor Einführung des Punktproduktes - haben wir ein weitreichendes Übungsfeld angeschnitten, in dem das mathematische Argumentieren und das Algebraisieren geometrischer Fragestellungen trainiert werden kann. Dieses Übungsfeld erschließt sich ohne große Hintergrundtheorie schon in der 6. Lernumgebung, also am Anfang des Unterrichts. Anhand der dort vorgestellten Aufgaben ist es möglich, ein Bild der Mathematik zu erzeugen, das die Mathematik nicht als eine Ansammlung von Kochrezepten darstellt, aber auch nicht als eine Disziplin zum Lösen praktischer Probleme, sondern als das, was Mathematiker mit der Mathematik verbinden. Dieses Bild wird in einem Zitat von Bertrand Russel treffend beschrieben.

> *„Mathematics [...] possesses not only truth, but supreme beauty - a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show.“ (Russel [41])*

Nimmt man das Punktprodukt als zusätzliche Verknüpfung hinzu, so ergeben sich in Abschnitt 11.2.2 weitere mathematische Spielwiesen. Ein Vorteil dieser Beweisführung mit Methoden der analytischen Geometrie besteht darin, dass sich die verwendeten Implikationen mithilfe von wenigen Rechenregeln für die neuen Verknüpfungen begründen lassen, Beweise erfolgen *„durch Rechnung“*. Diese Rechenregeln sind den Schülern strukturell teilweise schon aus der Sekundarstufe I vertraut. Eine elementargeometrische Beweisführung erfordert hingegen die Anwendung mathematischer Sätze, die erst durch einen wesentlich umfangreicheren Vorunterricht zur Verfügung gestellt werden müssen. In den geschilderten Abschnitten ist zu sehen, wie schön Algebra und Geometrie in einem Wechselspiel aus Geometriesierung und Algebraisierung zusammenarbeiten.

Im Kapitel 12 über die Geometrie des Raumes kommen keine neuen Konzepte hinzu: Ebenen übernehmen im $\mathbb{R}^3$ die Rolle der Geraden im $\mathbb{R}^2$, die zur Geraden $\mathbb{R}A$ orthogonale Gerade $\mathbb{R}A^\perp$ wird durch die zur Ebene $\mathbb{R}A + \mathbb{R}B$ orthogonale Gerade $\mathbb{R}(A \times B)$ ersetzt. Deshalb ist es ausreichend, diese Konzepte exemplarisch am Beispiel der Ebene $\mathbb{R}^2$ zu zeigen und auf deren Übertragung auf den $\mathbb{R}^3$ vollends zu verzichten. Ein Ausweg aus dem von Freudenthal und Enzensberger beschriebenen Dilemma der analytischen Geometrie könnte also darin bestehen, den Schwerpunkt der analytischen Geometrie vom monotonen Einführen weiterer Objekte mit anschließender Schnittpunktberechnung derselben hin zum mathematischen Argumentieren und Beweisen zu verlegen, womit ein schöneres Bild der Mathematik erzeugt wird, auch wenn sich die dadurch erworbenen überwiegend prozessbezogenen Kompetenzen nur schwer in einer *zentralen* Abiturprüfung abfragen lassen.

Betrachtet man die Aufgaben aus den Abschnitten 11.1.6 und 11.2.2, so basieren viele Lösungen auf den Rechengesetzen der Addition und Vervielfachung von Punkten sowie auf den Rechengesetzen des Punktproduktes. Es sind genau diese Rechengesetze, in denen sich die Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ widerspiegelt und die die Zahlenpaare und Zahlentripel zu dem machen, was sie sind: Elemente eines Vektorraumes und damit Vektoren. Und genau dies ist der zentrale Charakter der analytischen Geometrie, und nicht die Vorstellung, dass Vektoren Äquivalenzklassen von Pfeilen sind. Der in dieser Arbeit vorgestellte Zugang zur analytischen Geometrie bietet eine geeignete Veranschaulichung der mathematischen Struktur eines euklidischen Vektorraumes, wodurch der vierte Aspekt Hollands zum Tragen kommt. Eine Abkehr von der Untersuchung der Lage dreidimensionaler Objekte hin zur stärkeren Fokussierung der Algebraisierung zweidimensionaler Probleme kann die analytische Geometrie aus ihrem trüben Abwasser befreien und die Schüler dazu befähigen, mathematisch zu wirken anstatt lediglich Kochrezepte abzuarbeiten.

Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen (einschließlich elektronischer Quellen, dem Internet und mündlicher Kommunikation) direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind ausnahmslos unter genauer Quellenangabe als solche kenntlich gemacht. Insbesondere habe ich nicht die Hilfe sogenannter Promotionsberaterinnen / Promotionsberater in Anspruch genommen. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar Geld oder geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Johannes Blauert

Dank

Großer Dank gilt *meinen Eltern* für ihre unendliche Geduld, die moralische und orthographische Unterstützung und die mir entgegengebrachte Liebe. Ich bedanke mich aufrichtig bei *Hinrich Lorenzen*, der mich bei der Erstellung der Arbeit intensiv betreut hat und stets ein offenes Ohr für meine Fragen hatte. Ich bedanke mich bei *Michael Schmitz* für viele bereichernde Gespräche, Anregungen und Korrekturen und für seine Freundschaft. Ich bedanke mich bei *Uwe Leck* für die intensive Betreuung bei Fragen zur extremalen Mengentheorie. Ich danke abschließend der gesamten *Abteilung für Mathematik und ihre Didaktik* am Institut für mathematische, naturwissenschaftliche und technische Bildung der Universität Flensburg für die positive und stets bereichernde Arbeitsatmosphäre.

Literatur

[1] Christian Bär. Elementare Differentialgeometrie. de Gruyter Lehrbuch, 2000.

[2] Heinz Bauer. Mass- und Integrationstheorie. de Gruyter, 1992.

[3] Manfred Baum u. a. Lambacher Schweizer - Mathematik für Gymnasien - G9. Ernst Klett Verlag, 2015.

[4] Anton Bigalke und Norbert Köhler. Mathematik - Band 2 - Analytische Geometrie/ Stochastik. Cornelsen, 2011.

[5] G. Birkhoff und E. Keyszig. „The Stablishment of Funtional Analysis". In: *Historia Mathematica* Vol. 11(3) (1984), S. 258–321.

[6] P. Borneleit u. a. „Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe". In: *Journal für Mathematik-Didaktik* Vol. 22 (2001), S. 73–90.

[7] Dieter Brandt und Günther Reinelt. Lambacher Schweizer - Mathematik für Gymnasien - Gesamtband Oberstufe mit CAS - Ausgabe B. Ernst Klett Verlag, 2007.

[8] René Descartes (hrsg. von Christian Wohlers). Discours de la méthode. Philosophische Bibliothek, 624, 2011.

[9] Jean Dieudonné. Algèbre linéaire et géometrie élémentaire. Hermann, 115, 1964.

[10] Jean Dieudonné. „Winkel, Trigonometrie, komplexe Zahlen". In: *Der Mathematikunterricht MU* 12 (1) (1966), S. 5–16.

[11] Hans Magnus Enzensberger. „Zugbrücke ausser Betrieb". In: *FAZ* (1998).

[12] Fachanforderungen Mathematik, Allgemeinbildende Schulen, Sekundarstufe I, Sekundarstufe II. Schleswig-Holstein, Ministerium für Schule und Berufsbildung, 2014.

[13] Andreas Filler. Lineare Algebra - Linearisieren und Koordinatisieren. Spektrum, 2011.

[14] Gerd Fischer. Lernbuch Lineare Algebra und analytische Geometrie. Springer, 2012.

[15] Gerd Fischer. LINEARE ALGEBRA - EINE EINFÜHRUNG FÜR STUDIENANFÄNGER. Springer Spektrum, 2014.

[16] Marianne Franke. DIDAKTIK DER GEOMETRIE IN DER GRUNDSCHULE. Spektrum Akademischer Verlag, 2011.

[17] Hans Freudenthal. MATHEMATIK ALS PÄDAGOGISCHE AUFGABE, BD. 2. Klett, 1973.

[18] Hans Freudigmann u. a. LAMBACHER SCHWEIZER - MATHEMATIK FÜR GYMNASIEN - LEISTUNGSKURS - RHEINLAND-PFALZ. Ernst Klett Verlag, 2011.

[19] Heinz Griesel, Anreas Gundlach und Friedrich Suhr Helmut Postel. ELEMENTE DER MATHEMATIK 11/12 (NIEDERSACHSEN). Schroedel, 2009.

[20] Harro Häuser. FUNKTIONALANALYSIS: THEORIE UND ANWENDUNGEN. Teubner, 2006.

[21] Hans-Wolfgang Henn und Andreas Filler. DIDAKTIK DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE UND LINEAREN ALGEBRA. Springer, 2015.

[22] David Hilbert. GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE. B. G. Teubner, 1903.

[23] Gerhard Holland. GEOMETRIE IN DER SEKUNDARSTUFE. BI Winnenschaftsverlag, 1988.

[24] Stefan-Harald Kaufmann. „DIE BEDEUTUNG DES PARAMETERBEGRIFFS FÜR DEN MATHEMATIKUNTERRICHT – WISSENSCHAFTSORIENTIERTES ÜBEL ODER DIDAKTISCHE NOTWENDIGKEIT?“ In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* Vol. 133 (2009), S. 687–691.

[25] Maria Koth. „VEKTORBEWEISE IN DER DREIECKSGEOMETRIE“. In: *Mathematik Lehren* Vol. 133 (2005), S. 44–49.

[26] Kazimierz Kuratowski. SUR LA NOTION DE L'ORDERE DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES. Bd. Vol. II. Teubner Archiv zur Mathematik, 1921, S. 171.

[27] René Descartes (übersetzt von L. Gäbe). DISCOURS DE LA MÉTHODE - VON DER METHODE DES RICHTIGEN VERNUNFTSGEBRAUCHS UND DER WISSENSCHAFTLICHEN FORSCHUNG. Felix Meiner Verlag Hamburg, 1960.

[28] Hinrich Lorenzen. ZUR DIDAKTIK DES BEGRIFFLICHEN DENKENS IN DER GEOMETRIEAUSBILDUNG - HABILITATIONSSCHRIFT. Erzieungswissenschaftliche Fakultät Kiel, 2002.

[29] Hinrich Lorenzen. „ZUR DISKUSSION GESTELLT: ANALYTISCHE GEOMETRIE - SCHLICHT UND NATÜRLICH“. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* Vol. 55, No. 4 (2002), S. 231–233.

[30] G. Malle. „NEUE WEGE IN DER VEKTORGEOMETRIE“. In: *Mathematik Lehren* Vol. 133 (2005), S. 8–15.

[31] G. Malle. „SCHWIERIGKEITEN MIT VEKTOREN“. In: *Mathematik Lehren* Vol. 133 (2005), S. 16–19.

[32] G. Malle. „Von Koordinaten zu Vektoren“. In: *Mathematik Lehren* Vol. 133 (2005), S. 4–7.

[33] Günther Malle. Didaktische Probleme mit der Elementaren Algebra. Vieweg, 1993.

[34] Michael Meyer und Susanne Prediger. „Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen“. In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 51(30) (2009), S. 1–7.

[35] Friedhelm Padberg, Rainer Dankwerts und Matin Stein. Zahlbereiche. Spektrum Akademischer Verlag, 1995.

[36] Anja Panse und Walther Paravicini. „Leseverhalten und Rationalität von Studienanfängerinnen und -anfängern“. In: (noch nicht veröffentlicht (2016)).

[37] G. Peano. Calcolo geometrico secondo l' Ausdehnungslehre di H. Grassmann. 1888.

[38] Günter Pickert. „Elementare geometrische Einführung der trigonometrischen Funktionen“. In: *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte* Band XII (1965), S. 87–109.

[39] Walter J. Pilsak und Waldsassen. „Himmelskreuz“ - Kondensstreifen. `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kondensstreifen-1.jpg`. 2003.

[40] Wolfgang Rautenberg. Reelle Zahlen in elementarer Darstellung. Klett Studienbücher, 1979.

[41] Bertrand Russel. A History of Western Philosophy. George Allen Ltd, 1946.

[42] Bertrand Russel. Einführung in die mathematische Philosophie. Felix Meiner Verlag, 2002.

[43] Schriftliche Abiturprüfung 2016 - Kernfach Mathematik. Ministerium für Schule und Berufbildung Schleswig-Holstein, 2016.

[44] Robert Storz. Mathematik differenziert und individualisiert unterrichten. Aulis Verlag, 2014.

[45] U. P. Tietze, M. Klika und H. Wolpers. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II - Band 2 - Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Vieweg, 2000.

[46] Deutsche Mathematiker Vereinigung. „Denkschrift zum Mathematikunterricht an Gymnasien“. In: (1976).

[47] Waaboi9l. Ausstreichen des Teigs auf der heissen Crêpière. `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39771034`. 2016.

[48] Heinrich Martin Weber und Richard Dedekind. Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Cambridge Library Collection, 1879.

[49] Dirk Werner. Funktionalanalysis. Springer, 2007.

[50] Heinrich Winter. „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung“. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* Vol. 61 (1995), S. 37–46.

[51] Heinrich Winter. „Zur problematik des Beweisbedürfnisses“. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 4(1) (1983), S. 59–95.

[52] Erich Christian Wittmann. „Designs und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik“. In: *Beiträge zur Lehrerbildung* 16 (3) (1998), S. 329–342.

[53] Gerald Wittmann. „Ellipse, Hyperbel, Parabel - Koordinatengeometrie ohne Vektoren“. In: *Mathematik Lehren* Vol. 133 (2005), S. 50–60.

[54] Bernd Wollring. „Raum- und Formvorstellung“. In: *Mathematik differnziert* (2011), S. 9–11.

[55] Friedrich Zech. Grundkurs Mathematikdidaktik. BELTZ, 1996.

[56] Luzia Zöttl. Modellierungskompetenz fördern mit heuristischen Lösungsbeispielen. Franzenbecker, 2010, 21f.