

FACHDIDAKTISCHE DISKUSSIONEN ZUR
ALGEBRA, ZAHLENTHEORIE,
GRAPHENTHEORIE UND GEOMETRIE
FÜR SCHULE UND UNIVERSITÄT

von Malte Wellnitz
Universität Flensburg

Januar 2013

Danksagung

Zahlreichen Menschen habe ich auf ganz unterschiedliche Weise sehr viel zu verdanken. Unter denjenigen, die mich auf meinem mathematischen Lebensweg begleitet haben (und es weiterhin tun, wie ich hoffe), möchte ich zwei hervorheben:

Rudolf Schnabel bin ich im Herbst 1991 bereits am ersten Tag meines Mathematikstudiums an der Universität Kiel begegnet. Er hielt damals zwei Semester lang die Anfängervorlesungen zur Linearen Algebra und hat mich nicht nur im Grundstudium mathematisch wie persönlich inspiriert. Sein mathematischer Stil und insbesondere seine Ambition, auch elementare mathematische Stoffe ernst zu nehmen und sie durch eine Neubetrachtung in eine logisch einwandfreie und elegante Theorie zu überführen, wurden für mich zu einem (unerreichten) Vorbild. In zahlreichen konspirativen Gesprächen hat er auch nach meinem Studium mein Interesse an ganz unterschiedlichen mathematischen Themen geweckt, mich durch sein vielseitiges Wissen und seine intellektuelle Brillanz beeindruckt und mich nebenbei mit hunderten von mathematischen Aufgaben auf Trab gehalten. Er hat mir auch persönlich in mancher Krise meines Lebens zur Seite gestanden. Ich bin ihm zu großem Dank verpflichtet.

Hinrich Lorenzen bin ich ebenfalls erstmals während meines Studiums begegnet, als er eine Übungsgruppe zur Zahlentheorie leitete, an der ich teilnahm. Nach dem Studium habe ich als Lehrer zahlreiche mathematische Fortbildungsveranstaltungen besucht, die er organisierte – mittlerweile in der Funktion eines Studienleiters am Kronshagener Aus- und Fortbildungsseminar für Lehrer. Diese Veranstaltungen waren für mich stets ermutigende Erlebnisse und haben mir wertvolle Anregungen im Hinblick auf Mathematikunterricht gegeben. In ähnlicher Weise hat Hinrich Lorenzen mich auch durch seine zahlreichen Veranstaltungen im Rahmen der schleswig-holsteinischen Mathematik-Olympiade inspiriert. Seit April 2010 ist er nun Mathematikprofessor an der Flensburger Universität, und seit dem Oktober desselben Jahres habe ich das Privileg, dort einer seiner wissenschaftlichen Mitarbeiter zu sein. Ich danke ihm besonders für die unkomplizierte und vertrauensvolle Betreuung meiner Dissertation und die herzliche Art, durch die er meinen Kollegen und mir an der Universität Flensburg einen äußerst angenehmen Arbeitsplatz schafft.

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG	1
KAPITEL 1: ALGEBRA	9
ERSTE ABTEILUNG: THEORIE	9
ABSCHNITT A: DIE AXIOMATISCHE GRUNDLAGE	11
Das Axiomensystem des reellen Zahlkörpers	11
Das Wesen der axiomatischen Methode	16
Weitere Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen	18
ABSCHNITT B: DIDAKTISCHE BARRIEREN	19
Variablen, Konstanten und Terme	20
Aussagen, Aussageformen, Quantoren	22
Äquivalenzumformungen	25
Die Probe und der Mythos der Wurzelgleichung	31
Die p-q-Formel für quadratische Gleichungen	34
Ungleichungen	37
ABSCHNITT C: ERWEITERUNGEN DER SCHULALGEBRA	39
Summenformeln	39
Mittelwert-Ungleichungen	44
ZWEITE ABTEILUNG: AUFGABEN	46
Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme	46
Aufgaben zu Summenformeln	59
Aufgaben zu Mittelwertungleichungen	68

KAPITEL 2: ZAHLENTHEORIE 75

ERSTE ABTEILUNG: THEORIE	75
Teilbarkeit	75
ggT und kgV	77
Primpotenzzzerlegung	82
Kongruenzen	86
Diophantische Gleichungen	89
ZWEITE ABTEILUNG: AUFGABEN	94
Die Ausgangslage: Zahlentheorie in der Schule	94
Teilbarkeit bis zum Euklidischen Hauptsatz	97
Primpotenzzzerlegung, ggT und kgV	104
Kongruenzen	115
Diophantische Gleichungen	123

KAPITEL 3: GRAPHENTHEORIE 129

ERSTE ABTEILUNG: THEORIE	130
Grundbegriffe	130
Zusammenhang und Verbindbarkeit	134
Komplementäre und selbstkomplementäre Graphen	142
Brücken, Nicht-Brücken und die Kreiszahl	147
Wälder und Bäume	153
Kreise	156
Wege	160
Bipartite Graphen und Färbungen	164
Eulertouren, Zykel und Hamiltonkreise	168
Planarität und die Eulerformel	174
ZWEITE ABTEILUNG: AUFGABEN	182
Eulertouren und Hamiltonkreise	182
Die Grundlagen der graphentheoretischen Sprache	193
Isomorphie von Graphen, Eckengradtupel	196
Planarität und die Eulerformel	206
Modellierung durch Graphen	212
Echte Modellierungsaufgaben	213
Modellierung als Visualisierung	227

KAPITEL 4: GEOMETRIE 239

ERSTE ABTEILUNG: THEORIE 239

ABSCHNITT A: ABSTRAKTE GEOMETRIE 244

Grundbegriffe	244
Mittellot- und Parallelogrammregel, Mittelparallelsatz . . .	247
Diagonalsatz, Mittellotprinzip, Satz des Thales	250
Das Haus der Vierecke	251
Kreise	254
Punktspiegelung und Geradenspiegelung	255
Symmetrische n-Ecke	257
Winkelhalbierende	259
Höhen und Seitenhalbierende im Dreieck	262
Umkreis-Höhen-Satz und Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz .	264
Der Feuerbachkreis	269

ABSCHNITT B: REELLE GEOMETRIE MIT LÄNGENMASS 271

Von der Abstandsfunktion zum Längenmaß	271
Weitere metrische Grundtatsachen und die Lot-Ungleichung .	272
Weitere Eigenschaften von Spiegelungen	273
Parallelprojektion und Strahlensatz	276
Zwischentreue der Parallelprojektion, Axiom von Pasch	280
Der zweite Strahlensatz, Umkehrung der Strahlensätze	281
Die Sätze von Menelaos und Ceva	283
Der Winkelhalbierendensatz des Apollonius	285
Der Satz des Pythagoras	289
Der Antipythagoras	291
Höhenformel und Heronische Flächenformel	295
Vier-Punkte-Formel, Seiten- und Winkelhalbierendenformel . .	298
Formeln für Umkreis- und Inkreisradius	300
Parallelogrammformel, Sehnen-Sekanten-Satz	302
Regelmäßige n-Ecke	305

ABSCHNITT C: REELLE GEOMETRIE MIT WINKELMASS	307
Einführung des Winkelmaßes	308
Basiswinkelsatz, Winkelsumme im Dreieck, Nebenwinkel	309
Winkel in Vierecken	312
Sinus und Cosinus	318
Realisierung von Winkelmaßen und Winkelabtragung	321
Sinussatz, Projektionssatz, Cosinussatz	323
Kongruenzsätze für Dreiecke	326
Ähnlichkeit und Verhältnisgleichheit	327
Additionstheoreme für Sinus und Cosinus	328
Der Peripheriewinkelsatz und Sätze über Sehnenvierecke	330
ZWEITE ABTEILUNG: AUFGABEN	338
Zur abstrakten Geometrie	340
Zu den Grundlagen der Längenrechnung bis zum Strahlensatz	353
Zum Satz des Pythagoras und zu weiteren Längenformeln	362
Zur elementaren Winkellehre	372
Zur Trigonometrie	379
QUELLENNACHWEIS DER VERWENDETEN AUFGABEN	392
LITERATURVERZEICHNIS	396
SCHEMA DES GEOMETRISCHEN THEORIEGEBÄUDES	398

- Wer bist denn du? fragte Robert.
Der Mann schrie ihn überraschend laut an:
– Ich bin der Zahlenteufel!
Aber Robert hatte keine Lust, sich von einem solchen Zwerg etwas gefallen zu lassen.
– Erstens, sagte er, gibt es gar keinen Zahlenteufel.
– So? Warum redest du dann mit mir, wenn es mich überhaupt nicht gibt?
– Und zweitens hasse ich alles, was mit Mathematik zu tun hat.
– Warum denn das?
– „Wenn zwei Bäcker in sechs Stunden 444 Brezeln backen, wie lange brauchen dann fünf Bäcker, um 88 Brezeln zu backen?“ – So ein Blödsinn, schimpfte Robert weiter. Eine idiotische Art, die Zeit totzuschlagen. Also verschwinde! Hau ab!
Der Zahlenteufel sprang elegant von seinem Sauerampferblatt herunter und setzte sich zu Robert, der sich aus Protest im baumhohen Gras niedergelassen hatte.
– Woher hast du denn diese Brezelgeschichte? Wahrscheinlich aus der Schule.
– Woher denn sonst, sagte Robert.

(*Der Zahlenteufel, Hans Magnus Enzensberger*)

Einleitung

Der Schriftsteller Hans Magnus Enzensberger ist ein großer Freund der Mathematik – für einen Außenstehenden eine ungewöhnliche Haltung. In seinem charmanten Essay *Zugbrücke außer Betrieb – Die Mathematik im Jenseits der Kultur* untersucht er, warum die meisten seiner Zeitgenossen ein so unterkühltes, nicht selten gar vergiftetes Verhältnis zur Mathematik pflegen: Desinteresse, Ängstlichkeit und Verachtung stehen im Raum und sind an dieser Stelle sogar gesellschaftlich akzeptiert. Selbstverständlich betrachtet Enzensberger bei seinen Überlegungen auch die Schule, die ja für viele die einzige Stätte der Begegnung mit der Mathematik bleibt und daher ein natürlicher Verdächtiger ist, wenn es darum geht, den Verursacher für das schlechte Außenbild der Mathematik ausfindig zu machen. Enzensberger klagt, dass die Schule unserer Tage ihren mathematischen Bildungsauftrag auf reichlich antiquierte Weise – nämlich technisch – interpretiert, als ginge es wie zu Zeiten der Industrialisierung noch immer darum, dem Arbeitsmarkt in großer Zahl ergebene Arbeitskräfte zur Verfügung zu stellen, die sich neben grundlegenden Fertigkeiten im Lesen und

Schreiben eben auch das Rechnen notdürftig angeeignet haben, um den grundlegenden technologischen Anforderungen des Alltags und des Berufs gewachsen zu sein. Dieser Rechenunterricht aber langweilt mit öden Routinen, deren Sinn sich hinter kaum verstandenen Formalismen versteckt, und unterfordert die Kreativität der Schüler durch schematische Aufgaben, die sich vor allem durch ihre hundertfache Reproduzierbarkeit dem bürokratischen Lehrplanregiment andienen und dem Gleichschritt aus Imitation, Üben und Klassenarbeit nichts Störendes entgegensetzen.

Immerhin räumt auch Enzensberger ein, dass das Rechnen und das dazugehörige Üben ihren Platz in der Schule zu Recht innehaben – das technologische Motiv der Mathematik und der Wissenschaft überhaupt ist uralte und gilt heute nicht weniger als in der prähistorischen Frühzeit des Menschen. Bestürzend ist allerdings, dass für eher kulturell und erkenntnistheoretisch orientierte Motive in der Schule kein Raum zu bleiben scheint, für das also, was manche die *eigentliche* Mathematik nennen. Die Schönheit einer mathematischen Idee, die Kraft eines mathematischen Gedankens, das Selbstgestalten einer mathematischen Überlegung, die Stärkung des Selbstbewusstseins und die Freude, ein Problem allein durch Denken aus eigener Kraft gelöst zu haben – dies alles gilt offenbar als nicht schultauglich: zu kompliziert; oder dem Praktischen zu sehr entrückt; oder ungeeignet für die Serienherstellung von Aufgaben. Dabei liegt doch hier für den Schüler *als Individuum* das eigentliche Potential des mathematischen Unterrichts. Bedauerlicherweise wendet sich die Angelegenheit in den höheren Klassen nicht zum Besseren. Sogar dort, wo man sich doch am ehesten über die Mühsal bloßen Rechnens erheben und einige Schritte in Richtung *eigentlicher* Mathematik machen könnte, lässt man sich ohne Not am Gängelband halbverstandener Rechenrezepte führen, die vor allem dazu taugen, nach außen hin zu demonstrieren, wie weit die Schule doch in die Tiefe der Wissenschaft vordringt. Die Differentialrechnung quält die Schüler mit ihren mächtigen, aber nicht bildungsproduktiven Kalkülen; die Analytische Geometrie verdammt sie durch teils monströs fabrizierte Aufgaben zu trostlosen Rechnungen; und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sieht die höhere Schule ihren Auftrag erst dann erfüllt, wenn binomialverteilte Wahrscheinlichkeiten virtuos durch die Normalverteilung approximiert sind. Es verwundert nicht, dass die hier so gequälten Schüler für immer auf Distanz zur Mathematik gehen.

Es ist bestimmt auch kein Zufall, dass die Aufgaben der Deutschen Mathematik-Olympiaden, denen sicher niemand mit dem Vorwurf der Banalität entgegenzutreten wird, auch in höheren Klassen auf „höhere“ Mathematik vollständig

verzichten. Wie sollten solche Aufgaben denn auch aussehen? Ließe man Extremstellen irgendwelcher Funktionen berechnen, so würden die Schüler auf die ausgetretenen Pfade ihrer Rezeptmathematik gedrängt, was der Mathematik-Olympiade sicher unwürdig wäre; und wollte man diese Pfade verlassen und tatsächlich originelle Aufgaben zur Differentialrechnung stellen, so stünde den Teilnehmern der Olympiade eine ungemütliche Begegnung mit dem Grenzwertbegriff bevor, von dem sie unweigerlich – und unverschuldet – überfordert wären.

Damit nähern wir uns einem zentralen Anliegen dieser Arbeit: Mathematische Bildung jenseits des Rechnens gelingt am ehesten in der Begegnung mit *einfachen* Gegenständen. Natürlich ist nicht vollständig klar, was *einfach* hier genau bedeutet. Es gibt aber gewisse Tendenzen: Zunächst einmal sind endliche Mengen sicherlich zugänglicher als unendliche, und diskret verteilte Gegenstände sind handhabbarer als kontinuierlich verteilte. In dieser Hinsicht ist beispielsweise die Graphentheorie didaktisch attraktiv; einen Graphen mit ein paar Ecken und einigen Kanten erfasst man leichter als zwei einander schneidende Ebenen in den Weiten des \mathbb{R}^3 , und in der Zahlentheorie bilden die Vielfachen einer natürlichen Zahl zwar eine unendliche Menge, sind aber immerhin diskret verteilt.

Ein zweites Kriterium ist die Existenz eines dichten Netzes von elementaren Sätzen, die eine Vielzahl von reichhaltigen Aufgaben ermöglichen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beispielsweise sieht hier nicht besonders gut aus: Abgesehen von den Pfadregeln bei mehrstufigen Zufallsversuchen und dem Rückgriff auf elementare Ergebnisse der Kombinatorik gibt es in diesem Teilgebiet der Mathematik nicht allzu viele einfache Sätze, die den mathematischen Werkzeugkasten eines Schülers füllen könnten und diesem selbstständiges mathematisches Tun ermöglichen würden. Bezüglich unseres zweiten Kriteriums belegen vielmehr Zahlentheorie und Geometrie vordere Ränge: Die Zahlentheorie liefert in großer Menge elementare Sätze zur Teilbarkeit, die ein Schüler vollständig verstehen kann und die ihn bereits in die Lage versetzen, interessante Aufgaben anzugehen. Anders als in der Differentialrechnung ist der Schüler hier nicht dazu verdonnert, immer wieder auf einige wenige Instrumente zurückzugreifen, die trotz häufiger Anwendung ihren kryptischen Charakter nicht verlieren. Auch die Geometrie schneidet in dieser Disziplin gut ab: Es gibt erstaunlich viele schlichte und doch nahrhafte Sätze zu elementaren geometrischen Begriffen wie etwa *senkrecht*, *parallel* und *gleich lang*. Diese versorgen Lehrer und Schüler mit Anregungen für Hunderte von Aufgaben, und trotz der

Einfachheit der Sätze wird bereits echtes und selbstständiges mathematisches Handeln auf Schülerseite bewirkt.

Wir nennen noch ein drittes Kriterium, das zum didaktischen Wert einer mathematischen Teildisziplin beitragen kann. Es geht hier um die Beziehung zwischen Anschauung und Begriff: Zunächst einmal ist unbestritten, dass insbesondere in den unteren Klassen die Veranschaulichung mathematischer Gegenstände und Phänomene von großer Bedeutung ist. Im Hinblick auf die mathematische Reifung der Schüler ist es aber auch wichtig, in höheren Klassen dem anschaulichen Zugang einen begrifflichen Zugang gegenüberzustellen und damit die historische Genese der Mathematik von einem rein praktischen Unternehmen zu einer formal-logischen Wissenschaft zumindest ansatzweise nachzuvollziehen. Das ist natürlich ein schwieriges Unterfangen, und allenthalben drohen Gefahren, zum Beispiel dann, wenn die Begriffe so kompliziert sind, dass keine einfache Anschauung mehr zur Verfügung steht, oder wenn die Entfernung zwischen Anschauung und Begriff so groß wird, dass der Brückenschlag zu mühsam wird. Aus dem letztgenannten Grund ist die in der Schule praktizierte Infinitesimalrechnung ein schwieriges Terrain – die Konvergenz einer Folge oder einer Funktion ist zwar leicht zu veranschaulichen, doch ist der Grenzwertbegriff ziemlich kompliziert, so dass die Anschauung zu weit von dem Begriff entfernt ist, um dem Schüler im Umgang mit diesem wirkungsvoll zu helfen.

Welche mathematischen Gebiete bieten sich aber im Hinblick auf unser drittes Kriterium an? Wir schlagen wiederum Graphentheorie und Geometrie vor. Ein Graph ist leicht zu veranschaulichen; gegenüber Schülern wird man die erste Begegnung mit einem Graphen auch sicherlich über die Anschauung organisieren. Um allerdings eine ernsthafte Theorie aufzubauen, muss der *Begriff* eines Graphen her, und hier zeigt sich eine *angemessene* Spannung zwischen Anschauung und Begriff: Die Spannung ist groß genug, um das Verschiedensein von Anschauung und Begriff klar herauszuarbeiten, so dass dem Schüler ein echter Einblick in typisches mathematisches Denken ermöglicht wird; gleichzeitig ist die Distanz zwischen Begriff und Anschauung nicht derartig groß, dass die Anschauung als Unterfütterung des begrifflichen Denkens nicht mehr taugen würde. Die Anschauung ist damit als Anregung induktiven Denkens nutzbar, und die derart gewonnenen Vermutungen können mit überschaubarem Aufwand in die Welt der Begriffe übersetzt werden. Das gilt auch für andere, weiterführende Begriffe der Graphentheorie, etwa für die Definition des *Zusammenhangs* von Graphen.

Nun spielt die Graphentheorie in unseren Schulen zugegebenermaßen keine Rolle. Die Geometrie hingegen, die das Neben- und Miteinander von Anschauung und Begriff mindestens ebenso gut illustriert wie die Graphentheorie, ist ja geradezu der Ursprung europäischen Mathematikunterrichts. In wohl keiner anderen mathematischen Disziplin ist die Anschauung so naheliegend wie hier, und der Schulunterricht macht davon zu Recht ausgiebig Gebrauch. Parallel dazu gibt es spätestens seit den Tagen Euklids das Streben nach einem begrifflichen Aufbau der geometrischen Theorie, und die Schule kann ihre Schützlinge in angemessener Dosierung mit begrifflicher Mathematik konfrontieren. Das kann durchaus *lokal*, also nur stellenweise, geschehen. Ein sehr schlichtes und doch eindrückliches Beispiel ist der Kreis: Jedes Kind trägt eine klare Anschauung von Kreisen in sich, und fragt man es danach, was ein Kreis eigentlich *ist*, so wird man sehr wahrscheinlich die Vokabel *rund* zu hören bekommen, was ja auch nicht unvernünftig ist. Wenn wir jedoch den Begriff des Kreises definieren, so wird seine Rundheit dort gar nicht erwähnt, und die Definition handelt zu einem guten Teil von einem Punkt, den das Kind gerade nicht sieht, nämlich dem Mittelpunkt des Kreises (man beachte unseren Aufruf zum Eliminieren von Kreisen auf Seite 346).

Diese Arbeit wird sich also exemplarisch einigen mathematischen Disziplinen widmen, die mathematischer Bildung besonders dienlich sind oder sein könnten. Neben den bereits erwähnten Gebieten – Zahlentheorie, Graphentheorie und Geometrie – werden wir dabei auch die elementare Algebra betrachten. Diese spielt im Mathematikunterricht unserer Schulen eine so dominante Rolle und löst dort dennoch nicht besonders viele Erweckungserlebnisse aus. Wer angehenden Abiturienten unserer Tage beim Lösen von Gleichungen über die Schulter schaut, weiß, wovon die Rede ist. Unabhängig vom konkreten Erfolg hinsichtlich der Lösungen ist dabei vor allem das inhaltliche Unverständnis gegenüber dem formalen *Procedere* bemerkenswert. Im Kapitel zur Algebra werden wir uns daher darum bemühen, einigen dieser Schwierigkeiten auf den Grund zu gehen.

Soweit es also die Gegenstände der vor uns liegenden Untersuchungen betrifft, werden wir der Schule meist nahe sein. Parallel zu unserem didaktischen Anliegen werden wir jedoch die ausgewählten Gebiete der Mathematik auch aus der Perspektive der Universität betrachten. Wir nehmen uns also vor, jeweils auch eine echte *Theorie* anzubieten, die wissenschaftlichen Ansprüchen moderner Mathematik genügt. Diese Arbeit richtet sich insbesondere an Lehrer der Mathematik, und die Gegenüberstellung von didaktischen und wissenschaftlichen

Überlegungen ist daher unter anderem ein Ausdruck unseres Verständnisses von der Rolle eines Lehrers: Auch wenn von ihm in der Öffentlichkeit vor allem erwartet wird, dass er seinen Schülern nahe ist, sie versteht, auf ihre Vorstellungen eingeht und ihnen Mathematik in ihrer Sprache „beibringt“, verlangt unsere Kultur doch ebenso nachdrücklich, dass der Lehrer mit seiner Wissenschaft als solcher vertraut ist und sich ihr auch jenseits aller Klassenzimmer mit vollem Ernst widmet.

Die Struktur der vorliegenden Arbeit ist damit schnell erklärt: Jedem der vier Gebiete Algebra, Zahlentheorie, Graphentheorie und Geometrie ist ein Kapitel gewidmet, und jedes dieser Kapitel gliedert sich in einen Teil zur wissenschaftlichen Theorie und einen weiteren Teil zur didaktischen Praxis. Im wissenschaftlichen Teil werden wir uns allerdings darauf beschränken, jeweils die Anfangsgründe dieser Gebiete theoretisch abzusichern. Dabei gilt die Maxime, dass es nicht so sehr darauf ankommt, spektakuläre Sätze zu beweisen, sondern vielmehr darauf, auch einfache Ergebnisse in eine logisch und begrifflich einwandfreie Theorie einzubetten. Es zählen also nicht so sehr die Ergebnisse selbst, sondern vor allem die Wege, auf denen sie angesteuert werden. Im jeweiligen Praxisteil werden allgemeine didaktische Überlegungen angestellt, aber auch passende Aufgaben präsentiert, die dann besprochen und didaktisch kommentiert werden. Zusätzlich gibt es abschnittsweise kleinere Kataloge mit weiteren Aufgaben. Die Aufgaben stammen meist aus mathematischen Wettbewerben, in manch anderen Fällen aber auch vom Verfasser dieser Arbeit. Im Anhang wird ab Seite 392 die Herkunft der Aufgaben so gut wie möglich dokumentiert.

Obwohl alle vier Kapitel der Grundidee folgen, nacheinander die Perspektiven von Hochschule und Schule einzunehmen, gibt es doch markante Unterschiede zwischen ihnen, und zwar besonders in der Gestaltung des theoretischen Teils. Im Kapitel zur Algebra wird beispielsweise gar keine geschlossene Theorie angeboten. Stattdessen dominiert dort von Anfang an das Anliegen, einige grundlegende didaktische Probleme der elementaren Algebra zu beschreiben und Überlegungen zu deren Bewältigung anzustellen. Der Anspruch des Theorieteils beschränkt sich dort also auf das Vorhaben, algebraische Kapriolen der Schule durch einen klärenden Blick auf den schlichten wissenschaftlichen Kern der jeweiligen Angelegenheit offenzulegen und abzustellen. Dies betrifft vor allem den Umgang mit Variablen und Äquivalenzumformungen von Gleichungen und Gleichungssystemen.

Das Kapitel zur Zahlentheorie hingegen bietet durchaus eine geschlossene Theorie. Diese ist allerdings eher unspektakulär und folgt im Wesentlichen den

Traditionen der Literatur. Der didaktisch orientierte Praxisteil zeichnet sich hier dadurch aus, dass er explizite heuristische Strategien bereitstellt, die sich zum Lösen von zahlentheoretischen Aufgaben eignen. In besonders nachdrücklicher Weise soll dadurch der induktive, heuristische Aspekt mathematischer Aktivität betont werden, der mehr der Erfahrung und der Intuition als der Logik oder dem Formalismus verpflichtet ist. Wir bewegen uns hier im Fahrwasser des Altmeisters George Pólya, der in seiner berühmten *Schule des Denkens* ja ebenfalls der Frage nachgeht, wie ein Lehrer seinem Schüler beim Lösen von mathematischen Problemen zur Seite stehen kann, indem er dessen Denken durch heuristische Impulse zu strukturieren hilft.

Das Kapitel zur Graphentheorie liefert ebenso eine solide theoretische Basis. Im Gegensatz zu unserem zahlentheoretischen Kapitel gibt es hier einige markante Abweichungen von der Tradition. Dies gilt insbesondere für den Grundbegriff des Graphen selbst, aber auch für unser gesamtes Anliegen, grundsätzlich möglichst statische und globale Begriffsbildungen zu wählen, die tupelfreie und pünktchenfreie Beweise erlauben. Wir werden dies an Ort und Stelle besprechen. Wir führen den theoretischen Aufbau dort allerdings nicht sehr weit aus und erlauben uns an dessen Rändern, zentrale Ergebnisse der klassischen Graphentheorie ohne Beweis vorzustellen und zu erläutern (etwa beim Thema Planarität oder bei der Färbungstheorie).

Das letzte Kapitel zur euklidischen Geometrie der Ebene setzt die Leitidee dieser Arbeit besonders konsequent um: Es ist stofflich elementar, der Schule sehr nahe und zugleich in seinem theoretischen Teil eine begriffliche Grundlegung der Schulgeometrie, die wissenschaftlichen Ansprüchen der Hochschule standhält. Bekanntlich ist ein solches Vorhaben trotz der Schlichtheit des Stoffes durchaus anspruchsvoll. Immerhin werden auch solche Sätze lupenrein formuliert und bewiesen, die in der Literatur – und nicht nur in Schulbüchern! – kaum jemals auf ein solides begriffliches Fundament gestellt worden sind. Das gilt beispielsweise für die gesamte Winkellehre und die sich anschließende Trigonometrie. Damit eignet sich dieses Kapitel in besonderer Weise auch für die Ausbildung an der Universität.

Von wem auch immer diese Arbeit verwendet werden mag – von Lehrern, von Studenten oder von Dozenten an der Universität – und aus welchem Grund dies auch immer geschehen mag – aus privatem Interesse oder für Lehrzwecke: In jedem Fall besteht die Hoffnung, dass sie Freude und Nutzen bringen wird.

1 Algebra

Zur Theorie

Die elementare Algebra der reellen Zahlen ist sicherlich diejenige mathematische Teildisziplin, die unsere Schüler mit Abstand am besten kennen und beherrschen. Das Rechnen mit ganzen, rationalen und reellen Zahlen nimmt im Mathematikunterricht unserer Schulen viel Raum ein, zunächst im Sinne von Arithmetik als Rechnen mit konkreten Zahlen, später als Buchstabenrechnen im Umgang mit Termen und Gleichungen. Auf keinem anderen mathematischen Gebiet unternehmen unsere Schulen derartig weitreichende Anstrengungen wie auf dem Felde der Algebra. Dennoch belegen zahlreiche empirische Studien schon seit langem erhebliche und oftmals merkwürdige algebraische Defizite unserer Schüler sowie der erwachsenen Bevölkerung überhaupt.¹ Merkwürdig sind sie deshalb, weil sogar Menschen, die eine erhebliche Virtuosität im formalen Umgang mit anspruchsvollen Gleichungen oder Gleichungssystemen unter Beweis stellen, erhebliche Schwächen bei ganz grundlegenden algebraischen Fragen offenbaren, die gar keine besondere Technik erfordern und manchmal lediglich von Gleichungen wie $x + 2 = y$ handeln. Günther Malle leitet sein Buch [Mal] mit Interviews ein, in denen verschiedene erwachsene Akademiker folgende Aufgabe zu lösen haben:²

„An einer Universität sind P Professoren und S Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie die Beziehung zwischen S und P durch eine Gleichung aus!“³

Der Verlauf der Interviews gibt den Blick auf algebraische Abgründe frei. Nicht nur wird die Gleichung $P = 6S$ vorgeschlagen, was ja beinahe erwartbar ist,

¹ vgl. etwa [RC]

² Die Aufgabe stammt ursprünglich aus [RC] und wird dort erstmals ausführlich analysiert.

³ s. [Mal, S. 1 ff.]

sondern die Äußerungen zeigen eine große Verunsicherung im Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen überhaupt; mit den Grundelementen der algebraischen Sprache also. Andere Autoren bekräftigen diese Bestandsaufnahme durch eigene empirische Untersuchungen.⁴ Malle berichtet in [Mal, S. 94] unter Verweis auf Forschungsergebnisse aus [RC] außerdem, wie hartnäckig sich verschiedene Fehlvorstellungen im Denken der interviewten Menschen halten, selbst wenn diese auf ihre Fehler aufmerksam gemacht werden und sich einem gezielten Training unterziehen. Die algebraische Sprache ist offenbar keinesfalls natürlich und wartet mit zahlreichen Verständnisbarrieren auf.

Wir geben uns nicht der Illusion hin, durch unsere Erörterung das algebraische Niveau der Bevölkerung merklich zu heben. Dennoch werden wir uns mit einigen Begriffen und Methoden beschäftigen, die zum Grundinventar der Algebra und wohl auch der Mathematik insgesamt gehören, und sind dabei neben einer fachlichen Klärung vor allem an didaktischen Hürden interessiert (insbesondere in Abschnitt B ab Seite 19).

In der Schule werden algebraische Regeln nach und nach in den Unterrichtsgang eingebunden; einige üblicherweise nach längerer Diskussion (etwa bei den Regeln zum Auflösen von Klammern), andere geradezu stillschweigend oder mit dem knappen Hinweis auf ihre offensichtliche Richtigkeit (etwa beim Kommutativgesetz für Addition und Multiplikation). Gelegentlich werden dabei figurierte Zahlen als Argumentationshilfe verwendet. Wiederum andere Regeln werden mithilfe des Permanenzprinzips begründet (etwa Regeln zum Potenzieren mit rationalen Exponenten). Für eine Klärung der Struktur dieses Regelgerüsts ist es hilfreich, sich der axiomatischen Grundlegung der reellen Zahlen zu erinnern und sich dann klarzumachen, in welcher Weise die zahlreichen Rechenregeln auf die wenigen Axiome zurückgeführt werden können. Der Abschnitt A (ab Seite 11) erinnert daher an diese axiomatische Grundlegung und bemüht sich damit um einen kleinen Beitrag zur Verknüpfung der Schulmathematik mit der Mathematik als formal-deduktiver Wissenschaft.

Da diese Arbeit auch als Handreichung zur Vorbereitung von Schülerinnen und Schülern auf mathematische Wettbewerbe nutzbar sein soll, zielt der Abschnitt C (ab Seite 39) darauf ab, an den Rändern des üblichen Schulcurriculums einige weiterführende Sätze zu ergänzen, die in Wettbewerben häufig verwendet werden können. Dies betrifft zum einen einige nützliche Summenformeln inklusive didaktischer Betrachtungen; zum anderen die Ungleichungen zum Größenvergleich verschiedener Mittelwerte.

⁴ siehe etwa [LW] und [FW]

Die axiomatische Grundlage der elementaren Algebra

Das Axiomensystem des reellen Zahlkörpers

Es ist immer wieder lohnenswert, sich klar zu machen, dass das vertraute Rechnen mit reellen Zahlen auf sehr wenigen Axiomen beruht, aus denen alle weiteren Rechenregeln abgeleitet werden können. Wir werden nun diese Axiome in lockerer Reihung vorstellen und gelegentlich Verbindungen zu üblichen mathematischen Verfahren und Schlussweisen aufzeigen, wie sie im Schulunterricht und auch in mathematischen Wettbewerbsaufgaben vorkommen. In unseren Formulierungen der Axiome wird der reelle Zahlkörper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dabei als bereits existierendes Objekt angesprochen; wir verhalten uns also so, als wären die Axiome bereits vorher ausgesprochen worden und als wäre \mathbb{R} mitsamt den Rechenregeln durch sie schon etabliert, so dass wir auf die Axiome gewissermaßen zurückblicken; eine etwas genauere Betrachtung dieser Vorgehensweise sowie der axiomatischen Methode überhaupt erfolgt ab Seite 16 („Das Wesen der axiomatischen Methode“).

Wir unterteilen die Axiome in drei Gruppen: In der ersten Gruppe wird die *Körperstruktur* der reellen Zahlen begründet, in der zweiten der Umgang mit der *Ordnungsrelation* \leq , und die dritte wird die *Vollständigkeit* des reellen Zahlkörpers zum Ausdruck bringen.

Die Körperstruktur der reellen Zahlen

Auf \mathbb{R} sind zwei Verknüpfungen definiert, die Addition und die Multiplikation, die je zwei Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ ihre Summe $a + b$ und ihr Produkt $a \cdot b$ zuordnen; dabei sind $a + b$ und $a \cdot b$ wiederum stets Elemente aus \mathbb{R} . Für diese beiden Verknüpfungen gelten folgende Axiome:

Kommutativgesetze:

Für je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$.

Assoziativgesetze:

Für je drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Neutrale Elemente:

Es gibt zwei verschiedene Zahlen $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:
Für alle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ ist $a + 0 = a$ und $a \cdot 1 = a$.

Inverse Elemente:

Für alle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$,
und für alle Zahlen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Zahl $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit
 $a \cdot a^{-1} = 1$.

Distributivgesetz:

Für je drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Die ersten vier Axiome lassen sich durch die Feststellung zusammenfassen, dass $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppen sind. Die Bedeutung der Kommutativgesetze liegt auf der Hand. Die Assoziativgesetze sind schon schwerer zugänglich; ihr Sinn erschließt sich uns erst dann, wenn wir uns klarmachen, dass Verknüpfungen wie die Addition und die Multiplikation stets einem Paar von *zwei* Zahlen ein Rechenergebnis zuordnen. So ist selbstverständlich, dass Ausdrücke wie $a + b$ oder $x \cdot y$ eine klar definierte Bedeutung haben; für Terme wie $a + b + c$ oder $x \cdot y \cdot z$ mit drei (oder gar noch mehr) reellen Zahlen liegt eine solche Definition *zunächst* nicht vor. Die Bedeutung dieser Ausdrücke muss also auf die Definition der Verknüpfung *zweier* Zahlen zurückgeführt werden. Zur Definition von $a + b + c$ bieten sich natürlich die Terme $(a + b) + c$ und $a + (b + c)$ an, in denen die Pluszeichen je zwei Zahlen verbinden. Welcher dieser beiden Terme soll aber nun zur Erklärung von $a + b + c$ herangezogen werden? Das Assoziativgesetz für die Addition sagt, dass dies egal ist, da $(a + b) + c$ und $a + (b + c)$ stets gleichwertig sein sollen. Erst durch diese axiomatische Festlegung wird $a + b + c$ zu einem zulässigen Term (da die Klammerung eben keine Rolle spielt). Entsprechendes gilt für das Assoziativgesetz der Multiplikation.

Die Aussagen der beiden Axiome zu neutralen und inversen Elementen sind wohl jedermann vertraut, doch möchten wir sie hier unter einem besonderen Blickwinkel betrachten: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$\delta_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + a. \quad (1.1)$$

Die Axiome zu neutralen und inversen Elementen lassen sich nun, soweit sie die Addition betreffen, in der Bemerkung bündeln, dass δ_a für jede reelle Zahl a eine *bijektive* Abbildung ist. Das Addieren mit a bildet also die Menge der reellen Zahlen umkehrbar eindeutig auf sich selbst ab. Dies wiederum ist der Grund dafür, dass in \mathbb{R} jede Gleichung der Form

$$x + a = b$$

überhaupt lösbar ist (Surjektivität von δ_a) und sogar *eindeutig* lösbar ist (Injektivität von δ_a). Die Injektivität von δ_a (bzw. die Existenz additiv inverser Elemente) können wir äquivalent durch die Kürzungsregel

$$x + a = y + a \implies x = y$$

ausdrücken. Diese wiederum ist die mathematische Rechtsgrundlage dafür, dass die Gleichungen

$$x = y$$

und

$$x + a = y + a$$

äquivalent sind. Die Routinemaßnahme der Addition beider Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl erfährt ihre Rechtfertigung als *Äquivalenzumformung* also durch unmittelbaren Rückgriff auf die Axiome von \mathbb{R} .

Ähnliches gilt für die Multiplikation; doch ist hier natürlich die Sonderrolle der Zahl 0 zu beachten. Die Abbildung

$$\epsilon_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot a \tag{1.2}$$

stellt sich im Fall $a = 0$ als konstante Abbildung heraus; in allen anderen Fällen jedoch als *bijektive* Abbildung. Auf diese Weise sind im Falle $a \neq 0$ die Kürzungsregel

$$x \cdot a = y \cdot a \implies x = y$$

und die eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen der Form

$$x \cdot a = b$$

etabliert; und ebenso ist damit klar, dass das Multiplizieren einer Gleichung mit derselben von Null verschiedenen Zahl eine *Äquivalenzumformung* ist.

Die Axiome über die Existenz inverser Elemente zeigen zusätzlich, dass es eigentlich nur zwei und nicht etwa vier sogenannte Grundrechenarten gibt; denn durch die späteren Festsetzungen

$$a - b := a + (-b) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

und

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } b \neq 0$$

erweisen sich Subtraktion und Division als spezielle Schreibweisen von Addition und Multiplikation.

Durch die ersten vier Axiome sind die meisten Eigenschaften von Addition und Multiplikation festgelegt. Völlig ungeklärt jedoch bleibt zunächst ihr Wechselspiel, die Kooperation dieser beiden Verknüpfungen. Bislang existieren sie unabhängig voneinander und scheinen sich nicht um die jeweils andere zu scheren; so ist beispielsweise bislang überhaupt nicht klar, dass Aussageformen wie

$$(1 + 1) \cdot a = a + a$$

bzw.

$$2 \cdot a = a + a$$

allgemeingültig sind. Erst das Distributivgesetz sorgt dafür, dass beide Rechenoperationen weitgehend miteinander harmonieren und die beiden letztgenannten Gleichungen beweisbar werden.

Alle vier bisher diskutierten Axiome sorgen dafür, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein *Körper* ist. Alle einschlägigen Rechenregeln bezüglich der Addition und der Multiplikation lassen sich aus ihnen ableiten.

Doch bereits Grundschulern ist klar, dass *Zahlen* nicht nur mit Rechnen zusammenhängen, sondern auch mit *Vergleichbarkeit*, mit *größer* und *kleiner*. Um diese Dinge solide zu regeln, bedarf es weiterer Axiome.

Die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen

Auf \mathbb{R} ist eine Ordnungsrelation \leq definiert; das bedeutet, dass \leq eine *reflexive*, *transitive* und *antisymmetrische* Relation auf \mathbb{R} ist; und dies wiederum heißt, dass für alle reellen Zahlen a, b, c die Ungleichung $a \leq a$ und die Implikationen

$$(a \leq b \text{ und } b \leq c \implies a \leq c) \quad \text{und} \quad (a \leq b \text{ und } b \leq a \implies a = b)$$

gelten. Zusätzlich wird im Falle von \mathbb{R} verlangt, dass die Ordnungsrelation *total* ist, d.h. für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$. Es gibt bekanntlich Ordnungsrelationen, die nicht total sind; die Teilt-Relation der Zahlentheorie etwa ist ein Beispiel dafür. Die geforderte Totalität von \leq auf \mathbb{R} bedeutet, dass sich alle reellen Zahlen in Bezug auf ihre Größe gewissermaßen in einer (unendlich langen) nicht-geschlossenen Kette befinden; je zwei Zahlen sind miteinander

vergleichbar. Dies rechtfertigt im Zusammenspiel mit der Transitivität von \leq das Bild vom *reellen Zahlenstrahl*. Eine derart lineare Veranschaulichung ist beispielsweise für die Teilt-Relation nicht möglich.

Von der Ordnungsstruktur auf \mathbb{R} erwarten wir, dass sie sich mit der Addition und der Multiplikation „verträgt“. Wir fordern daher zwei weitere Axiome ein:

Monotoniegesetze für \leq :

Für je drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten die Implikationen

$$(a \leq b \implies a+c \leq b+c) \quad \text{und} \quad (a \leq b \text{ und } 0 \leq c \implies a \cdot c \leq b \cdot c).$$

Das erste Monotoniegesetz entspricht voll unseren alltäglichen Vorstellungen von *größer* und *kleiner*. Das gilt wohl auch für das zweite Monotoniegesetz, doch ist hier die zusätzliche Voraussetzung $0 \leq c$ lästig. Genau diese Zusatzvoraussetzung macht das äquivalente Umformen von Ungleichungen mittels Multiplikation bzw. Division zu einem heiklen Unterfangen, weil stets genau geprüft werden muss, ob der Faktor bzw. Divisor größer oder gleich Null ist. Dies kann bekanntlich eine mühselige Angelegenheit sein, wenn der Faktor keine konkrete Zahl ist, sondern ein Term, bei dem erst sorgfältig analysiert werden muss, ob er größer oder gleich Null ist.

Alle bisherigen Axiome lassen sich in dem Satz zusammenfassen, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein *angeordneter Körper* ist. Wir wissen jedoch, dass er nicht der einzige ist. Auch die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist in Bezug auf Addition und Multiplikation beispielsweise ein angeordneter Körper. Was diese beiden Körper voneinander unterscheidet, ist der Aspekt der Vollständigkeit: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist nicht vollständig, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ hingegen schon:

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Unter denen vielen Möglichkeiten, die *Vollständigkeit* von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ axiomatisch zu beschreiben, wählen wir hier eine möglichst schlichte und relativ moderne Formulierung. Wir benötigen dazu den Begriff der beschränkten Menge: Wir nennen eine Teilmenge T von \mathbb{R} *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle $t \in T$ gilt $t \leq s$. Außerdem nennen wir jede solche Zahl s eine *obere Schranke* von T . Eine obere Schranke s von T heißt *kleinste obere Schranke* (oder: *Supremum*) von T , wenn jede Zahl s' mit $s' \leq s$ und $s' \neq s$ keine obere Schranke von T ist. Mit diesen Begriffen können wir nun das *Vollständigkeitsaxiom* (oder auch: *Supremumsprinzip*) aussprechen:

Vollständigkeitsaxiom für \mathbb{R} :

Für jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge T von \mathbb{R} gibt es in \mathbb{R} eine kleinste obere Schranke von T .

Die entsprechende Aussage für \mathbb{Q} gilt eben nicht: Die in diesem Zusammenhang oft zitierte Menge

$$T := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$$

ist sicherlich eine nicht-leere und nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{Q} , doch gibt es in \mathbb{Q} keine kleinste obere Schranke von T . Da T aber natürlich auch eine nicht-leere und nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} ist, muss diese Menge wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} eine kleinste obere Schranke in \mathbb{R} besitzen; und zwar ist dies natürlich genau jene Zahl, die in der weiterentwickelten mathematischen Sprache als $\sqrt{2}$ bezeichnet wird.

Die Vollständigkeit des reellen Zahlkörpers ist natürlich eine immens wichtige Angelegenheit – ohne sie würde die gesamte Analysis nicht funktionieren –, doch ist sie für uns im Rahmen dieser Arbeit von geringer Bedeutung. Schüler werden es in mathematischen Wettbewerben wohl kaum mit Aufgaben zu tun bekommen, die ihnen eine bewusste Betrachtung der Vollständigkeit von \mathbb{R} abverlangen. Wir vertiefen diese Betrachtung daher hier nicht weiter und stellen fest, dass unser Axiomensystem nunmehr komplett ist.

Das Wesen der axiomatischen Methode

Die axiomatische Methode ist eine große Errungenschaft der modernen Mathematik. Allerdings lässt sie den mathematischen Anfänger oft irritiert am Wegesrand zurück. Wenn wir unsere Liste von Axiomen für reelle Zahlen rückblickend betrachten, so stellen sich doch zwei grundlegende Fragen:

Zunächst einmal ist nicht ganz klar, ob die Axiome etwas beschreiben, was es schon vorher gab, oder ob die reellen Zahlen durch die Axiome gewissermaßen erst erschaffen werden. Wählten wir einen *genetischen* Zugang zu den reellen Zahlen, wie es in verschiedenen Varianten etwa von Cauchy, Dedekind oder Weierstraß im 19. Jahrhundert getan wurde, so würden wir die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen *konstruieren* – die rationalen Zahlen sind gewissermaßen schon vorher vorhanden. Vielleicht würden wir Cauchy-Folgen betrachten oder die Theorie der Dedekindschen Schnitte nachvollziehen und mit ihrer Hilfe die reellen Zahlen *definieren*. In diesem Fall würden unsere Axiome zu beweisbaren Sätzen werden. Das erste Kapitel von [Ru] etwa geht diesen Weg. Die eigentlich

axiomatische Methode jedoch funktioniert andersherum: Es wird postuliert (also: *angenommen*), dass es eine Menge \mathbb{R} mitsamt zweier Verknüpfungen $+$ und \cdot und einer Ordnungsrelation gibt, die unsere Axiome erfüllt, und die Elemente dieser Menge heißen dann *reelle Zahlen*. Entweder kann man dann relativ unbefangen mit diesen reellen Zahlen umgehen und aus den Axiomen interessante Sätze folgern – so geschieht es etwa in [Heu, Kapitel 1] –, oder man macht sich Sorgen, ob es überhaupt eine Menge mitsamt Rechenverknüpfungen gibt, die alle genannten Axiome erfüllt; es wäre ja immerhin denkbar, dass die geforderten Axiome einander widersprechen und die gesamte auf ihnen fußende Theorie eine *leere Theorie* bleibt – ohne ein einziges Modell. In diesem Fall müsste man wohl doch wieder die Mühen der genetischen Methode auf sich nehmen und per Konstruktion zeigen, dass es tatsächlich ein Modell für unser Axiomensystem gibt. Und selbst wenn das erfolgreich erledigt ist, mag man vielleicht die Frage stellen, ob die Axiome noch genügend Freiraum lassen, dass es wesentlich voneinander *verschiedene* Modelle gibt, die alle Axiome erfüllen. Es gibt sie nicht – doch ist ein solcher Nachweis langwierig und schwierig zu führen, ganz abgesehen davon, dass zunächst nicht klar ist, was *wesentlich voneinander verschieden* genau bedeuten soll; in [SK, Abschnitt I.5, Seite 75] findet sich etwa der Satz über die Eindeutigkeit vollständiger angeordneter Körper. Wir sehen hier von solch ambitionierten Unternehmungen ab.

Die andere Frage, die sich beim Anblick unseres Axiomensystems stellt, ist die nach dem *Wesen* der reellen Zahlen. Durch die Axiome ist ja keinesfalls geklärt, was reelle Zahlen denn nun wirklich sind. Nur über einige Gesetzmäßigkeiten innerhalb des reellen Zahlenreichs wissen wir dank der Axiome Bescheid. Wir wissen also, wie reelle Zahlen *funktionieren*, nicht aber, was sie *sind*. Das resultierende Unbehagen müssen wir aber ertragen, denn nicht einmal die genetische Methode, die ja reelle Zahlen gewissermaßen herstellt, liefert eine befriedigende Antwort. Für Dedekind etwa wäre eine reelle Zahl ein Paar (A, B) , wobei A und B Mengen von rationalen Zahlen mit bestimmten Eigenschaften sind; nicht gerade eine anschauliche Erklärung. Mit der schulüblichen Erläuterung, eine reelle Zahl sei eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Nachkommastellen, fühlen sich die meisten Menschen schon wohler und nehmen einige Unklarheiten gern in Kauf. Die axiomatische Methode hingegen verabschiedet sich von solchen Erklärungsversuchen. Ihr Mangel an Anschaulichkeit ist gleichzeitig aber auch ihr größter Vorzug; denn durch ihre Abkoppelung von Vorstellungen werden reelle Zahlen zu *vollständig geistigen* Objekten, die durch Mittel des Geistes allein vollständig ergründet werden können – eben durch logische Schlussfol-

gerungen aus den Axiomen. Dass wir nebenher – inoffiziell – doch weiterhin Vorstellungen von reellen Zahlen in uns tragen, etwa die Idee der Dezimalzahlen mit unendlichen Ziffernfolgen oder die Idee der Punkte auf dem Zahlenstrahl, ist durchaus legitim und didaktisch sogar wünschenswert, solange wir uns nur bei wissenschaftlicher Tätigkeit davor zurückhalten, allein aufgrund von Vorstellungen irgendwelche Schlüsse zu ziehen.

Weitere Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen

Steht erst einmal das Axiomensystem, so beginnt ein Parcours von Definitionen und Sätzen, die die üblichen Sprechweisen und die bekannten Rechenregeln im Umgang mit reellen Zahlen etablieren: Es werden etwa durch die Festsetzungen

$$a - b := a + (-b), \quad \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \text{ (letzteres nur für } b \neq 0)$$

Subtraktion und Division eingeführt, also als das Rechnen mit (additiv oder multiplikativ) inversen Zahlen. Außerdem folgen aus den Körperaxiomen zahlreiche Rechenregeln wie

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

oder

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b,$$

die dem Anfänger oft kaum beweiswürdig erscheinen und in der Schule eher unterschwellig als explizit vorkommen. Wohlbekannt sind aus dem Schulunterricht hingegen das erweiterte Distributivgesetz

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

und seine Spezialfälle, die Binomischen Formeln.

Die Ordnungsrelation \leq induziert die Relationen \geq , $<$ und $>$ sowie die Sprechweisen von *positiven* und *negativen* Zahlen. Aus den Axiomen zur Ordnungsstruktur folgen ebenfalls zahlreiche Rechenregeln; zu den prominenteren unter ihnen gehören sicherlich

$$a \cdot b > 0 \iff (a, b > 0) \text{ oder } (a, b < 0)$$

sowie

$$(a \leq b) \text{ und } (c \leq 0) \implies a \cdot c \geq b \cdot c.$$

Ferner können die Mengen der natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen und rationalen Zahlen in \mathbb{R} „wiedergefunden“ werden – denn in den Axiomen kommen sie ja nicht vor. Insbesondere können die Regeln der Bruchrechnung nun begründet werden. Auch der Satz über das Induktionsprinzip kann nun bewiesen werden und bereitet die Grundlage für das Beweisprinzip der vollständigen Induktion. All diese Schritte verlangen Sorgfalt und Ausdauer und nehmen bei gewissenhafter Ausführung viel Raum ein; wir sehen hier davon ab und verweisen erneut auf die Literatur, etwa auf [Heu, 1. Kapitel].

Grundbegriffe der elementaren Algebra und didaktische Barrieren

In der Schule bedeutet Algebra im Wesentlichen das Rechnen mit Buchstaben. Sie ist dort die natürliche Fortsetzung der Arithmetik; das Rechnen mit bloßen Zahlen wird dadurch erweitert, dass die Ersetzung von Zahlen durch Symbole (meist Buchstaben) zugelassen wird, und zwar üblicherweise dann, wenn eine Aussage über *beliebige* Zahlen getroffen wird, wie etwa

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

oder wenn eine Eigenschaft einer *bestimmten*, aber *unbekannten* Zahl ausgedrückt wird, wie etwa

$$3x^2 + 5x = 68.$$

Der Übergang von der Arithmetik mit der vertrauten Repräsentation von Zahlen durch Ziffern zur Algebra mit der symbolischen Darstellung von Zahlen durch Buchstaben ist für Schülerinnen und Schüler bekanntermaßen mit einer Fülle von Verständnisbarrieren behaftet; viele dieser Barrieren sind dem routinierten Anwender, etwa dem Mathematiklehrer, oft gar nicht mehr bewusst oder vielleicht nur dann, wenn ein Schüler gerade auf unerwartete Weise algebraischen Schiffbruch erleidet. In manchen Fällen handelt es sich bei diesen Barrieren um grundlegende algebraische Konventionen, die der Lehrer seinen Schülern gegenüber nur ein- oder zweimal erwähnt und dann als selbstverständlich voraussetzt; danach wird vergessen, mit welchen Schwierigkeiten diese Konventionen für seine Schüler womöglich weiterhin verbunden sind: Man denke etwa an die Konvention, dass Ausdrücke wie ab das Ergebnis einer *Multiplikation* darstellen; das ist ja keineswegs natürlich, denn ersetzen wir die Buchstaben durch bestimmte Zahlen, etwa a durch 3 und b durch 7, so steht der Ausdruck 37 eben

nicht für das Produkt $3 \cdot 7$ (sondern eher für die *Addition* $30 + 7$). Wie Günther Malle in [Mal] an zahlreichen Beispielen demonstriert, sind viele algebraische Schülerfehler ohnehin weniger ein Ausdruck mangelnder *Vernunft* als eben ein Zeichen mangelnder *Angepasstheit* an die algebraischen Konventionen.

Andere Fehler sind gemäß seiner Analyse hingegen eher ein Resultat *mangelnden Verständnisses* oder zumindest eines *andersartigen Verständnisses* des Wesens der Algebra. Wohl jeder erfahrene Mathematiklehrer hat hundertfach Termumformungen des Typs

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

besichtigen müssen; bemerkenswert ist dabei vor allem, dass die Reklamation des Fehlers durch den Lehrer, etwa mit dem Hinweis auf die Konkretisierung $a = 9$ und $b = 16$, nicht sehr häufig auf fruchtbaren Boden fällt. Zwar sieht jeder Schüler ein, dass $\sqrt{9+16}$ nicht dasselbe ist wie $\sqrt{9} + \sqrt{16}$, doch hat diese konkrete Einsicht oft keine durchschlagende Wirkung auf das künftige Handeln des Schülers; bei nächster Gelegenheit wird derselbe Fehler (oder ein sehr ähnlicher) erneut gemacht. Das ist sicherlich nicht allein durch Ignoranz oder Schlämpigkeit zu erklären. Vielmehr scheint es, als fassten manche Schüler algebraische Regeln als willkürliche Gesetze eines absolutistischen mathematischen Fürsten auf; ob das Gesetz $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ oder aber das Gesetz $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ erlassen wird, ist demnach allein in das Belieben des launischen Herrschers gestellt, so dass der Untertan, der die Liste der aktuellen Gesetze nicht auswendig kennt, keine Chance hat, selber darauf zu kommen, welche Gesetze tatsächlich gerade gelten. Die Tatsache, dass die algebraischen Regeln ihre Legitimation durch die arithmetische Wirklichkeit erfahren, die prinzipiell jedermann jederzeit zur Untersuchung zugänglich ist, wird von diesen Schülern nicht zur Kenntnis genommen oder verdrängt.

Variablen, Konstanten und Terme

Bereits die landläufige Gleichsetzung von (elementarer) Algebra mit dem sogenannten *Buchstabenrechnen* verweist darauf, dass die Benutzung von Variablen für dieses Teilgebiet der Mathematik kennzeichnend ist. Was aber ist eine Variable? Variablen *sind* keine mathematischen Gegenstände, auch wenn sie solche *bezeichnen*. Sie sind Teil der mathematischen Meta-Sprache; wir benutzen sie, um *über* mathematische Sachverhalte zu sprechen. Insofern ist auch eine Definition des Begriffs *Variable* in gewohnter mathematischer Präzision nicht

nötig – vielleicht sogar nicht möglich. In lockerer Sprache jedoch können wir feststellen, dass eine Variable ein Zeichen für ein bestimmtes Objekt ist, wobei wir in der Regel mathematische Objekte, meist Zahlen, betrachten. Aber was heißt schon *bestimmtes Objekt*? Oft benutzen wir Variablen als Zeichen für zwar beliebige, aber von diesem Moment an fixierte mathematische Objekte: So sagen wir etwa: *Seien x und y zwei natürliche Zahlen; dann gilt $x + y > x$.* Soweit die dann diskutierte mathematische Situation Bestand hat, wird x stets dieselbe Zahl bezeichnen; ebenso y . In manch anderen Fällen jedoch benutzen wir Variablen als Zeichen für *individuell bestimmte* Objekte, etwa wenn wir sagen: *Setze $x := 7$.* Dabei müssen wir in der Regel auf andere, bereits vorher getroffene sprachliche Vereinbarungen zurückgreifen (hier auf die Definition des Zeichens 7). Entgegen der landläufigen Meinung stellt die Verwendung von Variablen eine ungeheure Vereinfachung der mathematischen Sprache dar. Wie Tarski in [Tar] ausführt, würde die schlichte Formel

$$x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + x \cdot y + y^2)$$

ohne Variablen nur durch langwierige und kaum verständliche Formulierungen ausgedrückt werden können:

„Die Differenz der dritten Potenzen zweier beliebiger Zahlen ist gleich dem Produkt der Differenz dieser Zahlen und der Summe dreier Summanden, von denen der erste das Quadrat der ersten Zahl, der zweite das Produkt der beiden Zahlen und der dritte das Quadrat der zweiten Zahl ist.“⁵

Ist die Verwendung eines bestimmten Zeichens für ein bestimmtes mathematisches Objekt derartig kanonisch geworden, dass die Beziehung zwischen Zeichen und bezeichnetem Objekt für alle Teilnehmer an der Kommunikation auch ohne situationsbezogene Erklärung klar ist, so sprechen wir statt von *Variablen* auch von *Konstanten*. Das Zeichen π etwa bezeichnet in (fast) allen Kulturkreisen dasselbe mathematische Objekt, ohne dass bei jeder Verwendung des Zeichens gesagt werden müsste, um welches Objekt es sich da handelt. Also betrachten wir π als Konstante. Auch die Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 müssen wohl als Konstanten betrachtet werden; im Grunde wohl auch alle anderen Zahlzeichen wie 485, -3 , $\frac{1}{2}$, $\sqrt{5}$, auch wenn die Unterscheidung von *Termen* hier bereits heikel ist (siehe unten). Auch Funktionen sind selbstverständlich mathematische Objekte, und einige Funktionen haben konsequenterweise wohl den Status von

⁵ Das Beispiel stammt von Seite 26 des genannten Buchs.

Konstanten, etwa die vertrauten Grundrechenarten. Üblicherweise denken wir bei *Konstanten* aber an Zahlen.

Jedermann vertraut ist die Tatsache, dass einzelne Variablen und Konstanten sprachlich zu größeren Sinneinheiten zusammengesetzt werden können. Unter Beachtung gewisser grammatischer Regeln entstehen dann *Terme*. So sind $2 + 5$, $9 - 2 \cdot 3$, $2x + 7$, $x^2 - y^2$ Beispiele für Terme. Vielleicht können wir aber auch $\sqrt{5}$ bereits als Term bezeichnen, denn dieser Ausdruck entsteht ja durch die Kombination der Wurzelfunktion (einer Konstanten) mit dem Zeichen 5 (einer weiteren Konstanten). Unbestreitbar ist jedenfalls \sqrt{x} ein Term. In gewisser Hinsicht könnten wir auch 485 als einen Term auffassen (siehe oben), denn er ist ja aus den Konstanten 4, 8, 5 sowie der Funktion f mit der Zuordnungsvorschrift $f(x, y, z) = 10 \cdot 10 \cdot x + 10 \cdot y + z$ aufgebaut; f ist also hier die weltweit implizit gebräuchliche Funktion, die einem Tripel von drei Ziffern eine natürliche Zahl zuordnet (gemäß dem dezimalen Stellenwertsystem). Diese Beispiele zeigen deutlich die unscharfen wechselseitigen Abgrenzungen von metasprachlichen Begriffen wie *Konstante* und *Term*.

Eine andauernde didaktische Herausforderung besteht darin, den Objektcharakter des von einem Term Bezeichneten herauszuarbeiten: So ist $2 + 7$ ein Objekt (und nicht etwa eine Aufgabe), genauso wie 9 ein mathematisches Objekt ist, hier sogar dasselbe Objekt. Offenbar kann ein und dasselbe Objekt durch verschiedene Terme bezeichnet werden, ein Phänomen, das etwa in der Bruchrechnung gelegentlich für Verwirrung sorgt: $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ sind verschiedene Terme für dasselbe Objekt, verschiedene Darstellungen derselben Zahl. Da sie dasselbe bezeichnen, ist es unnötig und verwirrend, Redeweisen einzuführen wie *Die beiden Brüche haben denselben Wert*. Wenn mit dem Wort *Brüche* die bezeichneten Zahlen und nicht etwa die verwendeten Zeichen gemeint sind (und das ist ja wohl allgemein der Fall), so *sind* die beiden Brüche vollständig gleich.

Aussagen, Aussageformen, Quantoren

Über mathematische Objekte werden sehr häufig gewisse Urteile (Feststellungen) zum Ausdruck gebracht, etwa *5 ist größer als 3*. Derartige Urteile nennen wir *Aussagen*. Die dabei verwendeten *Prädikate* (hier: *ist größer als*) werden oft ebenfalls durch abkürzende Zeichen dargestellt: $5 > 3$. Ein mathematisches Urteil wird nicht dadurch zur Aussage, dass es etwas Wahres, etwas Gültiges zum Ausdruck bringt; Aussagen können auch falsch sein: *5 ist kleiner als 3*. In

der Tat ist es charakteristisch für Aussagen, dass sie entweder wahr oder falsch sind. Dabei ist es nicht von Belang, ob die Ermittlung des Wahrheitswerts ohne Weiteres konkret durchführbar ist: 47494625846179 ist eine Primzahl ist jedenfalls eine Aussage, denn es ist klar, dass diese Feststellung wahr oder falsch ist, auch wenn zunächst offen bleibt, welcher dieser beiden Fälle vorliegt.

Enthält eine mathematische Äußerung, die syntaktisch wie eine Aussage aufgebaut ist, eine oder mehrere Variablen, so handelt es sich um eine *Aussageform*.⁶ Ein Beispiel ist x ist eine Primzahl. Typisch ist, dass einer Aussageform kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann, da (zunächst) offen ist, welches Objekt durch die Variable(n) bezeichnet werden soll. Erst wenn jede Variable einer Aussageform durch ein Objekt (eine Zahl) *belegt* wird, geht die Aussageform in eine Aussage über, die – wie immer – wahr oder falsch ist: 5 ist eine Primzahl oder 4 ist eine Primzahl. Der bekannteste Typ von Aussageformen sind sicherlich die *Gleichungen* (mit mindestens einer Unbekannten): $2 + x = 6$. Eine solche Gleichung zu lösen, bedeutet ja herauszufinden, welche Belegungen der Variable(n) durch Zahlen die Aussageform in eine wahre Aussage überführen. Meist wird dabei von vorneherein festgelegt, welche Belegungen der Variablen überhaupt in Betracht gezogen werden sollen; so sagen wir etwa: „Für alle natürlichen Zahlen x betrachten wir die Gleichung $2 + x = 6$ “. Stellt sich dann heraus, dass die Gleichung bzw. die Aussageform durch eine geeignete Belegung der Variablen in eine wahre Aussage überführt werden kann – und das ist in unserem Beispiel ja der Fall –, so sprechen wir von einer *erfüllbaren Aussageform*. Anderenfalls bezeichnen wir die Aussageform als *unerfüllbar*, *widersprüchlich* oder *kontradiktorisch*. Die Aussageform $x + 1 = x$ ist ein schlichtes Beispiel dafür. Es gibt natürlich auch Aussageformen, die für jede der in Betracht gezogenen Belegungen in eine wahre Aussage übergehen, etwa $2 \cdot (x + 1) = 2 \cdot x + 2$. Solche Aussageformen heißen *allgemeingültig* oder auch *tautologisch*. Tautologische Gleichungen (wie das soeben genannte Beispiel) heißen *Termumformungen*, in bestimmten markanten Fällen auch *Formeln* (man denke etwa an die *Binomischen Formeln*). Das Finden von korrekten und hilfreichen Termumformungen gehört zum Kern des schulischen Algebraunterrichts; die zahlreichen Probleme und Fehler, die dabei erfahrungsgemäß auftreten, sind von vielen Autoren untersucht worden; wir verweisen hier auf [Voll] und [Mal].

⁶ Es sei denn, dass alle Variablen durch Quantoren gebunden sind (siehe unten).

Die Begriffe *allgemeingültig* und *erfüllbar* sind eng mit dem Konzept der *Quantoren* verknüpft. Dass etwa die Aussageform $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ tautologisch ist, wird in mathematischen Werken oft folgendermaßen notiert:

Für alle reellen Zahlen a und b gilt: $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

Die Wendung „Für alle...“ wird in mathematisch-logischen Kontexten als *Allquantor* bezeichnet. In unserem Beispiel sorgt er dafür, dass die Variablen a und b der Aussageform $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ *gebunden* werden. Durch diese Bindung (aller in der Aussageform vorkommenden Variablen) geht die Aussageform in eine Aussage über – in unserem Fall in eine wahre Aussage. Fast alle mathematischen Lehrsätze werden durch einen Allquantor eingeleitet.

Wie wir bereits oben gesehen haben, ist die Aussageform $2 + x = 6$ über den natürlichen Zahlen erfüllbar (durch die Belegung $x = 4$). Dieser Sachverhalt kann auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

Es gibt eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft: $2 + x = 6$.

Hier wird die Variable x durch den sogenannten *Existenzquantor* „Es gibt...“ gebunden; die Aussageform geht in eine (wahre) Aussage über. Mathematische Lehrsätze werden häufig durch eine Verschränkung von Allquantor und Existenzquantor eingeleitet, etwa:

Für alle nicht-negativen reellen Zahlen x gibt es eine reelle Zahl y mit der Eigenschaft: $y^2 = x$.

Didaktisch kritisch ist dabei zum einen die Tatsache, dass „Es gibt ein...“ stets im Sinne von „Es gibt mindestens ein...“ zu verstehen ist; Eindeutigkeit wird nicht verlangt und ist im Beispiel oben auch nicht gegeben. Zum anderen ist die Reihenfolge der Quantoren entscheidend: Die Aussage

Es gibt eine reelle Zahl y mit der Eigenschaft: Für alle nicht-negativen reellen Zahlen x gilt: $y^2 = x$.

(mit invertierten Quantoren) ist offenbar falsch.

Äquivalenzumformungen

Die Äquivalenz von Aussagen gehört zu den grundlegenden mathematischen Konzepten: Zwei Aussagen A und B heißen *äquivalent*, in Zeichen: $A \iff B$, wenn sie entweder beide wahr oder beide falsch sind. Viele Äquivalenzen sind eher unspektakulär, zum Beispiel ist

$$3 > 7 \iff 4 \text{ ist ein Teiler von } 5$$

eine wahre Äquivalenzaussage. Insbesondere ist die Äquivalenz zweier Aussagen kein sicherer Hinweis auf irgendeinen inneren Zusammenhang der betrachteten Aussagen, wie das Beispiel oben zeigt. Überhaupt sind je zwei (wahre) Lehrsätze (aus durchaus ganz verschiedenen Bereichen der Mathematik) äquivalent. Was *Aussageformen* betrifft, so sind unter ihnen vor allem jene interessant, die durch Belegung der Variablen in Äquivalenzaussagen übergehen, etwa

$$2x + 7 = 19 \iff 3x - 4 = 14.$$

Ist eine solche Aussageform allgemeingültig (wie in diesem Beispiel), so sprechen wir sie oft in quantorsierter Form aus:

$$\text{Für alle reellen Zahlen } x \text{ gilt: } (2x + 7 = 19 \iff 3x - 4 = 14).$$

Vereinbarungsgemäß bindet der Äquivalenzdoppelpfeil (und alle anderen Junktoren) stärker als ein Quantor; wir können daher im Beispiel oben die Klammern auch weglassen:

$$\text{Für alle reellen Zahlen } x \text{ gilt: } 2x + 7 = 19 \iff 3x - 4 = 14. \quad (1.3)$$

Für ungeübte Leser⁷ besteht hier allerdings die Gefahr des Missverständnisses, dass für alle reellen Zahlen x die Gültigkeit der Gleichung $2x + 7 = 19$ behauptet wird; das aber ist nicht gemeint. Das Wort *gilt* in (1.3) bezieht sich eben nur auf die Äquivalenz, nicht auf eine oder gar beide Gleichungen aus (1.3) separat. Es ist daher dem Verständnis förderlich, den Einleitungssatz von (1.3) bzw. ähnlichen Umformungen zu ersetzen durch „Für alle reellen Zahlen x gilt die Äquivalenz: ...“ bzw. „Für alle reellen Zahlen x gelten die Äquivalenzen: ...“ Alternativ kann der Allquantor zuvor aufgelöst werden: „Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Äquivalenzen: ...“

⁷ und, wie die Erfahrung zeigt, leider auch für eigentlich geübte Leser

Allaussagen über die Äquivalenz von Gleichungen wie in dem Beispiel oben gehören zum Kern des Algebraunterrichts in der Schule. Die Begründung dieser Aussagen geschieht in der Schule bekanntlich entweder mithilfe des *Waagemodells* – gleiche Rechenoperationen auf beiden Seiten der Gleichung – oder, etwas seltener, mithilfe der *Seite-Zeichen-Wechsel-Regeln*⁸ – ein Term wechselt die Seite der Gleichung und kehrt dabei sein Vorzeichen um.⁹ Das *Waagemodell* kann durch folgende Beschreibung mathematisiert und verallgemeinert werden:

Sei M eine Teilmenge von \mathbb{R} , und sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine *injektive* Funktion.¹⁰ Dann gilt für alle $x, y \in M$: $x = y \iff f(x) = f(y)$.

Allerdings gibt diese Bemerkung lediglich die *Definition* der Injektivität wieder. Die injektiven Funktionen, die in der Schule in diesem Zusammenhang implizit betrachtet werden, sind jene Funktionen, die alle Elemente aus M mit einer festen reellen Zahl r addieren bzw. (im Fall $r \neq 0$) multiplizieren – siehe (1.1) und (1.2). Obwohl am Ende der Sekundarstufe I auch andere geeignete Funktionen vorkommen, wird die Injektivität von Wurzelfunktionen, Potenzfunktionen bzw. Logarithmusfunktionen (auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw. $\mathbb{R}_{> 0}$) und der trigonometrischen Funktionen (auf bestimmten Intervallen) zwar benutzt, aber selten diskutiert.

Ein weiteres erhebliches didaktisches Problem besteht natürlich darin, eine bestimmte Äquivalenzumformung nicht nur zu rechtfertigen, sondern überhaupt erst einmal als eine *geeignete* Äquivalenzumformung in Betracht zu ziehen. Schließlich soll im Allgemeinen nicht *irgendwie* äquivalent umgeformt werden, sondern so, dass die neue Gleichung übersichtlicher und einfacher ist. Die Auswahl einer geeigneten Umformung verlangt ausreichendes Verständnis der Termstruktur (*Geometrie der Terme*) sowie die (implizite) Kenntnis von heuristischen Strategien. Soll etwa die Gleichung

$$5x + ax = 6$$

(nach x) gelöst werden, so ist die Termstruktur zwar einfach, aber es bedarf hier doch der Idee, das auf der linken Seite der Gleichung zweimal vorhandene

⁸ von anderen Autoren auch *Elementarumformungsregeln* genannt

⁹ Vollrath behauptet in [Voll, S. 192], dass Lehrer den erstgenannten und Schüler den zweitgenannten Typus von Regeln bevorzugen. Dem Verfasser dieser Arbeit erscheinen die *Seite-Zeichen-Wechsel-Regeln* im Vergleich jedenfalls fehleranfälliger.

¹⁰ Um der Schule näher zu sein, könnten wir *injektiv* hier durch *streng monoton* ersetzen, da strenge Monotonie offenbar hinreichend für Injektivität ist.

x durch die Rückwärtsanwendung des Distributivgesetzes (Ausklammern) aus der Summe *herauszudestillieren*:

$$x \cdot (5 + a) = 6.$$

Erst der nächste Umformungsschritt ist (im Fall $a \neq -5$) wieder Routine:

$$x = \frac{6}{5+a}.$$

In der Schule und in den Schulbüchern werden üblicherweise die einleitenden Allquantoren und die Äquivalenzdoppelpfeile weggelassen. Die einzelnen Umformungsschritte werden stattdessen meist zeilenweise untereinander geschrieben. Statt der vollständigen Notation

$$\text{Für alle reellen Zahlen } x \text{ gilt: } 2x + 7 = 19 \iff 2x = 12 \iff x = 6$$

finden wir also in den Schulheften eher dies:

$$2x + 7 = 19$$

$$2x = 12$$

$$x = 6.$$

Es ist nicht ganz klar, aber sehr wissenswert, was sich Schüler bei diesen Umformungen denken. Fragt man einen Schüler nach der Bedeutung dieser Zeilen, so hört man meist etwa: „Ich habe zuerst auf beiden Seiten 7 subtrahiert, dann durch 2 geteilt. Die Lösung ist also 6.“ Die formalen Umformungsregeln werden also beherrscht, und die Zeile $x = 6$ wird als Signal verstanden, dass das Ziel erreicht ist. Nur wenige Schüler, die mit dem Hinweis auf die *formalen* Umformungsregeln argumentieren, können auf Nachfrage dann sagen, worin der *inhaltliche* Zusammenhang zwischen den einzelnen Zeilen besteht. Dies ist vielleicht ein Indiz für eine Ablösung des *Formalen* vom *Inhalt*, die von Fischer und Malle in [FM, S. 47 ff.] eingehend untersucht wird. Diese Ablösung ist zwar einerseits ein typisches Merkmal für Begriffs- und Theoriebildung (moderner) Mathematik, wenn sie bewusst und wohlverstanden durchgeführt wird; man denke etwa an die Diskrepanz zwischen der intuitiven, traditionellen Vorstellung von einer Funktion einerseits und dem formalen, modernen Funktionsbegriff (rechtseindeutige Menge von Paaren) andererseits. In der Schule ist jedoch Wachsamkeit geboten: Eine zu starke Betonung des Formalen kann dazu führen, dass die Schüler die Regeln als künstlich auffassen und sie nur deshalb beachten, weil die Schule auf ihnen beharrt. Malle schreibt dazu in [Mal, S. 16] im Zusammenhang mit Termumformungen:

„Manche [vierzehnjährige Kinder] sehen Buchstaben bloß als Objekte an, mit denen man in irgendeiner Weise auf dem Papier jonglieren kann. Sie fassen das Buchstabenrechnen als ein **Spiel** mit mehr oder weniger *willkürlichen Spielregeln* auf, die nicht mit den Spielregeln des Zahlenrechnens übereinzustimmen brauchen. Wir haben etwa Schüler getroffen, die die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ akzeptierten, weil sie vom Lehrer so angegeben wurde bzw. so im Lehrbuch steht. Sie wären aber sofort bereit gewesen, auf Vorschlag des Interviewers das Spiel ab jetzt mit der einfacheren Spielregel $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ zu spielen. So wie man die Regeln von Brettspielen nach Belieben ändern darf, kann man nach Meinung dieser Schüler auch das Buchstabenspiel in verschiedenen Varianten spielen. Numerische Gegenbeispiele zur Regel $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ beeindruckten diese Schüler wenig, da das Buchstabenrechnen ihrer Meinung nach mit dem Zahlenrechnen nichts zu tun hätte.“

Ähnliches gilt sicher auch für Umformungen von Gleichungen. Schüler mit der von Malle beschriebenen Einstellung zu formalen Regeln neigen etwa dazu, die Umformung

$$\begin{aligned}x^2 + 36 &= (2x + 1)^2 \\x + 6 &= 2x + 1\end{aligned}$$

durchzuführen, weil sie ihnen plausibel vorkommt und an ähnliche, tatsächlich korrekte Umformungen erinnert. Es gibt also scheinbar keinen triftigen Grund, die Umformungsregel $x^2 + y^2 = z^2 \iff x + y = z$ nicht in den ohnehin willkürlichen Vorrat von Regeln aufzunehmen; und nur wenige Schüler kommen auf die Idee, diese Regel an einem Beispiel zu überprüfen, weil ihnen das Bewusstsein für die sinnstiftende Bindung der algebraischen Formalismen an die arithmetische Realität fehlt.

Ob die Auflösung dieser Bindung von Form und Inhalt, von Algebra und Arithmetik, dadurch eingedämmt werden kann, dass bei Gleichungsumformungen die Allquantoren und die Äquivalenzdoppelpfeile notiert werden, ist natürlich nicht garantiert; doch weist schon die Wendung „Für alle reellen Zahlen x gilt...“ darauf hin, dass hier eine Aussage *über Zahlen* getroffen wird, die also auch mithilfe von Zahlen überprüft werden kann. Die Pfeile wiederum signalisieren einen inhaltlich-kausalen Zusammenhang zwischen den einzelnen Zeilen, der vielleicht nicht völlig verstanden wird, aber eher im Blick behalten wird als bei der kommentarlosen unverbundenen Aneinanderreihung von Gleichungen ohne Pfeile und ohne Quantor.

Das inhaltliche Verständnis beim Gleichungsumformen ist in größerem Maße vorhanden, wenn die Aufgabe von vorneherein einen gewissen Grad von Konkretheit aufweist. Wir betrachten die Aufgabe: „Finde eine Zahl x , die die Gleichung $2x + 7 = 19$ erfüllt.“ Das ist zwar keine Sachaufgabe, doch ist immerhin ein klarer Objektbezug vorhanden. Wieder schreiben die Schüler:

$$2x + 7 = 19$$

$$2x = 12$$

$$x = 6.$$

Werden sie nun aufgefordert, diese Zeilen zu begründen, so sagen sie oft etwa dies: „Die gesuchte Zahl heißt x . Für sie gilt: $2x + 7 = 19$. Auch $2x$ ist eine Zahl, und zwar offenbar eine solche, die um 7 vergrößert die Zahl 19 ergibt. Wenn ich $2x$ nicht um 7 vergrößere, ist diese Zahl also 12, d.h. es ist $2x = 12$. Das Doppelte von x ist also 12, folglich ist x selbst die Zahl 6; es ist also $x = 6$. Das ist ja schon ziemlich gut – zumal für einen algebraischen Anfänger. Der Objektbezug („Finde eine Zahl x ...“) fördert hier das inhaltliche Verständnis. Doch auch diese inhaltliche Betrachtungsweise hat im Hinblick auf langfristige Ziele des Algebraunterrichts ihre Tücken: Denn zum einen wird deutlich, dass das Gleichungsumformen vor allem in *einer* Richtung betrieben wird, von oben nach unten, als eine Kette von Implikationen (anstatt einer Kette von Äquivalenzen); dies führt bei komplizierteren Gleichungen zu Problemen. Zum anderen zeigt sich hier eine eingeengte Sicht im Hinblick darauf, was die Variable x eigentlich repräsentiert: Der Allquantor wird nicht mitgedacht. Günther Malle unterscheidet in [Mal, S. 80 ff.] den *Einzelzahlaspekt* und den *Bereichsaspekt* einer Variablen. Während die Variable unter dem Einzelzahlaspekt als *eine* unbekannte, aber feste Zahl gesehen wird¹¹, betont der Bereichsaspekt, dass die Variable *jede* Zahl eines gewissen Bereichs repräsentiert. Der oben geschilderte Schülerkommentar zeigt also eine einseitige Betonung des Einzelzahlaspekts zulasten des Bereichsaspekts. Wie Malle ausführt, ist dies im algebraischen Anfängerunterricht wohl akzeptabel, vielleicht sogar hilfreich; denn es verhindert die Abtrennung des algebraischen Formalismus' (Umformungsregeln etc.) von den Inhalten: Es geht immer noch um Zahlen, und der Einzelzahlaspekt betont den Objektcharakter dessen, wofür die Variable (die *Unbekannte*) steht. Doch stellen wir fest, dass die reduzierte Notation der Gleichungsumformung ohne Allquantor und ohne Pfeile auf lange Sicht Gefahr birgt: Ein Bewusstsein für die zwei Richtungen der Umformung wird nicht entwickelt, und damit droht

¹¹ was durch das Wort *Unbekannte* besser ausgedrückt wird als durch das Wort *Variable*

auch der Bereichsaspekt der Variablen vernachlässigt zu werden. Für ein volles Verständnis von Gleichungsumformungen muss jedoch beizeiten ein Sinn für den Bereichsaspekt entwickelt werden; der Allquantor muss im wahrsten Sinne des Wortes „entdeckt“ werden. Zu starke Fixierung auf den Einzelzahlaspekt führt im fortgeschrittenen Algebraunterricht besonders dann zu Problemen, wenn es keine eindeutige Lösung gibt. Ein Lernender, der noch auf der Ebene des Einzelzahlaspekts feststeckt, wird Schwierigkeiten haben, sich bei der Gleichung $x + 2 = x + 1$ unter x eine Zahl vorzustellen, von der sich dann herausstellt, dass es sie nicht gibt; auch die Gleichung $x^2 = 9$ führt bei ihm zu Problemen, weil er sich kaum vorstellen kann, dass x zwei Zahlen gleichzeitig ist (3 und -3).

Ein unterentwickelter Sinn für Äquivalenzumformungen und den Bereichsaspekt führt gerade bei Gleichungssystemen zu Verständnisbarrieren, besonders dann, wenn es unendlich viele Lösungen gibt. Wir betrachten ein Beispiel:

Für welche reellen Zahlenpaare (x, y) gilt: $4x - 2y = 14$ und $6x - 3y = 21$?

Die Aufgabe ist bewusst objektsprachlich formuliert; von Äquivalenzumformungen und Lösungsmengen ist keine Rede. Der Lösungsweg sieht mit dem Additionsverfahren in der Schule üblicherweise etwa folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{llll} I & 4x - 2y = 14 & & \\ II & 6x - 3y = 21 & & \\ III & 12x - 6y = 42 & (\text{Gleichung I wird mit 3 multipliziert}) & \\ IV & 12x - 6y = 42 & (\text{Gleichung II wird mit 2 multipliziert}) & \\ V & 0 = 0 & (\text{Gleichung IV wird von Gleichung III subtrahiert}) & \end{array}$$

Die letzte Zeile dieser Umformung stiftet in der Schule zuverlässig Verwirrung. Meist wird sie als Indiz für einen Rechenfehler betrachtet, der aber nicht gefunden wird (es gibt ja auch gar keinen Fehler). Die Verstörung geht hier vor allem auf die unterdrückten Äquivalenzdoppelpfeile sowie die in Vergessenheit geratenen *und*-Junktoren zurück. Ein „sauberer“ Lösungsweg sieht so aus:

Für alle reellen Zahlenpaare (x, y) gilt:

$$\begin{array}{l} 4x - 2y = 14 \\ \text{und } 6x - 3y = 21 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &\iff \\
 &12x - 6y = 42 \\
 &\text{und } 12x - 6y = 42 \\
 &\iff \\
 &12x - 6y = 42 \\
 &\text{und } 0 = 0 \\
 &\iff \\
 &12x - 6y = 42 \\
 &\iff \\
 &y = 2x - 7.
 \end{aligned}$$

Natürlich könnten die einzelnen Umformungsschritte des Additionsverfahrens auch hier kommentiert werden. Der kritische Übergang beim dritten Äquivalenzdoppelpfeil ist jetzt leicht zu verstehen; allgemein gilt für eine beliebige Aussageform $A(x)$ und eine tautologische Aussageform $B(x)$ für alle x :

$$A(x) \text{ und } B(x) \iff A(x), \tag{1.4}$$

d.h.: tautologische Aussageformen können aus *und*-Aufzählungen entfernt werden. Genau diese Situation liegt im Gleichungssystem oben vor, und zwar mit der Aussageform $12x - 6y = 42$ als $A(x)$ und mit der (zur Aussage entarteten) Aussageform $0 = 0$ als $B(x)$.

Das oben dargestellte Beispiel einer „sauberen“ Äquivalenzumformung eines Gleichungssystems illustriert, wie die sorgfältige Notation der Umformung mit Allquantor, Äquivalenzdoppelpfeilen und *und*-Junktoren dem mathematischen Verständnis dienlich ist.

Die Probe und der Mythos der Wurzelgleichung

Manchmal ist es schwer oder vielleicht gar unmöglich, eine Gleichung oder eine andere Aussageform äquivalent umzuformen. In der Schule hält sich ein hartnäckiger Mythos, der besagt, dass dies für Wurzelgleichungen zutrifft. Seinen wahren Kern hat dieser Mythos in der Einsicht, dass die Äquivalenz

$$a = b \iff a^2 = b^2 \tag{1.5}$$

als Aussageform für beliebige reelle Zahlen a, b nicht allgemeingültig ist. Das Quadrieren ist also im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung, sondern stellt nur eine Implikation dar, d.h. die Aussageform

$$a = b \implies a^2 = b^2$$

ist (trivialerweise) allgemeingültig. Doch als Aussageform für *nicht-negative* Zahlen a, b ist die Aussageform (1.5) sehr wohl allgemeingültig, und zwar selbst dann, wenn der Exponent 2 durch einen anderen (von Null verschiedenen) Exponenten ersetzt wird. Weil sich diese Einsicht in der Schule nicht durchgesetzt hat, werden Wurzelgleichungen dort meist wie folgt gelöst:

Für alle reellen Zahlen x mit $x \leq -2$ oder $x \geq 2$ gilt:

$$\sqrt{x^2 - 16} = -x + 2 \implies x^2 - 16 = x^2 - 4x + 4 \implies 4x = 20 \implies x = 5,$$

wobei der zweite und dritte Implikationspfeil durchaus unbesorgt durch einen Äquivalenzpfeil ersetzt werden könnte; da aber ohnehin keine durchgängige Kette von Äquivalenzen zustandekommt, lassen wir es bleiben. Wenn die Gleichung $\sqrt{x^2 - 16} = -x + 2$ also eine Lösung hat, dann ist es die Zahl 5. Ob 5 tatsächlich eine Lösung ist, wissen wir zunächst nicht, da die Implikation „von rechts nach links“ nicht nachgewiesen wurde. Wir brauchen nun also eine *Probe*; sie ist der Ersatz für die fehlende Implikation. Die Probe zeigt hier, dass 5 doch keine Lösung ist, denn es ist $\sqrt{9} \neq -3$. Die Gleichung hat also gar keine Lösung. Dieses Beispiel stammt aus einem weitverbreiteten Schulbuch.¹² Dort wird resümiert:

„Wenn man beim Lösen einer Gleichung beide Seiten dieser Gleichung quadriert, muss man also unbedingt eine **Probe in der Ausgangsgleichung** durchführen.“

Das Wort „unbedingt“ aus diesem Zitat ist aber eine Übertreibung, wenn man daran denkt, dass die Aussageform (1.5) für nicht-negative Zahlen a, b eben doch allgemeingültig ist. Als Alternative zur Vermeidung einer Probe bietet sich somit folgender Lösungsweg an:

Für alle reellen Zahlen x mit $x \leq -2$ oder $x \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 16} = -x + 2 &\iff \sqrt{x^2 - 16} = -x + 2 \text{ und } -x + 2 \geq 0 \\ \iff x^2 - 16 = x^2 - 4x + 4 \text{ und } -x \geq -2 &\iff x = 5 \text{ und } x \leq 2. \end{aligned}$$

¹²Lambacher Schweizer 9, Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ernst Klett Verlag, S. 94

Die erste Umformung wird durch den Hinweis gerechtfertigt, dass die Werte der Wurzelfunktion stets nicht-negativ sind, die zweite durch die Allgemeingültigkeit von (1.5) für nicht-negative a, b (hier: $a = \sqrt{x^2 - 16}, b = -x + 2$). Da die resultierende Aussageform offensichtlich unerfüllbar ist, sehen wir also auch ohne Probe, dass die untersuchte Wurzelgleichung keine Lösung hat.

In vielen Wurzelgleichungen können die Variablen der Gleichung nicht beliebig mit reellen Zahlen belegt werden, weil sonst nicht-definierte Terme auftreten.¹³ Im Fall der Wurzelgleichung oben mit dem Term $\sqrt{x^2 - 16}$ wäre beispielsweise die Belegung $x := 1$ unzulässig. Hier muss geprüft werden, für welche reellen Zahlen x die kritische Bedingung $x^2 - 16 \geq 0$ erfüllt ist. Auf diese Weise muss schon vor der eigentlichen Äquivalenzumformung der vorgelegten Gleichung eine andere Äquivalenz festgestellt werden; hier $x^2 - 16 \geq 0 \iff x \leq -2$ oder $x \geq 2$. Dieser Vorgang wird in vielen Schulbüchern die *Bestimmung der Definitionsmenge* der vorgelegten Gleichung genannt. Bei der schriftlichen Notation des Lösungswegs ist es bei mitgeführtem Allquantor hingegen wohl ausreichend, die Definitionsmenge nicht explizit zu notieren, sondern einfach den Allquantor entsprechend einzuschränken; im Falle des Beispiels oben also *Für alle reellen Zahlen x mit $x \leq -2$ oder $x \geq 2$ gilt: . . .*. Das Unterlassen dieser Einschränkung kann zu Missverständnissen führen. Wir betrachten dazu folgende Umformung in halb-reduzierter Notation:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x+1} = \sqrt{x-23} &\iff 25(x+1) = x-23 \iff 25x+25 = x-23 \\ &\iff 24x = -48 \iff x = -2. \end{aligned}$$

Es ist offenbar ein Irrtum, hier die Zahl -2 für eine Lösung zu halten, da die Ausgangsgleichung für reelle Zahlen x mit $x < 23$ gar nicht betrachtet werden kann. Viel besser ist es also so:

Für alle reellen Zahlen x mit $x \geq 23$ gilt:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x+1} = \sqrt{x-23} &\iff 25(x+1) = x-23 \iff 25x+25 = x-23 \\ &\iff 24x = -48 \iff x = -2. \end{aligned}$$

Und selbst hier können noch Fehlinterpretationen aufkommen; deshalb wird oft die Bemerkung angeschlossen, dass die Gleichung doch keine Lösung habe, weil -2 nicht in der Definitionsmenge der Gleichung liegt. Möchte man diese

¹³ Dies gilt natürlich immer dann, wenn Funktionen auftreten, die nicht auf ganz \mathbb{R} bzw. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert sind. Dies trifft insbesondere auf die „Divisionsfunktion“ zu.

Redeweise vermeiden, kann man sich des nullstelligen Junktors \perp bedienen, des sogenannten *Falsums*, dessen Wahrheitswert grundsätzlich *falsch* ist. Wir hätten dann die schöne Umformung:

Für alle reellen Zahlen x mit $x \geq 23$ gilt:

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x+1} = \sqrt{x-23} &\iff 25(x+1) = x-23 \iff 25x+25 = x-23 \\ &\iff 24x = -48 \iff x = -2 \iff \perp . \end{aligned}$$

Selbst demjenigen, der beim Lesen die Einschränkung des Allquantors übersieht, wird hier schon durch die Äquivalenzumformung selbst deutlich, dass die betrachtete Gleichung keine Lösung hat. Aber wer kennt schon das Falsum?

Natürlich ist es keinesfalls unschicklich, statt einer Äquivalenzumformung eine Implikationsumformung durchzuführen und die fehlende Implikationsrichtung im Anschluss durch eine Probe zu ersetzen. Wie wir gezeigt haben, ist dies aber jedenfalls bei Wurzelgleichungen *nicht nötig*. Außerdem bieten insbesondere Wurzelgleichungen Gelegenheit, im Unterricht das Verständnis von Äquivalenzumformungen zu vertiefen. Dass die Durchführung einer Probe grundsätzlich als Mittel zur Aufdeckung von Rechenfehlern zur Verfügung steht, bleibt davon selbstverständlich unberührt.

Die p-q-Formel für quadratische Gleichungen

Am Ende der Sekundarstufe I treten im Mathematikunterricht erstmals quadratische Gleichungen auf. Sie stellen dem Schüler einige besondere didaktische Hürden in den Weg; allein schon die Tatsache, dass Gleichungen auch zwei Lösungen haben können, führt bei vielen Schülern zu einer Weitung des Verständnisses von Gleichungen, da die bisherige Verengung auf den Einzelzahlaspekt aufgegeben werden muss.

Zunächst werden im Unterricht meist einfache quadratische Gleichungen der Form $x^2 = a$ betrachtet; allgemeine quadratische Gleichungen werden dann mittels *quadratischer Ergänzung* auf den Spezialfall $x^2 = a$ zurückgeführt. Dieses Vorgehen ist didaktisch wertvoll – und zwar zum einen, weil die Reduktion auf einen Spezialfall ganz allgemein ein wichtiges mathematisches Problemlösungs-Prinzip ist, das die Schüler an quadratischen Gleichungen erleben können. Zum anderen wird auf diese Weise bei der Lösung einer jeden quadratischen Gleichung an den mathematischen Kern der Angelegenheit erinnert:

Für alle reellen Zahlen x, a mit $a \geq 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $x^2 = a$
- (2) $\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$
- (3) $|x| = \sqrt{a}$
- (4) $x \in \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$
- (5) $x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$.

Interessant ist dabei der äquivalente Übergang von (1) zu (2): Weil die Wurzelfunktion (auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$) injektiv ist, handelt es sich hier um eine Äquivalenzumformung. Der Übergang von (2) zu (3) ist lediglich eine Termumformung: Für alle reellen Zahlen x ist $\sqrt{x^2} = |x|$. Dass hier Betragstriche nötig sind, zeigt, dass die vage Auffassung vom Wurzelziehen als Umkehrung des Quadrierens unpräzise ist.

Da (2) ein „Zwischenstadium“ beschreibt und (3) bzw. (4) für Schüler ungewohnte Symbole enthalten (Betragstriche, Elementzeichen), wird in der Schule meist der Übergang von (1) zu (5) praktiziert. Daran ist auch nichts auszusetzen. Der alternative Übergang von (1) nach (4) würde allerdings Schreibeinheit reduzieren und doch beide Lösungen explizit nennen.

Doch offenbar wird die Methode der quadratischen Ergänzung mit der ständigen Erinnerung an die obengenannten Äquivalenzen auf Dauer als zu mühsam empfunden. Vielfach wird daher im Unterricht und in Schulbüchern die sogenannte *p-q-Formel* als abkürzendes Kalkül eingeführt. Für eine quadratische Gleichung in Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

werden die Lösungen dann durch

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

angegeben. Als Abkürzung in den Händen eines versierten Mathematikers oder auch eines nervösen Bankangestellten mag dies akzeptabel sein, doch aus didaktischer Sicht ist die Verwendung dieser Formel in der Schule in der üblichen unkommentierten Form sehr bedenklich. Es gibt dafür mindestens zwei Gründe:

Das Hantieren mit dem möglicherweise Nicht-Existenten: Es gehört zum soliden mathematischen Handwerk, sich bei der Verwendung von Termen stets zu vergewissern, dass das durch den Term Bezeichnete erstens existiert und zweitens eindeutig bezeichnet ist. Die o.a. Formel aber verführt Schüler

zur Missachtung dieses Prinzips. Soll nämlich die Gleichung $x^2 - 8x + 18 = 0$ gelöst werden, so wird p als -8 und q als 18 identifiziert; die Formel liefert dann $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 18} = 4 \pm \sqrt{-2}$. Erst jetzt wird offenbar, dass etwas im Argen liegt, denn die Wurzel aus -2 ist nicht definiert. Also notiert der Schüler einsichtig: „Diese Gleichung hat keine Lösung“ – *nachdem* er mit dem Nicht-Existenten ($\sqrt{-2}$) schriftlich hantiert hat.

Die endgültige Verunstaltung der Äquivalenz: Wir haben oben schon diskutiert, dass in der Schule äquivalente Umformungen gern verkürzt notiert werden – unter Weglassung des Allquantors und des Äquivalenzdoppelpfeils. Das mag gerade noch verzeihlich sein, denn immerhin kann das Weggelassene – in Gedanken oder tatsächlich – ergänzt werden. Die o.a. Formel aber verbaut diese Rückzugslinie. Ergänzen wir sie nämlich in üblicher Weise, so erhalten wir folgenden „Satz“:

Für alle reellen Zahlen p, q, x gilt: $x^2 + px + q = 0 \iff x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Das ist aber sprachlicher Unfug. Die Variablen p, q, x werden durch den Allquantor gebunden. In der Äquivalenzaussage haben wir es jedoch mit der Variablen $x_{1,2}$ zu tun – oder sind es *zwei* Variablen? Diese Variable(n) ist/sind (eine) *freie* Variable(n), ohne Bindung durch einen Quantor. In mathematischen Sätzen ist dieser Zustand aber unhaltbar, denn es handelt sich dann ja bei dem vermeintlichen Satz um eine Aussageform und nicht um eine Aussage! Es wäre also sinnlos, den Satz als wahr zu bezeichnen. Diese Kritik gilt in gleicher Weise auch gegenüber folgender Variante des „Satzes“:

Für alle reellen Zahlen p, q, x gilt:

$$x^2 + px + q = 0 \iff x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ oder } x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Diese ebenfalls inakzeptable Variante – bei der gelegentlich das *oder* durch *und* ersetzt wird – wird von Schülern gern verwendet. In den Heften finden wir dann etwa Folgendes:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ p &= -1, q = -2, \\ x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Die „Ergebnisse“ sind zwar richtig, aber die Notation kann nicht mehr zu etwas Ordentlichem ergänzt werden. Dadurch wird das mathematische Denken ruiniert, denn dass die Umformung mit der Variablen x beginnt und mit den Variablen x_1 und x_2 endet, verstellt auch begabten Schülern den Blick auf das Wesen der Äquivalenzumformung.

Und dennoch: Der mathematische Kern der p - q -Formel ist ja durchaus leicht zu retten. Wir schlagen folgende „anständige“ Variante vor:

Seien p, q beliebige reelle Zahlen. Dann hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ genau dann eine Lösung, wenn die Bedingung $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ erfüllt ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt für alle reellen Zahlen x :

$$x^2 + px + q = 0 \iff x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ oder } x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ungleichungen

Äquivalenzumformungen von Ungleichungen sind bekanntermaßen etwas anspruchsvoller als solche von Gleichungen. Das liegt vor allem daran, dass das Multiplizieren mit einer reellen Zahl r eine *ordnungserhaltende* Operation ist, wenn r positiv ist; ist r jedoch negativ, so handelt es sich um eine *ordnungsumkehrende* Operation. Die erste Tatsache *ist* eines der Axiome der reellen Zahlen, die zweite *folgt* fast unmittelbar aus den Axiomen.

In der Schule findet dies Berücksichtigung in der Handlungsanweisung, das Ungleichheitszeichen „umdrehen“, wenn die Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird. Außerdem ist eine zusätzliche Regel für *quadratische* Ungleichungen vonnöten:

Für alle reellen Zahlen x, a mit $a \geq 0$ gelten folgende zwei Äquivalenzen:

$$x^2 \geq a \iff x \leq -\sqrt{a} \text{ oder } x \geq \sqrt{a}$$

sowie

$$x^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}.$$

Entsprechendes gilt selbstverständlich für $>$ und $<$.

Besonders diffizil sind Äquivalenzumformungen von Ungleichungen dann, wenn es erforderlich wird, mit einem *Term* zu multiplizieren, der bei manchen Variablenbelegungen positiv, bei anderen jedoch negativ ist. Um die Umkehrregel

beherzigen zu können, muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden. In manchen Schulbüchern wird vorgeschlagen, die Definitionsmenge der Ungleichung in zwei disjunkte Teilmengen zu zerlegen. Bei diesem Vorgehen treten dann suggestiv bezeichnete Mengen auf wie etwa D_1, D_2, L_1, L_2 und L_{ges} (für die Definitions- und Lösungsmengen). Der Lösungsweg wird somit in zwei Portionen aufgeteilt, die am Ende zusammengeführt werden.

Dieses schulbuchtypische Vorgehen ist im Grunde mathematisch in Ordnung, doch werden dabei einige lehrreiche logische Operationen versteckt. Möchte man diese Operationen zutage fördern, empfiehlt sich ein Vorgehen, das mit einer einzigen, wenn auch komplexen Äquivalenzumformung auskommt. Die Fallunterscheidung wird dabei in die Äquivalenzumformung integriert. Als Beispiel betrachten wir die Bruchungleichung $x > \frac{3}{x-2}$:

Für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & x > \frac{3}{x-2} \\
 \Leftrightarrow & x > \frac{3}{x-2} \quad \text{und} \quad [x-2 < 0 \text{ oder } x-2 > 0] \\
 \Leftrightarrow & \left[x > \frac{3}{x-2} \text{ und } x-2 < 0 \right] \quad \text{oder} \quad \left[x > \frac{3}{x-2} \text{ und } x-2 > 0 \right] \\
 \Leftrightarrow & [x(x-2) < 3 \text{ und } x-2 < 0] \quad \text{oder} \quad [x(x-2) > 3 \text{ und } x-2 > 0] \\
 \Leftrightarrow & [x^2 - 2x < 3 \text{ und } x < 2] \quad \text{oder} \quad [x^2 - 2x > 3 \text{ und } x > 2] \\
 \Leftrightarrow & [(x-1)^2 < 4 \text{ und } x < 2] \quad \text{oder} \quad [(x-1)^2 > 4 \text{ und } x > 2] \\
 \Leftrightarrow & [-2 < x-1 < 2 \text{ und } x < 2] \quad \text{oder} \quad [(x-1 < -2 \text{ oder } x-1 > 2) \text{ und } x > 2] \\
 \Leftrightarrow & [-1 < x < 3 \text{ und } x < 2] \quad \text{oder} \quad [(x < -1 \text{ oder } x > 3) \text{ und } x > 2] \\
 \Leftrightarrow & [-1 < x < 2] \quad \text{oder} \quad [(x < -1 \text{ und } x > 2) \text{ oder } (x > 3 \text{ und } x > 2)] \\
 \Leftrightarrow & [-1 < x < 2] \quad \text{oder} \quad [\perp \text{ oder } (x > 3)] \\
 \Leftrightarrow & [-1 < x < 2] \quad \text{oder} \quad [x > 3].
 \end{aligned}$$

Der erste äquivalente Übergang besteht aus der *und*-Anfügung einer tautologischen Aussageform (siehe 1.4), und der zweite wendet das Distributivgesetz für *und* und *oder* an; von dort an wird links vom zentralen *oder* der eine Fall, rechts davon der zweite Fall analysiert.

Bereits dieses eine Beispiel illustriert, wie die sorgfältige Untersuchung einer Ungleichung das logische Denken und die disziplinierte Anwendung von mathematischen Regeln schult. Außerdem sind Ungleichungen ein gutes Instrument

zur Vertiefung des *Bereichsaspekts* von Variablen, denn Ungleichungen haben in der Regel unendlich viele Lösungen, wenn sie denn überhaupt lösbar sind. Dadurch wird auch das Bewusstsein für den Charakter einer *Äquivalenzumformung* geschärft (in Abgrenzung von einer bloßen *Implikation*).

Ausgewählte Erweiterungen der Schulalgebra

In diesem Abschnitt möchten wir zwei recht spezielle Bereiche der elementaren Algebra genauer betrachten: Es sind dies die sogenannten *Summenformeln*, deren einfachste bekanntlich stets mit C. F. Gauß assoziiert wird, und die Ungleichungen bezüglich verschiedener Arten von Mittelwerten. Der Grund für diese Hervorhebung liegt in der besonderen Bedeutung dieser Sätze für das Lösen von Wettbewerbsaufgaben.

Summenformeln

Satz 1.1. *Für alle natürlichen Zahlen n gilt:*

- a) *Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ [Gaußsche Summenformel].*
- b) *Die Summe aller Quadratzahlen von 1^2 bis n^2 ist $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.*
- c) *Die Summe aller Kubikzahlen von 1^3 bis n^3 ist $\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$.*

Man beachte bei Satz 1.1 den merkwürdigen Umstand, dass die Summe der Kubikzahlen genau das Quadrat der Gaußschen Summe ergibt!

Alle drei Summenformeln lassen sich leicht durch Induktion beweisen; die Beweise sind in zahllosen Büchern ausgeführt. Die Gaußsche Summenformel hingegen ist die einzige, für die ein elementarer Zugang allgemein bekannt ist. Die berühmte Anekdote von der Summe der Zahlen von 1 bis 100, die vom jungen Gauß mithilfe der 50 Summen $(1+100), (2+99), \dots, (50+51)$ elegant ausgerechnet wird, hat allerdings den kleinen Nachteil, dass die Herleitung der Gaußformel gemäß dieser Methode auf ein Hindernis stößt, wenn die Anzahl der Summanden ungerade ist. Wir schlagen daher als Alternative die

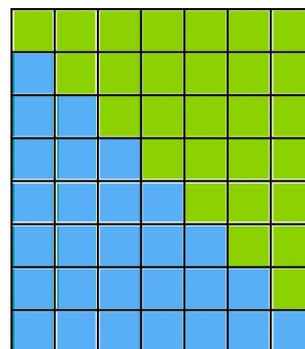


BILD 1.1

Betrachtung von Bild 1.1 vor. Die blauen Kästchen repräsentieren die Summe der Zahlen von 1 bis 7, die grünen ebenso. Insgesamt stehen die $7 \cdot 8$ Kästchen also für die doppelte Summe der Zahlen von 1 bis 7; die einfache Summe ist also gleich $\frac{7 \cdot 8}{2}$. Die Übertragung auf ein beliebiges n (anstelle von 7) verläuft problemlos und unabhängig von der Frage, ob n gerade oder ungerade ist.

Nun möchten wir versuchen, für die zweite Formel über die Summe der Quadratzahlen ebenfalls eine elementare Herleitung zu präsentieren, die zumindest vordergründig ohne vollständige Induktion auskommt. Wir betrachten nacheinander zwei verschiedene Herleitungen, von denen allerdings keine die Schlichtheit des Gaußschen Arguments erreicht.¹⁴ Die erste hat allerdings den Vorzug besonderer Anschaulichkeit.¹⁵

Wir versuchen einen „ikonischen Beweis“ durch ein „generisches Beispiel“¹⁶ und betrachten daher die Summe

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

Offenbar ist diese Summe gleich

$$1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + (4 + 4 + 4 + 4) + (5 + 5 + 5 + 5 + 5).$$

Diese fünfgliedrige Summe stellen wir nun in Dreiecksform dar, etwa so wie in dem linken Dreieck von Bild 1.2:

Dieses Dreieck wird nun um 60° entgegen dem Uhrzeigersinn gedreht, und zwar mit seinem Schwerpunkt als Drehzentrum. Man erhält dann das zweite Dreieck von Bild 1.2, wobei allerdings die Ziffern zwecks besserer Lesbarkeit auf den Betrachter ausgerichtet werden. Dieses zweite Dreieck wird in gleicher Weise erneut gedreht; wir erhalten das dritte Dreieck. Nun addieren wir die drei Dreiecke komponentenweise und erhalten das rötliche Dreieck rechts, in dem erstaunlicherweise alle Einträge gleich 11 sind. Wie kommt das zustande? Wir bezeichnen im ersten Dreieck den Eintrag in Zeile z und an Stelle s mit $a(z, s)$.

¹⁴ Es sei allerdings zusätzlich auf den außerordentlich kompakten Artikel [Bick] verwiesen: Dort wird gezeigt, wie die Zusammensetzung eines Quaders aus drei Pyramiden die Formel für die Summe der Quadratzahlen anschaulich etabliert.

¹⁵ Ich verdanke die Kenntnis dieser Herleitung einem Hinweis meines Kollegen Dr. Stefan Rollnik.

¹⁶ zum Begriff des „ikonischen Beweises“ und verschiedenen Arten des Beweisens überhaupt vgl. [WM]

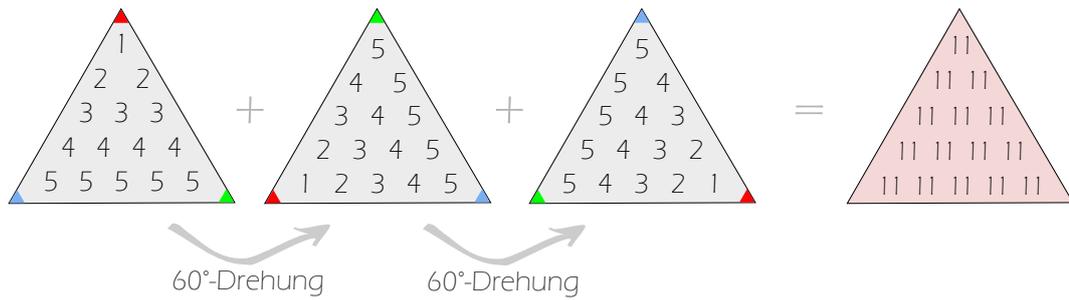


BILD 1.2: Summe von Quadratzahlen im Spezialfall $n = 5$

Entsprechend verwenden wir im zweiten und dritten Dreieck die Bezeichnungen $b(z, s)$ und $c(z, s)$. Eine Analyse der Struktur der drei Dreiecke führt uns zu den Gleichungen

$$a(z, s) = z, \quad b(z, s) = 5 - z + s, \quad c(z, s) = 5 - s + 1.$$

Bei der komponentenweise Addition der drei Dreiecke gilt somit für alle Zeilen z und alle Stellen s

$$a(z, s) + b(z, s) + c(z, s) = z + (5 - z + s) + (5 - s + 1) = 2 \cdot 5 + 1 = 11.$$

Wir verallgemeinern diese Beobachtung, indem wir statt 5 nun eine beliebige natürliche Zahl n betrachten (siehe Bild 1.3).

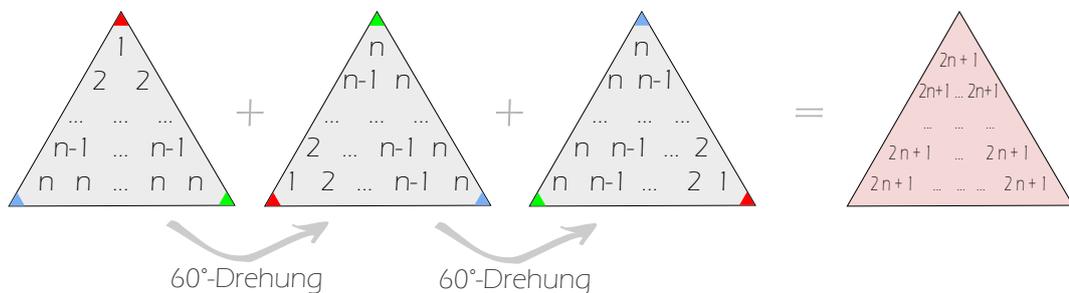


BILD 1.3: Summe von Quadratzahlen für beliebiges n

Wir haben es jetzt ähnlich wie im Fall $n = 5$ mit den Gleichungen

$$a(z, s) = z, \quad b(z, s) = n - z + s, \quad c(z, s) = n - s + 1$$

zu tun.¹⁷ Wir erhalten somit die Summe

$$a(z, s) + b(z, s) + c(z, s) = z + (n - z + s) + (n - s + 1) = 2 \cdot n + 1.$$

¹⁷ In einem „strengen“ Beweis müssten diese Gleichungen selbstverständlich bewiesen werden – und zwar vermutlich mit vollständiger Induktion. Wir sehen also, dass wir der vollständigen Induktion letzten Endes eben doch nur vordergründig ausweichen können.

Die Gaußsche Summenformel verrät uns, dass die Anzahl der Einträge in dem rechten Dreieck gleich $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ist. Jeder dieser Einträge ist gleich $2n + 1$. Die Summe aller Zahlen im rechten Dreieck ist also $\frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot (2n + 1)$. Diese Summe entspricht aber den *drei* linken Dreiecken, also dem Dreifachen von $1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2$. Indem wir durch 3 dividieren, erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Als Alternative stellen wir nun eine rein algebraische Herleitung für die Summe der Quadratzahlen vor. Zur Abkürzung vereinbaren wir für die gesuchte Summe das Symbol s_2 und für die entsprechende Gaußsche Summe der Zahlen von 1 bis n das Symbol s_1 . Ausgangspunkt der Herleitung ist die Formel

$$n^3 - (n - 1)^3 = 3n^2 - 3n + 1, \tag{1.6}$$

von der man sich durch einfaches Ausmultiplizieren der linken Seite überzeugen kann. Der Trick besteht nun darin, die Formel (1.6) n -mal zu notieren, wobei die Variable schrittweise um jeweils 1 reduziert wird. Wir erhalten dann das Tableau

$$\begin{array}{rclclcl} n^3 & - & (n - 1)^3 & = & 3n^2 & - & 3n & + & 1 \\ (n - 1)^3 & - & (n - 2)^3 & = & 3(n - 1)^2 & - & 3(n - 1) & + & 1 \\ (n - 2)^3 & - & (n - 3)^3 & = & 3(n - 2)^2 & - & 3(n - 2) & + & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \\ 2^3 & - & 1^3 & = & 3 \cdot 2^2 & - & 3 \cdot 2 & + & 1 \\ 1^3 & - & 0^3 & = & 3 \cdot 1^2 & - & 3 \cdot 1 & + & 1. \end{array}$$

Die Summe, die uns interessiert, versteckt sich in der ersten Spalte rechts neben den Gleichheitszeichen. Wir addieren daher alle n Zeilen des Tableaus; führen wir dies spaltenweise aus, so erhalten wir links eine „Teleskopsumme“, die gleichwertig zu n^3 ist; in der ersten Spalte rechts die dreifache Summe der Quadratzahlen; in der mittleren Spalte rechts die dreifache Gaußsche Summe; und in der rechten Spalte n -mal den Summanden 1, was in der Summe n ergibt. Insgesamt ergibt sich also:

$$n^3 = 3s_2 - 3s_1 + n.$$

Umstellen nach s_2 , Multiplikation mit 2 und Einsetzen der Gaußschen Formel führt zu

$$\begin{aligned} 6s_2 &= 2n^3 + 6s_1 - 2n = 2n^3 + 3n(n+1) - 2n = 2n^3 + 3n^2 + n \\ &= n(2n^2 + 3n + 1) = n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Die Division durch 6 liefert dann die gewünschte Formel.

Die Formel für die Summe der Kubikzahlen lässt sich analog erhalten. Wir gehen hier von dieser Formel aus:

$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1.$$

Das entsprechenden Gleichungstableau hat jetzt diese Gestalt:

$$\begin{array}{rcccccc} n^4 & - & (n-1)^4 & = & 4n^3 & - & 6n^2 & + & n & - & 1 \\ (n-1)^4 & - & (n-2)^4 & = & 4(n-1)^3 & - & 6(n-1)^2 & + & (n-1) & - & 1 \\ (n-2)^4 & - & (n-3)^4 & = & 4(n-2)^3 & - & 6(n-2)^2 & + & (n-2) & - & 1 \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ 2^4 & - & 1^4 & = & 4 \cdot 2^3 & - & 6 \cdot 2^2 & + & 1 & - & 1 \\ 1^4 & - & 0^4 & = & 4 \cdot 1^3 & - & 6 \cdot 1^2 & + & 0 & - & 1. \end{array}$$

Wiederum addieren wir die Gleichungen spaltenweise, nennen dabei die Summe der Kubikzahlen s_3 und erhalten

$$n^4 = 4s_3 - 6s_2 + 4s_1 - n.$$

Umstellen nach $4s_3$, Einsetzen der mittlerweile bekannten Terme für s_2 und s_1 sowie Termumformung und Division durch 4 führen erneut zu der gewünschten Formel.¹⁸

Offenbar kann man schrittweise überhaupt für jede Summe der Form

$$1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k + n^k$$

eine entsprechende Formel finden, wenn der Fall $k-1$ vorher betrachtet und erledigt worden ist. Als weitere Alternative zur Herleitung der Summenformeln verweisen wir hier auf den auch im Internet verfügbaren Artikel [Pin].

¹⁸ Im Artikel [Metz] wird diese Formel sehr anschaulich hergeleitet; insbesondere geht diese Herleitung direkt darauf ein, dass die Summe der ersten n Kubikzahlen gleich dem Quadrat der entsprechenden Gaußschen Summe ist.

Mittelwert-Ungleichungen

Ebenso wie die Summenformeln sind die Mittelwert-Ungleichungen von besonderem Nutzen bei der Bewältigung mancher mathematischer Wettbewerbsaufgaben. Zunächst einmal erfolgt die Definition der Mittelwerte:

Definition. Sei n eine natürliche Zahl, und seien x_1, x_2, \dots, x_n positive reelle Zahlen. Dann heißen

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, \dots, x_n) &:= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \text{ der quadratische Mittelwert,} \\ a(x_1, x_2, \dots, x_n) &:= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \text{ der arithmetische Mittelwert,} \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) &:= \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \text{ der geometrische Mittelwert,} \\ h(x_1, x_2, \dots, x_n) &:= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \text{ der harmonische Mittelwert} \end{aligned}$$

der Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n . Statt Mittelwert sagen wir gelegentlich verkürzend Mittel.

Die hier vorgestellten vier Mittelwerte sind nur die bekanntesten vier aus einem unendlichen Spektrum von Mittelwerten: Mit wenigen Ausnahmen (etwa des geometrischen Mittelwerts) lassen sich alle diese Mittelwerte auf Terme der Form

$$f^{-1} \left(\frac{1}{n} \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \right)$$

zurückführen, wobei f jeweils eine auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ injektive Funktion mit der Umkehrfunktion f^{-1} ist.¹⁹ In der Schule kommt üblicherweise nur der arithmetische Mittelwert vor, und auch das meist nur im Fall $n = 2$.

Satz (Mittelwert-Ungleichungen). Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien x_1, x_2, \dots, x_n positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq a(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq h(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Die drei einzelnen Ungleichungen werden als QM-AM-Ungleichung, als AM-GM-Ungleichung bzw. als GM-HM-Ungleichung angesprochen; manchmal wird sinngemäß auch von der AM-HM-Ungleichung gesprochen. Gleichheit tritt jeweils genau dann auf, wenn die Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n untereinander alle gleich sind.

¹⁹ vgl. die Bemerkungen über *quasiarithmetische Mittelwerte* in [Jeck]

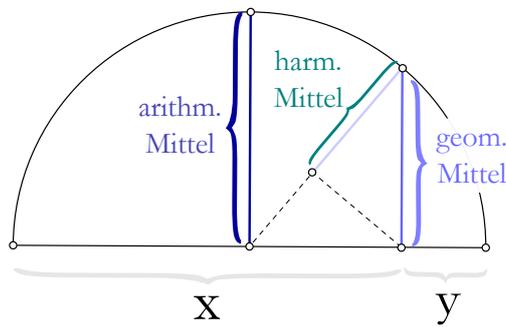


BILD 1.4: *Verschiedene Mittelwerte in geometrischer Deutung*

Der Beweis der Mittelwert-Ungleichungen ist im Fall $n = 2$ sehr einfach; alle drei Ungleichungen führen nach kurzem Umformen auf die äquivalente Ungleichung $(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2$, und diese ist äquivalent zu $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$. Da die letzte Ungleichung allgemeingültig ist, trifft dies auch auf die Ausgangsungleichungen zu. Durch vollständige Induktion erhält man dann die Aussage für beliebige n .²⁰ Die AM-GM- und GM-

HM-Ungleichungen können im Fall $n = 2$ durch Bild 1.4 illustriert werden; die Mittelwerte von x und y werden hier als Streckenlängen geometrisch interpretiert; für diese Übersetzung benötigt man den Satz des Thales, den Höhensatz und den Kathetensatz. Die Gültigkeit der Ungleichungen folgt dann im geometrischen Modell jeweils aus der sogenannten Lot-Ungleichung 4.45.

²⁰ Die AM-HM-Ungleichung werden wir im Fall $n = 3$ im Zusammenhang mit Aufgabe 309 beweisen – ohne Induktion.

Aufgaben zur Algebra und didaktischer Kommentar

Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme

Wir beginnen mit einer klassischen Aufgabe:

AUFGABE 1:

Ein Kind berichtet über das Lebensalter seiner Eltern und zwei seiner Großeltern: „Meine Mutter ist gegenwärtig dreimal so alt wie ich. Vor zwei Jahren war mein Vater viermal so alt wie ich. Meine Großmutter war vor drei Jahren siebenmal so alt wie ich. Vor einem Jahr war mein Großvater doppelt so alt wie meine Mutter. Addiert man die Zahlen, die das gegenwärtige Alter von mir, meinen Eltern, meinem Großvater und meiner Großmutter angeben, so erhält man als Summe 248.“ Wie alt ist jedes der Familienmitglieder?

Diese Aufgabe erscheint uns wie der Urtyp der „Textaufgabe“. Sie bevölkert in allerlei Variationen tausendfach den schulischen Algebra-Unterricht, doch einige hundert Jahre generationenübergreifenden Trainings haben den subjektiven Schwierigkeitsgrad dieser Aufgaben anscheinend nicht merklich verringert.

Was also sind die ewigen Schwierigkeiten? Den meisten Betrachtern dieser Aufgabe dürfte klar sein, dass das Ausprobieren von denkbaren Lebensaltern hier keine allgemein akzeptierte Methode darstellt. Das allein ist ja bereits bemerkenswert, denn durch *systematisches* Probieren wäre dieser Aufgabe durchaus beizukommen. Aber fast alle wissen: Es geht hier gar nicht darum, das Ergebnis *irgendwie* zu erhalten, sondern die Aufgabe soll durch eine geradlinige, effiziente Methode gelöst werden, durch eine *algebraische* Methode. Was hier verlangt wird, ist offenbar eine Gleichung – aber welche?

Im Mathematikunterricht können wir bisweilen an unseren Schülern einen ersten wesentlichen Fehler beobachten: Es werden kühn und übereifrig Gleichungen vorgeschlagen, die auf die Aufgabe zu passen scheinen, die bei näherem Hinsehen aber oft nur Teilaspekte der Aufgabe abbilden, da die Bedeutung der benutzten Variablen nicht fixiert ist: Mal bedeutet x das Alter des Kindes, mal das Alter des Vaters etc, und selbst wenn die Person feststeht, auf die sich die Variable x bezieht, kann der *Bezugszeitpunkt* noch immer schwanken.

Für einen soliden Lösungsweg ist es natürlich unerlässlich, sich zunächst auf eine oder mehrere Variablen mitsamt ihrer genauen Bedeutung festzulegen. Manche

Aufgaben nehmen diesen Schritt fast vorweg, etwa wenn sie mit Fragen enden wie: „Wie alt ist die Mutter?“ oder „Um welche Zahl handelt es sich?“ Bei Aufgabe 1 ist das nicht der Fall. Die Frage „Wie alt ist jedes der Familienmitglieder?“ lässt Raum für Alternativen. Da offenbar nach fünf verschiedenen Lebensaltern gefragt wird, wäre es auch nicht abwegig, fünf Variablen einzuführen: für jedes Lebensalter eine. Doch dadurch wird die Lage schnell unübersichtlich, und nur durch mühsames Ersetzen von Variablen kann die Variablenflut eingedämmt werden. Besser ist es offensichtlich, von Anfang an mit nur einer Variablen auszukommen: Als Bezugsgröße wählen wir ein Lebensalter, das durch die Informationen der Aufgabe hinreichend gut mit den anderen Lebensaltern verknüpft ist. Das trifft hier auf alle Größen zu; die Entscheidung ist also beliebig: x möge das gegenwärtige Alter des Kindes bedeuten.

Der nächste Schritt besteht darin, die anderen relevanten Größen der Aufgabe nach und nach durch Terme auszudrücken, in denen x vorkommt. Oft ist es möglich, sich von Anfang bis Ende des Aufgabentextes an den Informationen entlangzuhangeln. Zunächst geht es um das Alter der Mutter: „Meine Mutter ist gegenwärtig dreimal so alt wie ich.“ Das jetzige Alter der Mutter wird also durch den Term $3x$ beschrieben.²¹ Nun muss die Aussage „Vor zwei Jahren war mein Vater viermal so alt wie ich“ mathematisiert werden. Gefahr ist im Verzug, denn „viermal so alt wie ich“ lädt zu dem Missverständnis ein, dass das Alter des Vaters hier mit x verglichen wird, dem Alter des Kindes. Aber es geht bei *beiden* Personen um das Alter vor zwei Jahren. Offensichtlich war das Kind vor zwei Jahren $x - 2$ Jahre alt, der Vater dementsprechend $4 \cdot (x - 2)$ Jahre. *Jetzt* ist er also $4 \cdot (x - 2) + 2$ Jahre alt. Indem wir diese Mathematisierung vorantreiben, erhalten wir folgende Übersetzungstafel:

Alter des Kindes jetzt:	x
Alter der Mutter jetzt:	$3x$
Alter des Kindes vor zwei Jahren:	$x - 2$
Alter des Vaters vor zwei Jahren:	$4 \cdot (x - 2)$
Alter des Vaters jetzt:	$4 \cdot (x - 2) + 2$
Alter des Kindes vor drei Jahren:	$x - 3$
Alter der Großmutter vor drei Jahren:	$7 \cdot (x - 3)$

²¹ Der berüchtigte Umkehrfehler, der in [Mal] und [RC] ausführlich analysiert wird, dürfte hier kaum auftreten, denn es geht hier um einen *Term*, nicht um eine *Gleichung*. Gefährlich würde es nur dann, wenn die Information über das Lebensalter m der Mutter durch eine Gleichung ausgedrückt werden sollte: Statt $m = 3x$ würde allzu oft $3m = x$ vorgeschlagen.

$$\begin{aligned} \text{Alter der Großmutter jetzt:} & \quad 7 \cdot (x - 3) + 3 \\ \text{Alter der Mutter vor einem Jahr:} & \quad 3x - 1 \\ \text{Alter des Großvaters vor einem Jahr:} & \quad 2 \cdot (3x - 1) \\ \text{Alter des Großvaters jetzt:} & \quad 2 \cdot (3x - 1) + 1. \end{aligned}$$

Erst die letzte, resümierende Information über die Summe der fünf gegenwärtigen Lebensalter etabliert dann die gesuchte Gleichung:

$$x + 3x + [4 \cdot (x - 2) + 2] + [7 \cdot (x - 3) + 3] + [2 \cdot (3x - 1) + 1] = 248.$$

Das Lösen dieser Gleichung ist dann recht einfach: $x = 13$. Das Kind ist also 13 Jahre, Mutter und Vater sind 39 bzw. 46 und Großmutter und Großvater 73 bzw. 77 Jahre alt.

AUFGABE 2:

Ein Mädchen spielt mit Murmeln. Sie hat zwei Schalen mit weißen und roten Murmeln. In jeder Schale sind Murmeln beider Farben. In Schale 1 befinden sich mehr weiße als rote Murmeln, in Schale 2 ist es umgekehrt. Das Mädchen legt eine weiße und eine rote Murmel aus Schale 2 in Schale 1. Beweise: Der Anteil der weißen Murmeln verringert sich dadurch in *jeder* der beiden Schalen.

	Schale 1		Schale 2	
	rot	weiß	rot	weiß
vorher	r_1	w_1	r_2	w_2
nachher	$r_1 + 1$	$w_1 + 1$	$r_2 - 1$	$w_2 - 1$

Diese Aufgabe ist besonders für das Studium der Äquivalenz geeignet. Wir benennen die vier unbekanntenen Größen (siehe Tabelle) und entnehmen dem Text die entscheidenden Voraussetzungen: Die vier Variablen stehen für positive Zahlen mit

$$w_1 > r_1 \tag{1.7}$$

und

$$w_2 < r_2. \tag{1.8}$$

Nun muss das Ziel der Aufgabe mathematisiert werden. Die Anteile der weißen Kugeln (vorher und nachher) werden in naheliegender Weise durch Quotienten dargestellt; es geht also darum, die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\frac{w_1 + 1}{r_1 + w_1 + 2} < \frac{w_1}{r_1 + w_1} \tag{1.9}$$

für die erste Schale und

$$\frac{w_2 - 1}{r_2 + w_2 - 2} < \frac{w_2}{r_2 + w_2} \quad (1.10)$$

für die zweite Schale nachzuweisen. Wie kann das gelingen? Es fallen uns zwei Methoden ein, um das Geforderte zu leisten: Die erste Methode besteht darin, die Ungleichungen (1.9) und (1.10) durch *Termumformungen* zu beweisen. Wir könnten also im Fall von (1.9) mit dem „Anfangsterm“ $\frac{w_1+1}{r_1+w_1+2}$ beginnen, ihn durch Termumformungen verändern und durch Ausnutzung der Monotonieregeln für Ungleichungen so abschätzen, dass wir schließlich glücklich bei dem „Zielterm“ $\frac{w_1}{r_1+w_1}$ ankommen. Diese Methode liegt besonders dann nahe, wenn der Vergleich von Anfangsterm und Zielterm bereits Hinweise gibt, wie man vorgehen soll. Doch scheint das hier nicht der Fall zu sein.

Also wenden wir uns der zweiten Methode zu: Sie besteht darin, die angestrebte Ungleichung so lange äquivalent umzuformen, bis eine Ungleichung auftritt, deren Gültigkeit feststeht. Wir versuchen dies nun und stellen fest, dass für alle *positiven* Zahlen r_1, w_1, r_2, w_2 folgende Äquivalenz gilt:

$$\frac{w_1+1}{r_1+w_1+2} < \frac{w_1}{r_1+w_1} \iff r_1 w_1 + w_1^2 + r_1 + w_1 < r_1 w_1 + w_1^2 + 2w_1 \iff r_1 < w_1. \quad (1.11)$$

Die erste Äquivalenz ist dabei durch die Monotonieregel gerechtfertigt – es wird mit den positiven Zahlen der beiden Nennerterme multipliziert –, und die zweite erhalten wir durch „Aufräumen“: Gleiche Terme auf beiden Seiten der Ungleichung werden durch Subtraktion eliminiert; und zum Schluss wird auf beiden Seiten w_1 subtrahiert. Das Ergebnis ist ein voller Erfolg: Denn die resultierende Ungleichung $r_1 < w_1$ ist offenbar nichts anderes als (1.7), und da diese Ungleichung gemäß der Voraussetzung der Aufgabe wahr ist, trifft dies dank der Äquivalenz auch auf den Ausgangspunkt der Äquivalenzumformung zu, und das ist ja (1.9). Damit ist diese Ungleichung bewiesen. Die andere Ungleichung (1.10) kann auf dieselbe Weise hergeleitet werden.

Diese Aufgabe verlangt (und fördert) das Verständnis von Äquivalenz vor allem deshalb, weil in (1.11) die Ungleichung $r_1 < w_1$ für Schüler nicht wie ein typisches Ergebnis aussieht. Zeilen wie $x = 5$ oder $x < 3$ signalisieren das Ende einer Aufgabenbearbeitung selbst dann, wenn dem Aufgabenlöser nicht vollständig klar ist, was er gerade mathematisch gemacht hat. Die Äquivalenzumformung als solche muss nicht begriffen werden. Bei Aufgabe 2 ist das anders: Hier kann die Aufgabe nur dann als gelöst betrachtet werden, wenn

die Äquivalenz in (1.11) wirklich als solche betrachtet und verstanden wird; liegt dieses Verständnis nicht vor, so weiß man mit der Ungleichung $r_1 < w_1$ als „Ergebnis“ von (1.11) nichts Gescheites anzufangen; vielleicht wird man noch nicht einmal bemerken, dass das Ziel erreicht ist, und stattdessen weiter umformen, einem ungewissen Ziel entgegen.

Ganz abgesehen von diesen mathematischen Betrachtungen ist die Aufgabe 2 aber auch deshalb bemerkenswert, weil sie ein Überraschungsmoment enthält: Es verwundert schon, dass durch die Umverteilung der Murmeln der Anteil weißer Murmeln in *beiden* Schalen zurückgeht.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung von Gleichungssystemen über. Mit *linearen* Gleichungssystemen, die in der Schule häufig untersucht werden, möchten wir uns hier nicht beschäftigen. Wir unterstellen hinreichende Vertrautheit mit der üblichen Lösungsmethode (*Gaußsches Eliminationsverfahren*) und verweisen lediglich auf unsere allgemeinen Bemerkungen zu Äquivalenzumformungen, insbesondere auf Seite 30. Wir wenden uns hier stattdessen *nicht-linearen* Gleichungssystemen zu:

AUFGABE 3:

Finde alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit $x \neq 0, y \neq 0$ und der Eigenschaft:

$$x + \frac{x}{y} = \frac{8}{3} \quad \text{und} \quad y - \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

Bekanntlich besteht eine naheliegende und oft hinreichend gute Idee darin, Variablen zu eliminieren, indem man sie durch andere Variablen ausdrückt; hier könnten wir beispielsweise versuchen, mithilfe der zweiten Gleichung y durch x auszudrücken:

$$y = \frac{5}{2} + \frac{1}{x}. \tag{1.12}$$

Durch Einsetzen des Terms auf der rechten Seite von (1.12) für y in der ersten Gleichung der Aufgabe erhalten wir dann eine Gleichung, die nur noch die Variable x enthält. Einige Term- und Gleichungsumformungen zeigen schnell, dass es sich um eine quadratische Gleichung handelt, die wir ohne Probleme lösen können; durch Einsetzen der Lösungen von x in (1.12) erhalten wir dann die gesuchten Werte für y . In ordentlicher Notation ergibt sich also für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$ folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{y} &= \frac{8}{3} \\ \text{und } y - \frac{1}{x} &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \\
 &xy + x = \frac{8}{3}y \\
 &\text{und } y = \frac{5}{2} + \frac{1}{x} \\
 &\Leftrightarrow \\
 &x\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{x}\right) + x = \frac{8}{3}\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{x}\right) \\
 &\text{und } y = \frac{5}{2} + \frac{1}{x} \\
 &\Leftrightarrow \\
 &21x^2 - 34x = 16 \\
 &\text{und } y = \frac{5}{2} + \frac{1}{x} \\
 &\Leftrightarrow \\
 &x \in \left\{-\frac{8}{21}, 2\right\} \\
 &\text{und } y = \frac{5}{2} + \frac{1}{x} \\
 &\Leftrightarrow \\
 &(x, y) \in \left\{\left(-\frac{8}{21}, 2\right), (2, 3)\right\}.
 \end{aligned}$$

Die Umformungen zur Lösung der quadratischen Gleichung wurden dabei verkürzt dargestellt. Sorgfalt ist geboten um sicherzustellen, dass tatsächlich alle Umformungsschritte Äquivalenzumformungen sind; man prüfe dies stets pedantisch, insbesondere bei der oft vernachlässigten Richtung „von unten nach oben“.

Nicht immer führt die Ersetzungsmethode auf direktem Wege zum Erfolg:

AUFGABE 4:

Finde alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
 &x^4 + y^3 = 9 \\
 &\text{und } x^2 + y = 3.
 \end{aligned}$$

Bei der Fahndung nach Ersetzungsmöglichkeiten fällt sogleich auf, dass die zweite Gleichung die Möglichkeit bietet, y durch x auszudrücken: $y = 3 - x^2$. Setzen wir dies für y in der ersten Gleichung ein, so erhalten wir nach Ausmultiplizieren der dritten Potenz und nach Zusammenfassen die Gleichung

$$-x^6 + 10x^4 - 27x^2 + 18 = 0.$$

Das ist unangenehm, denn selbst mit der Substitution $u := x^2$ bliebe dies eine Gleichung dritten Grades mit nicht-verschwindendem konstanten Glied, und diese ist ohne Weiteres nicht algebraisch lösbar. Also versuchen wir, andersherum

x durch y auszudrücken: eine Variante, die sich auf den ersten Blick vor allem deshalb nicht anbietet, weil x an keiner Stelle in einem linearen Term auftritt. Diesmal verhilft uns die zweite Gleichung des Systems zu der Gleichung $x^2 = 3 - y$. Eingesetzt in die erste Gleichung führt dies zunächst zu

$$(3 - y)^2 + y^3 = 9$$

und nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen dann zu

$$y^3 + y^2 - 6y = 0.$$

Da hier das konstante Glied nun doch verschwindet, können wir diese Gleichung durch Abspalten von y auf eine quadratische Gleichung mit den Lösungen 2 und -3 reduzieren; diese Lösungen findet man wohl am einfachsten durch die Faktorisierung $y^2 + y - 6 = (y - 2)(y + 3)$. Der Rest ist Routine. Wir notieren den Lösungsweg abschließend als eine einzige Äquivalenzumformung:

Für alle reellen Zahlenpaare (x, y) gilt:

$$\begin{aligned} & x^4 + y^3 = 9 \\ \text{und } & x^2 + y = 3 \\ & \iff \\ & x^4 + y^3 = 9 \\ \text{und } & x^2 = 3 - y \\ & \iff \\ (3 - y)^2 + & y^3 = 9 \\ \text{und } & x^2 = 3 - y \\ & \iff \\ y^3 + y^2 - 6y = & 0 \\ \text{und } & x^2 = 3 - y \\ & \iff \\ y(y - 2)(y + 3) = & 0 \\ \text{und } & x^2 = 3 - y \\ & \iff \\ & y \in \{-3, 0, 2\} \\ \text{und } & x^2 = 3 - y \\ & \iff \\ (x^2, y) \in & \{(6, -3), (3, 0), (1, 2)\} \\ & \iff \\ (x, y) \in & \{(\sqrt{6}, -3), (-\sqrt{6}, -3), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0), (1, 2), (-1, 2)\}. \end{aligned}$$

Bei anderen Gleichungssystemen stößt die Ersetzungsmethode gänzlich an ihre Grenzen:

AUFGABE 5:

Finde alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit der Eigenschaft:

$$x^3 + y^3 = 7 \tag{1.13}$$

$$\text{und } xy(x + y) = -2. \tag{1.14}$$

Keine der beiden Gleichungen eignet sich hier für die Ersetzungsmethode: Zwar erlaubt (1.13), y durch x auszudrücken: $y = \sqrt[3]{7 - x^3}$, doch ein Einsetzen dieses Terms für y in (1.14) führt zu einer allzu komplizierten Gleichung. Die Gleichung (1.14) liefert ihrerseits gar keine befriedigende Darstellung der einen Variablen durch die andere: Wir erhalten zwar $(x + \frac{1}{2}y)^2 = -\frac{2}{y} + \frac{1}{4}y^2$, aber eine weiterführende, praktikable Umformung dieser Gleichung ist nicht zu bewerkstelligen.

Doch schon die schulübliche Lehre von den linearen Gleichungssystemen enthält ja die Idee, Gleichungen zu addieren und auf diese Weise „bessere“ Gleichungen zu erhalten. Doch die unmittelbare Anwendung dieser Idee führt hier nicht zum Ziel, denn die Addition von (1.13) und (1.14) führt zur Gleichung

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 5, \tag{1.15}$$

und diese Gleichung hilft zunächst nicht weiter. Aber immerhin erinnert sie uns an etwas Bekanntes: Die linke Seite von (1.15) ähnelt der Binomischen Formel dritten Grades:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Was in (1.15) fehlt, sind die beiden Koeffizienten vor x^2y bzw. xy^2 . Um sie in (1.15) einzuschmuggeln, müssen wir (1.14) zunächst mit 3 multiplizieren und dann zu (1.13) addieren; dann erhalten wir die Gleichung $(x + y)^3 = 1$, und diese hilft sicherlich weiter. Insgesamt sieht die Lösung so aus:

Für alle reellen Zahlenpaare (x, y) mit $x \neq 0$ gilt:²²

$$\begin{aligned}
 & x^3 + y^3 = 7 \\
 & \text{und } xy(x + y) = -2 \\
 & \iff \\
 & x^3 + y^3 = 7 \\
 & \text{und } 3x^2y + 3xy^2 = -6 \\
 & \iff \\
 & x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1 \\
 & \text{und } 3x^2y + 3xy^2 = -6 \\
 & \iff \\
 & (x + y)^3 = 1 \\
 & \text{und } xy(x + y) = -2 \\
 & \iff \\
 & x + y = 1 \\
 & \text{und } xy(x + y) = -2 \\
 & \iff \\
 & x + y = 1 \\
 & \text{und } xy = -2 \\
 & \iff \\
 & x + y = 1 \\
 & \text{und } y = -\frac{2}{x} \\
 & \iff \\
 & x - \frac{2}{x} = 1 \\
 & \text{und } y = -\frac{2}{x} \\
 & \iff \\
 & x^2 - x - 2 = 0 \\
 & \text{und } y = -\frac{2}{x} \\
 & \iff \\
 & (x - 2)(x + 1) = 0 \\
 & \text{und } y = -\frac{2}{x} \\
 & \iff \\
 & x \in \{2, -1\} \\
 & \text{und } y = -\frac{2}{x} \\
 & \iff \\
 & (x, y) \in \{(2, -1), (-1, 2)\}.
 \end{aligned}$$

²² Der Fall $x = 0$ wird ausgeschlossen, weil im späteren Verlauf der Äquivalenzumformung durch x dividiert werden wird; dass durch diese Maßnahme sicherlich keine Lösung des Gleichungssystems übersehen wird, zeigt (1.14).

Neben der Addition der Gleichungen war die *Faktorisierung* eine wesentliche Idee bei der Lösung von Aufgabe 5: Aus der Summe $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ wurde das Produkt bzw. die Potenz $(x + y)^3$. Eine ähnliche Technik kann auch bei Aufgabe 19 angewendet werden; werden die drei Gleichungen dort summiert, so erhält man bei entsprechender Sortierung der Teilterme die Gleichung

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 0,$$

die nach der Binomischen Formel äquivalent zu

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0$$

ist. Das ist schon fast die ganze Lösung, denn eine Summe von drei Quadraten kann nur dann Null sein, wenn jedes der Quadrate Null ist.

Ähnlich geht es auch bei Aufgabe 22 zu: Die Subtraktion der beiden Gleichungen und eine erneute Faktorisierung mithilfe der Binomischen Formel führen zur Gleichung

$$(x + y)(x - y) - 4(x - y) = 0.$$

Durch Ausklammern von $(x - y)$ kann die Faktorisierung weiter vorangetrieben werden: Die Gleichung

$$(x - y)[x + y - 4] = 0$$

gibt den direkten Blick auf alle Lösungspaare frei.

Das Finden einer geeigneten Faktorisierung ist manchmal schwierig. Neben etwas Erfahrung und Geduld hilft die Bereitschaft, mehrere Varianten zu probieren; in Aufgabe 23 etwa führt die Subtraktion der Gleichungen auf

$$2x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0; \tag{1.16}$$

doch der entscheidende Schritt zur Faktorisierung

$$(x - y)(2x - y + 1) = 0$$

ist alles andere als trivial.²³

Gelegentlich muss die Addition der Gleichungen und die Faktorisierung noch um eine Größenabschätzung der Lösungen ergänzt werden. In Aufgabe 21 führt die Subtraktion der Gleichungen und die anschließende Faktorisierung auf

$$x^2(x - 1) + y^2(y - 1) + z^2(z - 1) = 0, \tag{1.17}$$

²³ Ein Hinweis darauf, dass die Ausklammerung von $(x - y)$ zum Ziel führen könnte, ergibt sich aber immerhin daraus, dass die Ersetzung $y := x$ in (1.16) auf eine allgemeingültige Gleichung führt.

doch lehrt die zweite Ausgangsgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dass als Lösungen hier nur Werte aus dem Intervall $[-1, 1]$ in Frage kommen; deshalb sind die drei Summanden auf der linken Seite von (1.17) allesamt nicht-positiv. Wäre also auch nur einer dieser Summanden tatsächlich negativ, so könnte deren Summe nicht Null sein; alle drei Summanden sind also gleich Null. Damit ist die Aufgabe fast gelöst.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 6: Ein Goldsucher hat vier Goldklumpen gefunden. Mit einer Balkenwaage stellt er fest:

- Die Goldklumpen A und B sind zusammen genauso schwer wie C und D zusammen.
- B und C sind zusammen leichter als A und D zusammen.
- B allein hingegen ist schwerer als A und C zusammen.

Ordne die Goldklumpen nach ihrem Gewicht!

AUFGABE 7:

- a) Bestimme alle ganzzahligen Paare (a, b) , für die $a + b \geq a^2 + b^2 - 1$ gilt.
- b) Zeige, dass für beliebige Paare (a, b) reeller Zahlen stets $a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$ gilt.

AUFGABE 8: Es seien x, y reelle Zahlen mit $y \geq 0$ und $y \cdot (y + 1) \leq (x + 1)^2$. Zeige, dass dann $y \cdot (y - 1) \leq x^2$ gilt.

AUFGABE 9: Es seien a, b, c, x und y positive reelle Zahlen. Zeige, dass wenigstens eine der Zahlen $\frac{x}{a(b+c)}$ und $\frac{y}{c(a+b)}$ kleiner ist als $\frac{x+y}{b(a+c)}$.

Hinweis: Hat man die Aussage A oder B zu beweisen, so besteht die übliche Strategie darin, aus der Negation von A die Aussage B zu folgern.

AUFGABE 10: Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen y , die die Bedingung erfüllen, dass für jede reelle Zahl x die folgende Ungleichung gilt:

$$x^2 + (y + 2)x + 8y + 1 > 0.$$

AUFGABE 11: Prüfe, ob für alle reellen Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0$, $b + c \neq 0$ und $b + d \neq 0$ die folgende Implikation gilt:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}.$$

Ändert sich etwas, wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, dass a, b, c, d positiv sind?

AUFGABE 12: Robert, Stefan und Tilo nehmen an einem Kraftsportwettbewerb teil. Robert schafft 20 Klimmzüge. Stefan nimmt sich vor, mindestens 80 % der Leistungen von Robert und Tilo zusammen zu erreichen; Tilo will mindestens 60 % der Leistungen von Robert und Stefan zusammen schaffen. Wie viele Klimmzüge müssen Stefan und Tilo zusammen *mindestens* schaffen, damit beide ihre Vorhaben umsetzen?

AUFGABE 13: Scheich Olim hat verfügt, dass nach seinem Tod sein gesamtes Vermögen auf seine vier Söhne Alim, Elim, Ilim und Ulim aufgeteilt werden soll. Die Aufteilung wird dabei auf folgende Weise geregelt:

- Alim erhält genau so viel wie Elim mehr als Ilim bekommt.
 - Alim und Ulim bekommen zusammen so viel wie Elim und Ilim zusammen.
 - Ulim erhält weniger als Alim und Ilim zusammen.
 - Kein Sohn geht leer aus und keine zwei Söhne erhalten gleich viel.
- a) Zeige, dass sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welcher Sohn den größten und welcher den kleinsten Anteil des Vermögens bekommt.
- b) Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welcher der anderen beiden Söhne den größeren Anteil erhält.

AUFGABE 14: Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, dass während eines Schuljahres die Anzahl der Chormitglieder um 4 % ihres Anfangswertes zugenommen hat und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtmitglieder um 7 % ihres Anfangswertes abgenommen hat.

- a) Wir nehmen an, dass die o.a. Werte *genau* stimmen: Wie groß war dann die Anzahl der Chormitglieder zu Beginn des Schuljahres?
- b) Nachträglich wird mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma gerundet. Ist demnach die in a) gesuchte Anzahl immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, so bestimme alle diejenigen Werte für die in a) gesuchte Anzahl, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4 % und 7 % führen.

AUFGABE 15: Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}xy &= 2 \\ \text{und } xz &= 3 \\ \text{und } x^2 + y^2 &= 5.\end{aligned}$$

AUFGABE 16: Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2 \\ \text{und } x^4 + y^4 &= 4.\end{aligned}$$

AUFGABE 17: Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}(x + y)^2 - 3(x + y) &= 4 \\ \text{und } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

AUFGABE 18: Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}x + yz &= 1 \\ \text{und } y + zx &= 1 \\ \text{und } z + xy &= 1.\end{aligned}$$

AUFGABE 19: Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x^2 - 2y + 1 &= 0 \\ \text{und } y^2 - 2z + 1 &= 0 \\ \text{und } z^2 - 2x + 1 &= 0.\end{aligned}$$

AUFGABE 20: Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x^3 &= y^2 - 1 \\ \text{und } x^2 &= y + 1.\end{aligned}$$

AUFGABE 21: Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= 0 \\ \text{und } x^2 + y^2 + z^2 &= 0.\end{aligned}$$

AUFGABE 22: Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x^2 + 4y &= 21 \\ \text{und } y^2 + 4x &= 21.\end{aligned}$$

AUFGABE 23: Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}2x^2 - 2xy + y^2 &= x \\ \text{und } 4x^2 - 5xy + 2y^2 &= y.\end{aligned}$$

Aufgaben zu Summenformeln

Wir diskutieren nun Aufgaben zu den Formeln für die Summe aufeinanderfolgender Zahlen bzw. Quadratzahlen.

AUFGABE 24:

Ein König will seinen beiden Söhnen einen Schatz vererben. Der Schatz besteht aus 22 Goldstücken; sie wiegen 1 g, 2 g, . . . , 21 g, 22 g. Er versucht, die Goldstücke so aufzuteilen, dass beide Söhne gleich viel Gold bekommen. Als ihm das nicht gelingt, fragt er seinen Freund, den königlichen Schatzmeister, um Rat. Dieser ist Amateur-Mathematiker und macht folgenden Vorschlag: „Lass uns eine Münze werfen: Falls sie dein Antlitz zeigt, bekommst du von mir ein 23 g-Goldstück; dann wird dir eine gleichmäßige Aufteilung an deine Söhne gelingen. Falls nicht, bekomme ich deine Goldstücke von 21 g und 22 g Gewicht. Auch dann kannst du deinen Schatz gerecht verteilen.“

- a) Zeige, dass in der Tat für 20 Goldstücke und für 23 Goldstücke eine gerechte Verteilung möglich ist, für 22 Goldstücke aber nicht.
- b) Für welche Anzahlen n von Goldstücken mit einer Gewichtsverteilung von 1 Gramm bis n Gramm ist eine gerechte Verteilung möglich, für welche nicht?

Wir beginnen mit der zweiten Teilaufgabe, deren Lösung die erste Teilaufgabe umfasst. Eine Anzahl von n Goldstücken lässt offenbar nur dann eine gerechte Verteilung zu, wenn die Summe $1+2+\dots+n$ *gerade* ist. Nach der Summenformel ist diese Summe gleich $\frac{n(n+1)}{2}$. Diese Zahl ist offenbar genau dann gerade, wenn das Produkt $n(n+1)$ durch 4 teilbar ist. Da aber einer der Faktoren jedenfalls ungerade ist, ist dies genau dann der Fall, wenn entweder n durch 4 oder $n+1$ durch 4 teilbar ist. Aber selbst dann wissen wir nur, dass das Gesamtgewicht des Goldes, gemessen in Gramm, eine *gerade* Zahl ist. Wir werden jetzt darüber hinaus zeigen, dass dann auch eine *konkrete* Verteilung der Goldstücke in zwei Teil-Schätze mit gleicher Goldmasse möglich ist:

Falls n durch 4 teilbar ist, greifen wir zurück auf die ursprüngliche Idee von Gauß: Wir gruppieren die n Goldstücke in Paaren gleicher Masse, d.h.: $(1, n)$, $(2, n-1)$, . . . , $(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n+1)$. Wegen der Teilbarkeit von n durch 4 ist die Anzahl der Paare, also $\frac{n}{2}$, gerade, so dass jeder der beiden Königssöhne die gleiche Anzahl von Paaren bekommen kann.

Ist $n + 1$ durch 4 teilbar, so gilt $n \geq 3$. Wir teilen die drei leichtesten Goldstücke gerecht auf, indem der eine Sohn das 3 g -Goldstück, der andere Sohn die beiden anderen Goldstücke bekommt. Es bleiben $n - 3$ Goldstücke aufzuteilen (möglicherweise also keines), und diese Anzahl ist durch 4 teilbar (wegen der entsprechenden Teilbarkeit von $n + 1$). Diese $n - 3$ Goldstücke können daher wie im ersten Fall gerecht aufgeteilt werden: $(4, n), (5, n - 1), \dots, (\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2})$.

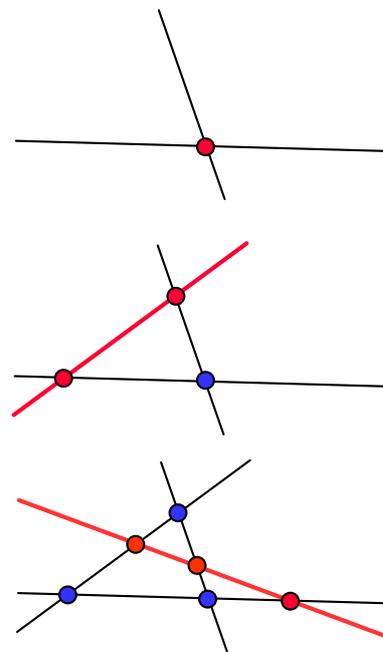
Die Aufgabe 24 vereint eine ganze Reihe von didaktischen Vorzügen in sich – ganz abgesehen von der ansprechenden Rahmenhandlung. Wir haben durch die beiden Teilaufgaben eine Staffelung des Schwierigkeitsgrads: Teil a) ist ganz ohne Buchstabenrechnen lösbar, mit etwas mehr Aufwand sogar ohne die Summenformel. Dennoch bereitet dieser Teil die allgemeine Situation in b) gut vor. Diese Staffelung verkörpert die Verzahnung von Arithmetik und Algebra, von konkreten Zahlen und Variablen. Teil b) wird ohne die Summenformel nur mühsam zu lösen sein. Der notwendige Ausflug in das Reich der Zahlentheorie ist reizvoll und erinnert daran, dass das Lösen von Gleichungen nicht immer auf algebraischem Wege geschieht; dennoch ist die Argumentation hier auch für Schüler ohne formale Kenntnisse der Zahlentheorie zugänglich, da nur sehr grundlegende Konzepte benutzt werden (Teilbarkeit durch 2 und 4). Unter logischen Gesichtspunkten ist Teil b) deshalb interessant, weil sich herausstellt, dass sich eine *gerade* Grammmzahl für eine gerechte Verteilung des Goldes zwar als *notwendig*, aber zunächst nicht unbedingt als *hinreichend* erweist; erst auf den zweiten Blick zeigt sich, dass dies doch der Fall ist, und es ist reizvoll, dass man dabei auf die ursprüngliche Gauß-Idee verweisen kann, die der klassischen Herleitung der Summenformel zugrunde liegt. Schließlich ist es didaktisch bemerkenswert, dass der zweite Fall ($n + 1$ ist durch 4 teilbar) durch eine einfache Maßnahme auf den ersten Fall (n ist durch 4 teilbar) zurückgeführt werden kann: Dies illustriert das sehr allgemeine heuristische Prinzip, gewisse mathematische Situationen auf andere, bereits verstandene Situationen zu reduzieren.

In der folgenden Aufgabe findet die Gaußsche Summenformel eine Verwendung in geometrischem Kontext:

AUFGABE 25:

Auf ein Blatt Papier sind 15 Geraden gezeichnet worden; alle Schnittpunkte sind markiert. Wie viele Schnittpunkte können dies höchstens sein?

Diese Aufgabe ist reizvoll und lehrreich, weil sie in besonderem Maße den Vorteil systematischen Denkens gegenüber kopflosem Aktionismus demonstriert: Wer hier aufs Geratewohl 15 Geraden zeichnet und die Schnittpunkte zu zählen beginnt, wird an der Unübersichtlichkeit der Situation wohl schnell verzweifeln. Stattdessen sollten wir kleine, übersichtliche Spezialfälle betrachten (siehe Bild): Bei zwei Geraden gibt es offenbar maximal *einen* Schnittpunkt; tritt eine dritte Gerade hinzu, so kann diese bestenfalls mit jeder der beiden ersten Geraden einen weiteren Schnittpunkt haben; wir haben also zwei neue Schnittpunkte, insgesamt $1 + 2$. Eine vierte Gerade wird maximal drei neue Schnittpunkte produzieren; wir haben also jetzt $1 + 2 + 3$ Schnittpunkte. Eine naheliegende induktive Fortsetzung dieser Betrachtung führt zu der Einsicht, dass wir es bei 15 Geraden mit maximal



$$1 + 2 + 3 + \dots + 13 + 14$$

Schnittpunkten zu tun haben. Die Gaußformel erspart uns das mühselige Addieren und zeigt, dass es maximal 105 Schnittpunkte sind. Es sind zahlreiche Varianten dieser Aufgabe denkbar; wir verweisen insbesondere auf Aufgabe 28.

AUFGABE 26:

Zu Dekorationszwecken sollen gleich große Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.
- (2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.
- (3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.

- (4) Von jeder der drei Sorten findet dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.
- (5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.
- (6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.

Bestimme die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, alle Bedingungen zu erfüllen.

Wir nennen die Anzahl der Reihen n und die gemäß Bedingung (4) feste Anzahl der Büchsen pro Sorte a . Nach den Bedingungen (1), (2) und (4) und gemäß der Summenformel gilt dann

$$\frac{n(n+1)}{2} = 3a,$$

also

$$\frac{n(n+1)}{6} = a. \tag{1.18}$$

In der untersten (längsten) Büchsenreihe stehen n Büchsen, die alle von derselben Sorte sind; daher ist $a \geq n$. Aus (1.18) folgt somit $n \geq 5$. Die kleinsten denkbaren Werte für n sind also 5, 6, 7 und 8. Doch $n = 7$ scheidet aus, da (1.18) ansonsten auf einen nicht-ganzzahligen Wert für a führt.

Im Fall $n = 5$ hätten wir fünf Reihen und fünf Büchsen pro Sorte. Die (blaue) Sorte in der Dreier-Reihe muss dann auch in der Zweier-Reihe auftreten; anders können die fünf Büchsen dieser Sorte nicht untergebracht werden (siehe Bild 1.5, links). Doch ist dann Bedingung (6) verletzt. Somit ist $n \neq 5$.

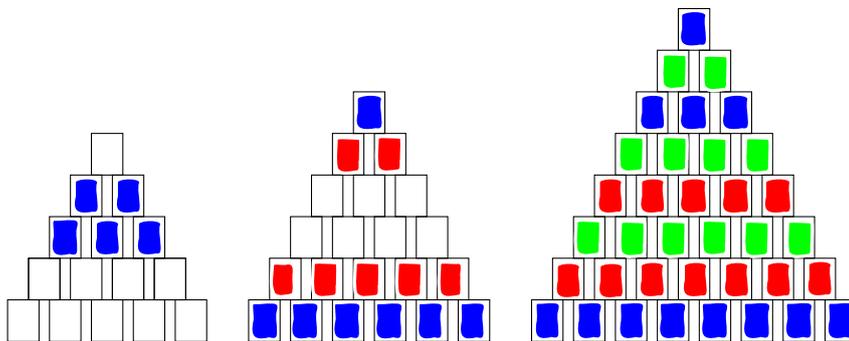


BILD 1.5: Aufgestapelte Büchsen (zu Aufgabe 26)

Auch der Fall $n = 6$ scheidet aus: Denn hier gäbe es sieben Büchsen pro Sorte. Wir markieren die Sorte der Sechser-Reihe mit blauer Farbe. Diese Sorte muss dann auch in der Einer-Reihe vorkommen. Eine andere Sorte (rot) muss mit analoger Argumentation die Fünfer- und die Zweier-Reihe füllen. Die letzte Sorte kommt dann also in den beiden mittleren Reihen vor, was erneut Bedingung (6) verletzt (siehe Bild 1.5, Mitte).

Es gibt also mindestens acht Reihen. Im Fall $n = 8$ haben wir zwölf Büchsen pro Sorte. In der Tat können diese 36 Büchsen regelkonform angeordnet werden (siehe Bild 1.5, rechts).

Aufgabe 26 wäre auch ohne Summenformel lösbar. Man könnte für jede Anzahl von Reihen die entsprechende Anzahl der Büchsen durch schlichte Addition bestimmen, und daraus wiederum die Anzahl der Büchsen pro Sorte bestimmen. Doch *mit* der Summenformel kann die wohl entscheidende Hürde dieser Aufgabe besonders elegant überwunden werden; diese Hürde besteht darin, dass *zwei* wesentliche Größen unbekannt sind: Die Anzahl n der Reihen und die Anzahl a der Büchsen pro Sorte. Die aus der Summenformel abgeleitete Gleichung (1.18) erhellt die Beziehung zwischen beiden Größen und eröffnet dadurch den Zugang zur systematischen und übersichtlichen Lösung der Aufgabe durch eine Fallunterscheidung. An dieser Aufgabe wird also unter anderem das Aufdecken des funktionalen Zusammenhangs zweier Größen geübt – ein zentrales Motiv elementarer Algebra.

Außerdem stellt Aufgabe 26 beachtliche Herausforderungen an die *gedankliche Organisation* des Aufgabenlösers: Immerhin sind sechs Bedingungen zu beachten, und diese können nicht alle gleichzeitig betrachtet werden. Doch erkennt man schnell, dass die Bedingungen (1) bis (3) die allgemeine Situation etablieren; sie müssen zunächst verstanden und berücksichtigt werden und spielen danach keine besondere Rolle mehr. Bedingung (4) sorgt dann für den Zusammenhang der relevanten Unbekannten n und a und gibt den Anstoß zur Benutzung der Summenformel. Die Bedingungen (5) und (6) schließlich sind dafür zuständig, die kleinsten denkbaren Fälle für n auszuschließen; sie müssen also als letztes Berücksichtigung finden. Freundlicherweise entspricht also die Reihenfolge der Bedingungen in der Auflistung der natürlichen, logischen Reihenfolge. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe wäre sicher höher, wenn diese Reihenfolge gestört würde.

AUFGABE 27:

Ein Obsthändler möchte Apfelsinen auf folgende Art und Weise aufstapeln: In der untersten Schicht liegen $a \cdot b$ Apfelsinen in einem Rechteck aus a Reihen mit je b Apfelsinen. In der zweiten Schicht liegen in den Vertiefungen dann $(a - 1) \cdot (b - 1)$ Apfelsinen. So wird weiter gestapelt, bis in der obersten Schicht nur eine einzelne komplette Reihe Apfelsinen liegt (im Fall $a = b$ nur eine einzige Apfelsine).

- a) Wie viele Apfelsinen werden im Fall $a = 12, b = 9$ benötigt?
- b) Kann der Händler einen derartigen Stapel aus genau 2018 Apfelsinen bauen? Wenn ja, mit welchen Anzahlen a und b in der untersten Schicht kann er beginnen?

Teilaufgabe a) könnte durch schlichtes Nachrechnen erledigt werden. Da für b) aber ohnehin mit Variablen hantiert werden muss, betrachten wir die Angelegenheit gleich in voller Allgemeinheit. Wir fixieren daher jetzt zwei natürliche Zahlen a, b mit $a \geq b$; die Anzahl der in diesem Fall benötigten Apfelsinen ist offenbar durch

$$\sum_{k=0}^{b-1} (a - k)(b - k)$$

gegeben. Wir führen eine Termumformung durch; zunächst mit Hilfe einer Variablentransformation, dann mit dem Distributivgesetz und später mithilfe der Summenformeln. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{b-1} (a - k)(b - k) &= \sum_{k=1}^b (a - (k - 1))(b - (k - 1)) \\ &= \sum_{k=1}^b (a - k + 1)(b - k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^b [ab + a + b + 1 - k(a + b + 2) + k^2] \\ &= \left[(ab + a + b + 1) \cdot \sum_{k=1}^b 1 \right] - \left[(a + b + 2) \cdot \sum_{k=1}^b k \right] + \sum_{k=1}^b k^2 \\ &= b(b + 1)(a + 1) - (a + b + 2) \cdot \frac{b(b+1)}{2} + \frac{b(b+1)(2b+1)}{6} \\ &= b(b + 1) \frac{3a - b + 1}{6}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Damit ist Aufgabe a) schnell geklärt: Im Fall $a = 12, b = 9$ benötigt der Händler

420 Apfelsinen. Aufgabe b) ist schwerer: Hier ist die Gleichung

$$b(b+1)\frac{3a-b+1}{6} = 2018$$

zu lösen, also

$$b(b+1)(3a-b+1) = 12108. \tag{1.20}$$

Mit Algebra allein kommen wir hier nicht zum Ziel; wir müssen die Zahlentheorie heranziehen. Offenbar sind b und $b+1$ zwei aufeinanderfolgende Zahlen, die beide Teiler von 12108 sind. Erfreulicherweise ist die aufsteigende Primpotenzzzerlegung von 12108 sehr schlicht, nämlich $(2^2, 3, 1009)$. Gleichung (1.19) zeigt deutlich, dass der Faktor 1009 in b nicht enthalten sein kann (sonst wäre die linke Seite der Gleichung viel zu groß). Es kommen also nur noch die Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 12 in Frage. Die Teiler 6 und 12 haben jedoch keinen Teiler von 12108 als Nachbarn und scheiden aus. Die Fälle $b = 1$, $b = 2$ und $b = 3$ werden überprüft, indem die Gleichung (1.20) nach a umgestellt wird: Der Fall $b = 1$ führt demnach zu keinem ganzzahligen Wert von a , die beiden anderen Fälle hingegen schon. Es ergeben sich die Lösungen $(a, b) = (673, 2)$ bzw. $(a, b) = (337, 3)$.

In ästhetischer Hinsicht sind die beiden Lösungen von Aufgabe 27 b) eine Enttäuschung: Der Apfelsinenstapel ist jedenfalls ziemlich lang und sehr flach. Mithilfe von Gleichung (1.19) fällt es aber leicht, die Aufgabe so zu variieren, dass interessante Werte für a und b auftreten; man kann diese Zahlen ja vorgeben. Man darf vermuten, dass der Lösungsprozess relativ leicht fällt, wenn a und b Primzahlen sind. Ein Vorschlag in dieser Richtung wäre der Fall $a = 19, b = 17$ (mit 2040 Apfelsinen).

Aufgabe 27 ist in Teil b) sehr anspruchsvoll. Schon die Herleitung von Formel (1.19) verlangt neben soliden Fähigkeiten der Termumformung die Beherrschung des Summenzeichens, denn ohne die \sum -Schreibweise würde die Notation der Gleichungen sehr unübersichtlich werden. Auch diesbezügliche Rechenregeln – etwa das „Herausziehen“ konstanter Faktoren aus der Summe – müssen hier angewendet werden, was durchschnittlichen Schülern schwerfallen dürfte. Die anschließende Verbindung zur Zahlentheorie untermauert den hohen Schwierigkeitsgrad der Aufgabe und erhöht gleichzeitig ihr didaktisches Potential.

Die Aufgaben 32 und 33 sind ähnlich aufgebaut wie Aufgabe 27 und verlangen für vollständig allgemeine Lösungen Rechnungen, die dem Lösungsweg von Aufgabe 27 recht nahe kommen. Die recht speziellen Fragen der beiden Aufgaben sind jedoch auch elementar lösbar – mit rein arithmetischen Mitteln.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 28: Auf ein Blatt Papier sind einige Geraden gezeichnet; alle Schnittpunkte sind markiert. Wir zählen diese Schnittpunkte:

- a) Es sind 55 Schnittpunkte. Wie viele Geraden sind es also mindestens?
- b) In einem anderen Fall sind es 72 Schnittpunkte. Wie viele Geraden sind es dann mindestens; und welche Möglichkeiten gibt es in diesem minimalen Fall für die Anzahl derjenigen Geraden, die (abgesehen von sich selbst) keine Parallelen haben?

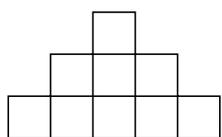
AUFGABE 29: Im Zuschauerraum eines Theaters gibt es 30 Reihen mit Sitzplätzen. In jeder Reihe sind zwei Plätze mehr vorhanden als in der vorausgehenden. Wie viele Sitzplätze gibt es insgesamt in dem Theater, wenn in der 15. Reihe 50 Sitzplätze vorhanden sind?

AUFGABE 30: Aus zwei Karten kann man das „Erdgeschoss“ eines Kartenhauses bauen, aus sieben Karten sogar ein zweistöckiges Kartenhaus (siehe Bild).



- a) Wie viele Karten benötigt man für ein vierstöckiges Haus?
- b) Wie viele Stockwerke hat das Kartenhaus, das man aus den 104 Karten eines Kartenspiels bauen kann? Wie viele Karten bleiben übrig?

AUFGABE 31: Wir legen Muster aus Quadraten gleicher Größe. Wir beginnen mit *einem* Quadrat; jede folgende Schicht hat rechts und links ein Quadrat mehr als die vorige Schicht. Wir bauen dieses Muster zunächst mit drei Schichten (siehe Bild).



- a) Wie viele Quadrate brauchen wir jeweils, wenn wir fünf Schichten, sechs Schichten und dann sieben Schichten legen möchten?
- b) Finde eine Formel, mit der wir aus der Anzahl s der Schichten die Anzahl q der benötigten Quadrate berechnen können.
- c) Wie viele Schichten können wir gemäß der Formel aus b) aus 400 Quadraten bauen?

AUFGABE 32: Im Obstladen werden Orangen zu einer regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. In jeder Schicht bilden die Orangen ein gleichseitiges Dreieck (und füllen natürlich auch das Dreiecksinnere aus). In jeder folgenden Schicht liegen die Orangen über den Lücken der nächsttieferen Schicht.

- a) Wie viele Orangen enthält eine siebenschichtige Pyramide?
- b) Wie viele Schichten kann man mit 560 Orangen aufbauen?

AUFGABE 33: In einem Sportgeschäft soll eine Schaufensterdekoration aus Tennisbällen entstehen. Die Bälle sollen eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche bilden; auch das Innere des Quadrats wird mit Bällen gefüllt. In jeder folgenden Schicht liegen die Bälle auf den Lücken der nächstunteren Schicht.

- a) Wie viele Bälle bräuchte der Dekorateur für fünf Schichten?
- b) Der Dekorateur hat 300 Bälle zur Verfügung, von denen er so viele wie möglich für seine Pyramide einsetzen will. Wie viele Schichten hat die entstehende Pyramide, und wie viele Bälle bleiben übrig?
- c) Diese Zahl von ungenutzten Bällen ist dem Dekorateur zu hoch. So geht er zum Lager und holt neue Hunderter-Kartons mit Tennisbällen. Schafft er es, mit 400, 500, 600, 700, 800, 900 oder 1000 Bällen eine Pyramide zu bauen und dabei weniger Bälle übrig zu behalten?
- d) Ein anderer Dekorateur hat eine solche Pyramide aus genau 2109 Bällen gebaut. Wie viele Schichten hat seine Pyramide?

Hinweis: Mit der Summenformel und etwas Teilbarkeitslehre ist diese Teilaufgabe auch ohne systematisches Probieren lösbar. Die Teilbarkeitslehre wiederum kann durch Benutzung der Abschätzung $n(n+1)(2n+1) \approx n \cdot n \cdot 2n$ ebenfalls vermieden werden.

AUFGABE 34: Die bei einer Lotterie ausgeschütteten Gewinne waren sämtlich voneinander verschieden. Der höchste Gewinn war 88-mal so groß wie der niedrigste Gewinn. Jeder der drei höchsten Gewinne unterschied sich von dem nächstniedrigeren Gewinn um 15000 €. Die übrigen Gewinne waren ebenfalls um einen gleichen Betrag abgestuft; der kleinste Gewinn betrug 5000 €, der drittniedrigste 18000 €. Ermittle die Anzahl der Gewinne und die insgesamt ausgeschüttete Gewinnsumme.

AUFGABE 35: Bei einer Diskussion in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Jan, er habe eine Quadratzahl n^2 (größer als 1) als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren. Anke meint daraufhin: „Jede Quadratzahl n^2 ist als Summe von n verschiedenen natürlichen Zahlen darstellbar.“ Bernd fragt: „Gibt es eigentlich auch Quadratzahlen n^2 , die sich als Summe von $2 \cdot n$ verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen lassen?“ Beweise Ankes Behauptung und beantworte Bernds Frage.

Aufgaben zu Mittelwertungleichungen

In diesem Abschnitt werden wir uns auf die AM-GM-Ungleichung konzentrieren, ohne die anderen Mittelwertungleichungen völlig zu vernachlässigen. Außerdem beschränken wir uns im Allgemeinen auf die Anwendung der Mittelwertungleichungen auf zwei bzw. drei Zahlen.

Das erste didaktische Ziel ist, ein Gefühl für die AM-GM-Ungleichung *als Instrument* zur Lösung von Aufgaben zu bekommen. Diese Ungleichung wird gern herangezogen, wenn in einer bestimmten Situation Zahlen betrachtet werden, deren Summe fest vorgegeben ist, über deren Produkt aber zunächst nichts bekannt ist. Die AM-GM-Ungleichung sorgt dann für eine *obere* Abschätzung dieses Produkts. Ist hingegen das Produkt fixiert, so bewirkt dieselbe Ungleichung eine *untere* Abschätzung der Summe. Genaueres drücken die folgenden Folgerungen aus der AM-GM-Ungleichung aus:

Folgerungen aus der AM-GM-Ungleichung:

F 1: Wir betrachten zwei positive reelle Zahlen a, b mit der Summe s .

Dann gilt für ihr Produkt: $a \cdot b \leq \frac{1}{4}s^2$.

F 2: Wir betrachten zwei positive reelle Zahlen a, b mit dem Produkt p .

Dann gilt für ihre Summe: $a + b \geq 2\sqrt{p}$.

F 3: Wir betrachten drei positive reelle Zahlen a, b, c mit der Summe s .

Dann gilt für ihr Produkt: $a \cdot b \cdot c \leq \frac{1}{27}s^3$.

F 4: Wir betrachten drei positive reelle Zahlen a, b, c mit dem Produkt p .

Dann gilt für ihre Summe: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{p}$.

Gleichheit gilt jeweils genau dann, wenn alle betrachteten Zahlen identisch sind.

Die Folgerungen zeigen, wie die AM-GM-Gleichung aus verschiedenen Perspektiven betrachtet werden kann. F 1 beispielsweise aktiviert in der ursprünglichen AM-GM-Ungleichung gewissermaßen den *Einzelzahlaspekt* des arithmetischen Mittels und den *Bereichsaspekt* des geometrischen Mittels bzw. der entsprechenden Faktoren.²⁴ Dies ist didaktisch hilfreich, da hier eine Möglichkeit der Instrumentalisierung der AM-GM-Ungleichung erhellt wird, die für viele Aufgaben nützlich ist. Die Aufgaben 36, 38, 39, 41 und 46 bieten sich für diese Methode an.

²⁴ Diese Begriffe werden auf Seite 29 erläutert.

Für F 1 und F 2 gibt es weitverbreitete geometrische Deutungen: Unter allen Rechtecken mit demselben Umfang ist das Quadrat dasjenige mit der größten Fläche; und unter allen Rechtecken mit derselben Fläche ist das Quadrat dasjenige mit dem kleinsten Umfang. Aufgabe 43 stellt eine weitere anschauliche Interpretation der verschiedenen Mittelwerte bereit. Für die Lösung algebraischer Aufgaben sind die Interpretationen der Aussagen F 1 bis F 4 aber sicherlich hilfreicher.

Eine unmittelbare Anwendung von F 3 und F 4 liefert die folgende Aufgabe:

AUFGABE 36:

- a) Es sind drei positive Zahlen mit der Summe 30 anzugeben, deren Produkt möglichst groß ist.
- b) Es sind drei positive Zahlen mit dem Produkt 64 anzugeben, deren Summe möglichst klein ist.

F 3 sagt hier sofort, dass bei Aufgabe 36 a) die Zahlen 10, 10, 10 zu wählen sind, denn größer als 1000 kann das Produkt nicht werden. F 4 sorgt bei Aufgabe b) für die Wahl von 4, 4, 4; denn kleiner als 12 wird keine der betrachteten Summen sein.

Die Kraft der AM-GM-Ungleichung und ihrer Folgerungen zeigt sich bei Aufgabe 36 weniger beim *Finden* der Zahlen – denn diese drängen sich förmlich auf –, sondern vor allem beim formalen *Beweis* dafür, dass die Wahl dieser Zahlen tatsächlich optimal ist.

Das geometrische Mittel ist nur dann gleich dem arithmetischen Mittel, wenn die betrachteten Zahlen gleich sind; eine Zahlenmenge hat also nur dann eine Übereinstimmung von arithmetischem und geometrischem Mittel, wenn die Zahlenmenge keine *Streuung* aufweist. In der Tat können wir die Differenz der beiden Mittelwerte als ein Maß für die Streuung der betrachteten Zahlenmenge interpretieren: Je unterschiedlicher die Zahlen sind, desto mehr wird das geometrische Mittel vom arithmetischen Mittel nach unten abweichen. Diese Interpretation wird durch folgenden Satz abgesichert:

Satz über die Differenz von arithmetischem und geometrischem Mittel.²⁵ Seien x_1, x_2, \dots, x_n positive reelle Zahlen, und seien m und M das

²⁵ Dieser Satz und sein Beweis sind Gegenstand von Problem 247 aus dem Journal *Crux Mathematicorum*, Jahrgang 1977; sinngemäß wiedergegeben nach <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/math4u/ineq.pdf> (dort auf Seite 7 mit der Nr. 395)

Minimum bzw. das Maximum dieser Zahlen. Wir definieren

$$r := \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$$

und bezeichnen das arithmetische bzw. geometrische Mittel der Zahlen x_k mit A bzw. G . Dann gilt die Ungleichungskette

$$\frac{1}{2n^2} \frac{r}{M} \leq A - G \leq \frac{1}{2n^2} \frac{r}{m}.$$

Wir versuchen nun mithilfe eines Beispiels eine anschauliche Interpretation dieses Satzes: Dazu betrachten wir die Menge aller Tripel von positiven reellen Zahlen mit dem arithmetischem Mittelwert 8. Alle diese Tripel haben einen geometrischen Mittelwert, der 8 nicht übersteigt. Diejenigen Tripel mit einem geometrischen Mittelwert zwischen 7 und 8 müssten also solche mit einer relativ geringen Streuung sein. In Bild 1.6 sind diese Tripel blau hervorgehoben, oder präziser: In Bild 1.6 sind alle Elemente der Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid g(x, y, 24 - x - y) > 7\}$$

in einem kartesischen Koordinatensystem in verschiedenen Blautönen markiert. Die dritte Koordinate der Tripel tritt dabei stets nur implizit in der Form $z := 24 - x - y$ auf, als automatische Komplettierung von (x, y) , die sicherstellt, dass das arithmetische Mittel von x, y, z immer 8 ist. Die Darstellung verdeutlicht, wie die Tripel mit wachsendem geometrischen Mittelwert in Richtung des Zentrums $(8, 8, 8)$ gedrängt werden; jenem Tripel, bei dem sogar der geometrische Mittelwert gleich 8 ist.

Wir diskutieren nun eine Aufgabe, bei der diese Einschnürung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittelwert eine zentrale Rolle spielt:

AUFGABE 37:

Man bestimme alle Tripel (x, y, z) von natürlichen Zahlen mit $x \leq y \leq z$ und folgenden Eigenschaften:

- (1) Das arithmetische Mittel der Zahlen ist 8.
- (2) Das geometrische Mittel der Zahlen ist größer als 7,85.
- (3) Das harmonische Mittel der drei Zahlen ist kleiner als 7,75.²⁶

²⁶ Wer meint, dass in dieser Aufgabe zu viele Mittelwerte auftreten, kann die dritte Bedingung ohne Schaden fallen lassen; allerdings hat die Aufgabe dann vier Lösungen.

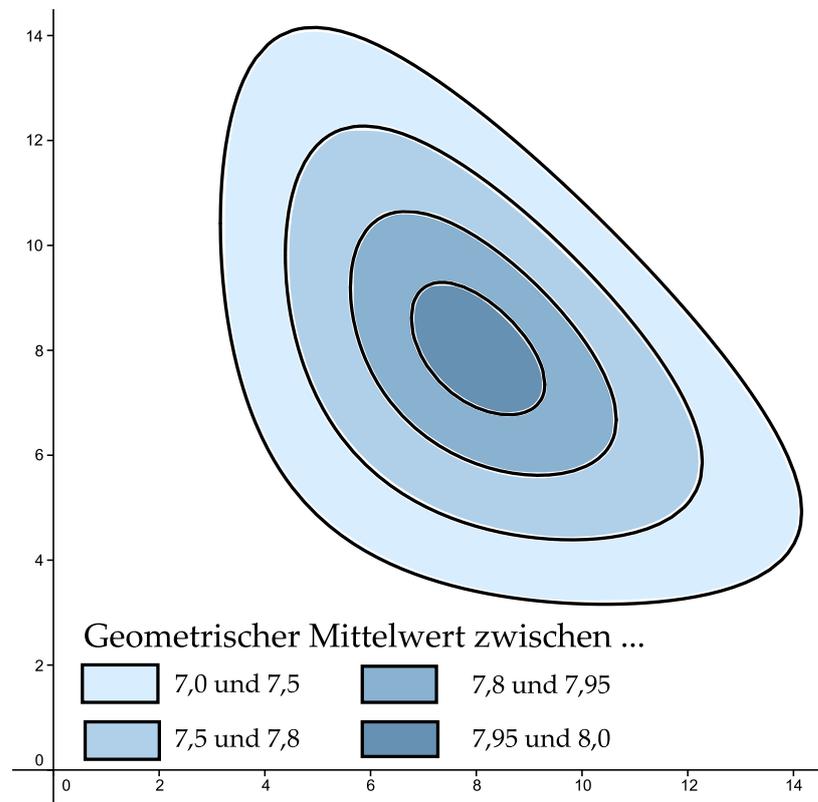


BILD 1.6: Bereiche von ähnlichen geometrischen Mittelwerten

Wir betrachten zunächst nur die ersten beiden Bedingungen. Als Konsequenz der ersten Bedingung und der AM-GM-Ungleichung muss das geometrische Mittel der drei Zahlen kleiner oder gleich 8 sein. Zusammen mit der zweiten Bedingung sorgt dies für eine enge Einschnürung der in Frage kommenden Tripel. In Bild 1.7 zeigt die geschlossene Kurve die äußere Begrenzung des Bereiches, in dem die Tripel mit einem geometrischen Mittelwert jenseits von 7,85 liegen. Mithilfe der Abbildung ist leicht zu erkennen, dass nur wenige Tripel mit ganzzahligen Koordinaten in Frage kommen. Dabei repräsentieren die 13 Punkte in Bild 1.7 lediglich vier verschiedene *geordnete* Tripel. Punkte gleicher Farbe gehören zu demselben geordneten Tripel; die roten Punkte beispielsweise zu $(7, 8, 9)$.

Wie aber findet man diese Tripel ohne eine vom Computer hergestellte Graphik? Wieder hilft die AM-GM-Ungleichung, diesmal allerdings auf je *zwei* Zahlen angewendet, indem „kleine“ Werte für x ausgeschlossen werden. Zunächst

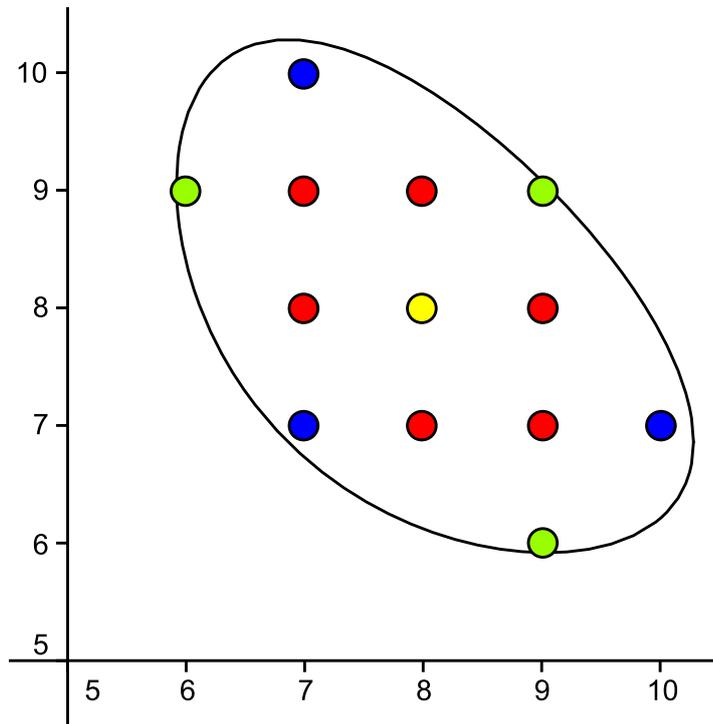


BILD 1.7: Zu Aufgabe 37

einmal übersetzen wir die erste Bedingung des Aufgabentextes in

$$x + y + z = 24 \quad (1.21)$$

und die zweite in

$$x \cdot y \cdot z \geq 7,85^3, \quad \text{also } x \cdot y \cdot z \geq 484. \quad (1.22)$$

Wäre nun x „klein“, etwa $x = 5$, so folgte aus Gleichung (1.21) die Beziehung

$$y + z = 19,$$

und (1.22) würde auf die Ungleichung

$$y \cdot z \geq \frac{484}{5}, \quad \text{also } y \cdot z \geq 97$$

führen. Das ergäbe aber einen Widerspruch, denn das arithmetische Mittel von y und z wäre mit $9,5$ kleiner als das geometrische Mittel mit mindestens $\sqrt{97} \approx 9,8$. Dieser Widerspruch stellt sich erwartungsgemäß in analoger Form auch in den Fällen $x = 1, 2, 3, 4$ ein. Es bleiben also die Fälle $x = 6, 7, 8$ (größer kann x wegen $x \leq y \leq z$ und $x + y + z = 24$ nicht sein).

Der Fall $x = 8$ ist einfach; hier folgt sofort $y = z = 8$.

Im Fall $x = 7$ ist $y + z = 17$, und aus (1.22) folgt $y \cdot z \geq 70$. Wegen $y \leq z$ bleiben die Möglichkeiten $(y, z) = (7, 10)$ und $(y, z) = (8, 9)$.

Im Fall $x = 6$ schließlich ist $y + z = 18$, und aus (1.22) folgt $y \cdot z \geq 81$. Hier bleibt $(y, z) = (9, 9)$ als einzige Möglichkeit. Insgesamt sind also folgende Tripel denkbar:

x	y	z	Harm. Mittel
8	8	8	8,00
7	7	10	7,78
7	8	9	7,92
6	9	9	7,71

Wir sehen die Übereinstimmung mit Bild 1.7. Durch Bedingung (3) wird die Auswahl schließlich auf das Tripel $(6, 9, 9)$ eingeschränkt; es ist das einzige, das alle Bedingungen erfüllt.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 38: Jemand kauft in einem Laden drei Artikel. An der Kasse berechnet eine verträumte Kassiererin das Produkt der Preise statt der Summe. Sie erhält das Ergebnis 9,81 €. Der Kunde macht die Kassiererin auf ihren Fehler aufmerksam. Es wird neu gerechnet, diesmal per Addition. Das Ergebnis ist – wiederum 9,81 €! Können wir aus dieser Episode schließen, wie viel die einzelnen Artikel gekostet haben, wenn wir zusätzlich wissen, dass der billigste Artikel nicht mehr als 0,50 € gekostet hat?

Erster Hinweis: Die Information bezüglich des billigsten Artikels kann auch unterdrückt werden; *mit* ihr ist die Lösung aber leichter zu finden. *Zweiter Hinweis:* Die Aufgabe kann mit anderen Zahlen neu gestellt werden: Man ersetze 9,81 € durch 5,49 € und 0,50 € durch 1,50 €.

AUFGABE 39 [Eine Variante von Aufg. 38]: Jemand geht in einen Laden, in dem alle Preise Vielfache von 0,25 € sind. Er kauft drei Artikel. An der Kasse berechnet ein zerstreuter Kassierer das Produkt der Preise statt der Summe. Er erhält das Ergebnis 5,25 €. Der Kunde macht den Kassierer auf dessen Fehler aufmerksam. Es wird neu gerechnet, diesmal per Addition. Das Ergebnis ist wiederum 5,25 €. Wie teuer waren die einzelnen Artikel also?

AUFGABE 40: Sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten dann alle positiven Teiler von n . Zeige, dass das Produkt aus dem arithmetischen Mittel dieser Teiler und dem harmonischen Mittel dieser Teiler gleich n ist.

AUFGABE 41 [AM-HM]: Für zwei positive reelle Zahlen a und b gelte $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. Es ist zu beweisen, dass dann $a + b \geq 2$ gilt.

AUFGABE 42: Ein Vertreter fährt mit seinem Elektroauto von A nach B, und zwar ohne Zwischenhalt. Er fährt ein erstes Teilstück mit der konstanten Geschwindigkeit x km/h, und wechselt dann (fast übergangslos) zur Geschwindigkeit y km/h, die er für den Rest der Reise beibehält. Wir interessieren uns nun für seine Durchschnittsgeschwindigkeit auf der gesamten Reise.

- a) Wir nehmen zunächst an, dass der Vertreter nach der Hälfte der Gesamtstrecke von A nach B die Geschwindigkeit wechselt. Zeige, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit dann das *harmonische* Mittel von x und y ist.
- b) Jetzt unterstellen wir, dass der Geschwindigkeitswechsel nach der Hälfte der gesamten Reisezeit erfolgt. Zeige, dass dann die Durchschnittsgeschwindigkeit gleich dem *arithmetischen* Mittel von x und y ist.

AUFGABE 43: Wir betrachten ein Trapez ABCD (bei dem also \overline{AB} und \overline{CD} parallel sind). Wir definieren $a := |AB|$ und $c := |CD|$. Seien E und F Punkte auf \overline{BC} bzw. \overline{DA} derart, dass gilt: $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, und sei $s := |EF|$. Dann gelten folgende Implikationen:

- a) $ABEF$ und $FECD$ sind flächengleich
 $\implies s$ ist das *quadratische* Mittel von a und c .
- b) \overline{EF} hat zu \overline{AB} und \overline{CD} den gleichen Abstand
 $\implies s$ ist das *arithmetische* Mittel von a und c .
- c) Der Schnittpunkt der Diagonallinien \overline{BD} und \overline{AC} liegt auf \overline{EF}
 $\implies s$ ist das *harmonische* Mittel von a und c .
- d) $ABEF$ und $FECD$ sind ähnlich (d.h. hier: $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{|EF|}{|FD|}$)
 $\implies s$ ist das *geometrische* Mittel von a und c .

AUFGABE 44 [QM-AM]: Zeige: Wählt man drei reelle Zahlen so, dass ihre Summe 15 ist, so ist die Summe ihrer Quadrate größer oder gleich 75.

AUFGABE 45 [QM-AM]: In einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 befinden sich einige Kreisscheiben, die sich gegenseitig nicht überlappen. Die Summe ihrer Umfänge ist gleich 10. Man zeige, dass es mindestens acht Kreisscheiben sind.

AUFGABE 46 [AM-GM]: Man untersuche, ob es natürliche Zahlen a, b, c, d gibt, für die diese beiden Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot c \cdot d &= 11111111111, \\ a + b + c + d &< \quad \quad \quad 11111. \end{aligned}$$

2 Zahlentheorie

Theoretische Grundlagen

Teilbarkeit

Die elementare Zahlentheorie beschäftigt sich vornehmlich mit dem Begriff der Teilbarkeit. Seine Definition ist daher ein natürlicher Anfang dieses Abschnitts:

Definition 2.1 (Teilt-Relation). Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, a sei ein *Teiler* von b (in Zeichen: $a \mid b$), wenn es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt mit: $a \cdot z = b$ (die Zahl z wird in diesem Zusammenhang der *Co-Teiler von a* genannt). Den gleichen Sachverhalt drücken wir mitunter auch durch folgende Sprechweisen aus: a teilt b ; b ist durch a teilbar; b ist ein Vielfaches von a .

Für die Menge aller positiven Teiler von b führen wir die Schreibweise T_b ein; entsprechend bedeute V_a die Menge der positiven Vielfachen von a .

Satz 2.2. *Die Teilt-Relation ist transitiv, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt die Implikation*

$$a \mid b \text{ und } b \mid c \implies a \mid c.$$

Definition 2.3 (Primzahl). Eine natürliche Zahl n mit $n > 1$ heißt *Primzahl*, wenn sie außer 1 und n keine positiven Teiler hat. Andernfalls heißt sie *zusammengesetzt*.

Der folgende Satz bringt bereits eine der grundlegenden Techniken im Umgang mit Teilbarkeitsaussagen mit sich:

Satz 2.4. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

- a) Ist a ein Teiler von b und von c , so folgt: a teilt auch die Summe $b + c$, die Differenz $b - c$ und überhaupt jede Vielfachsumme $k \cdot b + l \cdot c$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$.
- b) Ist a ein Teiler von b , so folgt die Äquivalenz:
 a teilt $b + c$ genau dann, wenn a ein Teiler von c ist.

Wir verzichten darauf, hier die bereits in der Schule geläufigen Regeln für die Teilbarkeit durch die Zahlen 2, 3, 4, 5, 8, 9 bzw. 10 zu notieren. Von besonderem Interesse sind sicherlich jene Teilbarkeitsregeln, die von *Quersummen* handeln; also diejenigen für 3 und 9. Wir erlauben uns an dieser Stelle eine Bemerkung über eine weitreichende Verallgemeinerung dieser Regeln, ohne diese damit für den Gebrauch in der Schule zu empfehlen:

Wir greifen dabei voraus auf den Begriff der Teilerfremdheit zweier Zahlen und benutzen außerdem die Theorie der Restklassenringe $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ von \mathbb{Z} und ihrer Einheitengruppen. Ist nämlich m eine zu 2 und 5 teilerfremde natürliche Zahl, so ist die Restklasse von 10 (modulo m) eine Einheit des Restklassenrings $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$. Die Ordnung der Restklasse von 10 in dieser Einheitengruppe von $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ nennen wir k . Weniger theorielastig formuliert: k ist die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft $m \mid (10^k - 1)$. Möchten wir nun eine natürliche Zahl n auf ihre Teilbarkeit durch m überprüfen, so bilden wir in der Dezimaldarstellung von n von rechts nach links Gruppen von je k Ziffern; dabei kann die letzte Gruppe ganz links auch aus weniger als k Ziffern bestehen. Wir betrachten diese Gruppen dann jeweils als k -stellige Zahlen und nennen die Summe dieser Zahlen die *Quersumme k -ter Ordnung von n* . Es gilt dann folgende allgemeine Teilbarkeitsregel:

n ist genau dann durch m teilbar, wenn die *Quersumme k -ter Ordnung von n* durch m teilbar ist.¹

Die Schlichtheit der Teilbarkeitsregeln für 3 bzw. 9 verdanken wir also der Tatsache, dass 10 modulo 3 bzw. 9 die Ordnung 1 hat. Für weitere Experimente mit dieser Regel bieten sich die Fälle $m = 27, 37$ an, denn bezüglich dieser Moduln hat 10 die Ordnung 3.

¹ Die MO-Aufgabe 361322 behandelt diese Regel, ohne sie in dieser Form auszusprechen.

ggT und kgV

Die Begriffe *größter gemeinsamer Teiler* und *kleinstes gemeinsames Vielfaches* sind zentrale Werkzeuge der elementaren Zahlentheorie. Ihre Namen sind selbsterklärend; es folgt dennoch eine formale Definition:

Definition 2.5 (Größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches). Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Unter dem *größten gemeinsamen Teiler von a und b* , kurz: $\text{ggT}(a, b)$, verstehen wir die größte natürliche Zahl, die sowohl a als auch b teilt; also: $\text{ggT}(a, b) := \max(T_a \cap T_b)$. Im Falle $\text{ggT}(a, b) = 1$ sagen wir auch, a und b seien *teilerfremd*.

Im Falle $a, b \neq 0$ verstehen wir ferner unter dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen von a und b* , kurz: $\text{kgV}(a, b)$, die kleinste natürliche Zahl, die sowohl ein Vielfaches von a als auch von b ist, also: $\text{kgV}(a, b) := \min(V_a \cap V_b)$.

Zusätzlich definieren wir: $\text{ggT}(0, 0) := 0$ und $\text{kgV}(a, 0) := 0$ und $\text{kgV}(0, a) := 0$.

Zahlreiche Rechenregeln erleichtern den Umgang mit ggT und kgV. Da wir später in Folgerung 2.19 die Berechnung des ggTs auf die Berechnung des kgVs zurückführen werden und ohnehin der ggT für die Entwicklung der Theorie eine etwas größere Rolle spielt, führen wir hier zunächst die wichtigsten ggT-Rechenregeln auf:

Satz 2.6 (Rechenregeln für den ggT). *Seien $a, b, k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

- a) $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(|a|, |b|)$
- b) $\text{ggT}(a, 0) = |a|$
- c) $\text{ggT}(ka, kb) = |k| \cdot \text{ggT}(a, b)$
- d) $\text{ggT}(a - b, b) = \text{ggT}(a, b)$, *allgemeiner: $\text{ggT}(a - k \cdot b, b) = \text{ggT}(a, b)$.*

Beweis. Im Sonderfall $a = b = 0$ ist sowieso alles klar. Ansonsten folgt a) aus $T_a = T_{|a|}$ und $T_b = T_{|b|}$; b) folgt aus $T_a \cap T_0 = T_a$; und c) folgt aus $T_{ka} = |k| \cdot T_a$ und $T_{kb} = |k| \cdot T_b$. Für den Beweis von d) liefert uns Satz 2.4 die Beziehung $T_{a-k \cdot b} \cap T_b = T_a \cap T_b$. Durch den Übergang zu den Minima der beiden Schnittmengen folgt auch hier die Behauptung. \square

Satz 2.6 d) etabliert das Prinzip des Euklidischen Algorithmus', eines effizienten Verfahrens zur Berechnung des ggTs zweier Zahlen: Durch (gegebenenfalls mehrfaches) Subtrahieren der kleineren Zahl von der größeren wird $\text{ggT}(a, b)$

schrittweise zurückgeführt auf den ggT kleinerer Zahlenpaare; geht es etwa um die Berechnung von $\text{ggT}(945, 546)$, so illustrieren die Gleichungen

$$\begin{aligned} 945 &= 546 + 399 \\ 546 &= 399 + 147 \end{aligned}$$

die Gleichheit der entsprechenden größten gemeinsamen Teiler:

$$\begin{aligned} \text{ggT}(945, 546) &= \text{ggT}(945 - 546, 546) = \text{ggT}(399, 546) \\ &= \text{ggT}(399, 546 - 399) = \text{ggT}(399, 147). \end{aligned}$$

Setzt man das Verfahren fort, so erhält man insgesamt die Zeilen

$$\begin{array}{rcccc} 945 & = & & 546 & + & 399 \\ 546 & = & & 399 & + & 147 \\ 399 & = & 2 & \cdot & 147 & + & 105 \\ 147 & = & & 105 & + & 42 \\ 105 & = & 2 & \cdot & 42 & + & 21 \\ 42 & = & 2 & \cdot & 21 & + & 0 \end{array}$$

und damit schließlich die Gleichung

$$\text{ggT}(945, 546) = \text{ggT}(546, 399) = \dots = \text{ggT}(42, 21) = \text{ggT}(21, 0) = 21.$$

Nach einem Satz des französischen Mathematikers Gabriel Lamé erfordert dieses Verfahren eine Anzahl von Berechnungsschritten, die höchstens dem Fünffachen der Stellenzahl von $\min\{a, b\}$ entspricht.²

Unsere ggT-Definition 2.5 ist sicherlich in der Schule naheliegend, weil sie ohne die Raffinesse der hochschulüblichen *algebraischen* ggT-Definition auskommt. Die algebraische Definition beruht ja darauf, dass die Mengen $m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ die *einzigsten* Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ sind. Da sich für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die Menge $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ ebenso als eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ erweist, muss es also eine nicht-negative ganze Zahl m mit der Eigenschaft $m\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ geben; und da diese Zahl m sogar eindeutig bestimmt ist, kann der ggT von a, b durch sie definiert werden. Diese algebraische Vorgehensweise, der wir ja hier nicht folgen, hat den Vorteil, dass sich aus ihr ganz schlicht die Vielfachsummen-Darstellbarkeit des ggTs ergibt (Satz 2.7), und ebenso die Aussage von Folgerung 2.8. Um dieselben Ergebnisse auf der Grundlage unserer schultauglichen ggT-Definition zu erreichen, müssen wir uns etwas anstrengen:

² Dieser Satz wird in [Hons, S. 48-50] diskutiert und bewiesen.

Satz 2.7. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ ist der größte gemeinsame Teiler von a und b eine Vielfachsumme von a und b ; d.h. es gibt $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, b) = k \cdot a + l \cdot b$.

Beweis. Falls eine oder gar beide der Zahlen a und b gleich Null sind, ist die Behauptung offenbar richtig. Wegen Satz 2.6 a) reicht es nun aus, den Satz für *positive* a, b zu zeigen. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen daher an, dass die Behauptung *nicht* für alle positiven Zahlen a, b wahr ist. Dann ist die Menge

$$T := \{a + b \mid a, b \in \mathbb{N}, \\ \text{ggT}(a, b) \text{ ist nicht als Vielfachsumme von } a \text{ und } b \text{ darstellbar}\}$$

nicht-leer und besitzt daher ein kleinstes Element m . Wir fixieren nun $a, b \in \mathbb{N}$ mit:

$$m = a + b; \quad \text{ggT}(a, b) \text{ ist nicht als Vielfachsumme von } a \text{ und } b \text{ darstellbar.}$$

Dann ist $a \neq b$, denn ansonsten wäre $\text{ggT}(a, b) = a = 1 \cdot a + 0 \cdot b$ eine Vielfachsummendarstellung von $\text{ggT}(a, b)$, im Widerspruch zur Wahl von a und b . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a > b$ voraussetzen. Setze $a' := a - b \in \mathbb{N}$. Dann hat $\text{ggT}(a', b)$ keine Darstellung als Vielfachsumme von a' und b ; denn gäbe es eine solche, etwa $\text{ggT}(a', b) = k \cdot a' + l \cdot b$, so wäre

$$k \cdot a + (l - k) \cdot b = k \cdot (a - b) + l \cdot b = k \cdot a' + l \cdot b = \text{ggT}(a', b) \stackrel{\text{Satz 2.6 d)}}{=} \text{ggT}(a, b)$$

eine Vielfachsummendarstellung von $\text{ggT}(a, b)$, die es nach Wahl von a und b aber nicht gibt. Damit ist auch $a' + b$ ein Element der oben definierten Menge T , und wegen $a' + b < a + b = m$ ist auf diese Weise ein Widerspruch zur Minimalität von m in der Menge T herbeigeführt. \square

Aus Satz 2.7 ergibt sich die folgende Folgerung, die die oben erwähnte hochschulübliche *algebraische* ggT-Definition reflektiert:

Folgerung 2.8 (Alternative Charakterisierung des ggTs). Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Zahl d genau dann der größte gemeinsame Teiler von a und b , wenn für alle $t \in \mathbb{Z}$ folgende Äquivalenz gilt:

$$t \mid a \text{ und } t \mid b \iff t \mid d.$$

Es gibt auch eine entsprechende Charakterisierung des kgVs. Ihre Herleitung bedarf – anders als beim ggT – keiner weiteren Vorbereitungen:

Satz 2.9 (Alternative Charakterisierung des kgVs). *Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Zahl k genau dann das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b , wenn für alle $m \in \mathbb{Z}$ folgende Äquivalenz gilt:*

$$a \mid m \text{ und } b \mid m \iff k \mid m. \quad (2.1)$$

Beweis. Im Fall $k = 0$ ist die Behauptung des Satzes trivialerweise richtig. Es gelte daher nun $k > 0$.

Zunächst einmal setzen wir $k = \text{kgV}(a, b)$ voraus und müssen also (2.1) zeigen. Die Rückwärtsrichtung in (2.1) folgt direkt aus der Transitivität der Teilt-Relation. Für den Beweis der anderen Richtung von (2.1) setzen wir $a \mid m$ und $b \mid m$ voraus. Wir betrachten nun die unmittelbaren Nachbarn von m aus der Reihe der Vielfachen von k , d.h. wir wählen ein $i \in \mathbb{Z}$ mit

$$i \cdot k < m \leq (i + 1) \cdot k. \quad (2.2)$$

Wir betrachten (2.2) genauer und stellen fest, dass sowohl $i \cdot k$ als auch m Vielfache von a und von b sind. Also ist auch die Differenz $m - i \cdot k$ ein Vielfaches von a und b (siehe Satz 2.4 a), und zwar nach (2.2) ein *positives* Vielfaches von a und b . Nach Definition des kgVs folgt:

$$k = \text{kgV}(a, b) \leq m - i \cdot k, \quad \text{also } (i + 1) \cdot k \leq m,$$

und dies ergibt zusammen mit dem zweiten Ungleichheitszeichen von (2.2), dass

$$(i + 1) \cdot k = m$$

gilt. Damit haben wir $k \mid m$ gezeigt.

Für den zweiten Teil unseres Beweises setzen wir die Gültigkeit von (2.1) für alle $m \in \mathbb{Z}$ voraus und müssen nachweisen, dass k das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b ist. Dass k überhaupt ein gemeinsames Vielfaches ist, sieht man sofort, wenn man (2.1) für $m = k$ betrachtet. Gäbe es ein *kleineres* (positives) Vielfaches von a und b als k , etwa k' , so folgte aus (2.1) – angewandt auf $m = k'$ – die Aussage $k \mid k'$, was einen Widerspruch zu $k' < k$ darstellen würde. Also ist k tatsächlich das *kleinste* gemeinsame Vielfache von a und b . \square

Folgerung 2.8 und Satz 2.9 ermöglichen ein vertieftes Verständnis des ggTs und des kgVs: Die Menge der *gemeinsamen* Teiler von a und b ist also nicht „irgendeine“ Menge, sondern wiederum eine Teilermenge, nämlich die Menge der Teiler von $\text{ggT}(a, b)$: Es gilt die Gleichung

$$T_a \cap T_b = T_{\text{ggT}(a, b)}.$$

Ebenso ist die Menge der gemeinsamen Vielfachen von a und b kein chaotischer Haufen, sondern genau die Menge der Vielfachen von $\text{kgV}(a, b)$, d.h. es gilt die Gleichung

$$V_a \cap V_b = V_{\text{kgV}(a,b)}.$$

Wir kehren zurück zum ggT. Die nächste Folgerung aus Satz 2.7 wird uns später beim Lösen von linearen diophantischen Gleichungen nützlich sein:

Folgerung 2.10. *Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann ist c genau dann als Vielfachsumme von a, b darstellbar, wenn der größte gemeinsame Teiler von a, b ein Teiler von c ist.*

Der nächste Satz zeigt die technische Nützlichkeit der Vielfachsummen-Darstellbarkeit des ggTs. Außerdem weist er den Weg zu Teilbarkeitsregeln für zusammengesetzte Zahlen; so zeigt er beispielsweise, dass die Teilbarkeit durch 12 eben nicht logisch gleichwertig zur Teilbarkeit durch 2 und 6 ist; sondern vielmehr zur Teilbarkeit durch 3 und 4.

Satz 2.11. *Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, und a, b seien teilerfremd. Dann gilt:*

$$(a \mid c \text{ und } b \mid c) \iff a \cdot b \mid c.$$

Beweis. Die Rückwärtsrichtung ergibt sich direkt aus der Transitivität der Teilt-Relation. Für den Beweis der anderen Implikation setzen wir $a \mid c$ und $b \mid c$ voraus. Da a und b teilerfremd sind, findet man nach Satz 2.7 ganze Zahlen k und l mit $1 = k \cdot a + l \cdot b$, also

$$c = k \cdot ac + l \cdot bc. \tag{2.3}$$

Da b ein Teiler von c ist, ist $a \cdot b$ ein Teiler von $k \cdot ac$; und da a ein Teiler von c ist, ist $a \cdot b$ ein Teiler von $l \cdot bc$. Insgesamt ist $a \cdot b$ also ein Teiler der Summe $k \cdot ac + l \cdot bc$ und damit nach Gleichung (2.3) ein Teiler von c . \square

Der folgende Satz hat besonders große Bedeutung; er ist allgemein von großem technischen Nutzen und vor allem ein Meilenstein auf dem Weg zum späteren Beweis der Eindeutigkeit der Primpotenzerlegung:

Satz 2.12 (Euklidischer Hauptsatz). *Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, und sei p eine Primzahl. Dann gilt:*

- a) *Sind a, b teilerfremd und gilt $a \mid b \cdot c$, so folgt $a \mid c$.*

b) Aus $p \mid b \cdot c$ folgt: $p \mid b$ oder $p \mid c$.

c) Teilt p ein Produkt von Primzahlen, so ist p eine dieser Primzahlen.

Beweis. Wir setzen zunächst die Teilerfremdheit von a, b sowie $a \mid b \cdot c$ voraus. Wegen der Teilerfremdheit von a, b finden wir mit Satz 2.7 wieder einmal ganze Zahlen k und l mit $1 = k \cdot a + l \cdot b$, also

$$c = k \cdot ac + l \cdot bc. \quad (2.4)$$

Nun ist a nach Voraussetzung ein Teiler von bc und ohnehin ein Teiler von ac , also auch von der Summe $k \cdot ac + l \cdot bc$ und nach Gleichung (2.4) mithin ein Teiler von c .

Beim Beweis der Aussage b) setzen wir $p \mid b \cdot c$ voraus und nehmen dann eine Fallunterscheidung vor: Im Fall $p \mid b$ ist die Behauptung erwiesen. Gilt hingegen $p \nmid b$, so sind p, b teilerfremd, und mit $p \mid b \cdot c$ und Aussage a) folgt $p \mid c$.

Für den Beweis von c) betrachten wir zunächst die Situation $p \mid q_1 \cdot q_2$ mit zwei Primzahlen q_1, q_2 . Aus b) ergibt sich, dass p eine der beiden Primzahlen q_1, q_2 teilt, etwa q_1 . Da p somit ein Teiler der Primzahl q_1 mit $p > 1$ ist, folgt sofort $p = q_1$. Die Erweiterung der Aussage auf mehr als zwei Primfaktoren q_i ergibt sich leicht durch vollständige Induktion. \square

Primpotenzzerlegung

Die Definition des Begriffs der *Primfaktorzerlegung* bzw. *Primpotenzzerlegung* ist – auch in didaktischer Hinsicht – durchaus problematisch. Wir werden dies auf Seite 96 kurz diskutieren. Hier hingegen verkünden wir ohne weitere Vorreden die von uns gewählte Begriffsbildung:

Definition 2.13 (Aufsteigende Primpotenzzerlegung). Sei n eine natürliche Zahl. Unter einer *aufsteigenden Primpotenzzerlegung* (APPZ) von n verstehen wir ein Tupel $(p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k})$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq k}$ ist p_i eine Primzahl.
- Für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\leq k}$ mit $i < j$ gilt: $p_i < p_j$.
- Für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq k}$ ist α_i eine natürliche Zahl.
- Es gilt: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

Zur Vorbereitung des anvisierten Satzes über die Existenz und Eindeutigkeit der Primpotenzzerlegung sind zuvor zwei Hilfssätze zu beweisen:

Hilfssatz 2.14. *Jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ hat einen Primteiler, also eine Primzahl p , die n teilt.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$. Wir betrachten die Menge $T_n \setminus \{1\}$. Diese Menge ist jedenfalls nicht-leer – weil sie n enthält – und besitzt daher ein kleinstes Element m . Wir werden zeigen, dass m eine Primzahl ist, womit dann der gesuchte Primteiler von n gefunden sein wird. Es gilt: $m > 1$. Hätte m außer 1 und m einen weiteren natürlichen Teiler t , so wäre t auch ein Teiler von n (Transitivität der Teilt-Relation) und echt kleiner als m , im Widerspruch zur Minimalität von m in $T_n \setminus \{1\}$. Also ist m eine Primzahl. \square

Hilfssatz 2.15. *Sei p eine Primzahl, und seien α, β, c natürliche Zahlen mit: $p^\alpha \mid p^\beta \cdot c$. Außerdem seien p, c teilerfremd. Dann folgt: $\alpha \leq \beta$.*

Beweis. Wäre $\beta < \alpha$, so hätten wir $p \mid p^{\alpha-\beta} \mid c$, im Widerspruch zur Teilerfremdheit von p, c . Also ist $\alpha \leq \beta$. \square

Satz 2.16. *Jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ hat genau eine APPZ.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die *Existenz* einer APPZ. Wäre die Existenzaussage falsch, so gäbe es eine kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_{>1}$ ohne APPZ. Außerdem gäbe es nach Hilfssatz 2.14 einen Primteiler p von n . Es wäre dann sicherlich $p < n$, denn im Falle $p = n$ gäbe es ja eine APPZ von n , nämlich das 1-Tupel (p) . Die Zahl $n' := \frac{n}{p}$ wäre also größer als 1, aber kleiner als n und hätte daher eine APPZ (n ist ja die *kleinste* Zahl aus $\mathbb{N}_{>1}$ ohne APPZ). Dies führt aber zu einem Widerspruch, denn durch „Hinzufügen von p “ zu dieser APPZ von n' entstünde eine APPZ von n . Dabei bedeutet „Hinzufügen von p “ entweder das Einfügen von p in das APPZ-Tupel von n' – als neue Komponente sozusagen, falls p in der APPZ von n' nicht vorkommt – oder die Erhöhung des Exponenten von p in der APPZ von n' um 1 – falls p dort bereits als Basis einer Primpotenz auftritt.

Beim Beweis der *Eindeutigkeit* der APPZ gehen wir ähnlich vor. Wäre die Eindeutigkeitsaussage falsch, so gäbe es eine kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_{>1}$ mit zwei verschiedenen APPZ. Wir wählen eine Primpotenz p^α aus der ersten APPZ.

Wegen Satz 2.12 c) kommt p auch in der zweiten APPZ vor, etwa in der Potenz p^β , so dass wir also die Situation

$$p^\alpha \cdot c_1 = p^\beta \cdot c_2 \quad (2.5)$$

vorliegen haben, wobei c_1 und c_2 die zusammengefassten anderen Primpotenzen aus den beiden APPZ darstellen und p, c_1 sowie p, c_2 jeweils teilerfremd sind. Liest man Gleichung (2.5) in beiden Richtungen als Teilbarkeitsaussage und wendet jeweils Hilfssatz 2.15 an, so erhalten wir $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha$, also $\alpha = \beta$. Die Primzahl p tritt also in beiden APPZ mit demselben Exponenten auf. Reduzieren wir beide APPZ um p , d.h. entfernen wir p bzw. reduzieren wir den entsprechenden Exponenten um 1, so erhalten wir zwei verschiedene APPZ von $n' := \frac{n}{p}$. Dies ist jedenfalls ein Widerspruch; und zwar im Fall $n' > 1$ zur Minimalität von n ; und der Fall $n' = 1$ würde $n = p$ implizieren, und die Existenz verschiedener APPZ für eine *Primzahl* ist – auch mit Blick auf Satz 2.12 – ohnehin zu verwerfen. \square

Die Primpotenzerlegung einer natürlichen Zahl ist ein wichtiges Instrument zur Analyse von Teilmengen und Vielfachenmengen. Der nächste Satz enthält die Details:

Satz 2.17 (Teilmengen und Vielfachenmengen). *Ist $(p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k})$ die aufsteigende Primpotenzerlegung einer natürlichen Zahl n , so sind die Teiler von n genau die Zahlen*

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} \text{ mit } \beta_i \leq \alpha_i \text{ für jedes } i \in \mathbb{N}_{\leq k}.$$

Inbesondere folgt daraus durch eine kombinatorische Betrachtung, dass die Anzahl der Teiler von n durch

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$$

gegeben ist. Außerdem sind die Vielfachen von n genau die Zahlen

$$m \cdot p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} \text{ mit } m \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha_i \leq \beta_i \text{ für jedes } i \in \mathbb{N}_{\leq k}.$$

Aus dieser Charakterisierung der Teiler und der Vielfachen einer Zahl n ergibt sich das in der Schule übliche Verfahren zur Berechnung des ggTs und des kgVs zweier Zahlen a, b . Technisch gesehen ist dabei der Umstand problematisch, dass wir für dieses Verfahren eigentlich Darstellungen von a und b als Produkte von

Primpotenzen mit *denselben* Primzahl-Basen benötigen. Wir würden daher gern durch geeignetes Auffüllen der APPZ von a und b mit „leeren“ Primpotenzen der Form p_i^0 dafür sorgen, dass in beiden APPZ dieselben Primzahl-Basen auftreten, doch würde dieses Vorgehen unsere Fassung des APPZ-Begriffs sprengen. Es bedarf einer technischen Verrenkung, um diesen misslichen Umstand zu umgehen:

Satz 2.18. *Seien $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, und seien p_1, p_2, \dots, p_r genau diejenigen Primzahlen, die als Basis in mindestens einer der beiden APPZ von a bzw. b vorkommen. Ferner sei m_i für jedes $i \in \mathbb{N}_{\leq r}$ das Minimum der beiden Exponenten, mit denen p_i in den beiden APPZ auftritt, und entsprechend sei M_i das Maximum der beiden Exponenten. (Tritt eine Primzahl p_i nur in einer der beiden APPZ als Basis auf, etwa bei a , so ist also $m_i = 0$, und M_i entspricht dann dem Exponenten von p_i in der APPZ von b .) Dann gilt:*

$$\text{ggT}(a, b) = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r}$$

und

$$\text{kgV}(a, b) = p_1^{M_1} \cdot p_2^{M_2} \cdot \dots \cdot p_r^{M_r}.$$

Folgerung 2.19. *Seien a, b zwei natürliche Zahlen. Dann gilt die Gleichung $\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b$.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus den Potenzrechenregeln und folgender Beobachtung: Tritt die Primzahl p_i in den APPZ von a bzw. b in den Potenzen $p_i^{\alpha_i}$ bzw. $p_i^{\beta_i}$ auf (wobei α_i und β_i durchaus Null sein können), so gilt mit der Notation von Satz 2.18: $\alpha_i + \beta_i = m_i + M_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq r}$. □

Satz 2.20. *Eine Zahl aus $\mathbb{N}_{>1}$ ist genau dann die k -te Potenz einer gewissen anderen natürlichen Zahl, wenn alle Exponenten in ihrer aufsteigenden Primpotenzzerlegung durch k teilbar sind. Insbesondere sind Quadratzahlen durch gerade Exponenten charakterisiert; und Kubikzahlen durch Exponenten, die durch 3 teilbar sind.*

Als Nachbemerkung zu Satz 2.18 soll schließlich noch erwähnt werden, dass ggT und kgV natürlich auch für mehr als nur zwei Zahlen definiert werden können. Definition 2.5 kann problemlos auf n -Tupel übertragen werden (mit $n \geq 3$), und auch Satz 2.18 hat in sinngemäßer Übertragung nach wie vor Gültigkeit.

Bemerkenswert ist, dass man den ggT und das kgV von mehr als zwei Zahlen auch „paketweise“ ausrechnen kann; für 4-Tupel gilt beispielsweise

$$\text{ggT}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \text{ggT}(\text{ggT}(a_1, a_2), \text{ggT}(a_3, a_4)),$$

und Entsprechendes gilt für das kgV. Die Folgerung 2.19 hingegen quittiert den Dienst, wenn es um mehr als nur zwei Zahlen geht!

Kongruenzen

Ein weiteres Teilgebiet der elementaren Zahlentheorie ist das Rechnen mit Kongruenzen; jede Kongruenzaussage ist im Grunde nichts weiter als eine speziell notierte Teilbarkeitsaussage, doch erlaubt die Sprache der Kongruenzen besonders elegante Beweise:

Definition 2.21 (Kongruenz). Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, a und b seien *kongruent modulo m* (in Zeichen: $a \equiv_m b$), wenn m ein Teiler von $a - b$ ist. Die Zahl m wird in diesem Zusammenhang als *Modul* bezeichnet.

Der folgende grundlegende Satz folgt aus elementaren Teilbarkeitsregeln:

Satz 2.22. Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a \equiv_m c$ und $b \equiv_m d$ gilt:

$$a + b \equiv_m c + d, \quad a \cdot b \equiv_m c \cdot d, \quad a^n \equiv_m c^n.$$

Satz 2.22 über die Verträglichkeit des Addierens und Multiplizierens mit Kongruenzen ist die Grundlage für das geschickte Rechnen mit Kongruenzen, insbesondere für das Reduzieren von Summanden oder Faktoren modulo m , wie wir es später bei der Diskussion entsprechender Aufgaben sehen werden.

Der nächste Satz setzt die Übertragung verschiedener Teilbarkeitsregeln in die Sprache der Kongruenzen fort:

Satz 2.23. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gelten diese Implikationen:

- a) $(n \mid m, a \equiv_m b) \implies a \equiv_n b$ (Transitivität der Teilt-Relation).
- b) n, m teilerfremd $\implies \left(a \equiv_{m \cdot n} b \iff a \equiv_m b \text{ und } a \equiv_n b \right)$ (Satz 2.11).
- c) $(c, m$ teilerfremd und $c \cdot a \equiv_m c \cdot b) \implies a \equiv_m b$ (Eukl. Hauptsatz).

Wir werden die Rechenregeln der beiden vorangegangenen Sätze später sehr häufig verwenden. Außerdem formulieren wir eine Kongruenz-Version der bekannten Teilbarkeitsregeln für 3 und 9:

Satz 2.24. *Für eine natürliche Zahl n bezeichnen wir die Quersumme von n mit $Q(n)$. Dann gilt:*

$$n \equiv_3 Q(n), \quad n \equiv_9 Q(n).$$

Der folgende *Kleine Satz von Fermat* ist mit grundlegenden Einsichten der Gruppentheorie leicht zu beweisen. Ohne diese Hilfsmittel gestaltet sich der Beweis des Satzes etwas mühselig:

Satz 2.25 (Fermat). *Sei p eine Primzahl, und sei a eine natürliche Zahl. Dann gilt:*

$$a^p \equiv_p a.$$

Mit der zusätzlichen Voraussetzung der Teilerfremdheit von p, a gilt auch:

$$a^{p-1} \equiv_p 1.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die zweite Kongruenzaussage und setzen also die Teilerfremdheit von p, a voraus. Wir definieren dann zwei Mengen, nämlich

$$M := \{1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \dots, (p-1) \cdot a\}$$

und

$$R := \{1, 2, 3, \dots, (p-1)\}.$$

Nun gibt es für jede ganze Zahl m , die zu p teilerfremd ist (und das trifft insbesondere für alle $m \in M$ zu!), genau ein $r \in R$ mit: $r \equiv_p m$, nämlich den sogenannten *Rest von m bei Division durch p* .³ Sei ϵ diejenige Abbildung von M nach R , die jedem $m \in M$ den entsprechenden Rest $r \in R$ (mit $\epsilon(m) = r \equiv_p m$) zuordnet.

Wir beweisen jetzt die *Injektivität* von ϵ : Seien also $m, n \in M$ mit $\epsilon(m) = \epsilon(n)$. Nach Definition von M gibt es dann zwei Zahlen $i, j \in \mathbb{N}_{\leq p-1}$ mit $m = i \cdot a$ und $n = j \cdot a$. Aus $\epsilon(m) = \epsilon(n)$ folgt $\epsilon(i \cdot a) = \epsilon(j \cdot a)$ und damit

$$i \cdot a \equiv_p \epsilon(i \cdot a) = \epsilon(j \cdot a) \equiv_p j \cdot a. \tag{2.6}$$

³ Man sagt auch, R sei – von der fehlenden Null abgesehen – ein *vollständiges Repräsentantensystem von \mathbb{Z}_p* .

Wegen der Teilerfremdheit von p, a können wir mit Satz 2.23 c) den Faktor a aus der Kongruenzaussage (2.6) herauskürzen und erhalten $i \equiv_p j$. Das bedeutet aber wiederum nach Definition der Kongruenz: $p \mid (i - j)$, und daraus können wir wegen $i, j \in \mathbb{N}_{\leq p-1}$ schließen, dass $i = j$ ist; und das heißt schließlich

$$m = i \cdot a = j \cdot a = n, \text{ also } m = n,$$

womit der Injektivitätsbeweis abgeschlossen ist.

Der Definitionsbereich M und der Wertebereich R von ϵ sind aber offenbar gleichmächtig (die Mächtigkeit ist jeweils $p - 1$), so dass die *Injektivität* von ϵ sofort die *Surjektivität* von ϵ nach sich zieht; und damit insgesamt die *Bijektivität* von ϵ . Im Zusammenspiel mit $\epsilon(i \cdot a) \equiv_p i \cdot a$ (für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq p-1}$) bedeutet dies, locker gesagt, dass die Elemente aus M bis auf Kongruenz modulo p genau die Elemente aus R sind, wenn auch gewissermaßen in umsortierter Reihenfolge. Präzise heißt dies: Es gilt

$$(1 \cdot a) \cdot (2 \cdot a) \cdot (3 \cdot a) \cdot \dots \cdot ((p - 1) \cdot a) \quad (2.7)$$

$$\equiv_p \epsilon(1 \cdot a) \cdot \epsilon(2 \cdot a) \cdot \epsilon(3 \cdot a) \cdot \dots \cdot \epsilon((p - 1) \cdot a) \quad (2.8)$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p - 1). \quad (2.9)$$

Dabei geht die Bijektivität von ϵ in den Übergang von (2.8) zu (2.9) ein: Diese Gleichheit gilt eben nicht Faktor für Faktor, sondern nur für die beiden Produkte als Ganzes. Schreiben wir den Term in (2.7) um als $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p - 1) \cdot a^{p-1}$, so läuft die Kongruenz von (2.7) und (2.9) hinaus auf

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p - 1) \cdot a^{p-1} \equiv_p 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p - 1).$$

Mit Satz 2.23 c) können die Faktoren von 1 bis $p - 1$ auf beiden Seiten gekürzt werden, und wir erhalten das gewünschte Resultat

$$a^{p-1} \equiv_p 1.$$

Es bleibt noch die andere, erstgenannte Kongruenzaussage des Satzes zu beweisen. Im Fall der Teilerfremdheit von p, a folgt dies aber unmittelbar aus der bereits bewiesenen Kongruenzaussage, nämlich durch Multiplikation mit a . Andernfalls ist a ein Vielfaches von p ; es gilt also $a \equiv_p 0$ und damit insgesamt

$$a^p \equiv_p 0^p = 0 \equiv_p a.$$

Damit ist der gesamte Satz bewiesen. □

Diophantische Gleichungen

Zum Abschluss dieses Abschnitts über die Grundlagen der Zahlentheorie werden wir auf einfache diophantische Gleichungen eingehen; denn zum einen treten diese häufig in mathematischen Wettbewerbsaufgaben auf, und zum anderen ist die kleine Theorie eine interessante Anwendung der Teilbarkeitslehre.

Definition 2.26. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann bezeichnen wir die Gleichung

$$ax + by = c$$

als *lineare diophantische Gleichung (mit zwei Variablen)* und jedes Paar (x, y) mit ganzen Zahlen x, y , das diese Gleichung erfüllt, als *Lösung* dieser diophantischen Gleichung.

Der folgende Satz ist lediglich eine Umformulierung von Folgerung 2.10.

Satz 2.27 (Lösbarkeitskriterium). *Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann hat die diophantische Gleichung $ax + by = c$ genau dann eine Lösung, wenn $\text{ggT}(a, b)$ ein Teiler von c ist.*

Wir werden im Folgenden ein einfaches Verfahren angeben, um die Lösungsmenge einer linearen diophantischen Gleichung vollständig zu bestimmen. Dieses Verfahren ist zweistufig: Auf der ersten Stufe finden wir *ein* Lösungspaar (x, y) , auf der zweiten Stufe bestimmen wir die *gesamte* Lösungsmenge mithilfe des einen Lösungspaares. Wir fixieren jetzt Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, b) \mid c$, so dass die diophantische Gleichung $ax + by = c$ lösbar ist. Indem wir die diophantische Gleichung durch $\text{ggT}(a, b)$ dividieren, erhalten wir eine äquivalente diophantische Gleichung $a'x + b'y = c'$ mit $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ und $\text{ggT}(a', b') = 1$. Wegen der Äquivalenz dieser beiden Gleichungen ist es klar, dass wir uns auf die Betrachtung von reduzierten Gleichungen $ax + by = c$ mit $\text{ggT}(a, b) = 1$ beschränken können, ohne die Allgemeinheit des Verfahrens einzuschränken. Ferner ist es jetzt klar, dass das Auffinden einer Lösung einer solchen Gleichung auf die Aufgabe hinausläuft, eine konkrete Vielfachsummendarstellung des ggT von a, b zu finden, also eine Darstellung der Form $ak + bl = 1$ – denn dann ist (kc, lc) offenbar ein Lösungspaar. Die Existenz einer solchen Vielfachsummendarstellung ist durch Satz 2.7 gesichert. Wie aber findet man die Koeffizienten k, l ? Am einfachsten wohl durch eine Rückwärtsdurchlaufung des Euklidischen Algorithmus', den wir auf Seite 78 bereits am Beispiel $\text{ggT}(945, 546)$ demonstriert haben. Beginnt man dort mit der vorletzten Zeile $105 = 2 \cdot 42 + 21$ und

benutzt die drittletzte Zeile zur Ersetzung der 42, die viertletzte Zeile zur Ersetzung der 105 und so weiter, so erhält man die Gleichungskette

$$\begin{aligned} 21 &= 105 - 2 \cdot 42 = 105 - 2 \cdot (147 - 105) = 3 \cdot 105 - 2 \cdot 147 \\ &= 3 \cdot (399 - 2 \cdot 147) - 2 \cdot 147 = 3 \cdot 399 - 8 \cdot 147 = 3 \cdot 399 - 8 \cdot (546 - 399) \\ &= 11 \cdot 399 - 8 \cdot 546 = 11 \cdot (945 - 546) - 8 \cdot 546 = 11 \cdot 945 - 19 \cdot 546, \end{aligned}$$

womit dann die gesuchte Vielfachsummendarstellung von $\text{ggT}(945, 546)$ gefunden ist:

$$21 = 11 \cdot 945 - 19 \cdot 546.$$

Im Fall unserer Zahlen a, b mit $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist natürlich nicht 21, sondern die Zahl 1 auf entsprechende Weise als Vielfachsumme darzustellen.

Der folgende Satz zeigt, dass der Schritt von *einer* Lösung einer diophantischen Gleichung zur Analyse der *gesamten* Lösungsmenge recht einfach ist:

Satz 2.28. *Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, b) = 1$, und sei $(x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine Lösung der diophantischen Gleichung $ax + by = c$. Dann ist*

$$\{(x' + k \cdot b, y' - k \cdot a) \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.10)$$

die vollständige Lösungsmenge der diophantischen Gleichung $ax + by = c$.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen zunächst, dass dann $(x' + k \cdot b, y' - k \cdot a)$ tatsächlich eine Lösung unserer diophantischen Gleichung ist. Einfaches Rechnen ergibt:

$$a \cdot (x' + k \cdot b) + b \cdot (y' - k \cdot a) = a \cdot x' + b \cdot y' = c.$$

Sei nun umgekehrt (\bar{x}, \bar{y}) eine beliebige Lösung unserer diophantischen Gleichung. Dann ist

$$a \cdot \bar{x} + b \cdot \bar{y} = c = a \cdot x' + b \cdot y', \quad (2.11)$$

also

$$a \cdot (\bar{x} - x') = b \cdot (y' - \bar{y}).$$

Somit ist b ein Teiler von $a \cdot (\bar{x} - x')$, und wegen der Teilerfremdheit von a, b folgt mit dem Euklidischen Hauptsatz, dass b sogar ein Teiler von $\bar{x} - x'$ ist. Wir finden daher ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \cdot b = \bar{x} - x'$. Daraus ergibt sich zum einen

$$\bar{x} = x' + k \cdot b \quad (2.12)$$

und zum anderen aus den Gleichungen (2.11) und (2.12)

$$\bar{y} = \frac{a \cdot x' + b \cdot y' - a \cdot \bar{x}}{b} = \frac{a \cdot x' + b \cdot y' - a \cdot x' - a \cdot k \cdot b}{b} = y' - k \cdot a.$$

Damit ist gezeigt, dass (\bar{x}, \bar{y}) tatsächlich ein Element der in (2.10) angegebenen Menge ist. □

Gelegentlich sind wir an der Klärung der Frage interessiert, ob die diophantische Gleichung $ax + by = c$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen a, b Lösungspaare (x, y) mit *nicht-negativen* ganzen Zahlen x, y hat. Wir fixieren also derartige Zahlen a, b und wollen c *darstellbar* nennen, falls ein nicht-negatives Lösungspaar (x, y) für die Gleichung $ax + by = c$ existiert. Eine umfassende Antwort auf die Frage nach der Darstellbarkeit von c ist nicht leicht zu formulieren und hängt selbstverständlich von c ab. Wir zeigen zunächst, dass die Zahl $ab - a - b$ *nicht darstellbar* ist. Andernfalls gäbe es nämlich Zahlen $x, y \in \mathbb{N}_0$ mit

$$ax + by = ab - a - b, \tag{2.13}$$

woraus insbesondere

$$b \mid a(x + 1)$$

und wegen der Teilerfremdheit von a, b mit dem Euklidischen Hauptsatz auch

$$b \mid x + 1$$

folgen würden. Dies würde aber unweigerlich $b \leq x + 1$ bedeuten, also $x \geq b - 1$, und in Kombination mit Gleichung (2.13) folgte daraus

$$ab - a - b = ax + by \geq a(b - 1) + by = ab - a + by, \quad \text{also } -b \geq by,$$

was sicherlich einen Widerspruch darstellen würde ($b \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N}_0$). Also ist $ab - a - b$ tatsächlich nicht darstellbar. Dieser Wert von c stellt sich aber als Grenzfall heraus in dem Sinne, dass alle größeren Zahlen (als $ab - a - b$) doch darstellbar sind. Um dies zu beweisen, fixieren wir also ein c mit $c \geq ab - a - b + 1$. Nach Satz 2.27 finden wir zumindest *irgendwelche* ganze Zahlen x', y' mit

$$ax' + by' = c.$$

Das Problem ist nur, dass zumindest eine der Zahlen x' und y' womöglich negativ ist. Durch Satz 2.28 wissen wir aber, dass alle anderen Lösungspaare derselben Gleichung genau die Paare

$$(x' + kb, y' - ka)$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ sind. Was wir also brauchen, ist eine ganze Zahl k mit

$$x' + kb \geq 0 \text{ und } y' - ka \geq 0, \quad (2.14)$$

denn dann ist $(x' + k \cdot b, y' - k \cdot a)$ mit jenem k die gesuchte nicht-negative Lösung. Durch einfaches Auflösen nach k erkennt man, dass (2.14) äquivalent ist zu

$$\frac{-x'}{b} \leq k \leq \frac{y'}{a}$$

und damit auch zu

$$\frac{-ax'}{ab} \leq k \leq \frac{by'}{ab}. \quad (2.15)$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass es ein solches k gibt, dass es also überhaupt eine ganze Zahl zwischen $\frac{-ax'}{ab}$ und $\frac{by'}{ab}$ gibt. Zunächst einmal überzeugen wir uns, dass wegen $ax' + by' > 0$ der linke Bruch in (2.15) tatsächlich kleiner als der rechte ist. Es kommt jetzt also nur auf die Existenz einer ganzen Zahl k zwischen diesen beiden Brüchen an. Ein solches k gibt es genau dann, wenn eine der Zahlen

$$-ax', -ax' + 1, -ax' + 2, \dots, by' \quad (2.16)$$

durch ab teilbar ist. Die Zahlen in (2.16) sind aufeinanderfolgend; es würde also ausreichen, wenn ihre Anzahl mindestens ab wäre. Dies ist jedoch leider im Allgemeinen nicht der Fall. Also füllen wir die Zahlenreihe von (2.16) an beiden Enden um einige Zahlen auf und erhalten die Reihe

$$\begin{aligned} & -ax' - (a - 1), -ax' - (a - 2), \dots, -ax' - 1, \\ & -ax', -ax' + 1, -ax' + 2, \dots, by', \\ & by' + 1, by' + 2, \dots, by' + (b - 1), \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei die hinzugefügten Zahlen grau dargestellt sind. Auch in (2.17) handelt es sich um aufeinanderfolgende Zahlen, und diesmal *ist* ihre Anzahl mindestens ab , denn für die Differenz von erstem und letztem Element gilt

$$\begin{aligned} by' + (b - 1) - (-ax' - (a - 1)) &= ax' + by' + a + b - 2 \\ &= c + a + b - 2 \geq (ab - a - b + 1) + a + b - 2 = ab - 1. \end{aligned}$$

Somit ist sicher, dass sich unter den Zahlen von (2.17) tatsächlich ein Vielfaches von ab befindet. Wir müssen nur noch verifizieren, dass es sich dabei nicht um eine der grauen, hinzugefügten Zahlen handelt, denn das Vielfache von ab soll

ja auch in der Reihe von (2.16) enthalten sein. Wäre eine der grauen Zahlen am *linken* Rand von (2.17) ein Vielfaches von ab , so gäbe es ein $j \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ mit

$$ab \mid -ax' - j,$$

und daraus folgte

$$a \mid -ax' - j$$

und damit auch

$$a \mid j.$$

Die Zahl j ist aber ein Element aus der Menge $\{1, 2, \dots, a-1\}$, die kein einziges Vielfaches von a enthält, womit hier ein Widerspruch erreicht ist.

Wäre hingegen eine der grauen Zahlen am *rechten* Rand von (2.17) ein Vielfaches von ab , so gäbe es in analoger Weise ein $j \in \{1, 2, \dots, b-1\}$ mit

$$ab \mid by' + j,$$

und daraus ergäbe sich

$$b \mid j,$$

was wiederum einen Widerspruch zur Herkunft von j aus $\{1, 2, \dots, b-1\}$ darstellen würde. Also ist dasjenige Vielfache von ab , das gewiss in (2.17) enthalten ist, auch in (2.16) enthalten, was noch zu zeigen war. Damit ist nachgewiesen: Die Zahl c ist darstellbar.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 2.29. *Seien a, b teilerfremde natürliche Zahlen, und sei c eine weitere natürliche Zahl. Dann hat die diophantische Gleichung $ax + by = c$ im Fall $c = ab - a - b$ keine nicht-negativen Lösungspaare, wohl aber für jeden größeren Wert von c .*

Es bleibt die Frage nach den Verhältnissen im Fall $c < ab - a - b$. Sondiert man die Situation für spezielle Werte von a, b, c , so stellt sich heraus, dass die Lage uneinheitlich ist, d.h. darstellbare Werte von c wechseln sich in kaum vorhersehbarer Weise mit nicht-darstellbaren Werten von c ab. Eine noch genauere Analyse⁴ zeigt jedoch immerhin, dass genau die Hälfte der Zahlen von 0 bis $ab - a - b$ im Sinne unseres Sprachgebrauchs darstellbar ist (siehe Aufgabe 124).

⁴ etwa in [Hons, Kapitel 13, insbesondere Seite 134]

Zahlentheoretische Aufgaben und didaktischer Kommentar

Die Ausgangslage: Zahlentheorie in der Schule

Die elementare Zahlentheorie ist für das Lernen von Mathematik ein sehr geeignetes Teilgebiet: Die Vertrautheit der Schüler mit ihren Gegenständen (den ganzen Zahlen), deren Diskretheit (im Gegensatz zu den rationalen oder reellen Zahlen) und das dichte Netz von einfachen und doch schlagkräftigen Sätzen garantieren gleichermaßen leichte Zugänglichkeit für Schüler und genügend Spielraum für interessante Probleme. Es ist daher bedauerlich, dass die Zahlentheorie – von einer kurzen Episode am Anfang der Sekundarstufe I einmal abgesehen – in unseren Schulen zur Zeit keine ernsthafte Rolle spielt.

Wenn die Teilbarkeit doch einmal zum Thema wird, so wird sie meist durch Rückgriff auf die Division erklärt: 6 teilt 18, denn die Division „18 durch 6“ geht auf. Dieser Zugang hat immerhin den Vorteil, dass auf Vertrautes Bezug genommen wird: Das Dividieren mit Rest ist schon Grundschulkindern bekannt, und der Begriff der Teilbarkeit besteht eigentlich nur in der Hervorhebung des Spezialfalls, dass der Rest gleich Null ist. Außerdem kommt dieser Zugang den Kindern und Jugendlichen durch seine Dynamik entgegen: Teilbarkeit wird überprüft, indem man etwas *tut*: Man dividiert und betrachtet den eventuellen Rest.

Die hochschulübliche Definition 2.1 wirkt vergleichsweise kompliziert und statisch. Ob 6 ein Teiler von 18 ist, hängt hier davon ab, ob ein $z \in \mathbb{Z}$ existiert, das die Gleichung $6 \cdot z = 18$ erfüllt. Ob es ein solches z gibt oder nicht, ist aber eine schwer überschaubare Angelegenheit: Eine konkrete Handlungsanweisung ist damit jedenfalls zunächst nicht verbunden. Erschwerend kommt hinzu, dass neben 6 und 18 noch ein drittes Objekt – und gar noch eine Variable – in der Definition erscheint; die Formulierung wirkt dadurch ziemlich abstrakt. Es ist aber bemerkenswert, dass gerade der scheinbare Vorteil der schulüblichen Teilbarkeits-Definition der Weiterentwicklung zahlentheoretischer Kompetenzen eher im Wege steht: Viele Beweise aus unserem Abschnitt über die Grundlagen der Zahlentheorie zeigen ja, dass man in vielen Fällen den Co-Teiler benötigt, um weiterschließen zu können; nur durch ihn wird aus einer Teilbarkeitsaussage eine Gleichung, und viele Ergebnisse lassen sich nur mittels Gleichungen erzielen. Bereits Aufgabe 47 wird ein Beispiel für die gelegentliche Notwendigkeit liefern, bei einer Teilbarkeitsaussage den Co-Teiler im Blick zu behalten.

Im Hinblick auf ggT und kgV haben wir uns in der Darlegung der mathematischen Grundlagen bereits der Tradition der Schule angepasst. Es wäre offensichtlich vermessen, wollte man Schülern erklären, dass der ggT von a und b der nicht-negative Erzeuger der Untergruppe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ im Hauptidealring \mathbb{Z} ist. Die Anpassung an die Schultradition bringt aber auch hier Nachteile mit sich: Zum einen wird ein Verständnis des ggTs, wie es in Satz 2.8 zum Ausdruck kommt, dadurch verstellt, dass man lediglich Bezug auf die Ordnungsrelation \leq innerhalb einer Teilmenge nimmt. Der ggT ist eben der größte unter allen gemeinsamen Teilern; dass alle anderen Teiler aber auch schon den ggT teilen, fällt unter den Tisch. Zum anderen macht die Schul-Definition des ggTs die Weiterentwicklung der Theorie beschwerlich, und zwar vor allem deswegen, weil die Vielfachsummen-Darstellbarkeit des ggTs durch sie in weiter Ferne bleibt: Genau dieses Nadelöhr muss aber wohl passiert werden, wenn man den Euklidischen Hauptsatz und danach die Eindeutigkeit der Primpotenzzerlegung wirklich beweisen möchte, und eben diese schwierige Passage würde uns durch die *algebraische* Definition des ggTs über die Untergruppen von \mathbb{Z} geschenkt werden.

Nun ist es ja in der Schule ohnehin so, dass auf die Beweise auch fundamentaler Aussagen gern arglos verzichtet wird. So wird die Existenz der Primpotenzzerlegung durch wiederholtes erfolgreiches Ausprobieren glaubhaft gemacht, und das Problem der Eindeutigkeit wird gar nicht erst aufgeworfen. Der Schule ist an dieser Stelle wohl kein Vorwurf zu machen, würde die Alternative doch einen Aufwand bedeuten, der Sechstklässler gewiss überfordern dürfte. Auf diese Weise erübrigt sich also die ansonsten dringende Notwendigkeit, sich mit dem Euklidischen Hauptsatz (als Hilfssatz) abzugeben; benötigt man diesen später doch einmal aus anderen Gründen, was in der Schule selten genug vorkommt, so kehrt man die Reihenfolge um und benutzt die (eindeutige) Primpotenzzerlegung, um den Euklidischen Hauptsatz zu begründen.

Es wird an dieser Stelle also natürlich *kein* Plädoyer dafür gehalten, den zahlentheoretischen Kurzlehrgang der Schule in wissenschaftlicher Hinsicht auf Vordermann zu bringen: über die Vielfachsummen-Darstellbarkeit des ggTs und den Euklidischen Hauptsatz bis hin zur Primpotenzzerlegung. Es erscheint vielmehr auch für unser Anliegen realistisch, weiterhin dem schulüblichen Gang der Dinge zu folgen, die Aussagen der wichtigsten Sätze den Schülerinnen und Schülern lediglich *bewusst* zu machen und ihnen eine Anleitung zu geben, wie sie diese Sätze als *Werkzeuge* zum Lösen von Aufgaben einsetzen können. Wir werden dies bald konkretisieren.

Die Anpassung an die Gegebenheiten der Schule betrifft auch den *Begriff* der Primpotenzzzerlegung bzw. Primfaktorzerlegung, den es in der Schule streng genommen gar nicht gibt: Dort heißt es ja beispielsweise, $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ sei die Primfaktorzerlegung von 1400. Das ist aber in etwa so sinnvoll wie die Rede-weise, 1400 sei die Primfaktorzerlegung von 1400, denn $2^3 \cdot 5 \cdot 7$ ist ja nichts anderes als eben 1400; eine Zerlegung in irgendeinem *begrifflichen* Sinne ist es jedenfalls nicht, auch wenn in der Schreibweise mit den Faktoren der Zahl 1400 die Einzelteile einer mutmaßlichen Zerlegung auf dem Papier *zu sehen* sind. Dieser akademische Einwand ist übrigens auch *unserem* theoretischen Aufbau gegenüber geltend zu machen, wenn auch in abgeschwächter Form: Wenn wir gemäß Definition 2.13 von der aufsteigenden Primpotenzzzerlegung von 1400 reden, *meinen* wir das Tupel $(2^3, 5^2, 7)$; was aber ist mit dem Tupel $(8, 25, 7)$? Die beiden Tupel sind ja identisch – sie sind komponentenweise gleich –, auch wenn wir die die Schreibweise des ersten gegenüber der Schreibweise des zweiten bevorzugen: Sie bringt besser zum Ausdruck, was wir eigentlich meinen. Konsequenter wäre es, den Begriff der Primpotenzzzerlegung so zu fassen, dass er genau das Gemeinte erfasst; dann würden wir die aufsteigende Primpotenzzzerlegung vielleicht als Tupel von Paaren definieren, im Falle der Zahl 1400 etwa $((2, 3), (5, 2), (7, 1))$. Im Lichte unserer vor Satz 2.18 ausgeführten Bedenken hinsichtlich gleicher Primzahl-Basen in Zerlegungen verschiedener Zahlen wäre es sogar denkbar, aus dem Tupel eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen zu machen, bei der das n -te Folgenglied für den Exponenten der Primzahl p_n steht, wobei p_n wiederum die n -te Primzahl in der natürlichen Reihenfolge 2, 3, 5, 7 etc. ist. Die Primpotenzzzerlegung von 1400 hätte dann die Gestalt $(3, 0, 2, 1, 0, 0, \dots)$. Diese Variante führt aber zu einem praktischen Problem, wenn etwa die Primpotenzzzerlegung von 1009 wirklich aufgeschrieben werden soll: eine Folge von 168 Nullen, gefolgt von einer Eins und einer unendlichen Prozession von weiteren Nullen; selbst wenn man die Notation nach der einzigen Eins abbricht, hat diese Technik eine stimmungsdämpfende Wirkung.

Somit ist der in unserem theoretischen Aufbau vorgeschlagene Begriff einer aufsteigenden Primpotenzzzerlegung ein Kompromiss zwischen dem Bemühen, tatsächlich einen Begriff (und nicht nur eine Schreibweise) anzubieten, und dem Wunsch, einen praktikablen Weg einzuschlagen, der nicht allzu weit von den vertrauten Pfaden der Schule entfernt ist. Die mathematische Bildung wird sich diesbezüglich ohnehin nicht so sehr in der Würdigung eines Begriffs, sondern vielmehr in der Anwendung der entsprechenden Idee vollziehen; es geht also in didaktischer Hinsicht vor allem um den instrumentellen Aspekt von Primpotenzzzerlegungen.

Die letzten beiden Abschnitte unseres Zahlentheorie-Kapitels über Kongruenzen und diophantische Gleichungen haben bekanntermaßen keine Entsprechung im regulären Mathematikunterricht der Schule – sie können also in unserem geplanten Lehrgang ohne die Gefahr von Interferenzen zum Einsatz gebracht werden, müssen aber folglich auch ohne entsprechende Vorleistungen auskommen.

Bei der nun folgenden Diskussion von zahlentheoretischen Aufgaben werden wir unsere Erfahrungen beim Lösen der Aufgaben in der Formulierung *heuristischer Strategien* bündeln. Es handelt sich dabei um bereits relativ spezielle zahlentheoretische Leitlinien, die dennoch auf eine große Zahl von Aufgaben anwendbar sind und dadurch vielleicht hilfreich sind. Mancher dieser Strategien sind lediglich zu Ratschlägen umformulierte Sätze, beispielsweise (S 3) oder (S 8). Selbst dann mag aber die Ausweisung von typischen zahlentheoretischen Situationen als Signale zur Anwendung dieser Sätze von didaktischem Nutzen sein. Andere Strategien hingegen, etwa (S 10) oder (S 11), gehen über die Aussage einzelner Sätze deutlich hinaus und könnten somit in heuristischer Hinsicht besonders wertvoll sein.

Teilbarkeit bis zum Euklidischen Hauptsatz

Wir stellen eine Aufgabe vor, die in unserem Lehrgang zu einem frühen Zeitpunkt auftreten könnte – als leichte Übung im Umgang mit der Teilt-Relation:

AUFGABE 47:

Es seien $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7$ acht aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $n > 1$. Aus diesen Zahlen sollen alle diejenigen Paare (a, b) mit $a \neq b$ ermittelt werden, in denen a ein Teiler von b ist.

- a) Für welche n gibt es solche Paare?
- b) Nenne alle Paare, die die genannten Forderungen erfüllen.

Die Zahlen a und b lassen sich als $n + i$ bzw. $n + j$ darstellen, wobei i und j verschiedene ganze Zahlen zwischen 0 und 7 sind. Dass $n + i$ ein Teiler von $n + j$ sein soll, bedeutet ja, dass es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt mit $(n + i) \cdot z = n + j$ (hier gilt offenbar sogar $z \in \mathbb{N}$). Dieser Co-Teiler z ist interessant: Sehr groß wird er wohl nicht sein, denn $n + j$ ist ja kaum größer als $n + i$; die Differenz ist höchstens 7. Andererseits muss er größer oder gleich 2 sein, denn $z = 1$ wäre

ein Widerspruch zur Verschiedenheit von $n + i$ und $n + j$. Diese Überlegung führt zu der Ungleichung

$$n + 7 \geq n + j = (n + i) \cdot z \geq (n + i) \cdot 2 \geq 2 \cdot n,$$

woraus offenbar $n \leq 7$ folgt.

Dieses Ergebnis ist Schülern sicherlich auch ohne formale Berücksichtigung des Co-Teilers z zugänglich: Weil $n + j$ mindestens doppelt so groß ist wie $n + i$ und somit auch mindestens doppelt so groß wie n , muss j mindestens so groß sein wie n ; wegen $j \leq 7$ folgt daraus $n \leq 7$. Auch bei dieser eher anschaulichen Überlegung ist der Co-Teiler z aber immerhin *mitbedacht* worden; die Idee des „mindestens doppelt so großen“ ist auch in ihr enthalten.

Durch das Zwischenergebnis $n \leq 7$ ist das Problem der Aufgabe auf eine endliche und überschaubare Anzahl von Möglichkeiten reduziert worden. Der weitere Lösungsweg dürfte kein Problem mehr darstellen.

Aufgabe 47 erfüllt somit die didaktische Funktion, über die explizite oder auch nur implizite Berücksichtigung des Co-Teilers einer Teilbarkeitsaussage die Verbindung von Teilbarkeit und Größenabschätzung ins Bewusstsein zu bringen. Wir formulieren eine entsprechende heuristische Strategie:

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 1):

Zu jeder Teilbarkeitsaussage $a \mid b$ gehört ein Co-Teiler z mit $a \cdot z = b$. Sofern die Größen von a und b konkret eingegrenzt werden können, kommen womöglich nur wenige Werte für z in Frage. Die Betrachtung dieser Werte kann beim Lösen der Aufgabe helfen.

Diese Strategie wird insbesondere bei den Aufgaben 52 bis 55 anwendbar sein. Für die meisten Teilbarkeitsaufgaben werden wir allerdings schon etwas stärkere Mittel benötigen. Wir betrachten ein Beispiel:

AUFGABE 48:

Finde alle natürlichen Zahlen n , die ein Teiler von $n^2 + 2n + 15$ sind.

Diese Aufgabe trainiert die Anwendung von Satz 2.4 b) in typischer Weise: Die Teilbarkeit der Summe $n^2 + 2n + 15$ durch n soll untersucht werden. Typisch ist nun, dass der Term $n^2 + 2n + 15$ derart in zwei Summanden aufgeteilt wird, dass die Teilbarkeit des einen ohnehin klar ist: n ist in jedem Fall ein Teiler von $n^2 + 2n$, denn es ist $n \cdot (n + 2) = n^2 + 2n$. Mit Satz 2.4 b) ist die fragliche

Aussage $n \mid n^2 + 2n + 15$ also äquivalent zu $n \mid 15$. Die gesuchten Zahlen n sind also genau die positiven Teiler von 15.

Es erscheint sehr empfehlenswert, diese typische Anwendungstechnik von Satz 2.4 b) unseren Schülerinnen und Schülern explizit an die Hand zu geben, sie in den gemeinsamen Werkzeugkasten zu legen und sie an weiteren Beispielen zu üben:

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 2):

Ist eine Aussage der Form $a \mid (b + c)$ zu untersuchen, so prüfe man, ob vielleicht eine der Aussagen $a \mid b$ bzw. $a \mid c$ gilt. Ist das der Fall, so benutze man Satz 2.4.

Die nächste Aufgabe zielt bereits auf den Euklidischen Hauptsatz ab:

AUFGABE 49:

Ein Tiger sammelt Pilze im Wald, und zwar ausschließlich Steinpilze und Pfifferlinge: Zum Schluss stellt er fest, dass zwei Drittel der gesammelten Pfifferlinge genauso viele Pilze sind wie drei Viertel seiner Steinpilze. Wie viele Pilze von jeder Sorte hat der Tiger gesammelt, wenn es insgesamt mehr als 55, aber weniger als 85 Pilze sind?

Nennen wir die beiden Anzahlen von Pilzen m und n , so gilt offenbar: $\frac{2}{3}m = \frac{3}{4}n$, also

$$8 \cdot m = 9 \cdot n. \quad (2.18)$$

Die Situation von Gleichung (2.18) ist eine weitere zahlentheoretische Standard-situation: Wir haben vier Faktoren, zwei links, zwei rechts, und die Produkte sind gleich. Aus dieser Gleichheit lassen sich nun vier Teilbarkeitsaussagen gewinnen:

$$8 \mid 9 \cdot n, \quad m \mid 9 \cdot n, \quad 9 \mid 8 \cdot m, \quad n \mid 8 \cdot m.$$

Es stellt sich die Frage, welche dieser vier Aussagen für uns *hilfreich* sind. Die Tatsache, dass jeweils ein Produkt geteilt wird, lässt den geübten Betrachter an den Euklidischen Hauptsatz denken. Betrachtet man die vier Aussagen aus diesem Blickwinkel, so erkennt man schnell, dass $8 \mid 9 \cdot n$ und $9 \mid 8 \cdot m$ die interessantesten Aussagen sind, denn aus diesen folgt $8 \mid n$ und $9 \mid m$. Es reicht nun, eine dieser beiden Teilbarkeitsaussagen weiterzuverfolgen; wir wählen die erste: Aus ihr folgt, dass es eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ mit $8 \cdot a = n$ gibt. Mit dieser Darstellung von n geben wir Gleichung (2.18) eine neue Form: $8 \cdot m = 72 \cdot a$,

also $m = 9 \cdot a$. Wir müssen nun auch die weitere Bedingung $55 < m + n < 85$ beachten; ersetzen wir m durch $9 \cdot a$ und n durch $8 \cdot a$, so erhalten wir die Ungleichungskette $55 < 17a < 85$. Aus ihr folgt unmittelbar $a = 4$. Damit ist dann auch die gesamte Aufgabe gelöst: $m = 36$ und $n = 32$.

Sicherlich kann man Aufgabe 49 auch ohne den Euklidischen Hauptsatz lösen, allerdings mit mehr Aufwand und weniger Eleganz. Die didaktische Funktion dieser Aufgabe besteht eben auch darin, den Nutzen dieses Satzes zu illustrieren und als erstes Beispiel für eine wichtige heuristische Strategie zu dienen:

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 3):

Ist eine Situation der Form $c \mid a \cdot b$ gegeben, so prüfe man die Anwendbarkeit des Euklidischen Hauptsatzes. Man erhält dann vielleicht eine „bessere“ Aussage der Form $c \mid a$ oder $c \mid b$.

Manchmal ist die Anwendung von (S 3) etwas komplizierter, wenn nämlich mehr als zwei Faktoren vorhanden sind:

AUFGABE 50:

Ermittle alle natürlichen Zahlen n , für die gilt: n ist größer als 9, und wenn man die erste Ziffer von n wegstreicht, so erhält man $\frac{n}{57}$.

Hier führt uns die Aufgabe zu der Gleichung $z \cdot 10^i + k = 57 \cdot k$, wobei z für die gesuchte Anfangsziffer und k für den „Rumpf“ der gesuchten Zahl n steht. Subtrahiert man k und schreibt $56k$ als $7 \cdot 8 \cdot k$, so erhält man

$$z \cdot 10^i = 7 \cdot 8 \cdot k.$$

Hier stehen bereits mindestens fünf Teilbarkeitsaussagen zur Auswahl: Interessant ist zunächst vor allem $7 \mid z \cdot 10^i$, denn mit dem Euklidischen Hauptsatz folgt $7 \mid z$. Weil z aber eine Ziffer ist, heißt das offenbar $z = 7$, was den weiteren Lösungsweg erheblich vereinfacht.

Eine spezielle Anwendung des Euklidischen Hauptsatzes haben wir in Satz 2.11 gesehen. Dieser Satz hat zahlreiche Anwendungen in mathematischen Wettbewerbsaufgaben:

AUFGABE 51:

Welche vierstelligen natürlichen Zahlen sind durch 18 teilbar, enthalten keine anderen Ziffern als 0, 1 und 4, aber jede dieser drei Ziffern mindestens einmal?

Der Trick besteht natürlich darin, die Teilbarkeit durch 18 äquivalent durch die Teilbarkeit durch 2 und 9 zu ersetzen (siehe Satz 2.11). Drei der vier Ziffern stehen – ohne Berücksichtigung der Reihenfolge – schon fest: 0, 1, 4. Da die vierte Ziffer mit einer dieser drei ersten Ziffern identisch sein muss, kann es sich dabei nur um die 4 handeln, denn ansonsten würde keine durch 9 teilbare Quersumme erreicht. Eine der beiden Vieren muss die Einerstelle besetzen, um die Teilbarkeit durch 2 zu sichern. Die Anfangsziffer darf nach allgemeinem Verständnis nicht 0 sein. Alles Weitere ist beweglich. Berücksichtigt man alle verbleibenden Kombinationen für die Platzierung der Ziffern, so erhält man die vier Zahlen 1404, 4104, 1044 und 4014.

Die bei Aufgabe 51 angewandte Technik der Aufteilung einer Teilbarkeitsbedingung ist derart häufig anwendbar, dass wir für sie eine weitere heuristische Strategie formulieren:

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 4):

Geht es um die Untersuchung einer Teilbarkeitsaussage $a \mid b$, so unterscheide man zwei Fälle: Ist a eine Primzahl, so ziehe man den Euklidischen Hauptsatz heran. Ist a hingegen zusammengesetzt, so betrachte man eine teilerfremde Zerlegung $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r$ von a und untersuche gemäß Satz 2.11 die Aussagen $a_i \mid b$ einzeln.

Wir haben uns in diesem Abschnitt vor allem mit dem geschickten *Benutzen* von Teilbarkeitsaussagen beschäftigt. Abschließend möchten wir eine schlichte und doch wichtige Strategie formulieren, mit deren Hilfe wir häufig die Teilbarkeitsaussagen überhaupt erst *erhalten*:

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 5):

Jede Gleichung, in der unbekannte ganze oder natürliche Zahlen vorkommen, ist eine potentielle Quelle von Teilbarkeitsaussagen. Man prüfe die ableitbaren Teilbarkeitsaussagen systematisch auf ihre Nützlichkeit.

Die Strategie (S 5) mag einem erfahrenen Mathematiker lächerlich erscheinen, doch in der Schule erleben wir zahlreiche Situationen, wo genau der in dieser Strategie formulierte Impuls fehlt und dann meist vom Lehrer gegeben werden muss. Wir verknüpfen diese Strategie mit dem Hinweis auf Aufgabe 55 in der folgenden Liste weiterer Aufgaben: Diese Aufgabe führt zu der Gleichung

$$100x + y = 2xy, \quad (2.19)$$

in der x und y für natürliche Zahlen mit $x, y \leq 99$ und $x \geq 10$ stehen. Es lassen sich mehrere Teilbarkeitsaussagen ableiten, etwa $2 \mid y$, $x \mid y$ und $y \mid 100x$. Welche sind nützlich, und wozu sind sie gut? Die erste Aussage $2 \mid y$ ist zu schwach, die dritte, also $y \mid 100x$, hilft nicht, weil der Euklidische Hauptsatz nicht anwendbar ist. Die zweite Aussage jedoch, $x \mid y$, liefert uns in Anwendung von Strategie (S 1) eine natürliche Zahl k mit $x \cdot k = y$, und wegen der Größeneinschränkung für x, y ist $1 \leq k \leq 9$. Ersetzen wir also y in (2.19) durch $x \cdot k$, so ist der Rest des Lösungswegs nicht mehr schwer.

Weitere Aufgaben

Die graphentheoretischen Aufgaben 225, 226 und 227 könnten ebenfalls in diese Liste aufgenommen werden, da sie jeweils ein gewisses zahlentheoretisches Element in sich tragen.

AUFGABE 52 [S 1]: Wir suchen zwei natürliche Zahlen, für die gilt: Addiert man ihre Summe, ihre Differenz, ihr Produkt und ihren Quotienten, so erhält man 81.

AUFGABE 53 [S 1]: Für alle natürlichen Zahlen n betrachten wir die Mengen $A := \{5n, 5n + 1, 5n + 2, \dots, 5n + 5\}$ und $B := \{11n, 11n + 1, 11n + 2, \dots, 11n + 11\}$. Finde für jede Zahl n alle Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, für die a ein Teiler von b ist.

AUFGABE 54 [S 1]: Finde alle Möglichkeiten, die Buchstaben A und B so durch Ziffern zu ersetzen, dass $4A$ ein Teiler von $6BB$ ist. Dabei darf für A und B auch dieselbe Ziffer verwendet werden; der Buchstabe B muss allerdings bei seinem doppelten Auftreten durch dieselbe Ziffer ersetzt werden.

AUFGABE 55 [S 1,2]: Setzt man zwischen die zweite und dritte Ziffer einer vierstelligen natürlichen Zahl das Multiplikationszeichen, dann erhält man ein Produkt aus zwei zweistelligen Faktoren. Ermittle alle vierstelligen Zahlen, die doppelt so groß sind wie das auf diese Weise gebildete Produkt.

AUFGABE 56 [S 2]: Jemand würfelt mit n Würfeln die Augensumme $3n + 4$, und zwar zeigt dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl. Man ermittle sämtliche Werte von n , für die das möglich ist.

AUFGABE 57 [S 2]: Finde alle ganzen Zahlen a , für die auch $\frac{69-6a}{2a+1}$ eine ganze Zahl ist.

AUFGABE 58 [S 2]: Bestimme alle natürlichen Zahlen n , für die Folgendes gilt: Streicht man aus der Zifferndarstellung von n die letzte Ziffer, so entsteht die Zifferndarstellung einer Zahl, die ein Teiler von n ist.

AUFGABE 59 [S 1, 3]: Ein Reisebericht: „In den Winterferien machten wir eine Fahrt in den Harz. Daran nahmen nicht mehr als 80 Personen teil, und zwar waren es genau 3 Männer weniger als Frauen und genau 20 Erwachsene mehr als Kinder. Unterwegs wurden wir in genau 7 Gruppen von gleicher Personenzahl aufgeteilt.“ Ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder, die mit dem Reisebericht im Einklang stehen.

AUFGABE 60 [S 3]: Ein Fünftklässler erzählt: „Multipliziert man die Schülerzahl in meiner Klasse mit 5, so ist die Quersumme dieses Produktes doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar. In meiner Klasse können 26 Schüler Rad fahren und 12 Schüler schwimmen, und jeder Schüler kann mindestens eines von beiden.“ Wie viele Schüler sind also in dieser Klasse?

AUFGABE 61 [S 3]: Man ermittle alle Tripel (n, p, q) mit folgenden Eigenschaften: n ist eine natürliche Zahl, p und q sind Primzahlen, und es gilt die Gleichung $97 \cdot pq = (p + n) \cdot (q + n)$.

AUFGABE 62 [S 3]: Zeige, dass es keine vierstellige Quadratzahl mit dem Ziffernmuster $abab$ gibt.

AUFGABE 63 [S 3]: Finde alle vierstelligen Quadratzahlen mit dem Ziffernmuster $aabb$.

AUFGABE 64 [S 3]: Gibt es eine natürliche Zahl, die dadurch verdoppelt wird, dass ihre erste Ziffer gestrichen und dafür an ihr Ende platziert wird?

AUFGABE 65 [S 4]: Ermittle die kleinste achtstellige natürliche Zahl, die durch 36 teilbar ist und deren Ziffern alle voneinander verschieden sind.

AUFGABE 66 [S 4]: Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und das Ziffernmuster $9a7b$ aufweisen.

AUFGABE 67 [S 4]: Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen, die durch 90 teilbar sind und das Ziffernmuster $3a3b2c$ aufweisen.

AUFGABE 68 [S 4]: Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 48 teilbar sind und das Ziffernmuster $a34b$ aufweisen.

AUFGABE 69 [S 4]: Bestimme die sechs kleinsten natürlichen Zahlen, die durch 3, 5 und 8 teilbar sind und in denen jede der Ziffern 3, 5 und 9 mindestens einmal vorkommt.

Primpotenzzzerlegung, ggT und kgV

Der Tradition der Schule folgend werden wir Aufgaben zum ggT beziehungsweise kgV in engem Zusammenhang mit Aufgaben zur Primpotenzzzerlegung betrachten. Es ist im Wesentlichen Satz 2.18 über das Bestimmen von ggT und kgV zweier Zahlen mithilfe der Primpotenzzzerlegungen, der schon in der Schule diese Begriffe verbindet. Der Schulunterricht beschränkt sich jedoch meist auf Aufgabenstellungen des Typs „Bestimme die Primpotenzzzerlegung von ...“ oder „Finde ggT und kgV von ...“. Auf solch elementare Aufgaben werden wir hier natürlich nicht eingehen. Hinsichtlich der Primpotenzzzerlegung werden wir uns stattdessen auf solche Aufgaben konzentrieren, für deren Lösung die Primpotenzzzerlegung *als Werkzeug* eingesetzt werden kann. Im Aufgabentext selbst wird dieser Begriff hingegen kaum auftauchen. Sehr viele Wettbewerbsaufgaben können durch Anwendung von Satz 2.17 zur Analyse von Teilmengen und Teileranzahlen gelöst werden. Hier ist ein erstes Beispiel:

AUFGABE 70:

Für die vier Altersangaben in einer Familie mit Vater, Mutter und zwei Kindern gilt: Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44950, und der Vater ist 2 Jahre älter als die Mutter. Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

Unbekannte Faktoren mit bekanntem Produkt veranlassen uns, reflexartig die Primpotenzzzerlegung des Produkts zu betrachten, denn alle gesuchten Faktoren sind Teiler des Produkts und daher im Sinne von Satz 2.17 in der Primpotenzzzerlegung enthalten. Die aufsteigende Primpotenzzzerlegung von 44950 ist $(2, 5^2, 29, 31)$, es gibt also 24 Teiler. Wie findet man diese Teiler systematisch? Satz 2.17 weist den Weg: Die Teiler von 44950 sind genau die Zahlen

$$2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2} \cdot 29^{\beta_3} \cdot 31^{\beta_4} \text{ mit } \beta_1, \beta_3, \beta_4 \in \{0, 1\} \text{ und } \beta_2 \in \{0, 1, 2\}. \quad (2.20)$$

Wir müssten also lediglich alle 4-Tupel $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ mit den in (2.20) genannten Einschränkungen auflisten und die entsprechenden Teiler $2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2} \cdot 29^{\beta_3} \cdot 31^{\beta_4}$ notieren. Eine entsprechende Übersicht zu erstellen ist jedoch eine mühsame Arbeit. Geschickter ist es wohl, zunächst eine der vier Primpotenzen zu ignorieren – wir wählen die zweite – und zunächst alle Teiler der Form

$$2^{\beta_1} \cdot 29^{\beta_3} \cdot 31^{\beta_4}$$

mit den Einschränkungen von (2.20) aufzusammeln. Es gibt hier acht Kombinationen der drei Exponenten, und wir erhalten die Teiler

$$1, 2, 29, 31, 58, 62, 899, 1798. \quad (2.21)$$

Es fehlt jetzt noch jeweils der Faktor 5^{β_2} , wobei β_2 die Werte 0, 1, 2 annehmen kann. Wir multiplizieren daher alle Teiler aus (2.21) zunächst mit 5^0 , dann mit 5^1 und schließlich mit 5^2 . Wir erhalten somit drei Reihen von je acht Teilern:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 29 & 31 & 58 & 62 & 899 & 1798 \\ 5 & 10 & 145 & 155 & 290 & 310 & 4495 & 8990 \\ 25 & 50 & 725 & 775 & 1450 & 1550 & 22475 & 44950. \end{array}$$

Es ist gut zu sehen, dass jede Zahl der zweiten oder dritten Reihe genau das Fünffache der über ihr stehenden Zahl ist. Wir notieren diese Teiler in ihrer natürlichen Ordnung und lassen „aus biologischen Gründen“ die Teiler jenseits von 120 fallen – es sollen ja menschliche Lebensalter sein:

$$\{1, 2, 5, 10, 25, 29, 31, 50, 58, 62\}.$$

Der Altersunterschied von zwei Jahren zwischen Vater und Mutter führt nun geradewegs auf die Zahlen 29 und 31. Das „Restprodukt“ $2 \cdot 5^2$ enthält die Faktoren für die Lebensalter der beiden Kinder. Mathematisch sind drei Zerlegungen möglich – ohne Berücksichtigung der Reihenfolge:

$$(1, 50); \quad (2, 25); \quad (5, 10).$$

Hier helfen nur noch Biologie und Lebenserfahrung weiter: Offenbar sind die Kinder 5 bzw. 10 Jahre alt.

Aufgabe 70 ist ein typisches Beispiel für die Nützlichkeit der Primpotenzerlegung zur Bestimmung von Teilern. Sie illustriert dabei den ersten Teil des folgenden Prinzips:

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 6):

Bei einem *bekanntem* Produkt von natürlichen Zahlen mit *unbekannten* Faktoren betrachte man die Primpotenzerlegung des Produkts. Aus ihr kann man mit Satz 2.17 die in Frage kommenden Faktoren ablesen. Auch wenn es um die *Teileranzahl* einer Zahl geht, möge man Satz 2.17 berücksichtigen, denn die Teileranzahl ist direkt aus der Primpotenzerlegung zu entnehmen.

Die Anwendung des zweiten Teils von (S 6) erproben wir an einer weiteren Aufgabe:

AUFGABE 71:

Gibt es eine sechsstellige natürliche Zahl, die genau vierzehn verschiedene natürliche Zahlen als Teiler hat, unter denen sich auch die Zahl 14 befindet?

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ die Exponenten in der Primpotenzzerlegung unserer gesuchten Zahl n , so gilt nach Satz 2.17:

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1) = 14. \quad (2.22)$$

Weil n durch 14 teilbar ist, kommen mindestens zwei Primpotenzen vor (nämlich mit den Basen 2 bzw. 7). In (2.22) muss es sich daher um die Zerlegung von 14 in die Faktoren 2 und 7 handeln, d.h. es gilt $r = 2$ und $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{1, 6\}$. Es kommen nur noch zwei Zahlen in Frage: $2^6 \cdot 7$ und $2 \cdot 7^6$. Die geforderte Sechsstelligkeit von n führt schließlich zur Entscheidung: Es ist $n = 2 \cdot 7^6 = 235298$.

Zu einem souveränen Umgang mit Primpotenzzerlegungen gehört auch das Verständnis der „Addition von Primpotenzzerlegungen“ bei *Multiplikation* der entsprechenden Zahlen: Tritt eine Primzahl p in den Primpotenzzerlegungen zweier Zahlen a und b in den Potenzen p^α bzw. p^β auf, so wird sie in der Primpotenzzerlegung des Produkts $a \cdot b$ in der Potenz $p^{\alpha+\beta}$ vorkommen.

AUFGABE 72:

Für zwei natürliche Zahlen a und b gelte: $a \cdot b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$. Beweise, dass dann $a + b$ durchaus durch 3 teilbar sein *kann*, nicht aber durch 5, 8, 10 oder 49.

Ein erster Stolperstein bei dieser Aufgabe dürfte das präzise Verständnis der Worte „kann“ bzw. „nicht kann“ sein. Der erste Teil der Aufgabe bedeutet doch wohl, dass es Zahlen a, b mit dem genannten Produkt gibt derart, dass auch $a + b$ durch 3 teilbar ist. Das Augenmerk gilt hier natürlich den Potenzen der 3: Die Addition der Exponenten der 3 in den Primpotenzzerlegungen von a und b muss 2 ergeben, da im Produkt $a \cdot b$ die Potenz 3^2 steht. Die Möglichkeit, der einen Zahl 3^2 , der anderen 3^0 zuzuschlagen, ist sicherlich zu verwerfen, denn dann wäre die eine Zahl durch 3 teilbar, die andere jedoch nicht und damit

auch die Summe nicht: siehe Satz 2.4 b). Also müssen a und b jeweils eine 3 als Faktor erhalten; alles andere ist egal: Die Zahlen $a = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^3$ und $b = 3$ etwa leisten das Gewünschte.

Der zweite Teil der Aufgabe verlangt den Nachweis, dass für *alle* Zahlen a und b mit dem genannten Produkt die Summe nicht durch 5, 8, 10 oder 49 teilbar ist. Wir fixieren daher zwei beliebige Zahlen a und b mit $a \cdot b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$. Jetzt ist klar, dass *eine* der beiden Zahlen a, b durch 5 teilbar ist – sonst würde die 5 nicht in der Zerlegung des Produkts auftreten –, die *andere* aber nicht – sonst müsste die 5 in der Zerlegung des Produkts mindestens mit dem Exponenten 2 vorkommen. Mit Satz 2.4 b) ist daher klar, dass $a + b$ nicht durch 5 teilbar ist, und damit auch nicht durch 10.

Bezüglich der Teiler 8 und 49 greifen ähnliche Argumente: *Genau eine* der beiden Zahlen ist durch 8 teilbar, die Summe daher nicht. Für die 49 gilt sinngemäß genau dasselbe.

Aus Aufgabe 72 extrahieren wir eine weitere Leitlinie, die eine Verfeinerung von (S 6) darstellt:

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 7):

Bei der Suche nach geeigneten Faktoren, deren Produkt eine vorgegebene Zahl ergeben soll, beachte man die Addition der Exponenten in den Primpotenzzerlegungen.

Die „Addition von Primpotenzzerlegungen“ war bereits der Gegenstand des recht speziellen Satzes 2.20 über die Primpotenzzerlegungen von Quadratzahlen, Kubikzahlen etc. Dieser Sonderfall tritt in Wettbewerbsaufgaben trotz des hohen Spezialisierungsgrades immer noch recht häufig auf. Hier ein Beispiel:

AUFGABE 73:

Bestimme die kleinsten vier Quadratzahlen, die zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind.

Die gesuchten Zahlen sind sowohl Quadrat- als auch Kubikzahlen; außerdem sind sie größer als 1 („dritte Potenz einer *anderen* natürlichen Zahl“). Die Exponenten in ihren Primpotenzzerlegungen sind also durch 2 und 3, und somit durch 6, teilbar (Satz 2.20). Die Primzahlbasen müssen nun so eingerichtet werden, dass die Zahlen möglichst klein bleiben. Insgesamt erhalten wir die Zahlen $2^6, 3^6, 5^6$ und $2^6 \cdot 3^6$.

Gelegentlich werden unsere Schülerinnen und Schüler mit Aufgaben konfrontiert, in denen zusätzliche Voraussetzungen über die ansonsten unbekannt Faktoren eines bekannten Produkts gegeben sind:

AUFGABE 74:

Man bestimme die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k, n, m) natürlicher Zahlen k, n, m , für die $k \cdot n^2 \cdot (2m + 1) = 3808$ gilt.

Die aufsteigende Primpotenzzzerlegung von 3808 ist $(2^5, 7, 17)$. Unter den Zahlen k, n, m scheint n die interessanteste zu sein: n ist jedenfalls ein Teiler von 3808; die Primpotenzzzerlegung von n hat daher die Form

$$(2^{\beta_1}, 7^{\beta_2}, 17^{\beta_3}).$$

Die Exponenten in der Primpotenzzzerlegung von n^2 sind nach den Potenzrechenregeln demgegenüber jeweils verdoppelt, also

$$(2^{2 \cdot \beta_1}, 7^{2 \cdot \beta_2}, 17^{2 \cdot \beta_3}).$$

Da aber auch n^2 ein Teiler von 3808 ist, folgen mit Satz 2.17 die Ungleichungen

$$2 \cdot \beta_1 \leq 5, \quad 2 \cdot \beta_2 \leq 1, \quad 2 \cdot \beta_3 \leq 1.$$

Also gilt $\beta_2 = \beta_3 = 0$, und für β_1 kommen die Werte 0, 1, 2 in Frage. Unabhängig davon, welchen der drei möglichen Werte $n^2 = n^{2 \cdot \beta_1}$ annimmt, ist $(2m + 1)$ jedenfalls ein ungerader Teiler von $2^{5-2 \cdot \beta_1} \cdot 7^1 \cdot 17^1$ und damit – nach dem Euklidischen Hauptsatz – ein Teiler des ungeraden Anteils $7^1 \cdot 17^1$: Da gibt es vier Möglichkeiten: 1, 7, 17, $7 \cdot 17$. Die Zahl k ist stets in direkter Abhängigkeit der jeweilige Co-Teiler.

Abschließend fassen wir zusammen, dass es für n^2 drei mögliche Werte gibt und für die Aufteilung des „Rests“ jeweils vier Möglichkeiten: Insgesamt gibt es also zwölf Tripel (k, n, m) mit der gewünschten Eigenschaft.

Um einer allzu starken Fixierung auf Primpotenzzzerlegungen vorzubeugen, betrachten wir nun als Warnung eine Aufgabe, die entgegen dem ersten Anschein ohne Betrachtung von Primpotenzzzerlegungen schneller gelöst werden kann.

AUFGABE 75:

Von drei natürlichen Zahlen ist die zweite Zahl um 2 größer als die Hälfte der ersten Zahl. Die dritte Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der zweiten Zahl. Das Produkt der drei Zahlen beträgt 1120. Wie lauten die drei Zahlen?

Der erste Reflex besteht darin, die Primpotenzerlegung von 1120 zu betrachten. In der Tat kommt man so durchaus zum Ziel, doch hängen die drei gesuchten Faktoren hier *direkt* voneinander ab – nicht nur *indirekt* über ihr Produkt. Wenn wir nämlich die erste gesuchte Zahl k nennen, so beschreiben die Terme $\frac{1}{2}k + 2$ und $\frac{1}{4}k + 3$ die anderen beiden Zahlen. Im Grunde hängt also alles nur von k ab. Die Gleichung

$$1120 = k \cdot \left(\frac{1}{2}k + 2\right) \cdot \left(\frac{1}{4}k + 3\right)$$

ist jedoch vom Grade 3 und daher unangenehm. Effizienter ist hier wohl eine Abschätzung: Es ist

$$1120 = k \cdot \left(\frac{1}{2}k + 2\right) \cdot \left(\frac{1}{4}k + 3\right) \approx k \cdot \frac{1}{2}k \cdot \frac{1}{4}k = \frac{1}{8}k^3$$

und somit $k \approx 20$. Ferner ergibt sich aus der Aufgabe, dass $\frac{1}{4}k + 3$ eine natürliche Zahl ist; k ist also durch 4 teilbar. In Kombination mit der Abschätzung $k \approx 20$ macht dies 16, 20 und 24 zu den aussichtsreichsten Kandidaten. In der Tat sieht man schnell, dass $k = 16$ die Lösung ist, denn

$$k \cdot \left(\frac{1}{2}k + 2\right) \cdot \left(\frac{1}{4}k + 3\right) = 16 \cdot 10 \cdot 7 = 1120.$$

Es liegt auf der Hand, dass die Lösung $k = 16$ eindeutig ist. Es ist bemerkenswert, dass die Abschätzung $k \approx 20$ hier fast allein schon zum Ziel führt: In der Tat lässt diese Abkürzung die Aufgabe didaktisch besonders reichhaltig erscheinen; Schüler sind es kaum gewohnt, mit Abschätzungen zu arbeiten, und die Erkenntnis, dass der vorläufige Verzicht auf Genauigkeit einen schnellen Weg zur (genauen) Lösung eröffnet, ist für sie oftmals neu.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wenden wir uns nun Aufgaben zum ggT bzw. kgV zu.

AUFGABE 76:

In einer Schule finden am selben Tag zwei große Exkursionen statt; die Schüler sind jeweils mit mehreren Bussen unterwegs. An der ersten Exkursion nehmen 420 Schüler teil, an der anderen 252. In jedem der insgesamt eingesetzten Busse sitzt genau die gleiche Anzahl Schüler, und zwar eine gerade Anzahl zwischen 15 und 40. Bestimme diese Anzahl.

Es ist klar, dass die gesuchte Anzahl ein gemeinsamer Teiler von 420 und 252 ist. Es ist jetzt nicht selbstverständlich, überhaupt den ggT von 420 und 252 für den weiteren Lösungsweg heranzuziehen: Es wird ja nur *irgendein* gemeinsamer

Teiler gesucht, aber nicht unbedingt der größte. Kennt man nur die einfache Charakterisierung des ggTs aus Definition 2.5, so wird man die gemeinsamen Teiler von 420 und 252 also wohl mühselig aufsammeln müssen, etwa durch Schnittbildung von T_{420} und T_{252} . Verfügt man hingegen über die feinsinnigere Charakterisierung des ggTs aus Folgerung 2.8, so betrachtet man sofort die Teiler von $\text{ggT}(420, 252)$, also von 84. Es ist

$$T_{84} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\},$$

und man sieht sofort, dass nur die Zahl 28 als Lösung in Frage kommt.

Aufgabe 76 erinnert an die bereits auf Seite 94 angedeutete Frage, ob es nötig ist, Schülerinnen und Schülern die feinsinnige ggT-Charakterisierung aus Folgerung 2.8 an die Hand zu geben. Ginge es um das Lösen von Aufgaben allein, so käme man wie in Aufgabe 76 notfalls auch ohne sie aus; neben einem praktischen Mehraufwand nimmt man allerdings dann in Kauf, die Tragweite des ggT-Begriffs überwiegend im Dunkeln zu lassen. In der Tat stellt die feinsinnige ggT-Charakterisierung für Nicht-Eingeweihte meist eine Überraschung dar; sie ist intuitiv offenbar nicht sehr naheliegend. Das unterscheidet sie von der entsprechenden kgV-Charakterisierung aus Satz 2.9; sie wird meist bereits intuitiv erfasst und verwendet. Auch deswegen stellt die folgende Aufgabe, das kgV-Pendant zu Aufgabe 76, wohl ein einfacheres Problem dar:

AUFGABE 77:

Eine vierstellige natürliche Zahl hat die Quersumme 12 und ist sowohl durch 76 als auch durch 475 teilbar. Um welche Zahl handelt es sich?

Offenbar kommen nur die Vielfachen von $\text{kgV}(76, 475)$, also von 1900, in Frage. Es gibt fünf vierstellige Vielfache von 1900, und nur eines davon, nämlich 5700, hat die Quersumme 12.

Offensichtlich sind die Aufgaben 76 und 77 miteinander verwandt. Das Kennzeichnende beider Aufgaben ist Gegenstand folgender Strategie:

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 8):

Sobald man erkennt, dass dieselbe Zahl k zwei andere Zahlen a, b teilt, beachte man, dass k ein Teiler von $\text{ggT}(a, b)$ ist; liegt hingegen die Situation vor, dass dieselbe Zahl m Vielfaches von zwei anderen Zahlen a, b ist, so beachte man, dass m ein Vielfaches von $\text{kgV}(a, b)$ ist.

Wir wenden uns nun einer schwierigeren Aufgabe zu, in der neben einigen Rechenregeln zum ggT und zur Teilbarkeit auch einige der zuvor notierten Strategien zum Einsatz kommen:

AUFGABE 78:

Die 49. Mathematik-Olympiade begann im Jahre 2009. Jemand behauptete damals: „Man kann die Jahreszahl 2009 so in zwei Summanden zerlegen, dass deren größter gemeinsamer Teiler die Zahl 49 ist.“ Als Beispiel für diese Behauptung gab er die Zahlen 931 und 1078 an.

- a) Überprüfe die Behauptung bezüglich der Zahlen 931 und 1078.
- b) Ermittle die Anzahl aller geordneten Paare (a, b) aus natürlichen Zahlen mit der Summe $a + b = 2009$ und dem größten gemeinsamen Teiler $\text{ggT}(a, b) = 49$.
- c) Weise nach, dass es kein Zahlenpaar (a, b) gibt, für das $a + b = 2010$ und $\text{ggT}(a, b) = 50$ gilt.
- d) Bestimme alle Jahreszahlen des 21. Jahrhunderts, die sich wie die Zahl 2009 (siehe oben) verhalten.

Die Aufgabe weist durch die verschiedenen Aufgabenteile eine geschickte Staffe- lung der Schwierigkeitsgrade auf. Wir beschränken uns hier auf eine Diskussion von Aufgabenteil d). Das erste Hindernis ist die Formalisierung der etwas unbestimmten Formulierung der Aufgabe. Offenbar werden alle natürlichen Zahlen n bis 100 (vielleicht einschließlich 0) gesucht, die folgende Eigenschaft aufweisen:

$$\text{Es gibt } a, b \in \mathbb{N} \text{ mit } a + b = 2000 + n \text{ und } \text{ggT}(a, b) = 40 + n, \quad (2.23)$$

denn im Jahr $2000 + n$ beginnt die $(40 + n)$ -te Olympiade. Der Aufgabenteil a) zeigt, dass $n = 9$ diese Bedingung erfüllt. Wir fixieren nun eine natürliche Zahl n mit $n \leq 100$ und führen sukzessive Äquivalenzumformungen durch. Zunächst einmal ist (2.23) äquivalent zu

$$\text{Es gibt ein } a \in \mathbb{N} \text{ mit } a \leq 2000 + n - 1 \text{ und } \text{ggT}(a, 2000 + n - a) = 40 + n. \quad (2.24)$$

Die Grundlage dieser letzten Umformung war lediglich die Ersetzung von b durch $2000 + n - a$. Jetzt wenden wir Satz 2.6 d) an und erhalten die äquivalente Bedingung

$$\text{Es gibt ein } a \in \mathbb{N} \text{ mit } a \leq 2000 + n - 1 \text{ und } \text{ggT}(a, 2000 + n) = 40 + n. \quad (2.25)$$

Diese Aussage ist wiederum äquivalent zu

$$(40 + n) \mid (2000 + n); \quad (2.26)$$

die Implikation von (2.25) zu (2.26) liegt auf der Hand, und die andere Implikation läuft mit der Setzung $a := 40 + n$. Insgesamt ist das ein großer Erfolg, denn mittlerweile haben wir sowohl a als auch b abgestreift; es geht nur noch um n . Wir schreiben (2.26) um als $(40 + n) \mid (40 + n + 1960)$ und sehen mit Satz 2.4 b), dass dies äquivalent ist zu

$$(40 + n) \mid 1960. \quad (2.27)$$

Dieser letzte Schritt war ein Beispiel für die Anwendung von Strategie (S 2). Mit Strategie (S 5) ermitteln wir die Teiler von 1960, wobei wir offenbar die Teiler unterhalb von 40 und oberhalb von 140 fallen lassen dürfen. Somit ist (2.27) äquivalent zu

$$(40 + n) \in \{40, 49, 56, 70, 89, 140\},$$

und dies bedeutet wiederum

$$n \in \{0, 9, 16, 30, 49, 100\}. \quad (2.28)$$

Die gesuchten Jahreszahlen sind also 2000, 2009, 2016, 2030, 2049 und 2100; nebenbei ist dies eine gute Gelegenheit, darüber zu diskutieren, ob die Jahre 2000 und 2100 zum 21. Jahrhundert gehören.

Die hier demonstrierte Lösung von Aufgabe 78 ist recht anspruchsvoll, da die Aussage (2.23) mitsamt den beiden Existenzquantoren für a und b äquivalent umgeformt wird, bis die quantorenfreien Aussagen ab (2.26) erreicht werden. Vermutlich würde ein Schüler sich hier (zunächst) auf die Implikationsrichtung „von oben nach unten“ beschränken, die Existenzquantoren sofort abschütteln und schließlich bei (2.28) ankommen, ohne sich im Klaren zu sein, ob diese Aussage noch gleichwertig zu (2.23) ist. Stellen wir die Möglichkeit dieses Vorgehens in Rechnung, so erscheint die Aufgabe deutlich einfacher.

Zuletzt stellen wir noch einen Aufgabentyp vor, dessen Standardlösung sich eng an Satz 2.18 anlehnt:

AUFGABE 79:

Finde alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(a, b) = 12$ und $\text{kgV}(a, b) = 2160$.

Die Primpotenzerlegungen von 12 und 2160 sind $(2^2, 3)$ bzw. $(2^4, 3^3, 5)$. Mit Satz 2.18 ist daher klar, dass die gesuchten Zahlen von folgender Form sein müssen:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \quad \text{und} \quad b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$$

mit $\{\alpha_1, \beta_1\} = \{2, 4\}$, $\{\alpha_2, \beta_2\} = \{1, 3\}$, $\{\alpha_3, \beta_3\} = \{0, 1\}$.

Für jede der drei Primzahlbasen gibt es also zwei Exponenten, die beliebig auf a und b aufgeteilt werden können, was insgesamt zu acht Kombinationen der Exponenten und damit zu acht Zahlenpaaren (a, b) führt.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 80 [S 6]: Ein Kind spielt mit seinen quaderförmigen Bauklötzen.

- a) Es hat aus den Bauklötzen mehrere Würfel zusammengesetzt: einen mit der Kantenlänge 7 cm, je fünf Würfel mit den Kantenlängen 4 cm und 3 cm, sechs Würfel mit der Kantenlänge 2 cm und zwölf Würfel mit der Kantenlänge 1 cm. Weise nach, dass das Kind aus den Klötzen dieser Würfel keinen vollständigen Quader bauen kann, wenn es dabei alle Würfel verwenden will.
- b) Nun hat das Kind ein anderes Sortiment von Würfeln vor sich: genau einen Würfel mit der Kantenlänge 6 cm, acht Würfel mit der Kantenlänge 4 cm, fünfzehn Würfel mit der Kantenlänge 2 cm und zehn Würfel mit der Kantenlänge 1 cm. Untersuche, ob das Kind jetzt aus den Klötzen dieser Würfel einen vollständigen Quader bauen kann, wenn es dabei wieder alle Würfel verwenden möchte.

AUFGABE 81 [S 7]: Eine Gruppe von Schülern, die an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen haben, antwortet auf die Frage nach ihren Punktzahlen: „Das Produkt aus unseren Punktzahlen ist 1664, und der erfolgreichste von uns hat doppelt so viele Punkte wie das Schlusslicht.“ Wie viele Schüler sind in dieser Gruppe?

AUFGABE 82 [S 7]: *Eine Aufgabe aus dem 20. Jahrhundert:* Ein Mensch antwortet auf die Frage nach seinem Geburtstag: „Im Jahre 1989 wurde ich a Jahre alt. Geboren wurde ich am t -ten Tag des m -ten Monats des Jahres $1900 + j$. Die Zahlen a, j, m, t sind natürliche Zahlen; für sie gilt $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105792$.“ Ist der Geburtstag dieses Menschen durch diese Angaben eindeutig bestimmt?

AUFGABE 83 [S 7]: Bei einer Familienfeier am Ende des Jahres 2010 stellte einer der fünf Anwesenden fest: „Das Produkt unserer fünf Lebensalter beträgt 1418395. Am Ende des Jahres 2012 wird das Produkt unserer fünf Lebensalter weniger als das Dreifache des heutigen Wertes betragen.“ Wie alt waren die fünf Personen im Jahre 2010, wenn zusätzlich unterstellt wird, dass keiner der Anwesenden älter als 100 Jahre war?

AUFGABE 84 [S 7]: Finde drei natürliche Zahlen a , b und c mit $a \leq b \leq c$ derart, dass $a \cdot b \cdot c = 1980$ gilt und a möglichst groß ist.

AUFGABE 85 [S 7]: Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

AUFGABE 86 [S 7]: Finde die kleinste natürliche Zahl a derart, dass $10a$ eine Quadratzahl und $6a$ eine Kubikzahl ist.

AUFGABE 87 [S 7]: Man untersuche, ob es eine Menge M von 2011 verschiedenen positiven natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:⁵

- Keine Zahl aus M enthält einen Primfaktor größer als 31.
- Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus M ist eine Quadratzahl.

AUFGABE 88: Finde alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(a, b) = 21$ und $\text{kgV}(a, b) = 2646$.

AUFGABE 89 [S 8]: Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind.

AUFGABE 90 [S 8]: Ein Mädchen lässt sich von drei Freundinnen je eine natürliche Zahl nennen. Es teilt ihnen dann die Summe dieser drei Zahlen mit. Jede der drei Freundinnen multipliziert diese Summe mit der ursprünglich von ihr genannten Zahl. So ergeben sich die Ergebnisse 240, 270 bzw. 390. Bestimme die Zahlen, die die drei Freundinnen ursprünglich gewählt haben.

AUFGABE 91 [Satz 2.6 d]: Finde alle natürlichen Zahlen n derart, dass der Bruch $\frac{16n^2+24n+8}{16n^2-1}$ gekürzt werden kann.

AUFGABE 92 [Sätze 2.6 d), 2.18]: Finde alle Paare (a, b) von natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

- Die Summe von a und b ist 324.
- Der größte gemeinsame Teiler von a und b ist 36.
- Die Zahl a ist größer als die Zahl b , aber nicht größer als das Doppelte von b .

⁵ Es wäre eine Zusatzaufgabe wert, darüber nachzudenken, ob hier 2011 bedenkenlos durch höhere (Jahres-)zahlen ersetzt werden kann; Antwort: Bis 2048 geht das, danach muss die 31 aus der ersten Bedingung durch 37 ersetzt werden.

AUFGABE 93 [Folgerung 2.19]: Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier natürlicher Zahlen ist 51975, ihr größter gemeinsamer Teiler ist 45. Eine der beiden Zahlen lautet 4725. Finde die andere Zahl.

AUFGABE 94: Wir betrachten eine natürliche Zahl m mit $\text{ggT}(m, 35) > 10$. Welche (interessante) Schlussfolgerung bezüglich m können wir daraus ziehen?

AUFGABE 95 [Satz 2.18]: Finde alle Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

- Es gilt $\text{kgV}(a, b, c) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ und $\text{ggT}(a, b, c) = 90$.
- Es gilt $3a < b < c$.
- Die Zahl b ist eine Quadratzahl.

Kongruenzen

Das Rechnen mit Kongruenzen stellt für einen Lehrgang in elementarer Zahlentheorie eine besondere Herausforderung dar, weil es in der Schule nicht vorkommt. Es ist daher besonders wichtig, eine Brücke zwischen bereits vorhandenen Begriffen und dem neuen Begriff der Kongruenz zu bauen. Naheliegend ist vor allem die Idee des Teilens mit Rest; so bedeutet die Aussage $17 \equiv_7 3$ nichts weiter, als dass 17 beim Teilen durch 7 den Rest 3 lässt. Doch ist hier Vorsicht geboten, denn es gilt ja auch $17 \equiv_7 52$; angemessener ist daher die Idee *desselben* Rests bei Division durch den Modul; so lässt sich die Aussage $17 \equiv_7 52$ so interpretieren, dass 17 und 52 bei Division durch 7 denselben Rest lassen (nämlich 3). Dennoch ist die erste Aussage $17 \equiv_7 3$ besonders typisch für das Rechnen mit Kongruenzen; im Allgemeinen ist man eben vor allem an Kongruenzaussagen interessiert, die eine vorgegebene Zahl auf ihren (kleinsten nicht-negativen) Rest bezüglich des Moduls reduzieren; auf diese Weise werden die Elemente aus der unendlichen Menge der ganzen Zahlen in endlich viele „Sorten“ eingeteilt, die sogenannten Restklassen. Bezüglich des Moduls 7 etwa gibt es sieben Restklassen, die man sich üblicherweise durch ihre kleinsten nicht-negativen Vertreter repräsentiert denkt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Die Aussagen $17 \equiv_7 52$ und $17 \equiv_7 3$ und $52 \equiv_7 3$ lassen sich also in der Bemerkung zusammenfassen, dass die Zahlen 52, 17 und 3 modulo 7 „in dieselbe Restklasse fallen“. In gewissem Sinne könnte man also sagen, dass diese Zahlen im Hinblick auf

ihre Teilbarkeit durch 7 äquivalent sind.

Besondere Eleganz erhält die Technik der Kongruenzen durch ihre Verträglichkeit mit Addition (Subtraktion) und Multiplikation (Satz 2.22); dieser Satz zeigt, locker gesagt, dass die Reihenfolge von Addition und Kongruenzbetrachtung vertauschbar ist; ebenso die Reihenfolge von Multiplikation und Kongruenzbetrachtung. Möchten wir beispielsweise wissen, welchen Rest das Produkt von 52 und 25 bei Division durch 7 lässt, so brauchen wir nicht erst das Produkt ausrechnen und dann die Division mit Rest (d.h. die Kongruenzbetrachtung) durchführen; vielmehr ist es geschickter, die Frage durch die Zeile

$$52 \cdot 25 \equiv 3 \cdot 4 = 12 \equiv 5 \pmod{7}$$

zu klären; es wird also erst modulo 7 reduziert, dann wird mit den Resten weitergerechnet und gegebenenfalls schließlich erneut reduziert: Das Produkt von 52 und 25 lässt also bei Division durch 7 den Rest 5.

Es ist sicherlich ratsam, Schülerinnen und Schüler zunächst ausreichend viele „Rechenaufgaben“ lösen zu lassen, um eine zufriedenstellende Vertrautheit mit dem Begriff der Kongruenz zu gewinnen. Denkbar wären etwa folgende Aufgabentypen:

- Bestätige oder widerlege: $33 \equiv 5 \pmod{7}$, $26 \equiv 77 \pmod{11}$.
- Notiere alle natürlichen Zahlen $n < 100$, für die $n \equiv 5 \pmod{13}$ gilt.
- Finde jeweils die kleinste nicht-negative ganze Zahl r mit:
 $112 \equiv r \pmod{15}$, $64 \cdot 20 \equiv r \pmod{6}$, $17^{200} - 4^{11} \equiv r \pmod{16}$.

Ist eine ausreichende Vertrautheit mit dem Prinzip der Kongruenz hergestellt, steht ein neues sehr schlagkräftiges Werkzeug zur Verfügung, dessen Anwendung in Wettbewerbsaufgaben oft sehr genutzbar ist. Hier ein erstes Beispiel aus der Mathematik-Olympiade der Saison 1967/68:

AUFGABE 96:

Gegeben seien zwei natürliche Zahlen n und m , die bei Division durch 5 beide den Rest 3 lassen. Beweise, dass das Produkt der beiden Zahlen bei Division durch 5 den Rest 4 lässt.

Offenbar gilt $n, m \equiv 3 \pmod{5}$, also ist $n \cdot m \equiv 3 \cdot 3 = 9 \equiv 4 \pmod{5}$, und die Aufgabe ist gelöst!

Auch die nächste Aufgabe zeigt die Kraft des Rechnens mit Kongruenzen:

AUFGABE 97:

Bestimme alle Primzahlen p mit $p < 100$, die den folgenden Bedingungen genügen:

- p lässt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.
- p lässt bei Division durch 4 den Rest 1.

Für die gesuchten Zahlen p gilt offenbar $p \equiv 2 \pmod{3}$ und $p \equiv 2 \pmod{5}$ und $p \equiv 1 \pmod{4}$. Mit Satz 2.23 b) sind die ersten beiden Bedingungen äquivalent zu $p \equiv 2 \pmod{15}$, es kommen somit nur noch die Zahlen 2, 17, 32, 47, 62, 77, 92 in Frage, von denen aber nur 2, 17, 47 Primzahlen sind. Von diesen drei Zahlen erfüllt nur 17 auch die dritte Bedingung.

Die Aufgabe 97 macht sehr deutlich, dass die beiden Aussagen $a \equiv 2 \pmod{15}$ und $a \equiv 1 \pmod{4}$ eben *nicht* äquivalent zu $a \equiv 2 \pmod{60}$ sind, wie die Zahl 17 lehrt. Dies wäre eine unzulässige Verallgemeinerung von Satz 2.23 b). Wohl aber zeigt die weitere Theorie der Kongruenzen, dass die Aussagen $a \equiv x \pmod{m}$ und $a \equiv y \pmod{n}$ bei teilerfremden Moduln m, n äquivalent zu $a \equiv z \pmod{m \cdot n}$ für ein gewisses z sind, nur dass das fragliche z im Allgemeinen nicht $x \cdot y$ ist. So ist im Rückblick auf Aufgabe 97 zu bemerken, dass die Aussagen $a \equiv 2 \pmod{15}$ und $a \equiv 1 \pmod{4}$ *tatsächlich* äquivalent sind zu $a \equiv 17 \pmod{60}$. Doch wollen wir die Theorie der Kongruenzen an dieser Stelle nicht vertiefen. Stattdessen notieren wir die naheliegende Strategie, für die die Lösungen der Aufgaben 96 und 97 erste Beispiele waren:

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 9):

Geht es in einer Aufgabe um die Reste von Zahlen bei Division durch m , so erwäge man, die Situation der Aufgabe durch Kongruenzen modulo m auszudrücken. Dasselbe gilt, wenn etwa davon die Rede ist, dass gewisse Zahlen „von der Form“ $k \cdot m + r$ sind. Man beachte dabei insbesondere die Rechenregeln der Sätze 2.22 und 2.23.

Von großer Bedeutung für das Rechnen mit Kongruenzen ist das zyklische Verhalten der Potenzen a^n bei festem Modul m . So gilt für die ersten vier Potenzen von 3 modulo 10:

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10}, \quad 3^2 \equiv 9 \pmod{10}, \quad 3^3 \equiv 7 \pmod{10}, \quad 3^4 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Es ist jetzt klar, dass die nächsten vier Potenzen den ersten Zyklus nochmals durchlaufen:

$$3^5 \equiv_3 3, \quad 3^6 \equiv_3 9, \quad 3^7 \equiv_3 7, \quad 3^8 \equiv_3 1.$$

In Vierer-Paketen verhalten sich diese Potenzen stets gleich (wobei die Zykluslänge 4 natürlich von 3 und 10 abhängt). Mit diesen Feststellungen fällt die Lösung der folgenden Aufgabe recht leicht:

AUFGABE 98:

Beweise, dass die Zahl $3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{99} + 3^{100}$ durch 10 teilbar ist.

Die Summe eines Vierer-Pakets von Potenzen der Form 3^n ist modulo 10 offenbar stets $3 + 9 + 7 + 1 = 20 \equiv_3 0$ und damit durch 10 teilbar. Von 3^1 bis 3^{100} werden aber offenbar genau 25 Vierer-Pakete durchlaufen, und die Summe von 25 durch 10 teilbaren Paketsummen ist somit auch durch 10 teilbar.

Statt wie bei Aufgabe 98 Potenzen mit variablen Exponenten bezüglich eines festen Moduls zu betrachten, ist es häufig angebracht, die Basen der Potenzen zu variieren und dafür den Exponenten zu fixieren. Der erste interessante Fall ist offensichtlich der Exponent 2. Wählen wir zunächst den Modul 4: Es gilt

$$0^2 \equiv_4 0, \quad 1^2 \equiv_4 1, \quad 2^2 \equiv_4 0, \quad 3^2 \equiv_4 1.$$

Da diese Betrachtung alle vier für die Basen denkbaren Fälle modulo 4 abdeckt, zeigt sie, dass überhaupt nur zwei Restklassen modulo 4 unter Quadratzahlen vorkommen, nämlich diejenigen von 0 und 1. Betrachten wir nun die Summen von je zwei Quadratzahlen und berücksichtigen mit Satz 2.22 alle denkbaren Kombinationen von Resten modulo 4, so ergibt sich, dass hier die Reste 0, 1 und 2 auftreten können, nicht aber der Rest 3. Diese schlichte Beobachtung beweist, dass natürliche Zahlen, die kongruent 3 modulo 4 sind, nicht Summe zweier Quadratzahlen sind. Diese Verwendung von Kongruenzüberlegungen für *ausschließende* Betrachtungen ist typisch; Aufgabe 110 kann ganz ähnlich gelöst werden (aber wohl besser modulo 5). Hier ein weiteres repräsentatives Beispiel:

AUFGABE 99:

Untersuche, ob es ganze Zahlen a, b, c gibt, welche die Gleichung $a^2 + b^2 = 8c - 2$ erfüllen.

Die Zahl c tritt in dieser Aufgabe anders als a und b nicht als Basis einer Potenz, sondern lediglich als Faktor auf; dies animiert uns zu einer Umformulierung der Frage: Es ist zu untersuchen, ob es ganze Zahlen a, b gibt derart, dass die Teilbarkeitsaussage

$$8 \mid a^2 + b^2 + 2 \tag{2.29}$$

gilt. Auf diese Weise haben wir uns bereits einer der drei Variablen entledigt. Die Form der Aussage (2.29) legt eine erneute Umformulierung mithilfe der Kongruenz nahe: Es geht eigentlich um die Untersuchung der Aussage

$$a^2 + b^2 \equiv_{\ 8} -2$$

beziehungsweise der äquivalenten Aussage

$$a^2 + b^2 \equiv_{\ 8} 6. \tag{2.30}$$

Wir müssen also untersuchen, welche Reste modulo 8 unter Quadratzahlen vorkommen. Es gelten die Beziehungen

$$0^2 \equiv_{\ 8} 0, \quad 1^2 \equiv_{\ 8} 1, \quad 2^2 \equiv_{\ 8} 4, \quad 3^2 \equiv_{\ 8} 1, \quad 4^2 \equiv_{\ 8} 0, \quad 5^2 \equiv_{\ 8} 1, \quad 6^2 \equiv_{\ 8} 4, \quad 7^2 \equiv_{\ 8} 1.$$

Es kommen also unter Quadratzahlen nur die Reste 0, 1, 4 modulo 8 vor. Betrachten wir die Summen von je zwei Quadratzahlen, so treten hier somit nur die Reste 0, 1, 2, 4, 5 modulo 8 auf. Drei potentielle Reste fehlen, insbesondere der Rest 6. Dies zeigt, dass es *keine* Zahlen a, b mit Eigenschaft (2.30) geben kann.

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 10):

Sofern eine Aufgabe von Kongruenzen verschiedener Potenzen zur gleichen Basis handelt, berücksichtigt man, dass die Reihe aufsteigender Potenzen a^1, a^2, a^3, \dots modulo m notwendigerweise zyklisch ist (es stehen ja nur endlich viele Restklassen zur Verfügung). Geht es hingegen um Potenzen mit verschiedenen Basen und gleichen Exponenten, so denke man daran, dass im Allgemeinen nur *manche* Reste modulo m unter diesen Potenzen vorkommen. In jedem Falle wende man die bekannten Potenzrechenregeln vorteilhaft an.

Ein weiteres typisches Einsatzgebiet für Kongruenzbetrachtungen sind solche Aufgaben, bei denen es um *aufeinanderfolgende* Zahlen geht. Bei Wahl eines geeigneten Moduls liegt die Lösung dann oft recht nah:

AUFGABE 100:

Gibt es drei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen, für die gilt: Die Summe der Quadrate dieser drei Zahlen ist eine vierstellige Zahl, die aus vier gleichen Ziffern gebildet wird? Falls ja, so gebe alle diese Tripel an.

Der Kniff besteht hier darin zu erkennen, dass der Modul 6 für eine Kongruenzbetrachtung geeignet ist; denn es geht ja um Pakete von jeweils sechs aufeinanderfolgenden Zahlen, von denen allerdings nur die drei ungeraden eine aktive Rolle spielen. Entscheidend ist, dass diese drei ungeraden Zahlen modulo 6 zwangsläufig in die Restklassen von 1, 3 und 5 fallen, wobei es egal ist, mit welchem der drei Reste das Tripel beginnt. Ist also (a, b, c) ein Tripel mit den geforderten Eigenschaften, so gibt es eine Ziffer z mit

$$1111 \cdot z = a^2 + b^2 + c^2 \equiv_6 1^2 + 3^2 + 5^2 \equiv_6 5,$$

und wegen $1111 \equiv_6 1$ führt dies zu

$$z \equiv_6 5.$$

Es kommt also nur die Ziffer $z = 5$ in Frage. Wegen $(a, b, c) = (b - 2, b, b + 2)$ gilt also

$$5555 = a^2 + b^2 + c^2 = (b - 2)^2 + b^2 + (b + 2)^2 = 3b^2 + 8,$$

und eine kurze Rechnung zeigt, dass nur $b = 43$ diese Gleichung erfüllt. Es gibt also nur ein Tripel der geforderten Art, nämlich $(41, 43, 45)$.

Wir hätten diese Aufgabe übrigens auch durch Betrachtungen *modulo 8* lösen können, doch zeigt die Wahl des Moduls 6 besser das Typische der Aufgabe.

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 11):

Kommen in einer Aufgabe Zahlen vor, die in irgendeiner systematischen Weise *aufeinanderfolgend* sind, so beachte man, dass bei geeigneter Wahl eines Moduls m die vorliegenden Zahlen möglicherweise recht genau den Resten modulo m zugeordnet werden können.

Abschließend betrachten wir eine Aufgabe, bei deren Lösung Satz 2.24 zum Einsatz gebracht werden kann. Wir bezeichnen hier die Quersumme einer Zahl n erneut mit $Q(n)$.

AUFGABE 101:

Gibt es eine Quadratzahl mit der Quersumme 2012?

Wir betrachten eine natürliche Zahl n mit $Q(n^2) = 2012$. Dann ist

$$n^2 \equiv_9 Q(n^2) = 2012 \equiv_9 5.$$

Eine Betrachtung der (kleinsten nicht-negativen) möglichen Reste von Quadratzahlen modulo 9 zeigt aber, dass für n^2 nur die Reste 0, 1, 4 oder 7 in Frage kommen, nicht aber 5. Es gibt also keine Zahl mit der gesuchten Eigenschaft.

HEURISTISCHE STRATEGIE (S 12):

Wann immer eine Zahl mit ihrer Quersumme in Verbindung gebracht wird, bedenke man die Tatsache, dass jede Zahl zu ihrer Quersumme modulo 9 kongruent ist. Dieser Fall liegt offensichtlich insbesondere dann vor, wenn der „Ziffernpool“ einer Zahl konkret bekannt ist.

Im Hinblick auf Strategie (S 12) verweisen wir auch auf die Aufgabe 107: Die Überlegung, dass die dort diskutierten Zahlen untereinander kongruent modulo 9 sind, weil sie gleiche Quersummen haben, ist ein Schlüssel zur Lösung dieser Aufgabe.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 102 [S 10]: Untersuche, ob die Zahl $3^1 + 7^1 + 3^2 + 7^2 + 3^3 + 7^3 + \dots + 3^{99} + 7^{99} + 3^{100} + 7^{100}$ durch 10 teilbar ist.

AUFGABE 103 [S 11]: Für jede natürliche Zahl n befindet sich unter den Zahlen $n - 1, n, n + 1, n^2 + 1$ stets eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

AUFGABE 104 [S 11]: Wir betrachten zwölf aufeinanderfolgende ganze Zahlen, unter denen sich kein Vielfaches von 13 befindet. Zeige, dass das um Eins vergrößerte Produkt dieser Zahlen durch 13 teilbar ist. *Anmerkung:* Dies ist ein Beispiel für den *Satz von Wilson*: Die Zahl 13 kann durch jede beliebige Primzahl p ersetzt werden; die Anzahl 12 entsprechend durch $p - 1$.

AUFGABE 105 [S 10]: Ist die folgende Aussage für alle ganzen Zahlen a und b wahr? Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

AUFGABE 106 [S 10]: Bestimme die größte zweistellige Zahl n derart, dass $10^n + 1$ durch 101 teilbar ist.

AUFGABE 107 [S 1, 12]: Es sei M die Menge aller siebenstelligen natürlichen Zahlen, in deren Darstellung jede der Ziffern von 1 bis 7 genau einmal vertreten ist. Beweise, dass es in M keine zwei Zahlen gibt, von denen die eine ein Teiler der anderen ist.

AUFGABE 108: Ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Es gilt $a + b = c^3$.
- Es gilt $a + b + c = 130$.
- Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

Hinweis: Offenbar ist c^3 eine Kubikzahl zwischen 2 und 130!

AUFGABE 109 [S 10]: Die natürlichen Zahlen x, y und z seien so gewählt, dass die Zahlen $2^x, 2^y$ und 2^z bei Division durch 7 paarweise verschiedene Reste ergeben. Man beweise, dass dann die Zahl $2^x + 2^y + 2^z$ durch 7 teilbar ist.

AUFGABE 110 [S 9,10]: Bestimme alle Paare (n, k) ganzer Zahlen mit $n, k \geq 0$, für die $3^{4n} + 4 \cdot 7^{4k}$ eine Primzahl ist.

AUFGABE 111 [S 9,10]: Zeige, dass die Zahl $7^{2n} + 7^{n+1} - 7^n + 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 12 teilbar ist.

AUFGABE 112 [S 10]: Ein Bauer hinterlässt seinen beiden Söhnen eine Schafherde. Die Brüder lassen diese Herde von einem Mittelsmann verkaufen, wobei sie ihm auftragen, er solle ein jedes der Schafe für so viel Euro verkaufen, wie die Herde Schafe hat. Der Mittelsmann bringt den Erlös in lauter 10-Euro-Scheinen und einen Rest an Kleingeld, das keinen vollen 10-Euro-Schein mehr ergibt. Die Brüder teilen das Geld so, dass beide gleich viele 10-Euro-Scheine erhalten. Dabei bleiben ein 10-Euro-Schein und der Kleingeldrest übrig. Da sagt der ältere zum jüngeren Bruder: „Ich nehme den Schein, und du bekommst den Rest und ein von mir soeben gekauftes Taschenmesser, dann haben wir beide gleich viel bekommen.“ Wie teuer war das Taschenmesser?

Hinweis: Man überlege sich, dass der Verkaufserlös eine Quadratzahl ist, die modulo 20 einen Rest zwischen 11 und 19 lässt. Nur einer dieser Reste ist aber tatsächlich möglich.⁶

⁶ Diese Aufgabe handelt implizit von quadratischen Resten: Eine natürliche Zahl a heißt *quadratischer Rest modulo n* , wenn es eine natürliche Zahl b gibt mit $b^2 \equiv a \pmod{n}$. Im hier vorliegenden Fall $n = 20$ gibt es außer den Quadratzahlen bis 16 nur einen einzigen quadratischen Rest unterhalb von 20, nämlich 5. Neben 20 gibt es weitere Zahlen n , für die es abgesehen von den Quadratzahlen unterhalb von n nur sehr wenige quadratische Reste zwischen 1 und $n - 1$ gibt, etwa die Zahl 24 (quadratischer Rest 12), 32 (Rest 17),

AUFGABE 113 [S 10]: Wir betrachten drei natürliche Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 = c^2$. Zeige, dass mindestens eine der drei Zahlen durch 5 und mindestens eine der drei Zahlen durch 2 teilbar ist.

AUFGABE 114 [Sätze 2.23 b, 2.25]: Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl $m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$ durch 30 teilbar.

Diophantische Gleichungen

Der letzte Abschnitt unseres Kapitels über Zahlentheorie beschäftigt sich im Grunde nur mit einer einzigen Aufgabe – der linearen diophantischen Gleichung in zwei Variablen. Die notwendigen mathematischen Werkzeuge werden von den Sätzen 2.27 bis 2.29 bereitgestellt.

AUFGABE 115:

Ein kleiner Bär streift durch die kanadische Wildnis. In einem Drugstore in der Nähe des Lake Louise möchte er Proviant einkaufen; dafür hat er genau 75 \$ dabei. Ein kleines Glas Honig kostet 3,50 \$, ein Wildlachs 8,50 \$. Der Bär möchte mindestens ein Glas Honig und einen Lachs kaufen und insgesamt sein Geld vollständig ausgeben, weil er es mal richtig krachen lassen will. Etwas anderes als Honig oder Lachs interessiert ihn nicht. Nachdenklich beginnt der kleine Bär zu grübeln, welche Möglichkeiten es für ihn gibt, sein Geld zu investieren.

Für die gesuchten Anzahlen x und y gilt offenbar die Gleichung

$$35x + 85y = 750.$$

Diese diophantische Gleichung ist lösbar, denn es ist $\text{ggT}(35, 85) = 5$ und $5 \mid 750$. Wir betrachten die reduzierte Gleichung

$$7x + 17y = 150. \tag{2.31}$$

Wir benötigen zunächst einmal *eine* Lösung von (2.31). Da die Koeffizienten in dieser Gleichung einigermaßen überschaubar sind, benötigen wir hier wohl

48 (Rest 33), 72 (Reste 28, 40, 52), 80 (Reste 20, 41, 65) sowie die Zahlen 4, 8, 12, 16, die allesamt gar keine nicht-trivialen quadratischen Reste aufweisen. Es wäre eine reizvolle und kreative Aufgabe, eine dieser Zahlen für die Konstruktion einer Aufgabe wie Nr. 112 zu nutzen.

nicht das auf Seite 89 geschilderte Verfahren des erweiterten Euklidischen Algorithmus'. Vielmehr findet man durch bloßes Herumprobieren schnell eine erste Lösung, etwa $(2, 8)$. Satz 2.28 sagt uns, dass die weiteren Lösungen alle von der Form

$$(2 + 17k, 8 - 7k)$$

sind. Für $k = 3, 2, 1, 0, -1, -2$ etwa erhalten wir die Lösungspaare

$$(53, -13), (36, -6), (19, 1), (2, 8), (-15, 15), (-32, 22)$$

und erkennen schnell, dass aus lebenspraktischen Gründen nur $(19, 1)$ und $(2, 8)$ in Frage kommen. In fast allen Wettbewerbsaufgaben dieses Typs sorgt die Einkleidung der Aufgabe für die Reduktion der Lösungsmenge auf die nicht-negativen Lösungspaare.

Man mag sich die Frage stellen, wie man in Aufgabe 115 den Schritt von der einen Lösung $(2, 8)$ zur gesamten Lösungsmenge bewerkstelligen soll, wenn Satz 2.28 nicht zur Verfügung steht. Vielleicht hilft folgende Überlegung: Ist (\bar{x}, \bar{y}) eine Lösung von (2.31), so sorgt eine Erhöhung des ersten Koeffizienten von \bar{x} auf $\bar{x} + d$ dafür, dass der Term auf der linken Seite von (2.31) um $7d$ erhöht wird. Die Veränderung des zweiten Koeffizienten von \bar{y} auf $\bar{y} - e$ bewirkt eine Reduktion um $17e$ und muss die Erhöhung durch die erste Veränderung genau kompensieren; es muss also gelten

$$7d = 17e. \tag{2.32}$$

Nach dem Euklidischen Hauptsatz kann das nur gelingen, wenn 7 ein Teiler von e ist; wenn also $e = 7k$ für eine ganze Zahl k gilt. Gleichung (2.32) zeigt, dass dann $d = 17k$ gelten muss: Die linke Komponente des ersten Lösungspaares wird also in 17er-Schritten erhöht, während die rechte Komponente in 7er-Schritten vermindert wird (bzw. genau gegenläufig).

Gelegentlich haben wir es mit diophantischen Gleichungen zu tun, die allerdings auf den ersten Blick drei statt nur zwei Variablen enthalten:

AUFGABE 116:

Ein Sportverein verkauft zu seinem Jubiläum Lose. Es gibt Geldpreise zu 5 €, zu 30 € und zu 100 €. Jeder der genannten Preise ist mindestens einmal im Angebot enthalten. Insgesamt gibt es 100 Lose, die keine Nieten sind. Der Wert aller Gewinne beträgt insgesamt 1000 €. Ermittle alle Anzahlen der drei Sorten von Gewinnlosen, auf die diese Angaben zutreffen.

Natürlich kann man hier eine der drei Variablen x, y, z auf die anderen beiden zurückführen, denn es ist $x + y + z = 100$. Zu lösen ist also die Gleichung

$$5x + 30y + (100 - x - y) \cdot 100 = 1000,$$

die sich schnell in die äquivalente Standardform

$$17x + 14y = 1800$$

überführen lässt. Beim Aufzählen der zulässigen Lösungspaare (x, y) für diese Gleichung muss natürlich berücksichtigt werden, dass auch $z = 100 - x - y$ eine natürliche Zahl ist.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 117: Ein Viehhändler erzählt: „Gestern habe ich Schafe und Hühner verkauft. Sie hatten zusammen 100 Füße und mehr als 50 Augen. Es waren mehr als viermal so viele Schafe wie Hühner.“ Wie viele Schafe bzw. Hühner könnte der Viehhändler verkauft haben?

AUFGABE 118: In einer Schulklasse ist jeder Schüler 13 oder 14 Jahre alt; beide Altersangaben kommen in dieser Klasse auch wirklich vor. Addiert man alle Lebensalter – als ganze Zahlen –, so ergibt sich die Summe 325. Wie viele Kinder sind in dieser Schulklasse?

AUFGABE 119: Eine Schulklasse möchte eine Klassenfeier durchführen. Für jeden Schüler soll dabei genau ein Getränk gekauft werden. Zur Auswahl stehen Päckchen mit Limonade, die jeweils 35 Cent kosten, und Päckchen mit Cola, deren Preis jeweils 42 Cent beträgt. Die Klassensprecherin sammelt vor der Feier von allen Schülern das Geld ein; es sind insgesamt 9,94 €. Als sie einkaufen gehen will, stellt sie fest, dass sie den Zettel verloren hat, auf dem steht, wer welches Getränk bestellt hat. Sie weiß nicht einmal, wie viele Limonaden und wie viele Colas sie kaufen soll.

- a) Immerhin weiß sie, dass an der Feier mindestens 20, höchstens aber 30 Schüler teilnehmen. Lassen sich mit dem nun zur Verfügung stehenden Wissen die richtigen Zahlen von Limonaden und Colas herausfinden?
- b) Etwas später – aber noch vor dem Kauf – erfährt sie: Es nehmen genau 24 Schüler teil. Lassen sich nun die richtigen Zahlen von Limonaden und Colas herausfinden?

AUFGABE 120: Ein Junge nimmt in jede Hand einige Kugeln, keine Hand bleibt leer. Er verrät: „In einer Hand habe ich eine gerade Anzahl Kugeln, in der anderen Hand eine ungerade Anzahl.“ Seine Schwester sagt: „Multipliziere die Anzahl der Kugeln in der linken Hand mit 4, die Anzahl der Kugeln in der rechten Hand mit 5 und nenne die Summe dieser beiden Produkte!“

- a) Wie kann die Schwester, wenn die Summe genannt wird, mit Sicherheit herausfinden, in welcher Hand sich die gerade und in welcher Hand sich die ungerade Anzahl Kugeln befindet?
- b) Wie kann die Schwester, wenn die Summe 60 genannt wird, sogar die genauen Anzahlen der Kugeln bestimmen, die ihr Bruder in der linken Hand bzw. in der rechten Hand hat?

AUFGABE 121: Jemand hat 100 Stäbchen von je 7 cm Länge und 100 Stäbchen von je 12 cm Länge vor sich liegen. Er möchte mit solchen Stäbchen eine Strecke von 100 cm Länge auslegen. Die Stäbchen sollen dabei stets lückenlos aneinander anschließen, und keine Teilstrecke darf mehrfach belegt sein. Finde alle Möglichkeiten für die Anzahlen der Stäbchen.

AUFGABE 122: Zur Vorbereitung eines Schulausflugs wurde festgestellt: Es stehen mehrere Autos mit je 5 Sitzplätzen zur Verfügung; ferner können Busse mit je 20 bzw. je 22 Sitzplätzen gemietet werden. An dem Ausflug sollen 482 Schüler und 30 Lehrer teilnehmen. Alle Sitzplätze sollen genutzt werden; in jedem Fahrzeug soll genau ein Lehrer mitfahren. Bestimme alle Möglichkeiten, Fahrzeuge der genannten Arten so zu belegen, dass diese Bedingungen erfüllt werden.

AUFGABE 123: Jemand berichtet von einem Einkauf: Er habe ungefähr 100 Euro ausgegeben, und zwar genau die Hälfte all des Geldes, das er bei sich hatte. Verblüfft habe er festgestellt, dass er nach dem Einkauf den gleichen Betrag an Cent besaß wie vorher an Euro und den halben Betrag an Euro wie vorher an Cent. Wie viel Geld genau hat er ausgegeben?

AUFGABE 124 [Satz 2.29]: Im Lande Centurien gibt es nur Münzen zu 5 Cent und zu 7 Cent. Offensichtlich ist der kleinste Preis, den man *passend* bezahlen kann, ohne also Wechselgeld zu erhalten, 5 Cent; dann kommen 7 Cent und dann 10 Cent. Tatsächlich muss in Centurien stets passend bezahlt werden.

- a) Gib für alle Preise bis 23 Cent an, ob man sie in Centurien bezahlen kann oder nicht.
- b) Gibt es höhere Preise als 23 Cent, die man nicht bezahlen kann? Begründe!
- c) Welches ist der kleinste Preis, den man auf zwei Arten (also mit zwei verschiedenen Kombinationen von Münzen) passend bezahlen kann?

AUFGABE 125: Ein Raum soll mit 32 Glühlampen so ausgestattet werden, dass sich eine Gesamtleistung von 1800 Watt ergibt. Es stehen ausreichend viele Glühlampen von 40 Watt, 60 Watt und 75 Watt, aber keine anderen, zur Verfügung. Gib alle Möglichkeiten einer derartigen Ausstattung an.

AUFGABE 126: Beweise, dass es keine Paare (x, y) von ganzen Zahlen gibt, welche die Gleichung $5x^2 - 11y^2 = 21$ erfüllen.

AUFGABE 127: Graf Zahl wohnt in einem Hochhaus mit sehr vielen Etagen und Kellerebenen. Das Hochhaus besitzt zwei parallele Fahrstühle A und B , die von einem einzigen Schaltbrett im Erdgeschoss gemeinsam gesteuert werden. Auf dem Schaltbrett befinden sich genau drei Druckknöpfe, die Graf Zahl und seinen Nachbarn das Leben schwer machen. Drückt man nämlich den ersten Knopf, so fährt Fahrstuhl A zwei Stockwerke hinauf. Betätigt man den zweiten Knopf, so saust Fahrstuhl A fünf Stockwerke hinab und Fahrstuhl B drei Stockwerke hinauf. Entscheidet man sich für den dritten Knopf, so stürzt Fahrstuhl B elf Etagen in die Tiefe.

Eines Sonntags erwartet Graf Zahl den Besuch seiner Schwiegereltern und läuft aufgeregt in der Empfangshalle des Hochhauses hin und her. Er möchte beiden Schwiegereltern gleichzeitig den Fahrstuhlservice anbieten, weiß aber, dass seine Schwiegermutter aus versicherungstechnischen Gründen niemals im gleichen Fahrstuhl wie ihr Ehemann fahren möchte. Es ist für Graf Zahl daher notwendig, beide Fahrstühle gleichzeitig ins Erdgeschoß zu dirigieren. Eine Anzeige verrät ihm, dass sich Fahrstuhl A momentan im dreizehnten Stockwerk befindet, Fahrstuhl B im zwölften. Graf Zahl möchte mit möglichst wenigen Fahrstuhlkommandos auskommen. Welches ist also die kleinste, und welches ist die zweitkleinste Anzahl von Kommandos, mit der Graf Zahl die Fahrstühle für die Ankunft seiner Schwiegereltern perfekt vorbereiten kann?

3 Graphentheorie

Die Graphentheorie bietet zahlreiche eindrucksvolle Beispiele zur Illustration der Spannung zwischen Anschauung und Begriff. Dies gilt bereits für den Grundbegriff des *Graphen* selbst. In unserer Anschauung ist ein Graph ja nichts weiter als eine endliche Menge von Punkten, von denen einige durch Linien verbunden sind; dabei ist die genaue Lage der Punkte und die Form der Linien unerheblich; es interessiert nur, wie viele Punkte betrachtet werden und welche davon irgendwie miteinander verbunden sind. Die einfache Darstellbarkeit eines Graphen auf einem Blatt Papier sowie die leichte Verständlichkeit vieler graphentheoretischer Fragen machen diese relativ junge mathematische Disziplin zu einem attraktiven Spielfeld. Viele Probleme der Graphentheorie wirken in der Tat wie Spiele – man kann Wege suchen, Wege zusammensetzen, Flächen färben, Ecken bzw. Kanten zählen, Kantenüberschneidungen entwirren –, und es überrascht daher nicht, dass die graphentheoretische Frage nach der Existenz von Hamiltonkreisen durch ein Spiel, das *icosian game* des Sir William Rowan Hamilton, zu einem recht populären Zeitvertreib wurde.

Es ist daher bedauerlich, dass die Graphentheorie mit ihren reizvollen Gegenständen und Fragen keinen Eingang in die Schulen gefunden hat. Tatsächlich haben wohl die meisten Schüler noch nicht einmal von der Graphentheorie gehört, wenn wir von sporadischen Betrachtungen zum *Haus des Nikolaus* einmal absehen.

Doch werden wir es in diesem Kapitel nicht bei einer *anschaulichen* Tour durch die Graphentheorie belassen; stattdessen bieten wir im ersten Unterkapitel zunächst einen *formalen* Rundgang durch die Grundlagen der Graphentheorie, dessen Ergebnisse zwar veranschaulicht werden können, die aber ohne Rückgriff auf die Anschauung gewonnen werden. Im zweiten Unterkapitel folgen dann Überlegungen zu einem schülernahen, anschauungsgebundenen Ausflug in die Graphentheorie.

Theorie

Grundbegriffe

Für unseren Rundgang durch die Anfangsgründe der Graphentheorie benötigen wir zunächst die Definition eines Graphen.

Definition 3.1. Eine *Ecke* ist eine einelementige Menge; eine *Kante* ist eine zweielementige Menge. Ist $\{a, b\}$ eine Kante, so nennen wir $\{a\}$ und $\{b\}$ die Ecken der Kante $\{a, b\}$. Unter einem *Graphen* verstehen wir eine endliche Menge von Ecken und Kanten, die mit jeder Kante auch deren Ecken enthält – diese Eigenschaft nennen wir gelegentlich die *Grapheneigenschaft*. Die Menge aller Ecken eines Graphen G bezeichnen wir mit $E(G)$, die Kantenmenge mit $K(G)$; gelegentlich verwenden wir auch kürzer nur die Buchstaben E und K , wenn es klar ist, von welchem Graphen die Rede ist.

Außerdem verwenden wir Redeweisen wie „Die Ecken $\{a\}$ und $\{b\}$ werden durch die Kante $\{a, b\}$ verbunden“ oder „Die Kante $\{a, b\}$ inzidiert mit den Ecken $\{a\}$ und $\{b\}$ “. Zwei verschiedene Ecken heißen *benachbart*, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.

Unsere Definition eines Graphen weicht von der literaturüblichen Definition deutlich ab; ein Graph ist bei uns kein Paar von *zwei* Mengen, der Ecken- und der Kantenmenge, sondern Ecken und Kanten liegen gemeinsam in *einer* Menge. Deshalb ist es notwendig, dass Ecken und Kanten auf andere Weise unterscheidbar sind. Dies wird dadurch erreicht, dass Ecken und Kanten vor dem Graphen definiert werden; es handelt sich hier um schlichte Begriffe der Mengenlehre: ein- bzw. zweielementige Mengen, die dafür sorgen, dass die Elemente des Graphen sich selbstständig als Ecken oder aber als Kanten ausweisen. Wie wir bald sehen werden, erlaubt diese Art der Begriffsbildung einige besonders elegante mengentheoretische Betrachtungen; als Beispiel sei bereits jetzt auf die Tatsache hingewiesen, dass die Vereinigung zweier Graphen und der Schnitt zweier Graphen jeweils wiederum einen Graphen ergeben:

Bemerkung 3.2. *Die Vereinigung zweier Graphen und der Durchschnitt zweier Graphen ist ein Graph. Auch die leere Menge ist ein Graph!*

Der Beweis von Bemerkung 3.2 muss sich jeweils nur um die Grapheneigenschaft der neugebildeten Menge kümmern und ergibt sich durch sehr einfache mengentheoretische Überlegungen fast von selbst.

Wir betrachten ein erstes Beispiel eines Graphen, nämlich

$$\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 3\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \\ \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\} \}.$$

Wir können ihn darstellen wie in Bild 3.1 (links). Das Bild ist eine sehr hilfreiche Veranschaulichung der Struktur des Graphen mit seinen sechs Ecken und neun Kanten. Da die Darstellung eines Graphen so viel leichter erfassbar ist als die Liste seiner Ecken und Kanten, werden wir häufig Beispiele gleich in anschaulicher Form darreichen; für den Aufbau der Theorie mit ihren allgemeingültigen Sätzen gilt das natürlich nicht.

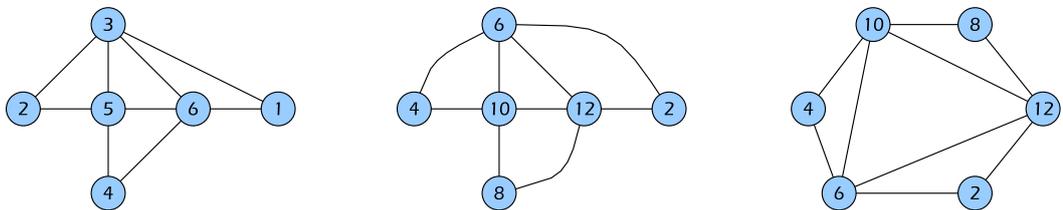


BILD 3.1: Drei Graphen – paarweise isomorph

In diesem ersten Beispiel haben wir natürliche Zahlen als Trägermenge für die Ecken benutzt; aber eigentlich ist es uninteressant, was für Objekte die Ecken sind; nur ihre Anzahl und ihre Kantenverbindungen sind von Belang. Deshalb wird man den Graphen in der Mitte von Bild 3.1 mit Recht als Kopie des Graphen links betrachten; sie sind strukturgleich (isomorph); daran ändert auch die belanglose Krümmung einiger Kanten beim zweiten Graphen nichts. Es folgt die formale Definition der Isomorphie:

Definition 3.3. Zwei Graphen G und H heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Funktion ϕ von $E(G)$ auf $E(H)$ gibt mit folgender Eigenschaft: Je zwei verschiedene Ecken aus $E(G)$ sind genau dann durch eine Kante (in G) verbunden, wenn die entsprechenden Bild-Ecken unter der Funktion ϕ in $E(H)$ durch eine Kante (in H) verbunden sind.

Man sieht schnell, dass die ersten beiden Graphen von Bild 3.1 kraft der Verdoppelungsabbildung auf der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ isomorph sind. Die Isomorphie erstreckt sich auch auf den rechten Graphen – hier ist sogar die Trägermenge die gleiche wie beim mittleren Graphen, nur die Darstellung des Graphen ist durch Verschieben von Ecken eine andere und kaschiert damit zunächst die Verwandtschaft: Diese beiden Graphen sind sogar gleich (trotz der

unterschiedlichen Darstellung), und alle drei Graphen sind paarweise zumindest isomorph. Dass zwei Objekte unterschiedlichen Aussehens trotzdem identisch sein können, ist uns aus der Algebra wohlvertraut: $\frac{1}{2}$ ist dasselbe wie $\frac{3}{6}$, und $7 + 4$ ist dasselbe wie 11.

In der Graphentheorie werden isomorphe Graphen als praktisch gleich behandelt. Die Graphen

$$\{ \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$$

und

$$\{ \{3\}, \{4\}, \{3, 4\} \}$$

sind strenggenommen verschieden – sie besitzen nicht die gleichen Elemente. Doch ihre Isomorphie verleitet uns dazu, von *dem* Graphen mit zwei Ecken und einer Kante zu sprechen und in anschaulichen Darstellungen die Benennung der Ecken und Kanten gleich wegzulassen, wodurch die Frage nach der tatsächlichen Trägermenge, also den Elementen der Ecken und Kanten, vollends in den Hintergrund tritt.

Tatsächlich tritt die Trägermenge eines Graphen auch in vielen Definitionen und Sätzen nicht in Erscheinung; wir sprechen dann Ecken etwa mit dem Buchstaben e an und interessieren uns nicht dafür, welches Element in dieser Ecke steckt; dasselbe gilt für Kanten. Manchmal jedoch müssen wir auf die Trägermenge zugreifen: Wir sprechen dann etwa von einer Kante $\{a, b\}$, vor allem dann, wenn die Inzidenz mit den Ecken $\{a\}$ und $\{b\}$ von Bedeutung ist. Der Leser muss sich also darauf einstellen, dass Ecken und Kanten manchmal schlicht durch einen Buchstaben referenziert werden und manchmal durch die Notation einer Menge.

Es folgt nun die Definition einiger weiterer Grundbegriffe des graphentheoretischen Vokabulars.

Definition 3.4. Sei G ein Graph, und sei e eine Ecke von G . Dann heißt die Anzahl der Kanten von G , die mit e inzidieren, der *Eckengrad von e* , kurz: *Grad von e* . Wir bezeichnen den Eckengrad von e mit $\text{grad}(e)$ – wenn die Angabe des Graphen notwendig ist, auch mit $\text{grad}_G(e)$. Eine Ecke vom Grade 0 heißt *isoliert*, eine Ecke vom Grade 1 heißt *Endecke*. Die Menge der Ecken vom Grade n wird mit E_n notiert. Der kleinste in G vorkommende Eckengrad wird als *Minimalgrad* von G , der größte entsprechend als *Maximalgrad* von G bezeichnet. Haben alle Ecken von G denselben Grad g , so ist G ein *regulärer* Graph, oder präziser: ein *g -regulärer* Graph. Sind je zwei verschiedene Ecken

von G benachbart, so heißt G *vollständig*. Außerdem heißt G ein *Punkt*, wenn G nur ein Element – also eine Ecke – enthält. Ist G die leere Menge, so heißt G der *leere Graph*.

Wir betrachten nun einen Graphen G mit n Ecken; sei e_1, e_2, \dots, e_n eine Aufzählung aller Ecken von G derart, dass

$$\text{grad}(e_1) \leq \text{grad}(e_2) \leq \dots \leq \text{grad}(e_n)$$

gilt. Dann heißt das Tupel $(\text{grad}(e_1), \text{grad}(e_2), \dots, \text{grad}(e_n))$ das *Gradtuplel* von G .

Bemerkung 3.5. *Jeder nicht-leere Graph enthält eine Kante oder eine isolierte Ecke.*

Es folgt die Bilanzgleichung, das erste fundamentale Werkzeug der Graphentheorie, das die Eckengrade eines Graphen in einen Zusammenhang mit seiner Kantenanzahl stellt.

Satz 3.6 (Bilanzgleichung). *Für jeden Graphen G gilt:*

$$\sum_{e \in E(G)} \text{grad}(e) = 2 \cdot |K(G)|. \quad (3.1)$$

Beweis. In der englischsprachigen Literatur wird dieser Satz oft unter der Bezeichnung *handshaking lemma* geführt: Wenn auf einer Party manche der Gäste einander zur Begrüßung die Hand geben und am Ende der Party jeder Gast die Summe seiner *handshakes* ermittelt, so ist die Summe dieser Summen gleich der doppelten Anzahl aller *handshakes* während der Party, weil ja jeder *handshake* bei genau zwei Gästen den Zähler um 1 erhöht. Hier liegt also eine Art Rückwärts-Modellierung vor, bei der die Ecken mit den Gästen und die Kanten zwischen den Ecken mit *handshakes* zwischen Gästen identifiziert werden.

Das *handshake*-Argument mag zwar etwas blumig sein, doch auch ein formaler Induktionsbeweis wird kaum mehr leisten als dieses Argument in die graphentheoretische Sprache zurückzuführen. Ist die Kantenmenge nämlich leer, so sind alle Eckengrade gleich Null, womit die Gleichung (3.1) auf schlichte Weise erfüllt ist. Der Induktionsschritt besteht nun in dem Nachweis, dass für einen beliebigen Graphen, in dem (3.1) gilt, durch Hinzufügen einer neuen Kante die Balance von Gleichung (3.1) nicht gestört wird. Tatsächlich wird eine neue

Kante die linke Seite von (3.1) um 2 erhöhen; und da zugleich genau zwei Eckengrade um 1 erhöht werden und alle anderen Eckengrade unverändert bleiben, wird auch die rechte Seite von (3.1) um 2 erhöht. \square

Hier sind zwei einfache Folgerungen aus der Bilanzgleichung:

Satz 3.7. *In jedem Graphen ist die Anzahl der Ecken ungeraden Grades gerade.*

Satz 3.8 (Bilanzgleichung für reguläre Graphen). *In einem g -regulären Graphen G gilt: $g \cdot |E| = 2 \cdot |K|$. Insbesondere gilt im Falle $g = 2$: $|E| = |K|$.*

Zusammenhang und Verbindbarkeit

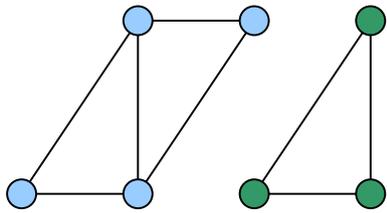


BILD 3.2: Ein Graph, der nicht zusammenhängt

Der Begriff des *Zusammenhangs* ist von grundlegender Bedeutung. Das liegt nicht daran, dass wir es ständig mit Graphen zu tun haben, deren Zusammenhang untersucht werden müsste. In der Tat beschränken wir uns in vielerlei Situationen auf zusammenhängende Graphen; und falls doch mal ein nicht-zusammenhängender Graph untersucht werden muss, so werden seine zusammen-

hängenden Einzelteile (Zusammenhangskomponenten) separat untersucht. Die tatsächliche Bedeutung des Zusammenhangs liegt vielmehr in der lokalen Analyse zusammenhängender Graphen; vor allem die Frage, ob die Entfernung einer gewissen Kante den Zusammenhang eines Graphen zerstört oder nicht, wird für unsere Untersuchungen bedeutungsvoll sein und uns später zu den Begriffen *Brücke* und *Nicht-Brücke* führen.

Um den Zusammenhang eines Graphen definieren zu können, benötigen wir vorher noch den Begriff des *isolierten Teilgraphen*.

Definition 3.9. Eine Teilmenge H eines Graphen G heißt ein *Teilgraph* von G , wenn H ein Graph ist. Wir bezeichnen dann G auch als *Obergraphen* von H . Im Falle $H \neq G$ ist H ein *echter Teilgraph* von G , und G ist dann ein *echter Obergraph* von H .

Wenn eine Teilmenge H eines Graphen G kein Graph ist, so muss dies daran liegen, dass H eine Kante $\{a, b\}$ von G enthält und eine der Ecken $\{a\}$ bzw. $\{b\}$ nicht in H liegt.

Bemerkung 3.10. Seien G ein Graph und H ein echter Teilgraph von G . Dann enthält $G \setminus H$ eine isolierte Ecke oder eine Kante von G .

Beweis. Wir nehmen an, dass $G \setminus H$ keine Kante enthält, und werden zeigen, dass $G \setminus H$ dann eine isolierte Ecke von G enthält. Wähle ein Element x aus $G \setminus H$; dann ist x keine Kante – also eine Ecke. Wähle a mit $x = \{a\}$. Gäbe es eine Kante $\{a, b\}$ in G , so müsste diese Kante sogar in H liegen, weil $G \setminus H$ ja keine Kanten enthält. Wegen der Grapheneigenschaft von H folgte dann aber: $\{a\} \in H$, also $x \in H$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung über x wäre. Also ist x isoliert. \square

Definition 3.11. Ein Teilgraph H eines Graphen G heißt *isoliert in G* , wenn die Mengendifferenz $G \setminus H$ ein Graph ist.

Offenbar sind für jeden Graphen G die Teilgraphen G und \emptyset isoliert. Wir nennen diese Teilgraphen daher die *trivialen isolierten Teilgraphen*. Die Frage, ob ein Graph noch weitere isolierte Teilgraphen besitzt, führt nun direkt zum Begriff des Zusammenhangs.

Definition 3.12. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht-leer ist und nur die trivialen isolierten Teilgraphen besitzt. Anders formuliert: Ein nicht-leerer Graph ist *nicht zusammenhängend*, wenn es eine nicht-triviale disjunkte Zerlegung in Teilgraphen gibt.

Diese Begriffsbildung erinnert an die Topologie: Dort heißt ein topologischer Raum M *zusammenhängend*, wenn die leere Menge und M die einzigen Teilmengen von M sind, die (bezüglich der Topologie) sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Die entsprechende Begriffsbildung der Graphentheorie erfasst genau unsere Anschauung von Zusammenhang. Bild 3.2 zeigt einen nicht-zusammenhängenden Graphen; offenbar bilden sowohl der blaue Teilgraph links als auch der grüne Teilgraph rechts nicht-triviale isolierte Teilgraphen des Gesamtgraphen. Wenn wir andererseits einen zusammenhängenden Graphen betrachten, etwa einen der drei aus Bild 3.1, so wird es uns nicht möglich sein, die Ecken und Kanten des Graphen derart auf zwei nicht-triviale Teilmengen des Graphen aufzuteilen, dass beide Teilmengen die Grapheneigenschaft besitzen; immer bleibt irgendwo mindestens eine Kante übrig, die nicht in eine Ecke mündet.

Die hier verwendete Definition von Zusammenhang weicht erneut vom literaturüblichen Begriff ab – wie schon der Begriff des Graphen selbst. Die übliche

Definition stützt sich auf den Begriff der Verbindbarkeit zweier Ecken eines Graphen und ist *lokal* und *dynamisch*; *lokal* insofern, als der Zusammenhang der Gesamtstruktur auf die Verbindbarkeit seiner Einzelteile zurückgeführt wird; *dynamisch* insofern, als die Verbindbarkeit zweier Ecken durch Tupel von benachbarten Ecken ausgedrückt wird, die eine Reise, eine Bewegung, von der einen Ecke zur anderen beschreiben.

Unser Vorgehen hingegen ist *global* und *statisch*. Der Zusammenhang der Gesamtstruktur wird ohne Besichtigung einzelner Ecken definiert, und die Tupel mit ihrer Idee der Reise bleiben auch außen vor. Tatsächlich wird der Zusammenhang ganz ohne Rückgriff auf den Verbindbarkeits-Gedanken formuliert. Stattdessen wird die Verbindbarkeit demnächst umgekehrt mithilfe des Zusammenhangs ausgedrückt. Zuvor aber noch einige Sätze zum Zusammenhang:

Bemerkung 3.13. *Einen Graphen, der aus genau einer Kante und ihren beiden Ecken besteht, nennen wir eine Strecke. Offenbar ist jede Strecke zusammenhängend.*

Satz 3.14. *Sei G ein nicht-leerer, vollständiger Graph. Dann ist G zusammenhängend.*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, G sei nicht zusammenhängend. Dann gibt es einen isolierten Teilgraphen J von G mit $J \neq \emptyset$ und $J \neq G$. Also finden wir zwei Ecken $\{a\}$ und $\{b\}$ mit $\{a\} \in J$ und $\{b\} \in G \setminus J$. Die Kante $\{a, b\}$ liegt dann jedenfalls in G , weil G vollständig ist; damit liegt sie entweder in J oder in $G \setminus J$. Im ersten Fall folgt $\{b\} \in J$, im zweiten $\{a\} \in G \setminus J$. In beiden Fällen haben wir damit einen Widerspruch zu den Voraussetzungen über $\{a\}$ und $\{b\}$ herbeigeführt. \square

Satz 3.15. *Seien G und H zusammenhängende Graphen mit $G \cap H \neq \emptyset$. Dann ist auch $G \cup H$ ein zusammenhängender Graph.*

Beweis. Der Beweis dieses anschaulich evidenten Satzes wird zeigen, wie vorteilhaft unser Graphen-Begriff ist, denn es muss lediglich etwas Mengenlehre angewandt werden; nach Bemerkung 3.2 ist nur der Zusammenhang von $G \cup H$ zu zeigen. Sei also T ein isolierter Teilgraph von $G \cup H$. Dann ist $(G \cup H) \setminus T$ ein Graph (da T isoliert ist) und nach Bemerkung 3.2 ebenso der Durchschnitt $((G \cup H) \setminus T) \cap G$. Für diesen letztgenannten Graphen gilt aber die Gleichungskette

$$((G \cup H) \setminus T) \cap G = ((G \cup H) \cap G) \setminus T = G \setminus T = G \setminus (G \cap T). \quad (3.2)$$

Dabei ist das erste Gleichheitszeichen durch die Rechenregel

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$$

gerechtfertigt. Da nun aber $((G \cup H) \setminus T) \cap G$ ein Graph ist, zeigt Gleichung (3.2), dass auch $G \setminus (G \cap T)$ ein Graph ist. Also ist $G \cap T$ ein isolierter Teilgraph von G , und da G zusammenhängend ist, folgt daraus

$$G \cap T = \emptyset \text{ oder } G \cap T = G. \quad (3.3)$$

Vertauschen wir in (3.2) die Rollen von G und H , so erhalten wir analog

$$H \cap T = \emptyset \text{ oder } H \cap T = H. \quad (3.4)$$

Wir betrachten nun die vier logischen Kombinationsmöglichkeiten von (3.3) und (3.4) und zeigen zunächst, dass die beiden „gemischten“ Fälle nicht eintreten können. Wäre nämlich $G \cap T = \emptyset$ und $H \cap T = H$, so folgte daraus zunächst $H \subseteq T$ und dann $G \cap H = \emptyset$, und dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Den anderen gemischten Fall (mit vertauschten Rollen von G und H) können wir ebenso ausschließen.

Jetzt sondieren wir den Fall $G \cap T = \emptyset$ und $H \cap T = \emptyset$. Dann gilt

$$\emptyset = (G \cap T) \cup (H \cap T) = (G \cup H) \cap T = T,$$

womit wunschgemäß gezeigt ist, dass T in diesem Fall ein *trivialer* Teilgraph ist.

Im letzten Fall ist $G \cap T = G$ und $H \cap T = H$. Hier folgt

$$G \cup H = (G \cap T) \cup (H \cap T) = (G \cup H) \cap T = T.$$

Auch hier erweist sich T als *trivialer* Teilgraph von $G \cup H$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Definition 3.16. Sei G ein Graph, und seien $x, y \in G$. Dann heißen x, y verbindbar in G , in Zeichen: $x \underset{G}{\sim} y$, wenn es einen zusammenhängenden Teilgraphen H von G gibt mit $x, y \in H$. Oft schreiben wir auch $x \sim y$, wenn klar ist, welcher Graph gemeint ist.

Man beachte bei Definition 3.16, dass die Objekte x und y Ecken oder auch Kanten sein können!

Satz 3.17. *Für jeden Graphen G ist die Relation \sim_G eine Äquivalenzrelation.*

Im Beweis von Satz 3.17 wird beim Nachweis der Transitivität auf Satz 3.15 zurückgegriffen.

Eine Warnung: Isoliertheit und Verbindbarkeit sind im Gegensatz zum Zusammenhang *relative* Eigenschaften! Die Frage, ob ein Graph H isoliert sei, ist in unserer Sprache bedeutungslos; die Frage ergibt nur Sinn in Bezug auf einen Obergraphen G , von dem H ein Teilgraph ist, weshalb es ja auch *isoliert in G* heißt. Dabei kann die Frage nach der Isoliertheit von H in G durchaus verschiedene Antworten haben, je nachdem, wie der Graph G beschaffen ist. Wir betrachten ein sehr überschaubares Beispiel: Der Graph $H := \{\{1\}\}$ ist in H isoliert (als Teilgraph von sich selbst); als Teilgraph von $G := \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ jedoch nicht. Entsprechendes gilt für die Verbindbarkeit, bei der ebenfalls ein Bezug zur übergeordneten Gesamtstruktur hergestellt werden muss. Die Definition des Zusammenhangs eines Graphen G nimmt hingegen keinen Bezug auf eine andere Struktur und führt deshalb zu einer *absoluten* Eigenschaft. Wir werden diesen Aspekt von Begriffen auch bei zukünftigen Definitionen im Blick behalten.

Aus der Absolutheit des Zusammenhangs ergibt sich folgende schlichte Feststellung über die Vererbung der Verbindbarkeit auf Obergraphen:

Bemerkung 3.18. *Seien G ein Graph und H ein Teilgraph von G . Ferner seien x und y zwei Ecken des Graphen H . Dann gilt:*

$$x \underset{H}{\sim} y \implies x \underset{G}{\sim} y.$$

Bemerkung 3.19. *Sei G ein zusammenhängender Graph, der kein Punkt ist; und sei H ein echter Teilgraph von G . Dann gibt es eine Kante in $G \setminus H$.*

Beweis. Falls H leer ist, so müssen wir zeigen, dass G eine Kante enthält; als zusammenhängender Graph ist G nicht-leer, und die Behauptung ergibt sich aus Bemerkung 3.5. Falls H nicht leer ist, so ist H ein nicht-trivialer Teilgraph von G , der wegen des Zusammenhangs von G nicht isoliert in G ist – es gibt ja nur die trivialen isolierten Teilgraphen von G . Also ist $G \setminus H$ kein Graph. Es gibt also eine Kante in $G \setminus H$, die die Grapheneigenschaft von $G \setminus H$ zunichte macht. □

Man überlege sich, dass Bemerkung 3.19 für nicht-zusammenhängende Graphen im Allgemeinen nicht gilt!

Definition 3.20. Die Äquivalenzklassen eines Graphen G nach der Relation \sim_G heißen die *Zusammenhangskomponenten von G* , kurz: *Komponenten von G* . Die Menge dieser Äquivalenzklassen wird wie bei Faktorstrukturen üblich mit G/\sim_G bzw. G/\sim bezeichnet. Wir dürfen den Buchstaben G unter der Tilde \sim wohl weglassen, weil hier stets die Verbindbarkeit in dem faktorisierten Graphen G gemeint ist und keine Verwechslung droht.

Damit ist klar: Zwei Elemente eines Graphen sind genau dann verbindbar, wenn sie in derselben Zusammenhangskomponente des Graphen liegen.

Satz 3.21. *Sei G ein Graph, und sei J eine Komponente von G . Dann ist J ein zusammenhängender und isolierter Teilgraph von G .*

Beweis. Wir kümmern uns zunächst darum, ob J überhaupt die Grapheneigenschaft besitzt. Sei also $\{a, b\}$ eine Kante von J . Dann gilt nach Bemerkung 3.13: $\{a\}, \{b\} \in J$. Mehr war zunächst nicht zu zeigen.

Es folgt der Nachweis der Isoliertheit von J : Zu zeigen ist hier, dass $G \setminus J$ ein Graph ist. Sei also $\{c, d\}$ eine Kante aus $G \setminus J$. Wir müssen offenlegen, warum $\{c\}$ und $\{d\}$ beide nicht in J liegen. Weil $\{c\}$ und $\{c, d\}$ verbindbar in G sind (erneut nach Bemerkung 3.13), liegen sie in derselben Zusammenhangskomponente von G ; und da $\{c, d\}$ außerhalb von J liegt, gilt dies somit auch für $\{c\}$. Analog schließen wir für $\{d\}$.

Schließlich weisen wir den Zusammenhang von J nach: Wähle eine Ecke $\{a\}$ aus J und einen maximal zusammenhängenden Teilgraphen H von G , der $\{a\}$ enthält („maximal“ bezieht sich hier auf die Mächtigkeit). Wir werden zeigen, dass $H = J$ gilt, womit dann der Zusammenhang von J bewiesen sein wird. Wir zeigen zunächst die Inklusion $J \subseteq H$. Sei also $x \in J$. Dann sind x und $\{a\}$ in G verbindbar, daher finden wir einen zusammenhängenden Teilgraphen L von G mit: $x, \{a\} \in L$. Nach Satz 3.15 ist also auch $L \cup H$ ein zusammenhängender Teilgraph von G , und die Ecke $\{a\}$ ist ein Element dieses Teilgraphen; da H maximal mit eben dieser Eigenschaft ist, muss $L \cup H$ eine Teilmenge von H sein, d.h. es gilt $L \subseteq H$. Da x in L liegt, liegt x also auch in H , womit der Beweis von „ $J \subseteq H$ “ erledigt ist. Die andere Inklusion „ $H \subseteq J$ “ geht einfach: Sei $x \in H$. Um zu zeigen, dass x auch in J liegt, müssen wir lediglich $x \sim \{a\}$ zeigen, denn dann liegen beide Objekte in derselben Komponente, also J . Die gewünschte Feststellung $x \sim \{a\}$ ergibt sich aber schlicht daraus, dass x und $\{a\}$ in demselben zusammenhängenden Teilgraphen liegen, nämlich in H . \square

Wir zeigen nun die Umkehrung von Satz 3.21:

Satz 3.22. *Sei G ein Graph, und sei J ein zusammenhängender und isolierter Teilgraph von G . Dann ist J eine Komponente von G .*

Beweis. Weil J zusammenhängend ist, ist J nicht-leer. Wähle also $y \in J$. Sei $K(y)$ die Zusammenhangskomponente von y . Wir werden zeigen, dass J und $K(y)$ identisch sind, und auf diese Weise den Beweis des Satzes erbringen.

Wir betrachten zunächst die Gleichungskette

$$K(y) \setminus J = (K(y) \cap G) \setminus J = K(y) \cap (G \setminus J). \quad (3.5)$$

Durch Satz 3.21 wissen wir, dass $K(y)$ ein Graph ist, und $G \setminus J$ ist ebenso ein Graph, weil J isoliert ist. Nach Satz 3.2 ist also auch der Durchschnitt am Ende von (3.5) ein Graph und damit auch $K(y) \setminus J$ am Anfang von (3.5). Also ist J isoliert in $K(y)$. Da $K(y)$ zusammenhängend ist (Satz 3.21) und J nicht-leer ist, kann J somit nur identisch mit $K(y)$ sein. \square

Wir haben damit insgesamt gezeigt, dass die Zusammenhangskomponenten eines Graphen G genau seine zusammenhängenden isolierten Teilgraphen sind.

Satz 3.23. *Sei G ein Graph, in dem genau zwei Ecken ungeraden Grades sind. Dann sind diese beiden Ecken in G verbindbar.*

Beweis. Seien $\{a\}$ und $\{b\}$ die beiden einzigen Ecken ungeraden Grades. Sei J die Zusammenhangskomponente von $\{a\}$. Nach Satz 3.21 ist J ein Graph. Die Ecke $\{a\}$ liegt in J und ist auch bezüglich J ungeraden Grades – denn sie ist nur zu Ecken innerhalb der eigenen Zusammenhangskomponente J benachbart. Nach Satz 3.7 gibt es also *in* J noch mindestens eine weitere Ecke ungeraden Grades (bezüglich J). Diese Ecke hat dann wegen der Isoliertheit von J auch bezüglich G ungeraden Grad. Es gibt aber insgesamt in G nur eine weitere Ecke ungeraden Grades, nämlich $\{b\}$. Also liegt $\{b\}$ auch in J ; und das bedeutet, dass $\{a\}$ und $\{b\}$ in G verbindbar sind. \square

Hilfssatz 3.24. *Seien G und H zwei disjunkte Graphen, $x \in G$ und $y \in G \cup H$. Dann gilt:*

$$x \underset{G \cup H}{\sim} y \iff x \underset{G}{\sim} y. \quad (3.6)$$

Beweis. Es gelte: $x \underset{G \cup H}{\sim} y$. Wähle einen zusammenhängenden Teilgraphen J von $G \cup H$ mit $x, y \in J$. Dann ist

$$J = (J \cap G) \dot{\cup} (J \cap H)$$

eine *disjunkte* Zerlegung von J in isolierte Teilgraphen von J . Da J zusammenhängend ist, ist also einer der beiden Teilgraphen die leere Menge, und der andere ist gleich J . Wegen $x \in G$ und $x \in J$ ist $J \cap G$ nicht-leer. Also gilt $J \cap G = J$, d.h.: $J \subseteq G$. Damit ist J also insbesondere ein zusammenhängender Teilgraph von J , der x und y enthält. Damit ist gezeigt: $x \underset{G}{\sim} y$.

Die andere Implikationsrichtung ist beinahe trivial, denn ein zusammenhängender Teilgraph von J , der x und y enthält, ist gleichzeitig auch ein Teilgraph von $G \cup H$. □

Hilfssatz 3.25. *Seien G und H zwei disjunkte Graphen. Dann gilt:*

$$(G \cup H) / \sim = G / \sim \dot{\cup} H / \sim.$$

Dabei verwenden wir erneut das Symbol $\dot{\cup}$ für die disjunkte Vereinigung.

Beweis. Die behauptete Disjunktheit von G / \sim und H / \sim ergibt sich daraus, dass wegen der Disjunktheit von G und H keine nicht-leere Menge in G und H enthalten sein kann.

Sei $J \in (G \cup H) / \sim$, also eine Zusammenhangskomponente von $G \cup H$. Wähle $x \in J$. Dann ist x entweder aus G oder aus H . Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $x \in G$ gilt. Dann gilt also $x \in K_{G \cup H}(x)$ – so bezeichnen wir die Zusammenhangskomponente von x in $G \cup H$. Mit Hilfssatz 3.24 sehen wir, dass J gleich der Zusammenhangskomponente $K_G(x)$ von x in G ist. Also gilt: $J \in G / \sim$.

Sei nun $J \in G / \sim \dot{\cup} H / \sim$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $J \in G / \sim$ an. Wähle ein $x \in G$ mit $J = K_G(x)$. Wiederum sehen wir mit Hilfssatz 3.24, dass J gleich der Zusammenhangskomponente $K_{G \cup H}(x)$ ist. Damit ist $J \in (G \cup H) / \sim$, und der Beweis ist abgeschlossen. □

Der folgende Satz versöhnt schließlich unsere *globale* Auffassung von Zusammenhang mit der traditionellen *lokalen* Auffassung (Verbindbarkeit je zweier Ecken).

Satz 3.26. Für jeden Graphen G sind folgende vier Aussagen äquivalent:

- (1) G ist zusammenhängend.
- (2) $G \neq \emptyset$, und alle Ecken von G sind paarweise verbindbar.
- (3) $|G/\sim| = 1$.
- (4) $G/\sim = \{G\}$.

Beweis. Wir führen einen Ringschluss durch die vier Aussagen durch:

„(1) \implies (2)“: Sei G zusammenhängend. Dann ist G nicht-leer. Je zwei Ecken sind paarweise verbindbar, weil stets G als zusammenhängende Menge zur Verfügung steht, die beide Ecken enthält.

„(2) \implies (3)“: Es gelte: $G \neq \emptyset$, und alle Ecken von G seien paarweise verbindbar. Wähle dann eine Ecke $\{a\}$ aus G . Die Zusammenhangskomponente $K(\{a\})$ von $\{a\}$ ist dann ein Element von G/\sim , aber natürlich auch das einzige, weil alle Ecken von G mit $\{a\}$ verbindbar sind.

„(3) \implies (4)“: Es gelte: $|G/\sim| = 1$. Wir werden zeigen, dass nun G eine Komponente von G ist; weil es nach Voraussetzung dann keine weitere Komponente gibt, werden wir (4) gezeigt haben. Sei also J die nach Voraussetzung existierende Komponente von G . Gäbe es ein Element x von G außerhalb von J , so wäre die Zusammenhangskomponente $K(x)$ von x ein weiteres Element von G/\sim ; ein solches existiert aber nach Voraussetzung nicht. Also ist J bereits der ganze Graph G .

„(4) \implies (1)“: Es gelte: $G/\sim = \{G\}$. Nach Satz 3.21 ist jede Komponente zusammenhängend, hier also insbesondere G . □

Komplementäre und selbstkomplementäre Graphen

Dieser Abschnitt über komplementäre Graphen wird uns mit einigen reizvollen Phänomenen der Graphentheorie vertraut machen. Er wird später eine reichhaltige Quelle für interessante Aufgaben sein. Für den Aufbau unserer kleinen Theorie spielt er jedoch keine wesentliche Rolle.

Definition 3.27. Seien G und H zwei Graphen mit identischen Eckenmengen, also $E(G) = E(H)$. G und H heißen *komplementär*, wenn für je zwei verschiedene Ecken $\{a\}$ und $\{b\}$ aus der gemeinsamen Eckenmenge gilt: $\{a, b\} \in H \iff \{a, b\} \notin G$. H enthält dann also genau diejenigen Kanten, die in G fehlen.

Offenbar gibt es zu jedem Graphen G genau einen Graphen H derart, dass G und H komplementär sind; diesen Graphen nennen wir den *komplementären Graphen von G* und bezeichnen ihn mit G^* .

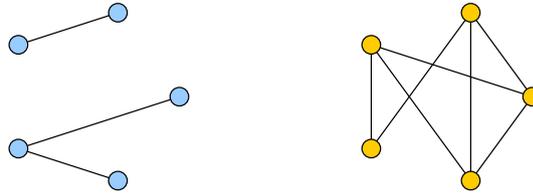


BILD 3.3: Komplementäre Graphen – einer von beiden ist immer zusammenhängend.

Satz 3.28. *Sei G ein nicht-leerer Graph. Dann gilt: G ist zusammenhängend oder G^* ist zusammenhängend (Bild 3.3).*

Beweis. Weil G und G^* dieselbe Eckenmenge haben, sprechen wir in diesem Beweis schlicht von Ecken – ohne Spezifizierung des Herkunftsgraphen. Gemeint sind Ecken aus der gemeinsamen Eckenmenge von G und G^* .

Sei G nicht zusammenhängend. Wir müssen nun zeigen, dass G^* zusammenhängend ist. Nach Satz 3.26 gibt es zwei Ecken $\{a\}$ und $\{b\}$, die in G nicht verbindbar sind. Insbesondere ist die Kante $\{a, b\}$ nicht in G enthalten; also ist diese Kante in G^* enthalten (weil dieser Graph komplementär zu G ist). Somit sind die Ecken $\{a\}$ und $\{b\}$ in G^* verbindbar. Unser Plan ist nun, für jede Ecke $\{x\}$ zu zeigen, dass sie in G^* mit $\{a\}$ oder mit $\{b\}$ verbindbar ist. Sei also $\{x\}$ eine Ecke. Diese Ecke ist in G nicht mit $\{a\}$ und $\{b\}$ verbindbar, denn sonst wären ja $\{a\}$ und $\{b\}$ doch verbindbar in G (über $\{x\}$ nämlich), im Widerspruch zur Wahl von $\{a\}$ und $\{b\}$. Also fehlt mindestens eine der Kanten $\{a, x\}$, $\{b, x\}$ in G ; und diese eine Kante ist dann in G^* vorhanden, weswegen also $\{x\}$ sogar auf direktem Wege mit $\{a\}$ oder mit $\{b\}$ in G^* verbindbar ist. Alle Ecken sind also wie gewünscht mit $\{a\}$ oder mit $\{b\}$ in G^* verbindbar.

Mit dieser Einsicht und mit Satz 3.26 im Rücken ist der Zusammenhang von G^* aber nachgewiesen; denn für je zwei Ecken $\{x\}$ und $\{y\}$ ist jede dieser Ecken mit $\{a\}$ oder mit $\{b\}$ in G^* verbindbar; außerdem sind $\{a\}$ und $\{b\}$ selbst in G^* verbindbar; und wegen der Transitivität der Verbindbarkeit sind also auch $\{x\}$ und $\{y\}$ in G^* verbindbar. \square

Satz 3.29. *Sei G ein Graph mit mindestens sechs Ecken. Dann gilt: Mindestens einer der beiden Graphen G und G^* enthält einen Teilgraphen, der ein vollständiger Graph der Ordnung 3 ist (ein sogenanntes Dreieck).*

Beweis. Wähle eine Ecke a von G . Dann gilt:

$$\text{grad}_G(a) + \text{grad}_{G^*}(a) \geq 5,$$

also ist (mindestens) einer der beiden Eckengrade größer oder gleich 3. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass dies für den Eckengrad in G zutrifft (ansonsten vertauschen wir nämlich die Rollen von G und G^*). Dann gibt es also drei verschiedene Ecken b, c, d in G , die alle mit a in G benachbart sind (und damit auch von a verschieden sind). Gibt es unter den Ecken b, c, d ein in G benachbartes Eckenpaar, etwa b, c , so sind die Ecken a, b, c paarweise in G benachbart und bilden ein Dreieck. Andernfalls sind die Ecken b, c, d in G paarweise *nicht* benachbart; dann sind sie aber paarweise in G^* benachbart und bilden dort ein Dreieck. \square

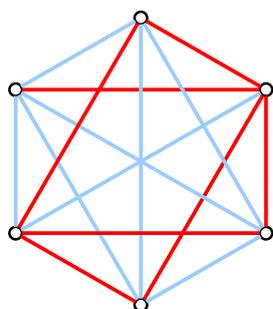


BILD 3.4: Zu Satz 3.29

Der Satz 3.29 ist der einfachste nicht-triviale Fall der *Ramseytheorie*. Dieser Spezialfall wird gern durch die Erzählung garniert, dass es unter sechs Menschen, die sich auf einer Party treffen, stets drei Menschen gibt, die einander schon kennen, oder aber drei Menschen, die einander unbekannt sind. Auch wird gern darauf hingewiesen, dass es in einer Figur mit sechs Punkten, von denen je zwei durch eine rote oder durch eine blaue Strecke verbunden sind, stets ein rotes Dreieck oder ein blaues Dreieck gibt (nur manchmal auch beides).

Die Zahl 6 kann in Satz 3.29 nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden. Die Antwort auf die Frage, wie viele Ecken ein Graph G aufweisen muss, damit G oder G^* auf jeden Fall einen vollständigen Teilgraphen mit *vier* Ecken besitzt, ist auch bekannt: Es sind 18 Ecken. Doch die Frage ist offenbar nicht völlig harmlos, denn wenn wir auf der Suche nach vollständigen Teilgraphen mit *fünf* Ecken sind, ist bis zum heutigen Tag (Stand: August 2011) nicht geklärt, wie viele Ecken G benötigt; man weiß nur, dass es mindestens 43 und höchstens 49 Ecken sind.¹

Definition 3.30. Ein Graph heißt *selbstkomplementär*, wenn er zu seinem Komplementärgraphen isomorph ist.

¹ Die Fakten dieses Absatzes sind zitiert aus: Weisstein, Eric W. "Ramsey Number." <http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html> (Abrufdatum: 27. August 2011)

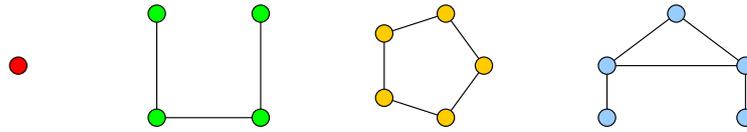


BILD 3.5: Die fünf einzigen selbstkomplementären Graphen mit bis zu fünf Ecken – der leere Graph ist leider unsichtbar.

Definition 3.31. Sei u ein Tupel ganzer Zahlen. Dasjenige Tupel mit denselben Komponenten wie u , aber in umgekehrter Reihenfolge, bezeichnen wir vorläufig mit \bar{u} . Das Tupel u heißt *selbstkomplementär*, wenn die (komponentenweise) Summe von u und \bar{u} ein konstantes Tupel ergibt.

Ein selbstkomplementäres Tupel zeichnet sich also dadurch aus, dass die erste und die letzte Komponente die gleiche Summe besitzen wie die zweite und die vorletzte, die dritte und die drittletzte usw. Das Tupel $(3, 8, 10, 12, 17)$ ist beispielsweise selbstkomplementär.

Satz 3.32. Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, und sei G ein selbstkomplementärer Graph mit n Ecken (also insbesondere nicht-leer). Sei schließlich u das Eckengradtupel von G . Dann gilt:

- a) G hat (ebenso wie G^*) genau $\frac{1}{4} \cdot n \cdot (n - 1)$ Kanten.
- b) Es gilt: $n \equiv 0$ oder $n \equiv 1$.
- c) G ist zusammenhängend.
- d) Die Summe der Komponenten von u ist $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$.
- e) Das Eckengradtupel u ist selbstkomplementär. Die Summe von u und \bar{u} ist das konstante n -Tupel mit der Komponente $n - 1$.
- f) Falls n ungerade ist, so ist die „mittlere“ Komponente von u die Zahl $\frac{1}{2} \cdot (n - 1)$.
- g) Das Tupel u enthält keine 0 und nicht genau eine 1.

Beweis. Die Kantenmengen von G und G^* ergeben vereinigt die Kantenmenge eines vollständigen Graphen mit n Ecken; dieser besitzt $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$ Ecken, und da die beiden Kantenmengen von G und G^* nicht nur disjunkt, sondern wegen der Isomorphie der beiden Graphen auch gleichmächtig sind, liegt die Hälfte dieser Kanten in G , die andere Hälfte in G^* . Damit ist a) bewiesen.

Aussage b) folgt direkt aus a), denn natürlich ist die Anzahl der Kanten von G , also $\frac{1}{4} \cdot n \cdot (n-1)$, eine *ganze* Zahl. Also ist 4 ein Teiler des Produkts $n \cdot (n-1)$. Da 4 entweder zu n oder zu $n-1$ teilerfremd ist (wie jede andere Zahl anstelle von 4 auch), folgt mit dem Euklidischen Hauptsatz 2.12 a) der Zahlentheorie, dass 4 entweder n oder $n-1$ teilt. Genau das besagt auch die Kongruenzaussage von b).

Wäre G nicht zusammenhängend, so wäre G^* nach Satz 3.28 zusammenhängend; wegen der Isomorphie von G und G^* wäre dann aber auch G zusammenhängend: ein Widerspruch! Also ist G tatsächlich zusammenhängend, wie es Aussage c) behauptet.

Teil d) folgt unmittelbar aus Teil a) und der Bilanzgleichung.

Für den Beweis der anderen Teilaussagen wählen wir zunächst einen Graphen-Isomorphismus ϕ von $E(G)$ auf $E(G^*) [= E(G)]$ (siehe Definition 3.3).

Zu Teil e): Wir wählen eine Aufzählung e_1, e_2, \dots, e_n der Ecken von G mit

$$\text{grad}_G(e_1) \leq \text{grad}_G(e_2) \leq \dots \leq \text{grad}_G(e_n).$$

Dann ist

$$u = (\text{grad}_G(e_1), \text{grad}_G(e_2), \dots, \text{grad}_G(e_n)) \quad (3.7)$$

das Gradtupel von G . Wegen der Komplementarität von G und G^* gilt außerdem für jedes i (von 1 bis n):

$$\text{grad}_{G^*}(e_i) = (n-1) - \text{grad}_G(e_i). \quad (3.8)$$

Also ist die Lage in G^* gegenüber G genau umgekehrt; es gilt

$$\text{grad}_{G^*}(e_n) \leq \text{grad}_{G^*}(e_{n-1}) \leq \dots \leq \text{grad}_{G^*}(e_1), \quad (3.9)$$

und für das Gradtupel v von G^* gilt daher

$$v = (\text{grad}_{G^*}(e_n), \text{grad}_{G^*}(e_{n-1}), \dots, \text{grad}_{G^*}(e_1)). \quad (3.10)$$

Aus Isomorphiegründen ist aber $u = v$, und daher folgt aus (3.10) und (3.8) die Gleichungskette

$$\begin{aligned} u = v &= (\text{grad}_{G^*}(e_n), \text{grad}_{G^*}(e_{n-1}), \dots, \text{grad}_{G^*}(e_1)) \\ &= ((n-1) - \text{grad}_G(e_n), (n-1) - \text{grad}_G(e_{n-1}), \dots, (n-1) - \text{grad}_G(e_1)) \\ &= (n-1, n-1, \dots, n-1) - (\text{grad}_G(e_n), \text{grad}_G(e_{n-1}), \dots, \text{grad}_G(e_1)) \\ &= (n-1, n-1, \dots, n-1) - \bar{u}, \end{aligned}$$

also

$$u + \bar{u} = (n - 1, n - 1, \dots, n - 1),$$

womit Aussage e) bewiesen ist.

Aussage f) folgt unmittelbar aus e).

Nun zu Teil g): Gäbe es eine Ecke vom Grade 0, also eine isolierte Ecke, so wäre G nicht zusammenhängend, im Widerspruch zu c). Damit ist der erste Teil von Behauptung g) bewiesen.

Der zweite Teil von g) wird ebenfalls durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt; wir nehmen also an, es gäbe genau eine Ecke x mit:

$$\text{grad}_G(x) = 1. \tag{3.11}$$

Dann folgen die Gleichungen

$$\text{grad}_{G^*}(\phi(x)) = 1 \tag{3.12}$$

(wegen der Isomorphie) und

$$\text{grad}_G(x) + \text{grad}_{G^*}(x) = n - 1 \tag{3.13}$$

(wegen der Komplementarität). Wegen der Einzigartigkeit von x als Edecke in G ist x in G^* die einzige Ecke mit dem (höchsten) Eckengrad $n - 2$.

Wir unterscheiden die Fälle $x = \phi(x)$ und $x \neq \phi(x)$ und führen beide Fälle zum Widerspruch. Im ersten Fall, $x = \phi(x)$, führt (3.13) zusammen mit (3.12) und (3.11) auf die Gleichung $n - 1 = 2$, also $n = 3$. Dies widerspricht Aussage b).

Im zweiten Fall, $x \neq \phi(x)$, beachten wir die Tatsache, dass G genau zwei Ecken mit „Extremgrad“ besitzt: nämlich x (Grad 1) und $\phi(x)$ (Grad $n - 2$). Auch G^* besitzt genau zwei Ecken mit Extremgrad: nämlich $\phi(x)$ (Grad 1) und x (Grad $n - 2$). Wegen der Komplementarität von G und G^* sind die Extremgrad-Ecken in einem der beiden Graphen benachbart, im anderen nicht. Das widerspricht der Isomorphie der beiden Graphen. □

Brücken, Nicht-Brücken und die Kreiszahl

Definition 3.33. Seien G ein Graph und $\{a, b\}$ eine Kante von G . Dann heißt $\{a, b\}$ eine *Brücke von G* , wenn die Ecken $\{a\}$ und $\{b\}$ in $G \setminus \{\{a, b\}\}$ nicht verbindbar sind. Andernfalls nennen wir $\{a, b\}$ eine *Nicht-Brücke (von G)*.

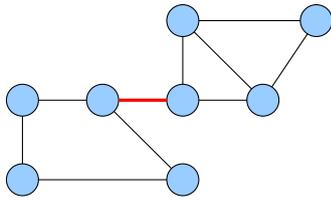


BILD 3.6: Die rote Kante ist eine Brücke des Graphen

Das Charakteristische einer Brücke ist also, dass ihre Wegnahme dazu führt, dass ihre Endecken nicht länger verbindbar sind – auch über Umwege nicht, anschaulich gesprochen. In Bild 3.6 gibt es nur eine Brücke, nämlich die rote Kante. Wenn wir eine der anderen Kanten entfernen, so bleiben deren Endecken im Restgraphen verbindbar. Doch im Restgraphen gibt es dann Brücken, die vorher noch Nicht-Brücken waren; betrachten wir etwa die Ecke unten links, so führt die Wegnahme einer ihrer Kanten dazu, dass ihre andere Kante im Restgraphen eine Brücke ist. *Brücke* und *Nicht-Brücke* sind also genau wie *Isoliertheit* und *Verbindbarkeit* relative Begriffe, und daher muss im Zweifelsfall klar gesagt werden, in welchem Gesamtgraphen die Begriffsbildung stattfindet. Allerdings gibt es in diesem Zusammenhang auch beruhigende Gesetzmäßigkeiten: Ein Graph „vererbt“ seine Brücken auf jeden seiner Teilgraphen, in dem die betreffende Kante überhaupt vorkommt; und andersherum „vererbt“ jeder Teilgraph seine Nicht-Brücken auf jeden Obergraphen. Genau dies drückt Bemerkung 3.34 formal aus. Aus Bemerkung 3.18 folgt nämlich:

Bemerkung 3.34. Seien G ein Graph und H ein Teilgraph von G , und sei k eine Kante von H . Dann gilt:

- a) k ist eine Brücke in $G \implies k$ ist eine Brücke in H .
- b) k ist eine Nicht-Brücke in $H \implies k$ ist eine Nicht-Brücke in G .

Man beachte, dass jede der beiden Aussagen von Bemerkung 3.34 die Kontraposition der anderen ist. Die jeweiligen Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht!

Anschaulich liegt die Vermutung nahe, dass die Wegnahme einer Kante genau dann die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht, wenn die Kante eine Brücke ist. Genau das drückt der folgende, technisch anmutende Hilfssatz etwas versteckt aus:

Hilfssatz 3.35. Sei G ein Graph, und sei $\{a, b\}$ eine Kante von G . Ferner sei $G' := G \setminus \{\{a, b\}\}$, also derjenige Graph, der sich ergibt, wenn wir die Kante $\{a, b\}$ aus G entfernen. Schließlich bezeichnen wir die Zusammenhangskomponenten von $\{a\}$ und $\{b\}$ in G' (nicht in G !) mit $K'(\{a\})$ und $K'(\{b\})$. Dann gilt:

$$|G'/\sim| - |G/\sim| = \left| \{K'(\{a\}), K'(\{b\})\} \right| - 1. \quad (3.14)$$

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$H := K'(\{a\}) \cup K'(\{b\}) \cup \{\{a, b\}\}.$$

Es gilt dann auch

$$H = K'(\{a\}) \cup K'(\{b\}) \cup \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \quad (3.15)$$

weil die beiden (scheinbar zusätzlichen) Ecken $\{a\}$ und $\{b\}$ auf der rechten Seite von (3.15) in den jeweiligen Zusammenhangskomponenten enthalten sind. Jede der drei vereinigten Mengen auf der rechten Seite von (3.15) ist ein Graph – die ersten beiden nach Satz 3.21, die dritte nach Bemerkung 3.13. Damit zeigt (3.15), dass H als Vereinigung dreier Graphen selbst ein Graph ist (Satz 3.2).

Unser nächstes Teilziel ist der Nachweis, dass H zusammenhängend ist; nach Satz 3.26 genügt es zu zeigen, dass H nicht-leer ist (das ist offensichtlich der Fall) und dass je zwei Ecken aus H in H verbindbar sind. Nun sind aber alle Ecken aus H offenbar mit $\{a\}$ oder mit $\{b\}$ in H verbindbar, und da zusätzlich $\{a\}$ und $\{b\}$ in H verbindbar sind und die Verbindbarkeit nach Satz 3.17 transitiv ist, sind alle Ecken paarweise verbindbar. Somit ist H tatsächlich ein *zusammenhängender* Graph.

Wir zeigen nun, dass H außerdem isoliert in G ist; mit Satz 3.22 folgt dann, dass H eine Zusammenhangskomponente von G ist – ein erster wichtiger Schritt dieses Beweises. Wir müssen also zeigen, dass $G \setminus H$ ein Graph ist. Wir haben Satz 3.2 im Sinn und streben daher eine Darstellung von $G \setminus H$ als Schnitt zweier Graphen an; tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} G \setminus H &= G \setminus \left(K'(\{a\}) \cup K'(\{b\}) \cup \{\{a, b\}\} \right) \\ &= \left(G \setminus \{\{a, b\}\} \right) \setminus \left(K'(\{a\}) \cup K'(\{b\}) \right) \\ &= G' \setminus \left(K'(\{a\}) \cup K'(\{b\}) \right) \\ &= \left(G' \setminus K'(\{a\}) \right) \cap \left(G' \setminus K'(\{b\}) \right); \end{aligned}$$

dabei gelten das erste und dritte Gleichheitszeichen nach Definition von H bzw. G' und das zweite und vierte Gleichheitszeichen nach elementaren Regeln der Mengenlehre. Diese Gleichungskette stellt wie geplant $G \setminus H$ als Schnitt von Graphen dar, denn genau das sind ja $G' \setminus K'(\{a\})$ und $G' \setminus K'(\{b\})$, weil $K'(\{a\})$ und $K'(\{b\})$ als Komponenten *isolierte* Teilgraphen von G' sind (Satz 3.21). Damit ist gezeigt: H ist ein *isolierter* Teilgraph von G .

Um die Mächtigkeiten der Faktorstrukturen G/\sim und G'/\sim aus (3.14) bestimmen zu können, wenden wir uns nun erst einmal den Mächtigkeiten von G bzw. G' selbst zu; dafür schreiben wir beide Mengen als *disjunkte* Vereinigung von anderen Mengen. Es ist offenbar zum einen

$$G = (G \setminus H) \dot{\cup} H, \quad (3.16)$$

zum anderen

$$G' = (G \setminus H) \dot{\cup} (H \setminus \{\{a, b\}\}). \quad (3.17)$$

Weil diese beiden Zerlegungen nicht nur disjunkt sind, sondern darüber hinaus aus disjunkten *isolierten* Teilgraphen bestehen, übertragen sich diese beide Zerlegungen auf die jeweiligen Faktorstrukturen (Hilfssatz 3.25). Aus (3.16) und (3.17) folgen somit die Gleichungen

$$G/\sim = (G \setminus H)/\sim \dot{\cup} H/\sim \quad (3.18)$$

und

$$G'/\sim = (G \setminus H)/\sim \dot{\cup} (H \setminus \{\{a, b\}\})/\sim \quad (3.19)$$

und darüber hinaus auch die entsprechenden Gleichungen für die Mächtigkeiten; es handelt sich ja um *disjunkte* Zerlegungen. Wir gehen also in (3.18) und (3.19) jeweils zu den Mächtigkeiten über und betrachten deren Differenz; es ist

$$\begin{aligned} & \left| G'/\sim \right| - \left| G/\sim \right| \\ &= \left(\left| (G \setminus H)/\sim \right| + \left| (H \setminus \{\{a, b\}\})/\sim \right| \right) - \left(\left| (G \setminus H)/\sim \right| + \left| H/\sim \right| \right) \\ &= \left| (H \setminus \{\{a, b\}\})/\sim \right| - \left| H/\sim \right| = \left| (H \setminus \{\{a, b\}\})/\sim \right| - 1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Das letzte Gleichheitszeichen ist durch unsere frühere Einsicht am Anfang dieses Beweises gerechtfertigt, dass H zusammenhängend ist. Die Gleichungskette (3.20) entspricht schon beinahe unserer Behauptung – was noch fehlt, ist die Gleichheit

$$(H \setminus \{\{a, b\}\})/\sim = \{K'(\{a\}), K'(\{b\})\}.$$

Sie ergibt sich aber direkt aus der Zeile

$$H \setminus \{\{a, b\}\} = K'(\{a\}) \cup K'(\{b\}),$$

die wiederum aus der Definition von H folgt.

Damit ist dieser lange Beweis abgeschlossen. □

Bevor wir den Hilfssatz ausnutzen, um eines unserer zentralen Ergebnisse zu formulieren, führen wir ein feinsinniges Instrument zur Erforschung von Graphen ein: die *Kreiszahl*. Ihre Definition ist einfach, und doch enthält sie manch Überraschendes, wie wir später noch sehen werden.

Definition 3.36. Sei G ein Graph. Die *Kreiszahl* von G , kurz: $\delta(G)$, ist definiert durch

$$\delta(G) := |K| - |E| + \left| G/\sim \right|.$$

Der folgende Satz klärt, wie sich die Kreiszahl eines Graphen ändert, wenn eines seiner Elemente entfernt wird – wobei hier nur Kanten und isolierte Ecken für die Entfernung in Frage kommen, um die Grapheneigenschaft nicht zu gefährden. Der Satz ist von derart zentraler Bedeutung für uns, dass wir ihn als „Hauptsatz“ bezeichnen und ihn auch später unter dieser Bezeichnung verwenden werden.

Satz 3.37 (Hauptsatz). *Sei G ein Graph, und sei x eine Kante oder eine isolierte Ecke von G . Ferner sei $G' := G \setminus \{x\}$. Dann gilt:*

- a) *Wenn x eine Brücke oder eine isolierte Ecke ist, so gilt $\delta(G') = \delta(G)$.*
- b) *Wenn x eine Nicht-Brücke ist, so gilt $\delta(G') = \delta(G) - 1$.*

Beweis. Zur Abkürzung vereinbaren wir neben den bekannten Schreibweisen E und K für die Ecken- und Kantenmengen von G die Notationen E' und K' für die entsprechenden Teilmengen von G' sowie δ und δ' für die jeweiligen Kreiszahlen der beiden Graphen. Die folgende Tabelle zeigt, wie sich die Anzahlen der Kanten, Ecken und Zusammenhangskomponenten in G bzw. G' zueinander verhalten; die Aussagen bezüglich der Komponenten folgt im ersten Fall aus Hilfssatz 3.25 (oder durch direkte Einsicht), in den anderen beiden Fällen aus Hilfssatz 3.35. In jedem Fall zeigt sich, dass für die Differenz $\delta - \delta'$ die behauptete Gleichung gilt:

	$ K' $	$ E' $	$\left G'/\sim \right $	$\delta - \delta'$
Fall 1: x ist isolierte Ecke	$ K $	$ E - 1$	$\left G/\sim \right - 1$	0
Fall 2: x ist Brücke	$ K - 1$	$ E $	$\left G/\sim \right + 1$	0
Fall 3: x ist Nicht-Brücke	$ K - 1$	$ E $	$\left G/\sim \right $	1

□

Wir würden schon gern wissen, was die Kreiszahl eigentlich zählt. Dem Namen nach zählt sie Kreise, doch wird sich später zeigen, dass dies im nächstliegenden Sinne nicht ganz stimmt. Außerdem haben wir Kreise noch gar nicht definiert. Fürs Erste bleiben wir daher auf die Definition der Kreiszahl angewiesen und bemerken, dass die Kreiszahl durch viele Kanten und viele Komponenten des Graphen tendenziell erhöht wird. Somit scheint die etwas vage Interpretation der Kreiszahl als Komplexitätsmessgerät für Graphen gerechtfertigt: Je aufwendiger die Struktur, desto größer die Kreiszahl.

Wir wenden uns nun wieder den technischen Details zu.

Satz 3.38. *Seien G ein Graph und H ein Teilgraph von G . Dann gilt:*

$$\delta(H) \leq \delta(G). \tag{3.21}$$

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis über die Mächtigkeit von G . Im Fall $|G| = 0$ ist G der leere Graph, der nur einen einzigen Teilgraphen besitzt – sich selbst; (3.21) gilt hier also trivialerweise.

Sei n eine beliebige Zahl aus \mathbb{N}_0 , und für alle Graphen G mit n Elementen gelte, dass für alle Teilgraphen H von G die Ungleichung (3.21) wahr sei. Wir müssen nun zeigen, dass dies auch für $n + 1$ zutrifft. Sei G also ein Graph mit $n + 1$ Elementen, und sei H ein Teilgraph von G . Da (3.21) im Falle $H = G$ trivialerweise erfüllt ist, nehmen wir nun $H \neq G$ an. Dann gibt es nach Bemerkung 3.10 in $G \setminus H$ ein Element x , das entweder eine Kante oder eine isolierte Ecke von G ist. Wir betrachten den Graphen $G' := G \setminus \{x\}$. Nach Hilfssatz 3.35 gilt dann

$$\delta(G') \leq \delta(G),$$

und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\delta(H) \leq \delta(G'),$$

da H ein Teilgraph von G' ist und G' nur n Elemente enthält. Die letzten beiden Ungleichungen ergeben zusammen (3.21). □

Da für den leeren Graphen \emptyset offenbar $\delta(\emptyset) = 0$ gilt und der leere Graph ein Teilgraph eines jeden Graphen ist, ergibt sich aus Satz 3.38 insbesondere folgende Feststellung:

Satz 3.39. *Für alle Graphen G gilt: $\delta(G) \geq 0$.*

Satz 3.40. Für alle disjunkten Graphen G, H ist $\delta(G \cup H) = \delta(G) + \delta(H)$.

Beweis. Seien G, H disjunkte Graphen. Dass die Eckenmenge von $G \cup H$ die disjunkte Vereinigung der Eckenmengen von G und H ist, ist trivial. Dasselbe gilt für die Kantenmengen. Mit Hilfssatz 3.25 gilt Entsprechendes sogar für die Mengen der Zusammenhangskomponenten. Daraus ergibt sich mit der Definition der Kreiszahl direkt die Behauptung. \square

Wälder und Bäume

Definition 3.41. Ein *Wald* ist ein Graph, in dem alle Kanten Brücken sind. Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Wald.

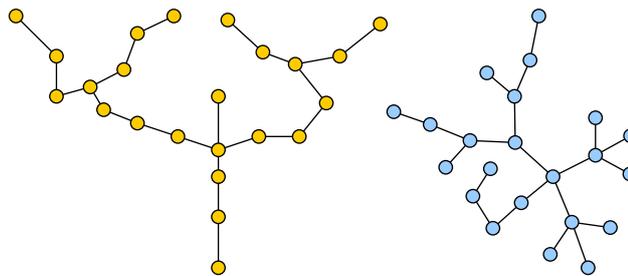


BILD 3.7: Ein nicht-zusammenhängender Wald: Die beiden Zusammenhangskomponenten sind Bäume, von denen einer sogar etwa so aussieht, wie man sich einen Baum vorstellt.

Die folgende Aussage ist eine Umformulierung von Bemerkung 3.34:

Hilfssatz 3.42. Ein Teilgraph eines Waldes ist ein Wald.

Satz 3.43 (Erste Charakterisierung von Wäldern). Sei G ein Graph. Dann gilt:

$$\delta(G) = 0 \iff G \text{ ist ein Wald.}$$

Beweis. Es gelte: $\delta(G) = 0$. Sei k eine Kante von G . Wäre k eine Nicht-Brücke von G , so folgte mit dem Hauptsatz die Gleichung $\delta(G \setminus \{k\}) = -1$. Das ist aber nach Satz 3.39 unmöglich.

Die andere Implikation wird durch Induktion über $|G|$ gezeigt. Im Falle $|G| = 0$ ist G der leere Graph, und die Kreiszahl des leeren Graphen ist gemäß der

Definition gleich Null. Sei nun n eine Zahl aus \mathbb{N}_0 , und für alle Wälder G mit $|G| = n$ sei die fragliche Implikation wahr. Sei nun G ein Wald mit $|G| = n + 1$. Wähle ein Element x aus G , das eine Kante oder eine isolierte Ecke ist (Bemerkung 3.5). Da G ein Wald ist, ist x sogar eine Brücke oder eine isolierte Ecke. Der Restgraph $G' := G \setminus \{x\}$ ist nach Hilfssatz 3.42 ebenfalls ein Wald – deshalb gilt für ihn gemäß der Induktionsvoraussetzung: $\delta(G') = 0$. Nach dem Hauptsatz gilt aber auch: $\delta(G') = \delta(G)$. Somit folgt: $\delta(G) = 0$. \square

Da jeder Baum ein Wald mit genau einer Zusammenhangskomponente ist, folgt aus Satz 3.43 und der Definition der Kreiszahl:

Satz 3.44 (Baumformel). *Sei G ein Baum. Dann gilt: $|E| = |K| + 1$.*

Satz 3.45. *Sei G ein Baum, der kein Punkt ist. Dann besitzt G mindestens zwei Endecken.*

Beweis. Wir bezeichnen die Menge aller Endecken von G mit E_1 . Alle anderen Ecken haben in G mindestens den Grad 2, denn G ist kein Punkt und zusammenhängend. Wir benutzen die Baumformel sowie die Bilanzgleichung; es gilt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (|E| - 1) &= 2 \cdot |K| = \sum_{e \in E} \text{grad}(e) = \sum_{e \in E_1} \text{grad}(e) + \sum_{e \in E \setminus E_1} \text{grad}(e) \\ &\geq |E_1| + 2 \cdot |E \setminus E_1| = |E_1| + 2 \cdot |E| - 2 \cdot |E_1| \\ &= 2 \cdot |E| - |E_1|. \end{aligned}$$

Das Umstellen dieser Ungleichungskette nach $|E_1|$ liefert die Behauptung. \square

Satz 3.46. *Jeder Wald mit mindestens einer Kante hat mindestens zwei Endecken.*

Beweis. Sei G ein Wald mit mindestens einer Kante k . Die Zusammenhangskomponente von G , in der k liegt, ist dann ein Baum, der kein Punkt ist. Die Anwendung von Satz 3.45 führt daher direkt auf die gewünschte Aussage. \square

Definition 3.47. Seien G ein zusammenhängender Graph und H ein Teilgraph von G . H heißt ein *Gerüst von G* , wenn H ein Baum ist und dieselbe Eckenmenge wie G selbst hat.

Bemerkung 3.48. *Jeder zusammenhängende Graph besitzt ein Gerüst. Allerdings ist dieses im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.*

Beweis. Der Beweis ist einfach, etwa durch Induktion über die Anzahl der Nicht-Brücken des Graphen; wir deuten ihn nur an. Durch sukzessives Wegnehmen von Nicht-Brücken wird die Kreiszahl gemäß dem Hauptsatz abgesenkt, bis sie Null beträgt; dann ist der Restgraph immer noch zusammenhängend und nach Satz 3.43 ein Wald – insgesamt also ein Baum. Die Nicht-Eindeutigkeitsaussage wird durch Bild 3.8 illustriert. \square

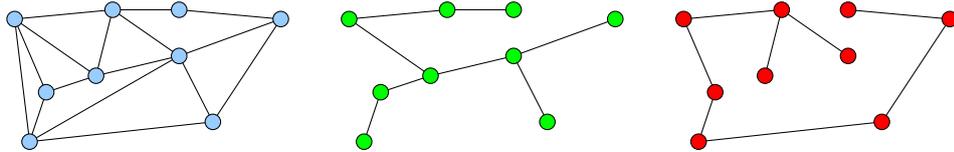


BILD 3.8: Ein Graph (links) mit zwei unterschiedlichen Gerüsten (Mitte und rechts)

Der folgende Satz reflektiert die Methode, einen zusammenhängenden Graphen zu einem Baum zu schrumpfen: durch Wegnehmen von so vielen Nicht-Brücken, wie es die Kreiszahl angibt. Da die Brücken-Eigenschaft einer Kante sich innerhalb eines Graphen auf Teilgraphen vererbt, ist es klar, dass die Brücken des Ausgangsgraphen bei diesem Schrumpfungsprozess nie entfernt werden; in der Tat sind die Brücken eines zusammenhängenden Graphen genau diejenigen Kanten, die in *jedem* seiner Gerüste vorhanden sind.

Satz 3.49. *Seien G ein zusammenhängender Graph und G' ein Gerüst von G . Dann gilt:*

$$|G| - |G'| = \delta(G).$$

Daraus folgt wiederum wegen $E(G) = E(G')$:

$$|K(G)| - |K(G')| = \delta(G).$$

Beweis. Wir bezeichnen die Ecken- bzw. Kantenmengen von G' mit E' bzw. K' . Es gilt dann: $|E'| = |E|$. Außerdem haben G und G' jeweils genau eine Zusammenhangskomponente. Somit gilt unter Ausnutzung der Baumformel für G' :

$$\begin{aligned} |G| - |G'| &= |K| + |E| - |K'| - |E'| = |K| - |K'| = |K| - (|E'| - 1) \\ &= |K| - |E'| + 1 = |K| - |E| + 1 = |K| - |E| + |G/\sim| = \delta(G). \end{aligned}$$

\square

Kreise

Definition 3.50. Ein zusammenhängender und 2-regulärer Graph wird als *Kreis* bezeichnet. Unter der *Länge* eines Kreises verstehen wir die Anzahl seiner Kanten. Ein Kreis der Länge 3 wird auch als *Dreieck* bezeichnet.

Satz 3.51. Sei C ein Kreis. Dann gilt:

- a) $|K| = |E|$.
- b) $\delta(C) = 1$.
- c) Jede Kante von C ist eine Nicht-Brücke in C .
- d) Entfernen wir eine Kante k aus C , so ist der Restgraph $C \setminus \{k\}$ ein Baum.

Beweis. Teil a) ist identisch mit dem Spezialfall des 2-regulären Graphen in Satz 3.8 (Bilanzgleichung für reguläre Graphen).

Teil b) ergibt sich aus der Definition der Kreiszahl, Teil a) und aus dem Zusammenhang von C (genau eine Zusammenhangskomponente!).

Für den Beweis von Teil c) entfernen wir eine Kante k aus C . Im Restgraphen $C \setminus \{k\}$ gibt es dann genau zwei Ecken ungeraden Grades (nämlich die Ecken von k , die jetzt Grad 1 haben), während alle anderen Ecken sowohl in C als auch in $C \setminus \{k\}$ geraden Grades sind. Nach Satz 3.23 sind diese beiden Ecken dann in $C \setminus \{k\}$ verbindbar; und das bedeutet, dass k keine Brücke in C ist.

Zu Teil d): Aus b) und c) folgt zusammen mit dem Hauptsatz: $\delta(C \setminus \{k\}) = 0$, also ist $C \setminus \{k\}$ zumindest ein Wald; die Anzahl der Ecken dieses Waldes ist $|E|$, und die Anzahl seiner Kanten ist $|K| - 1$. Wegen der Gleichung $|K| = |E|$ aus Teil a) folgt mit der Definition der Kreiszahl:

$$0 = \delta(C \setminus \{k\}) = (|K| - 1) - |K| + |C \setminus \{k\} / \sim|,$$

und daraus folgt $|C \setminus \{k\} / \sim| = 1$, was mit Satz 3.26 wiederum den Zusammenhang von $C \setminus \{k\}$ garantiert. Als zusammenhängender Wald ist $C \setminus \{k\}$ ein Baum. □

Satz 3.52 (Charakterisierung von Kreisen). Sei G ein Graph. Dann ist G genau dann ein Kreis, wenn jeder echte Teilgraph von G ein Wald ist, aber nicht G selbst.

Beweis. Sei zunächst G ein Kreis. Nach Satz 3.51 b) gilt dann: $\delta(G) = 1$, und nach Satz 3.43 folgt daraus, dass G selbst kein Wald ist. Sei T ein echter Teilgraph von G . Falls T der leere Graph ist, so ist T trivialerweise ein Wald. Ansonsten finden wir mit Bemerkung 3.10 – weil T ein *echter* Teilgraph ist und G als Kreis keine isolierten Ecken enthält – in $G \setminus T$ eine Kante k , die nach Satz 3.51 c) eine Nicht-Brücke von G ist. Nach dem Hauptsatz und wegen $\delta(G) = 1$ (Satz 3.51 b) ist also

$$\delta(G \setminus \{k\}) = \delta(G) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Wegen $T \subseteq G \setminus \{k\}$ folgt daraus zusammen mit Satz 3.38: $\delta(T) = 0$, und dies bedeutet nach Satz 3.43, dass T ein Wald ist.

Es gelte nun: G ist kein Wald, aber jeder echte Teilgraph von G ist ein Wald. Wir werden zeigen: $\delta(G) = 1$, was zusammen mit Satz 3.51 b) für den Nachweis der Kreiseigenschaft von G ausreicht. Weil G kein Wald ist, besitzt G eine Nicht-Brücke k . Der Graph $T := G \setminus \{k\}$ ist ein echter Teilgraph von G , der nach Voraussetzung ein Wald ist, für den also $\delta(T) = 0$ gilt. Mit dem Hauptsatz folgt endlich:

$$0 = \delta(T) = \delta(G) - 1,$$

also ist $\delta(G) = 1$. □

Aus Satz 3.52 folgen auch diese kleine Einsichten:

Bemerkung 3.53.

- a) *Ein echter Teilgraph eines Kreises ist kein Kreis.*
- b) *Sind C und D zwei verschiedene Kreise, so liegt (mindestens) eine Kante von C außerhalb von D und ebenso (mindestens) eine Kante von D außerhalb von C .*

Beweis. Teil a) ist eine direkte Folgerung aus Satz 3.52. Bei Teil b) beschränken wir uns aus Symmetriegründen auf die erste Hälfte der Konklusion und führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, es gäbe zwei verschiedene Kreise C und D , für deren Kantenmengen die Beziehung $K(C) \subseteq K(D)$ gilt. Weil jede Ecke von C mit einer Kante von C inzidiert (Eckengrad 2 im Kreis!), folgt dann mit der Grapheneigenschaft von D , dass jede solche Ecke auch in D liegt, d.h. es gilt dann $E(C) \subseteq E(D)$ und damit insgesamt $C \subseteq D$, im Widerspruch zu Teil a). □

Satz 3.54 (Zweite Charakterisierung von Wäldern). *Ein Graph ist genau dann ein Wald, wenn er keinen Kreis enthält.*

Beweis. Sei G ein Wald. Dann gilt: $\delta(G) = 0$, und nach Satz 3.38 kann es keinen Teilgraphen von G geben, der ein Kreis ist, denn dessen Kreiszahl wäre gleich 1 und damit größer als die Kreiszahl von G selbst.

Die andere Implikationsrichtung beweisen wir durch Kontraposition. Sei also G ein Graph, der kein Wald ist. Wir müssen zeigen, dass G einen Kreis enthält. Wir betrachten die Menge aller Teilgraphen von G , die kein Wald sind; diese Menge ist nicht-leer, weil G selbst in ihr enthalten ist, und deshalb gibt es einen kleinsten Teilgraphen C in dieser Menge (in Bezug auf die Mächtigkeit). Mit der Rückwärtsrichtung von Satz 3.52 folgt sofort, dass C ein Kreis ist, denn C selbst ist kein Wald, aber jeder echte Teilgraph von C ist ein Wald (wegen der Minimalität von C in der oben beschriebenen Menge). \square

Satz 3.55 (Charakterisierung von Nicht-Brücken). *Eine Kante ist genau dann eine Nicht-Brücke, wenn sie in einem Kreis liegt.*

Beweis. Da alle Kreiskanten nach Satz 3.51 c) Nicht-Brücken sind, bleibt zu zeigen, dass es für jede Nicht-Brücke einen Kreis gibt, in dem sie liegt.

Sei also G ein Graph, und sei k eine Nicht-Brücke von G . Sei H ein kleinster Teilgraph von G , der k als Nicht-Brücke enthält. Zunächst einmal ist klar, dass H zusammenhängend ist, denn andernfalls könnte man jede Zusammenhangskomponente von H fortlassen, in der k nicht liegt, und k wäre in diesem kleineren Restgraphen noch immer eine Nicht-Brücke, im Widerspruch zur Minimalität von H . Wir werden darüber hinaus zeigen, dass H ein Kreis ist, und auf diese Weise unser Ziel erreichen. Für diesen Nachweis verwenden wir Satz 3.52; da H offensichtlich kein Wald ist – denn H enthält die Nicht-Brücke k –, fehlt nur ein Beweis dafür, dass jeder echte Teilgraph von H ein Wald ist; mit Blick auf Bemerkung 3.19 und Satz 3.42 reicht es aber zu zeigen, dass für jede Kante l von H der Restgraph $H \setminus \{l\}$ ein Wald ist.

Wir zeigen dies zunächst für einen besonderen Teilgraphen, nämlich $H \setminus \{k\}$. Wir werden dafür zeigen, dass jede Kante dieses Graphen eine Nicht-Brücke ist. Sei also l eine Kante von $H \setminus \{k\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \delta(H \setminus \{k, l\}) &= \delta((H \setminus \{l\}) \setminus \{k\}) = \delta(H \setminus \{l\}) \geq \delta(H) - 1 \\ &= \delta(H \setminus \{k\}) \geq \delta((H \setminus \{k\}) \setminus \{l\}) = \delta(H \setminus \{k, l\}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dabei gelten das zweite und das dritte Gleichheitszeichen gemäß dem Hauptsatz, denn k ist eine Brücke in $H \setminus \{l\}$ (wegen der Minimalität von H), und k ist eine Nicht-Brücke in H ; und auch die beiden Ungleichheitszeichen folgen aus dem Hauptsatz.

Nun ist (3.22) formal eine Ungleichungskette; weil aber überraschenderweise ihr erstes Glied mit dem letzten übereinstimmt, ist es tatsächlich auch eine Gleichungskette! Insbesondere gilt also

$$\delta(H \setminus \{k\}) = \delta((H \setminus \{k\}) \setminus \{l\}),$$

und das bedeutet, dass l eine Nicht-Brücke von $H \setminus \{k\}$ ist. Also ist $H \setminus \{k\}$ tatsächlich ein Wald.

Weil $H \setminus \{k\}$ ein Wald ist, gilt: $\delta(H \setminus \{k\}) = 0$, und ein Blick zurück auf (3.22) zeigt, dass somit jeder der Terme in dieser *Gleichungskette* gleich Null ist. Insbesondere gilt also die Gleichung

$$\delta(H \setminus \{l\}) = 0,$$

und zwar für *jede* Kante l von H , die von k verschieden ist. Damit sind auch alle diese Graphen $H \setminus \{l\}$ Wälder (und nicht nur der spezielle Graph $H \setminus \{k\}$). Also sind alle echten Teilgraphen von H Wälder, und insgesamt ist damit endlich bewiesen, dass H ein Kreis ist. \square

Satz 3.56. *Sei G ein Graph. Dann gilt:*

$$\delta(G) \geq 2 \iff G \text{ enthält mindestens zwei verschiedene Kreise.}$$

Beweis. Es gelte zunächst: $\delta(G) \geq 2$. Dann ist G kein Wald. Wähle eine Nicht-Brücke k von G und einen Kreis C , der k enthält. Weil k eine Nicht-Brücke von G ist, folgt mit dem Hauptsatz: $\delta(G \setminus \{k\}) \geq 1$. Also ist auch $G \setminus \{k\}$ kein Wald; wähle erneut eine Nicht-Brücke l aus $G \setminus \{k\}$ und einen Kreis D aus $G \setminus \{k\}$, der l enthält. Nun sind C und D zwei Kreise in G , und sie sind verschieden, weil C die Kante k enthält, D jedoch nicht.

Es gelte nun: G enthält zwei verschiedene Kreise C und D . Mit Hinweis auf Bemerkung 3.53 b) wählen wir zwei Kanten k und l mit: $k \in C \setminus D$ und $l \in D \setminus C$. Dann ist l eine Nicht-Brücke in G – denn es ist eine Kreiskante –, und k ist eine Nicht-Brücke von $G \setminus \{l\}$ – denn k ist eine Kante des Kreises C , der in $G \setminus \{l\}$ liegt. Somit gilt unter Verwendung des Hauptsatzes:

$$\delta(G) = \delta(G \setminus \{l\}) + 1 = \delta((G \setminus \{l\}) \setminus \{k\}) + 1 + 1 \geq 0 + 1 + 1 = 2.$$

\square

Satz 3.57. *Sei G ein Graph. Dann gilt:*

$$\delta(G) = 1 \iff G \text{ enthält genau einen Kreis.}$$

Beweis. Es gelte: $\delta(G) = 1$. Dann ist G kein Wald (Satz 3.43) und enthält deshalb einen Kreis (Satz 3.54). Wegen Satz 3.56 enthält G nicht zwei verschiedene Kreise. Also enthält G genau einen Kreis.

Es gelte nun umgekehrt: G enthält genau einen Kreis. Wegen Satz 3.56 gilt einerseits: $\delta(G) \leq 1$. Weil G andererseits kein Wald ist (Satz 3.54), folgt mit Satz 3.43: $\delta(G) \neq 0$. Also ist $\delta(G) = 1$. □

Die letzten beiden Sätze tragen ein wenig zur Erhellung der Kreiszahl bei; die Kreiszahl hat also tatsächlich etwas mit Kreisen zu tun. Wirklich zuverlässig zählt sie aber anscheinend nur auf den beiden unteren Stufen: Die Kreiszahl 0 bedeutet *keine Kreise*, die Kreiszahl 1 bedeutet *genau ein Kreis*. Schon die Kreiszahl 2 produziert nur eine Abschätzung. Schauen wir zurück auf den linken Graphen in Bild 3.8, so erkennen wir nach einigem Zählen, dass seine Kreiszahl 8 beträgt. Allerdings finden wir in jenem Graphen weit mehr als nur acht Kreise. Immerhin: Beschränken wir uns auf solche Kreise, die anschaulich gesprochen die unteilbaren Teilgebiete des Graphen enthalten (die sogenannten *Gebiete*), so zählen wir dort tatsächlich acht derartige Kreise. Diese Interpretation gilt aber bestenfalls für planare Graphen, solche Graphen also, die sich ohne Kantenüberschneidungen darstellen lassen und bei denen wir Gebiete überhaupt nur erkennen können. Tatsächlich stellt sich ganz allgemein heraus, dass die Kreiszahl eigentlich nicht Kreise, sondern Zykel zählt, die wir im Rahmen der Eulertouren-Theorie erst noch kennenlernen werden (Definition 3.74). Wir zitieren abschließend den entsprechenden Satz:

Satz 3.58 (Saunders Mac Lane). *Jeder Graph G besitzt genau $2^{\delta(G)}$ Zyklen. Dabei wird die leere Menge (der „Nullzykel“) mitgezählt.*

Wege

Definition 3.59. Sei G ein Graph. G heißt ein *Weg*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- G ist zusammenhängend, aber kein Kreis.
- Alle Ecken von G haben höchstens den Grad 2.

Die Bedingung, dass G kein Kreis ist, könnte äquivalent ersetzt werden durch die Forderung, dass mindestens eine Ecke von G einen kleineren Grad als 2 hat. Unter der *Länge* eines Weges verstehen wir die Anzahl seiner Kanten (und nicht etwa die seiner Ecken).

Satz 3.60. *Sei G ein Graph. Dann gilt: G ist genau dann ein Weg, wenn G ein Punkt oder ein Baum mit genau zwei Endecken ist.*

Beweis. Sei G ein Weg, der kein Punkt ist. Gäbe es in G einen Kreis C , so hätten die Ecken von C in C alle genau den Grad 2 (Kreis-Definition) und in G alle mindestens den Grad 2 (denn alle Kanten von C sind auch Kanten von G), und dies ergäbe einen Widerspruch zur Forderung, dass G als Weg eine Ecke mit einem kleineren Grad als 2 enthalten muss. Also gibt es in G keinen Kreis, womit gezeigt ist, dass G ein Wald ist (Satz 3.54). In Kombination mit dem Zusammenhang von G (nach der Weg-Definition) ist G damit als Baum identifiziert. Es geht nun um die Endecken von G . Als zusammenhängender Graph, der kein Punkt ist, besitzt G keine isolierten Ecken, es gilt also: $E = E_1 \dot{\cup} E_2$ (Ecken höheren Grades gibt es nach der Weg-Definition nicht), und mit der Bilanzgleichung bzw. der Baumformel folgt:

$$2(|E_1| + |E_2| - 1) = 2(|E| - 1) = 2|K| = \sum_{e \in E_1 \dot{\cup} E_2} \text{grad}(e) = |E_1| + 2|E_2|.$$

Beim Vereinfachen dieser Gleichung fällt $|E_2|$ heraus, und wir erhalten die gewünschte Beziehung $|E_1| = 2$.

Für den Beweis der umgekehrten Implikation müssen wir zwei Fälle berücksichtigen: Wenn G ein Punkt ist, so ist G offenbar ein Weg. Wir betrachten daher nun den Hauptfall, dass G kein Punkt, aber ein Baum mit $|E_1| = 2$ ist. Da G als Baum zusammenhängend und kein Kreis ist, bleibt nur die Bedingung zu überprüfen, dass alle Ecken vom Grade 2 oder kleiner sind. Erneut gibt es keine isolierten Punkte, und wir zerlegen die Eckenmenge von G gemäß $E = E_1 \dot{\cup} E_2 \dot{\cup} E_{\geq 3}$, wobei das letzte Zeichen in der Vereinigung für die Menge aller Ecken mit einem Grad von mindestens 3 steht. Die entsprechende Gleichung für die Mächtigkeiten verbündet sich mit Baumformel und Bilanzgleichung, und es ergibt sich:

$$2(|E_1| + |E_2| + |E_{\geq 3}| - 1) = 2(|E| - 1) = 2|K| \geq |E_1| + 2|E_2| + 3|E_{\geq 3}|.$$

Wir ersetzen $|E_1|$ gleichwertig durch 2, vereinfachen die Ungleichung und erhalten dann $0 \geq |E_{\geq 3}|$. Es gibt also keine Ecken mit einem Grad von 3 oder höher. Damit ist der Beweis beendet. \square

Definition 3.61. Seien G ein Graph und $x, y \in E(G)$. Dann heißt G ein Weg zwischen x und y , wenn gilt:

$$G = \{x\} = \{y\} \text{ oder} \\ (x \neq y \text{ und } G \text{ ist ein Baum mit } x \text{ und } y \text{ als einzigen Endecken}).$$

Satz 3.60 zeigt, dass die Definitionen 3.59 und 3.61 miteinander harmonieren: Ein Graph G ist genau dann ein Weg, wenn es zwei Ecken x und y aus G gibt derart, dass G ein Weg zwischen x und y ist. Andernfalls würden die beiden Definitionen leicht Missverständnisse heraufbeschwören.

Der folgende Satz sorgt für die endgültige Lokalisierung der ursprünglich globalen Idee von Zusammenhang. Der Schritt vom Zusammenhang zur Verbindbarkeit in Satz 3.26 war eine erste Etappe, jetzt folgt die zweite Etappe von der Verbindbarkeit zu den Wegen zwischen Ecken:

Satz 3.62. Seien G ein Graph und $x, y \in E(G)$. Dann sind x und y genau dann verbindbar in G , wenn es in G einen Weg zwischen x und y gibt.

Beweis. Der Fall $x = y$ ist trivial. Für den Rest dieses Beweises setzen wir daher $x \neq y$ voraus.

Seien x und y verbindbar in G . Falls die Kante $x \cup y$ in G enthalten ist, so ist

$$\{x, y, x \cup y\}$$

der gesuchte Weg zwischen x und y . Andernfalls fügen wir die fehlende Kante künstlich hinzu und betrachten also den Graphen $G' := G \cup \{x \cup y\}$. Wegen der Verbindbarkeit von x und y in G ist $x \cup y$ eine Nicht-Brücke in G' . Also gilt:

$$\delta(G') = \delta(G) + 1 \geq 1,$$

und damit enthält G' einen Kreis C (Satz 3.57). Dann ist nach Satz 3.60 der Graph $C \setminus \{x \cup y\}$ ein Weg in G zwischen x und y – die Gültigkeit der Gradbedingungen ist klar, und die Baumeigenschaft wird von Satz 3.51 d) garantiert.

Die andere Richtung des Beweises ist leicht; denn jeder Weg in G zwischen x und y ist ein zusammenhängender Teilgraph von G , der x und y enthält, womit die Verbindbarkeit von x und y erwiesen ist. □

Satz 3.63. *Sei G ein Baum. Dann gibt es für je zwei Ecken x, y von G genau einen Weg in G zwischen x und y .*

Beweis. Seien x und y zwei Ecken von G . Die Existenz eines Weges in G zwischen x und y ist leicht zu zeigen, denn G ist als Baum zusammenhängend, so dass insbesondere x und y verbindbar in G sind. Somit garantiert Satz 3.62 das Vorhandensein eines solchen Weges.

Bezüglich der *Eindeutigkeit* betrachten wir zunächst zwei Sonderfälle, dann den Hauptfall:

Falls $x = y$ gilt, so ist nach Definition 3.59 der Punkt $\{x\}$ der einzige Weg zwischen x und y .

In dem Fall, dass x und y in G benachbart sind, zeigen wir, dass jeder Weg zwischen x und y mit $J := \{x, y, x \cup y\}$ identisch sein muss. Sei nämlich H ein solcher Weg. Dann ist H ein Baum mit den Ecken x und y , und J ist ein *isolierter* Teilgraph von H – denn jede Kante k aus $H \setminus J$ inzidiert nur mit Ecken aus $H \setminus J$; schließlich ist $x \cup y$ die einzige Kante, die mit den Ecken x und y aus J inzidiert. Weil H als Baum zusammenhängend ist, besitzt H nur *einen* nicht-leeren isolierten Teilgraphen: sich selbst. Also gilt: $H = J$.

Der Hauptfall ist durch $x \neq y$ und $(x \cup y) \notin G$ charakterisiert. Wir führen hier einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gäbe zwei *verschiedene* Wege H und J in G zwischen x und y . Wir fügen dann beiden Wegen die fehlende Kante $x \cup y$ hinzu und bemerken, dass auch $H \cup \{x \cup y\}$ und $J \cup \{x \cup y\}$ verschieden sind; und zwar sind dies zwei verschiedene *Kreise* in $G \cup \{x \cup y\}$. Daraus folgt mit Satz 3.56:

$$\delta(G \cup \{x \cup y\}) \geq 2.$$

Mit dem Hauptsatz folgt wiederum, dass $\delta(G) \geq 1$ ist (Wegnahme einer Kante), und dies widerspricht der Tatsache, dass G ein Baum ist! \square

Definition 3.64. In einem zusammenhängenden Graphen verstehen wir unter dem *Abstand* zweier Ecken die Länge eines kürzesten Weges zwischen diesen Ecken. In einem Baum ist dies die Länge des nach Satz 3.63 eindeutig bestimmten Weges zwischen diesen Ecken. Den Abstand zweier Ecken x, y bezeichnen wir mit $d(x, y)$.

Offenbar ist die durch Definition 3.64 etablierte Funktion d eine *Metrik* auf der Menge der Ecken, d.h. es gelten die Definitheit: $d(x, y) = 0 \iff x = y$, die Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ sowie die Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Bipartite Graphen und Färbungen

Dieser Abschnitt besitzt ausnahmsweise lediglich referierenden Charakter; die wichtigsten Sätze der Färbungstheorie werden ohne Beweise erwähnt, um dem Leser einen rudimentären Überblick über dieses Gebiet zu verschaffen.

Definition 3.65. Sei G ein Graph. G heißt *bipartit*, wenn es eine disjunkte Aufteilung seiner Eckenmenge $E = A \dot{\cup} B$ gibt mit der Eigenschaft: Jede Kante von G inzidiert mit einer Ecke aus A und einer Ecke aus B . Wir nennen dann (A, B) eine *Bipartition* von G .

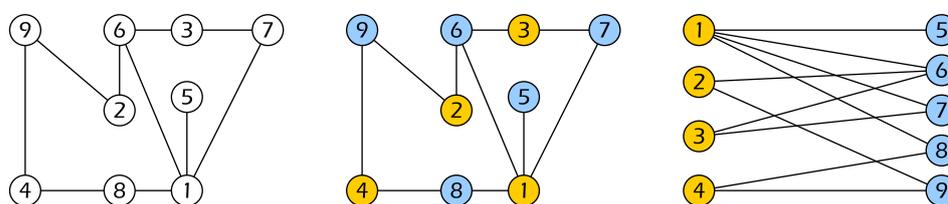


BILD 3.9: Dreimal derselbe Graph: Links sieht man ihm die Bipartitheit nicht sofort an; doch es gibt eine Bipartition der Eckenmenge (Mitte); die Farben kennzeichnen die Zugehörigkeit zu den jeweiligen Teilmengen. Die Darstellung rechts zeigt das Phänomen besonders deutlich: Keine Kante verläuft innerhalb der gelben Eckenmenge oder innerhalb der blauen Eckenmenge.

Dass die Abwesenheit von Kreisen ungerader Länge notwendig für Bipartitheit ist, liegt auf der Hand; tatsächlich ist sie sogar hinreichend:

Satz 3.66. Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Bipartite Graphen werden häufig zur Modellierung von Paarungs-Relationen zwischen disjunkten Mengen A und B herangezogen; so kann etwa A für eine Gruppe von Schulabsolventen und B für eine Menge von Berufen stehen, und eine Kante zwischen einem Element $a \in A$ und einem Element $b \in B$ könnte bedeuten, dass Schüler a sich für Beruf b interessiert.

Diese Modellierungen führen oft zu Fragen nach sogenannten Eckenüberdeckungen und Paarungen: Eine *Eckenüberdeckung* eines (beliebigen) Graphen G ist eine Teilmenge E' von $E(G)$ derart, dass jede Kante von G mit einer Ecke aus E' inzidiert. Eine *Paarung* hingegen ist eine Teilmenge K' von $K(G)$ derart, dass keine Ecke von G mit mehr als einer Kante aus K' inzidiert. Meistens

interessieren wir uns für möglichst kleine Eckenüberdeckungen und möglichst große Paarungen. Eine leichte Überlegung zeigt:

Bemerkung 3.67. *In jedem Graphen enthält eine beliebige Paarung höchstens so viele Kanten wie eine beliebige Eckenüberdeckung Ecken enthält.*

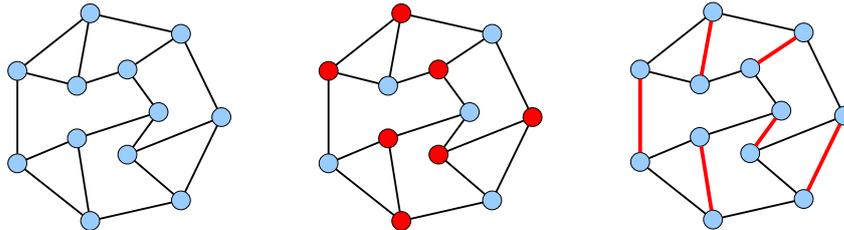


BILD 3.10: *Ein nicht-bipartiter Graph (links), eine Eckenüberdeckung dieses Graphen (rote Ecken, Mitte) sowie eine Paarung (rote Kanten, rechts)*

Insofern ist Bild 3.10 typisch, denn dort enthält die Paarung sechs Kanten, die Eckenüberdeckung jedoch sieben Ecken. Beide Zahlen sind in diesem Beispiel nicht zu verbessern. Es ist im Allgemeinen schwierig zu klären, ob eine betrachtete Paarung so viele Kanten wie möglich enthält bzw. ob eine betrachtete Eckenüberdeckung so wenige Ecken wie möglich enthält. Hat man jedoch in einem Graphen eine Paarung und eine Eckenüberdeckung gleicher Mächtigkeit gefunden, so folgt aus Bemerkung 3.67, dass die Paarung größtmöglich und die Eckenüberdeckung kleinstmöglich ist. Im Allgemeinen dürfen wir nur nicht erwarten, dass es eine Paarung und eine Eckenüberdeckung gleicher Mächtigkeit gibt. Daher kann Bemerkung 3.67 nur bei manchen Graphen dazu benutzt werden, von einer Paarung nachzuweisen, dass sie größtmöglich ist.

Bei *bipartiten* Graphen sieht es in dieser Hinsicht jedoch besser aus:

Satz 3.68 (König). *In einem bipartiten Graphen ist jede größtmögliche Paarung von gleicher Mächtigkeit wie jede kleinstmögliche Eckenüberdeckung.*

Suchen wir also in einem bipartiten Graphen nach einer größtmöglichen Paarung (was relativ häufig vorkommt), so halten wir Ausschau nach einer aussichtsreich großen Paarung und einer aussichtsreich kleinen Eckenüberdeckung; sind deren Mächtigkeiten nicht identisch, so können wir dank Satz 3.68 sicher sein, dass wir entweder noch eine größere Paarung oder eine noch kleinere Eckenüberdeckung finden können – vielleicht auch beides.

Oft wird Satz 3.68 herangezogen, um den *Heiratssatz* von Philip Hall zu beweisen. Dieser klärt für bipartite Graphen mit einer Bipartition (A, B) die Frage, unter welchen Bedingungen für die Menge A eine *vollständige Paarung* existiert, also eine Paarung, bei der jede Ecke von A mit einer Kante der Paarung inzidiert. Klar ist, dass B dafür mindestens so viele Ecken wie A enthalten muss, weil sonst in B nicht genügend viele Kanten einer Paarung einmünden können. Dieselbe Forderung gilt aber auch für Teilmengen X von A . Um das bequem formulieren zu können, benötigen wir den Begriff der Nachbarschaft: Unter der *Nachbarschaft* einer Eckenmenge X verstehen wir die Menge all derjenigen Ecken eines Graphen, die mit mindestens einer Ecke aus X benachbart sind. Die Idee lautet also nun, dass eine vollständige Paarung von A nur existieren kann, wenn die Nachbarschaft einer jeden Teilmenge X von A mindestens so groß ist wie X selbst (*Hallsche Bedingung*). Der Heiratssatz bringt zum Ausdruck, dass dies in bipartiten Graphen sogar hinreichend für die Existenz einer solchen Paarung ist:

Satz 3.69 (Heiratssatz). *In jedem bipartiten Graphen G mit der Bipartition (A, B) existiert eine vollständige Paarung von A genau dann, wenn für jede Teilmenge X von A die Nachbarschaft von X mindestens so groß ist wie X selbst.*

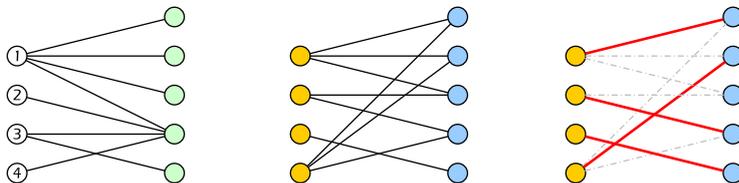


BILD 3.11: *Bipartite Graphen – alle Ecken der jeweils linken Eckenmenge sollen gepaart werden. Im Graphen links ist jedoch die Hallsche Bedingung verletzt, weil die Nachbarschaft der Eckenmenge $\{2, 3, 4\}$ nur aus zwei Elementen besteht; es existiert dort also keine vollständige Paarung der linken Eckenmenge. Der Graph in der Mitte erfüllt die Hallsche Bedingung; eine Paarung der gelben Eckenmenge existiert (siehe rote Kanten, rechts).*

Da die *Hallsche Bedingung* über die Größe der Nachbarschaften in regulären bipartiten Graphen stets erfüllt ist, gibt es in solchen Graphen stets eine vollständige Paarung, die dann nicht nur alle Ecken aus A , sondern auch alle Ecken aus B überdeckt, weil die Bipartition eines regulären bipartiten Graphen notwendigerweise aus zwei gleichmächtigen Eckenmengen besteht. Eine solche Paarung, die also alle Ecken des Graphen überdeckt, heißt *perfekt* – und zwar unabhängig von der Bipartitheit des Graphen.

In unseren Darstellungen von Graphen haben wir die Bipartition eines bipartiten Graphen durch die Färbung seiner Ecken mit (maximal) zwei Farben veranschaulicht, wobei benachbarte Ecken stets verschieden gefärbt sind. Die Idee der Färbbarkeit eines Graphen mit zwei Farben lässt sich problemlos auf höhere Anzahlen von Farben übertragen: Bei Betrachtung eines Graphen stellt sich stets die Frage, wie viele Farben mindestens benötigt werden, um die Ecken in zulässiger² Weise zu färben. Eine kurzer Blick auf vollständige Graphen zeigt, dass diese Farbanzahl beliebig hoch sein kann. Relativ leicht kann man aber zeigen, dass die notwendige Farbanzahl an den Maximalgrad eines Graphen gebunden ist, also den höchsten Eckengrad des Graphen; die notwendige Farbanzahl ist nämlich höchstens um 1 größer als dieser Maximalgrad. Der *Satz von Brooks* verbessert dieses Ergebnis für die allermeisten Graphen sogar noch: Ist ein Graph G zusammenhängend, nicht vollständig und kein Kreis mit ungerader Eckenzahl, so werden höchstens so viele Farben zur Eckenfärbung benötigt wie es der Maximalgrad von G angibt. Man bedenke dabei, dass die genannten Grenzen lediglich obere Schranken sind – in vielen Fällen kommt man mit weniger Farben aus. Die genaue Bestimmung der notwendigen Anzahl von Farben ist im Allgemeinen ein schwieriges Problem.

Eines der berühmtesten Ergebnisse der Graphentheorie beantwortet die Frage nach der notwendigen Farbanzahl für die Eckenfärbung von *planaren* Graphen; wir schließen uns hier dem allgemeinen Sprachgebrauch an und nennen einen Graphen *planar*, wenn er ohne Überschneidung von Kanten gezeichnet werden kann. Für planare Graphen gibt es relativ leichte Beweise dafür, dass sechs und sogar fünf Farben zur Eckenfärbung ausreichen. Der kontrovers diskutierte Beweis des *Vier-Farben-Satzes* drückt die Grenze sogar auf vier Farben – und mehr lässt sich hier nicht erreichen, wie einfache Beispiele zeigen.

Auch die *Kanten* eines Graphen können natürlich gefärbt werden, und die Zulässigkeitsbedingung für eine Kantenfärbung lautet entsprechend: Je zwei Kanten, die mit derselben Ecke inzidieren, müssen verschieden gefärbt werden. Wieder ist schnell klar, dass der Maximalgrad eines Graphen die notwendige Anzahl der Farben für eine Kantenfärbung reguliert; es müssen mindestens so viele Farben benutzt werden wie der Maximalgrad angibt. Der *Satz von Vizing* überrascht mit der Aussage, dass die notwendige Farbanzahl hier entweder der Maximalgrad selbst oder aber der Maximalgrad plus Eins ist. Es kommen also nach Bestimmung des Maximalgrades eines Graphen nur noch zwei Werte für die notwendige Farbanzahl in Frage.

² „Zulässig“ verweist auf die Notwendigkeit, benachbarte Ecken verschieden zu färben.

Eulertouren, Zykel und Hamiltonkreise

Dieser Abschnitt berührt mit den Eulertouren und Hamiltonkreisen eines der bekanntesten Teilgebiete der Graphentheorie. Bei den Hamiltonkreisen werden wir später an unserem Prinzip festhalten können, Teilstrukturen bzw. Eigenschaften eines Graphen *statisch* zu definieren.³ Bei den Eulertouren gelingt dies nicht; stattdessen müssen wir uns mit einer *dynamischen* Tupel-Definition abgeben. Obwohl Eulertouren eigentlich von den *Kanten* eines Graphen handeln, wählen wir eine Definition, in der die Komponenten des Tupels *Ecken* sind; die mehrstufige Definition beginnt mit dem Begriff der *Reise*:

Definition 3.70. Sei G ein Graph. Eine *Reise* in G ist ein Tupel von Ecken von G , in dem aufeinanderfolgende Ecken benachbart sind. Die erste Komponente einer Reise wird deren *Startecke*, die letzte deren *Zielecke* genannt. Eine Reise heißt *geschlossen*, wenn ihre Startecke identisch mit ihrer Zielecke ist; ansonsten heißt die Reise *offen*.

Die *Kantenabbildung* einer Reise bildet jedes Paar aufeinanderfolgender Ecken der Reise auf die entsprechende Kante von G ab; handelt es sich dabei um eine bijektive Abbildung auf die volle Kantenmenge von G , so bezeichnen wir die Reise als eine *Eulertour* in G ; sie ist – wie jede Reise – entweder geschlossen oder offen.

Eine Eulertour eines Graphen ist also unter allen Reisen in diesem Graphen dadurch ausgezeichnet, dass sie jede Kante des Graphen genau einmal durchläuft. Als Ergänzung zu Definition 3.70 werden wir in einem kantenlosen Graphen das leere Tupel (also die leere Menge) als eine geschlossene Eulertour auffassen.

Es gilt allgemein als sehr einleuchtend, dass in einem Graphen G , der eine geschlossene Eulertour besitzt, alle Ecken geraden Grad aufweisen müssen. Das landläufige Argument lautet etwa folgendermaßen: Eine geschlossene Eulertour von G enthält für jede Kante, über die sie zu einer Ecke x geht, eine weitere Kante, über die sie x verlässt; dies gilt auch für die Start- und Zielecke; deshalb – und weil jede Kante des Graphen in der Eulertour genau einmal benutzt wird – muss der Eckengrad von x gerade sein. Es ist fraglich, ob eine Formalisierung dieses Arguments einen echten Erkenntnisgewinn bringt; da der Formalisierungsaufwand die schlichte Idee schnell in den Hintergrund drängt, verzichten wir hier auf ein solches Unternehmen. Um den Satz zumindest leicht aussprechen zu können, sei hier zunächst noch eine Definition formuliert:

³ vgl. die entsprechenden Bemerkungen auf Seite 136

Definition 3.71. Ein Graph heißt *eulersch*, wenn alle seine Ecken geraden Grad haben.

Man beachte, dass in unserem Sprachgebrauch „G ist eulersch“ nicht dasselbe bedeutet wie „G besitzt eine geschlossene Eulertour“! Wie oben bereits bemerkt, gilt immerhin:

Satz 3.72. *Ein Graph, der eine geschlossene Eulertour besitzt, ist eulersch.*

Wir wenden uns nun den hinreichenden Kriterien für die Existenz einer geschlossenen Eulertour zu: Der Archetyp eines Graphen mit geschlossener Eulertour ist ein Kreis; in der Tat sieht man durch Induktion über die Anzahl der Ecken den folgenden Satz leicht ein:

Bemerkung 3.73. *Jeder Kreis besitzt eine geschlossene Eulertour.*

Wir möchten demnächst in eulerschen Graphen aus Kreisen geschlossene Eulertouren „zusammenbauen“ bzw. Eulertouren durch Entfernen von Kreisen auf kleinere Eulertouren in Teilgraphen zurückführen. Da die Entfernung von Ecken in einem Graphen stets die Grapheneigenschaft der Restmenge bedroht, ist es praktisch, statt mit den Kreisen nur mit deren Kantenmengen zu hantieren. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 3.74. Ein *Zykel* ist die Kantenmenge eines eulerschen Graphen. Ein *Kreiszykel* ist die Kantenmenge eines Kreises.

Weil jeder Kreis gemäß seiner Definition eulersch ist, ist jeder Kreiszykel ein Zykel. Man beachte aber, dass der Zykelbegriff weit über die Kantenmengen reiner Kreise hinausgeht (Bild 3.12).

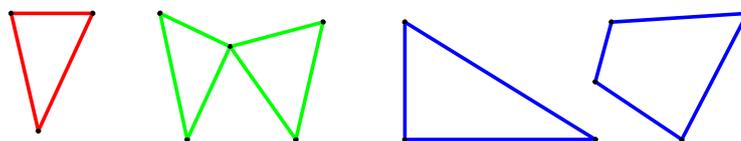


BILD 3.12: Die rote Kantenmenge ist ein Kreiszykel, aber auch die grüne und die blaue Kantenmenge bilden jeweils einen Zykel.

Hilfssatz 3.75. *Sei G ein eulerscher Graph, und sei Z ein Zykel von G . Dann ist auch $G' := G \setminus Z$ ein eulerscher Graph.*

Beweis. An der Grapheneigenschaft von G' gibt es keine Zweifel, da beim Übergang von G zu G' nur Kanten entfernt werden. Wir wählen einen eulerschen Graphen H mit $K(H) = Z$. Für alle Ecken aus H wird der Eckengrad beim Übergang von G zu G' um eine gerade Zahl reduziert, und für alle anderen Ecken bleibt der Eckengrad sogar gleich. Also sind auch in G' alle Eckengrade gerade. □

Der folgende Satz enthält die Idee für den Beweis des Hauptsatzes über eulersche Graphen:

Satz 3.76. *Sei G ein eulerscher Graph. Dann ist $K(G)$ die disjunkte (!) Vereinigung von Kreiszykeln von G .*

Beweis. Wir führen eine Abschnittsinduktion über die Anzahl der Kanten von G durch. Gibt es keine Kante in G , so ist $K(G)$ die leere Vereinigung.

Sei nun n eine Zahl aus \mathbb{N}_0 , und es gelte die Behauptung des Satzes für alle eulerschen Graphen mit höchstens n Kanten. Sei nun G ein eulerscher Graph mit $n + 1$ Kanten. Es gibt dann in G keine Endecken, und daher ist G nach Satz 3.46 kein Wald; also besitzt G einen Kreis C . Dann ist $G' := G \setminus K(C)$ ein ebenfalls eulerscher Graph (nämlich nach Hilfssatz 3.75, denn $K(C)$ ist ein Zykel). Daher – und weil G' weniger Kanten besitzt als G selbst – ist die Induktionsvoraussetzung auf G' anwendbar, d.h. $K(G')$ ist als disjunkte Vereinigung von Kreiszykeln darstellbar. Dann ist $K(G)$ wegen

$$K(G) = K(G') \dot{\cup} K(C)$$

auch eine disjunkte Vereinigung von Kreiszykeln von G . □

Es ist klar, dass wir in einem zusammenhängenden Graphen die Eulertouren entlang der disjunkten Kreiszykel zu einer Eulertour des Gesamtgraphen zusammensetzen möchten. Der berühmte Satz 3.78 wird diese Idee umsetzen. Zunächst aber bereiten wir ihn durch einen weiteren Satz vor:

Satz 3.77. *Sei G ein zusammenhängender Graph, und sei G' ein echter Teilgraph von G mit derselben Eckenmenge wie G . Außerdem sei J ein nicht-leerer isolierter Teilgraph von G' . Dann enthält J eine Ecke, die mit einer Kante aus $G \setminus G'$ inzidiert.*

Beweis. Gemäß der Voraussetzungen ist J insbesondere ein nicht-trivialer Teilgraph von G , und da dieser zusammenhängend ist, ist J kein isolierter Teilgraph in G , d.h. $G \setminus J$ ist kein Graph. Daher finden wir eine Kante $\{a, b\} \in G \setminus J$ mit der Eigenschaft

$$\{a\} \notin G \setminus J. \quad (3.23)$$

Da $\{a, b\}$ eine Kante des Graphen G ist, liegt die Ecke $\{a\}$ sicherlich ebenfalls in G , so dass aus (3.23) die Beziehung

$$\{a\} \in J \quad (3.24)$$

folgt. Läge nun die Kante $\{a, b\}$ in dem Graphen G' , so wäre sie ein Element von $G' \setminus J$; und weil J in G' isoliert ist, würde sich aus der Grapheneigenschaft von $G' \setminus J$ die Relation

$$\{a\} \in G' \setminus J \subset G \setminus J \quad (3.25)$$

ergeben, im direkten Widerspruch zu (3.23). Also liegt die Kante $\{a, b\}$ *nicht* in G' ; damit liegt sie allerdings in $G \setminus G'$; und dies zeigt, dass $\{a\}$ ein Beispiel für die Existenzaussage dieses Satzes ist. \square

Satz 3.78 (Euler, Hierholzer). *Sei G ein zusammenhängender und eulerscher Graph. Dann besitzt G eine geschlossene Eulertour.*⁴

Beweis. Wir planen einen Induktionsbeweis über die Anzahl der Kreiszykel, deren disjunkte Vereinigung nach Satz 3.76 die gesamte Kantenmenge $K(G)$ ergibt. Dabei ist es unerheblich, dass diese Anzahl im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist.

Im Fall der leeren Vereinigung von Kreiszykeln haben wir es mit einem kantenlosen Graphen zu tun; in ihm ist das leere Tupel eine geschlossene Eulertour. Ist $K(G)$ jedoch die „Vereinigung“ von genau einem Kreiszykel, so ist G (auch wegen des Zusammenhangs von G) ein Kreis und besitzt daher nach Bemerkung 3.73 eine geschlossene Eulertour. Damit ist der Induktionsanfang erledigt.

Sei n eine natürliche Zahl, und es gelte die Behauptung für alle zusammenhängenden eulerschen Graphen, deren Kantenmengen als disjunkte Vereinigung von n disjunkten Kreiszykeln darstellbar sind. Sei nun G ein zusammenhängender eulerscher Graph, dessen Kantenmenge als disjunkte Vereinigung von $n + 1$

⁴ Die Idee dieses Satzes stammt wohl von Euler (1736); sein erster Beweis allerdings von Carl Hierholzer (1873).

Kreiszykeln darstellbar ist. Sei Z einer dieser Kreiszykel, und sei C der Kreis mit $K(C) = Z$. Dann ist $G' := G \setminus Z$ nach Hilfssatz 3.75 wiederum ein eulerscher Graph; und seine Kantenmenge ist die disjunkte Vereinigung von nur n Kreiszykeln. Die unmittelbare Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf G' wäre problematisch, denn G' ist möglicherweise nicht zusammenhängend. Immerhin sind die Zusammenhangskomponenten von G' zusammenhängende eulersche Graphen, auf die die Induktionsvoraussetzung anwendbar ist. Entscheidend sind nun drei Tatsachen:

- (1) Der Kreis C besitzt eine geschlossene Eulertour.
- (2) Jede Zusammenhangskomponente von G' besitzt eine geschlossene Eulertour (Induktionsvoraussetzung), und diese Touren benutzen keine Kante von C , da die Kanten von C ja in Z und damit nicht in G' liegen.
- (3) Jede Zusammenhangskomponente von G' hat als nicht-leerer isolierter Teilgraph von G' (Satz 3.21) nach Satz 3.77 eine Ecke mit dem Kreis C gemeinsam.

Als weniger entscheidende, aber angenehme Tatsache kommt hinzu, dass jede Ecke von C trivialerweise in höchstens einer Zusammenhangskomponente von G' liegt. Die Konstruktion einer geschlossenen Eulertour von G selbst wird nun unformalisiert beschrieben: Wir durchlaufen eine geschlossene Eulertour von C , und bei jeder Ecke von C , die mit einer Zusammenhangskomponente von G' verbunden ist, fügen wir eine geschlossene Eulertour der Zusammenhangskomponente ein und fahren dann mit der Eulertour von C fort. Falls wir beim Durchlaufen der Eulertour von C auf eine Zusammenhangskomponente von G' stoßen, die wir bereits durchlaufen haben – und dieser Fall kann eintreten –, so ignorieren wir die betreffende Zusammenhangskomponente. Auf diese Weise entsteht eine geschlossene Eulertour von G (siehe Bild 3.13). □

Da der Zusammenhang eines Graphen G – von isolierten Ecken einmal abgesehen – offensichtlich notwendig für die Existenz einer Eulertour ist, können wir abschließend die Sätze 3.72 und 3.78 folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 3.79. *Sei G ein Graph ohne isolierte Ecken. Dann gilt: G besitzt genau dann eine geschlossene Eulertour, wenn G zusammenhängend und eulersch ist.*

Die Frage nach der Existenz der offenen Eulertouren kann bekanntlich auf das entsprechende Problem bei den geschlossenen Eulertouren zurückgeführt werden:

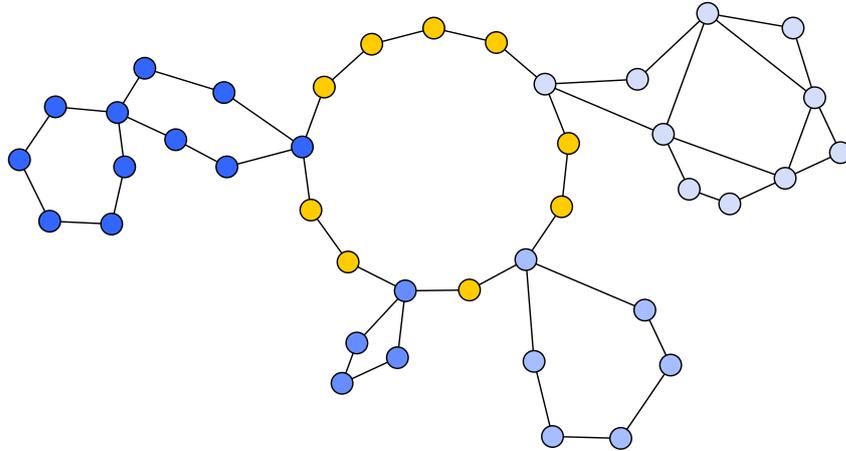


BILD 3.13: Zum Beweis von Satz 3.78: Die Eulertour des Gesamtgraphen entsteht aus der Eulertour eines Kreises und den Eulertouren der mit ihm verbundenen Zusammenhangskomponenten des Restgraphen.

Definition 3.80. Ein Graph heißt *semi-eulersch*, wenn genau zwei seiner Ecken einen ungeraden Eckengrad haben.

Satz 3.81. Sei G ein Graph ohne isolierte Ecken. Dann gilt: G besitzt genau dann eine offene Eulertour, wenn G zusammenhängend und semi-eulersch ist.

Die Vorwärtsrichtung von Satz 3.81 ist leicht einzusehen. Die Rückrichtung ist ebenfalls leicht machbar, wenn die beiden ungeraden Ecken nicht benachbart sind; denn durch das Hinzufügen der fehlenden Kante entsteht dann ein zusammenhängender eulerscher Graph, also mit geschlossener Eulertour, bei dem die überschüssige Kante aus seiner Eulertour wieder entfernt werden kann. Sind die beiden ungeraden Ecken $\{x\}$ und $\{y\}$ jedoch benachbart, so empfiehlt sich die Hinzufügung einer neuen Ecke $\{z\}$ sowie der Kanten $\{x, z\}$ und $\{y, z\}$; dieser größere Graph ist dann zusammenhängend und eulersch; und aus einer geschlossenen Eulertour dieses größeren Graphen mit Start- und Zielecke $\{z\}$ kann durch Weglassen der ersten und letzten Komponente eine offene Eulertour des Ausgangsgraphen gewonnen werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts gehen wir nun auf Hamiltonkreise und Hamiltonwege ein:

Definition 3.82. Sei G ein Graph. Wir sagen, G habe einen *Hamiltonkreis* bzw. G sei *hamiltonsch*, wenn es einen Kreis C in G gibt mit $E(C) = E(G)$. Ein *Hamiltonweg* in G ist entsprechend ein Weg H in G mit $E(H) = E(G)$.

Die Frage nach der Existenz von Hamiltonkreisen ist im Allgemeinen bekanntlich viel schwerer zu beantworten als die Frage nach den Eulertouren. Es gibt kaum einfache hinreichende Kriterien. Ein einziges soll hier ohne Beweis erwähnt werden:

Satz 3.83 (Dirac). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, und sei G ein Graph mit n Ecken, in dem alle Ecken mindestens den Grad $\frac{n}{2}$ haben. Dann besitzt G einen Hamiltonkreis.

Auch notwendige Kriterien für Hamiltonkreise sind Mangelware. Der folgende Satz erwähnt einige – ohne Beweis:

Satz 3.84. Sei G ein hamiltonscher Graph mit mindestens drei Ecken. Dann gilt:

- a) G ist zusammenhängend, und alle Ecken von G haben mindestens den Grad 2.
- b) G enthält keine Brücken (also sind alle Kanten Kreiskanten).
- c) Entfernen wir aus G eine beliebige Ecke und die mit ihr inzidierenden Kanten, so ist der Restgraph immer noch zusammenhängend. Diese Eigenschaft wird der 2-fache Zusammenhang von G genannt und ist eine Verschärfung von b).
- d) Für je zwei verschiedene Ecken x und y von G gibt es zwei Wege in G zwischen x und y , deren Schnitt nur aus den Ecken x und y selbst besteht („innerlich disjunkte Wege“). Diese Aussage ist nach dem Satz von Menger äquivalent zu c).

Wir werden später im Vorfeld von Aufgabe 128 einige weitere Bemerkungen machen, die bei der Klärung des Hamiltonproblems manchmal hilfreich sind.

Planarität und die Eulerformel

Die Frage, welche Graphen ohne Kantenüberschneidungen gezeichnet werden können, ist naheliegend und interessant; doch scheint es, dass die übliche Behandlung dieser Frage in der Literatur nicht völlig ausgereift ist. Das Problem beginnt bereits bei der Formulierung der Grundbegriffe:

Definition 3.85. Eine Darstellung eines Graphen in der Ebene (also etwa auf einem Blatt Papier oder auf einer Tafel) heißt *eben*, wenn die Kanten sich in dieser Darstellung außerhalb der Ecken nicht schneiden. Ein Graph heißt *planar*, wenn es eine ebene Darstellung von ihm gibt.

Es ist zweifelhaft, ob die Begriffsbildung von Definition 3.85 die Ansprüche an eine mathematische Theorie erfüllt. Immerhin scheint es so, dass die Frage der Planarität eines Graphen im Grunde nur in der materiellen Welt entschieden werden kann. Es gibt insbesondere kein Axiomensystem, das uns zu irgendwelchen Aussagen über die Darstellungen eines Graphen verhilft. Und überhaupt: Ist „Darstellung eines Graphen“ ein mathematischer Begriff? Können wir ohne Rückgriff auf die Anschauung erklären, was die Darstellung eines Graphen ist, und über diese Darstellungen Sätze anschauungsfrei herleiten? Das ist zumindest fraglich.

Es gibt verschiedene Ansätze, die Untersuchung der Planarität auf ein sicheres Fundament zu stellen: etwa eine (noch unveröffentlichte) Theorie von Rudolf Schnabel, die sich am algebraischen Planaritätskriterium von Mac Lane orientiert und den sogenannten Zykelraum eines Graphen als Hintergrund der Theorie nutzt. Hier ist jedoch nicht der Ort, diese Theorie zu entfalten. Stattdessen gehen wir vorsichtig den üblichen Weg, folgen der Definition 3.85 und machen uns im weiteren Verlauf dieses Abschnitts stets bewusst, dass die einschlägigen Sätze in der Regel nicht anschauungsfrei gewonnen werden. Doch ist die Frage nach der Planarität eines Graphen zu interessant, um auf ihre Untersuchung vollends zu verzichten. Allerdings verzichten wir in diesem Abschnitt darauf, die genannten Sätze konsequent zu beweisen.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit einer Verallgemeinerung der *Eulerschen Polyederformel*, die wir hier schlicht als *Eulerformel* bezeichnen werden. Sie handelt unter anderem von *Gebieten*, einem Begriff, der durch seine Anschauungsgebundenheit ähnliche Zweifel weckt wie die Planarität: Wenn wir eine ebene Darstellung eines planaren Graphen betrachten, so teilt diese Darstellung, und insbesondere deren Kanten, die Ebene in Gebiete ein. Auch das unbegrenzte Außengebiet wird dabei berücksichtigt. Ist der Graph außerdem frei von Endecken, so verstehen wir unter dem *Grad* eines Gebiets die Anzahl der Kanten, die das Gebiet umschließen.⁵ In Analogie zur Bilanzgleichung für Eckengrade gibt es auch für Gebietsgrade eine Bilanzgleichung:

⁵ Endecken würden bei der Definition des Gebietsgrades für Irritationen sorgen: Zählt die entsprechende Kante bei der Erfassung des Gebietsgrades *einmal* oder *zweimal*? Wir schließen daher Endecken auch im Folgenden aus.

Satz 3.86. *Sei G ein planarer Graph ohne Endecken. Dann gilt:*

$$\sum_g \text{grad}(g) = 2 \cdot |K|,$$

wobei sich die Summation über alle Gebiete g von G erstreckt.

Eventuelle isolierte Ecken sind für Satz 3.86 belanglos, und die geforderte Nicht-Existenz von Endecken sorgt dafür, dass jede Kante in genau zwei Gebieten auftritt (und nicht etwa nur einem), so dass die Summation über alle Gebietsgrade jede Kante genau zweimal erfasst.

Es folgt die angekündigte Eulerformel:

Satz 3.87 (Eulerformel). *Sei G ein zusammenhängender planarer Graph. Dann besitzen alle ebenen Darstellungen dieses Graphen genau $|K| - |E| + 2$ Gebiete (einschließlich des unbegrenzten Außengebiets). Insbesondere besitzen alle ebenen Darstellungen von G dieselbe Anzahl von Gebieten.*

Eine äquivalente Formulierung der Eulerformel ist somit, dass in solchen Graphen die Kreiszahl $\delta(G)$ ($= |K| - |E| + 1$) genau die Anzahl der Innengebiete einer ebenen Darstellung von G angibt.⁶

Wir deuten den üblichen induktiven Beweis von Satz 3.87 an. Zunächst bemerken wir, dass die Eulerformel zumindest für Bäume gültig ist; denn ein Baum besitzt keine Kreise und mithin keine Innengebiete, und wie von der Eulerformel behauptet folgt aus der Baumformel die Gleichung $|K| - |E| + 2 = 1$. Für einen Nicht-Baum betrachten wir ein Gerüst dieses Graphen; für dieses gilt die Eulerformel, weil ein Gerüst ein Baum ist; und das schrittweise Hinzufügen einer jeden fehlenden Kante (die allesamt Nicht-Brücken sind) erhöht die Anzahl der Gebiete jeweils um 1, ebenso wie der Term $|K| - |E| + 2$ dadurch jeweils um 1 erhöht wird und die Gültigkeit der Eulerformel somit erhalten bleibt.

Wir steuern nun zwei Folgerungen aus der Eulerformel an: In einem zusammenhängenden planaren Graphen ohne Endecken betrachten wir erneut die Summe der Gebietsgrade über alle Gebiete des Graphen: Nach Satz 3.86 (Bilanzgleichung für Gebietsgrade) ist diese Summe einerseits gleich der doppelten Anzahl der Kanten, andererseits mindestens dreimal so groß wie die Anzahl der

⁶ Bemerkenswerterweise gibt die Kreiszahl auch in nicht-zusammenhängenden planaren Graphen die Anzahl der Innengebiete an.

Gebiete – weil jeder Gebietsgrad mindestens 3 ist (Anschauung!). In Verbindung mit der Eulerformel ergibt sich daraus

$$3 \cdot (|K| - |E| + 2) \leq 2 \cdot |K|.$$

Durch einfaches Umstellen dieser Ungleichung erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz 3.88. *Sei G ein planarer Graph ohne Endecken.⁷ Dann gilt:*

$$|K| \leq 3|E| - 6.$$

Satz 3.88 ist interessant, weil er zeigt, dass planare Graphen nicht „zu viele“ Kanten haben können. Allein mit diesem Satz können viele Graphen bereits als nicht-planar entlarvt werden. Wir notieren außerdem eine zweite Folgerung aus der Eulerformel:

Satz 3.89. *Sei G ein planarer Graph ohne Endecken und ohne Dreiecke (d.h. ohne Kreise der Länge 3). Dann gilt: $|K| \leq 2|E| - 4$.*

Der anschauungsgebundene „Beweis“ von Satz 3.89 fußt auf der Beobachtung, dass in der Situation von Satz 3.89 die Summe über alle Gebietsgrade diesmal sogar mindestens viermal so groß ist wie die Anzahl der Gebiete – weil jeder Gebietsgrad mindestens 4 ist – und dass diese Summe über alle Gebietsgrade immer noch gleich der doppelten Anzahl der Kanten ist. Es gilt also:

$$4 \cdot (|K| - |E| + 2) \leq 2 \cdot |K|.$$

Erneut liefert einfaches Umstellen der Ungleichung die Behauptung.⁸

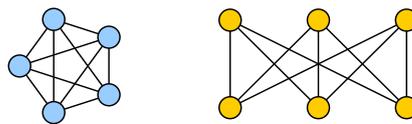


BILD 3.14: Die beiden Kuratowski-Graphen

Die Planaritätstheorie in ihrer klassischen Form steuert zielstrebig den Satz von Kuratowski an. Dieser Satz bringt zum Ausdruck, dass es im Prinzip nur zwei

⁷ Die Voraussetzung, dass der Graph zusammenhängend sei, können wir fallenlassen, weil sich die Gültigkeit der Ungleichung in jeder einzelnen Zusammenhangskomponente des Graphen auf den Gesamtgraphen überträgt.

⁸ Wie schon in Satz 3.88 überträgt sich das Argument von den zusammenhängenden Komponenten von G auf den Gesamtgraphen.

Graphen gibt, die Planarität zerstören, und dass im Kern eines jeden nicht-planaren Graphen einer von diesen beiden Graphen verborgen ist. Es handelt sich dabei um die „Kuratowski-Graphen“ aus Bild 3.14. Der linke Graph, der vollständige Graph mit fünf Ecken, wird allgemein als K_5 bezeichnet und ist gemäß Satz 3.88 nicht planar; und für den rechten Graphen, den vollständigen bipartiten Graphen auf einer Bipartition zweier dreielementiger Mengen mit der Standardbezeichnung $K_{3,3}$, ergibt sich die Nicht-Planarität aus Satz 3.89.

Der Satz von Kuratowski handelt von der Verwandtschaft aller nicht-planaren Graphen mit dem K_5 bzw. mit dem $K_{3,3}$. Diese Verwandtschaft kann durch zwei verschiedene Arten von Beziehungen beschrieben werden; wir betrachten zunächst die *Kontraktion*:

Das Prinzip ist in Bild 3.15 dargestellt. Die rot dargestellte Kante des linken Graphen wird „kontrahiert“, ihre beiden Ecken werden zu einer verschmolzen und die Kantenverbindungen der beiden bisherigen Ecken in der neuen Ecke gebündelt. Etwas förmlicher: Zwei benachbarte (!) Ecken x und y werden (mitsamt den inzidierenden Kanten) gelöscht; dafür wird eine neue Ecke z hinzugefügt, die genau mit jenen Ecken durch eine Kante verbunden wird, die mit mindestens einer der beiden Ecken x, y verbunden waren. Die entscheidende

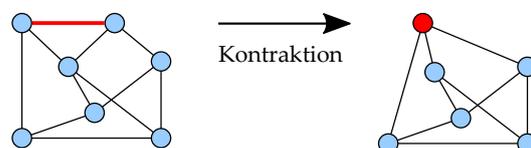


BILD 3.15: Eine Kontraktion

und anschaulich einleuchtende Beobachtung ist nun, dass Kontraktionen die Planarität erhalten: Das Kontraktionsbild eines planaren Graphen ist planar. Die Kontraposition lautet: Ist das Kontraktionsbild eines Graphen G nicht-planar, so ist auch G selbst nicht-planar. Die Kontraktion in Bild 3.15 zeigt also die Nicht-Planarität des linken Graphen, denn sein Kontraktionsbild rechts ist überraschenderweise der $K_{3,3}$, von dessen Nicht-Planarität wir uns schon überzeugt haben.

Wenn wir also einen Graphen vorliegen haben, den wir für nicht-planar halten, so können wir versuchen, ihn (bzw. einen Teilgraphen) durch wiederholte Kontraktionen in den K_5 bzw. in den $K_{3,3}$ zu überführen; gelingt dies, so ist die Nicht-Planarität des Ausgangsgraphen gewiss. Der Satz von Kuratowski

gibt uns überraschenderweise die Garantie, dass diese Prozedur bei einem nicht-planaren Ausgangsgraphen stets mit Erfolg durchgeführt werden kann:

Satz 3.90 (Erste Version des Satzes von Kuratowski). *Ein Graph G ist genau dann nicht-planar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der durch endlich viele Kontraktionen in den K_5 oder in den $K_{3,3}$ überführt werden kann.*⁹

Wir haben bereits angedeutet, dass es neben den Kontraktionen eine zweite Art der Verwandtschaft gibt, die im Kontext der Planarität eine Rolle spielt; es geht hier um sogenannte *Unterteilungen*. Eine Unterteilung eines Graphen G ist ein Graph, der durch (gegebenenfalls mehrfaches) Einfügen von neuen Ecken in bestehende Kanten von G gewonnen wird. Wir belassen es bei dieser formlosen Beschreibung und verweisen auf Bild 3.16: Dort wird die rote Kante unterteilt, indem eine neue Ecke in sie eingefügt wird. Es liegt auf der Hand, dass eine

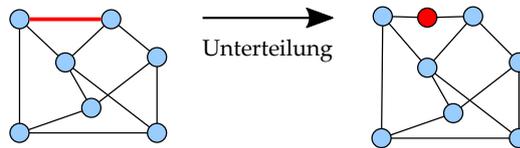


BILD 3.16: Eine Unterteilung

Unterteilung eines Graphen G genau dann planar ist, wenn G selbst planar ist. Insbesondere sind also alle Graphen, die durch (mehrfaches) Unterteilen eines K_5 bzw. eines $K_{3,3}$ gewonnen werden, nicht planar; ebenso alle Obergraphen dieser Graphen (da Nicht-Planarität selbstverständlich auf Obergraphen vererbt wird). Eine zweite Version des Satzes von Kuratowski besagt, dass auf diese Weise überhaupt *alle* nicht-planaren Graphen beschrieben werden können:

Satz 3.91 (Zweite Version des Satzes von Kuratowski). *Ein Graph ist genau dann nicht-planar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der das Ergebnis von endlich vielen Unterteilungen des K_5 oder des $K_{3,3}$ ist.*¹⁰

Für die Praxis ist vor allem die Rücknahme von Unterteilungen von Bedeutung, ein Vorgang, den wir als *Tilgung von Grad-2-Ecken* bezeichnen werden und der in Bild 3.17 zweimal dargestellt ist. Das rechte Beispiel illustriert, dass die Tilgung einer Grad-2-Ecke manchmal zu einer Doppelkante führt, die dann ihrerseits auf eine normale Einfachkante reduziert werden muss.

⁹ „Endlich viele“ lässt hier als Grenzfall die Möglichkeit zu, gar keine Kontraktion anzuwenden.

¹⁰ Hier gilt wie schon in der ersten Version des Satzes, dass jeder Graph als eine Unterteilung seiner selbst gilt – gewissermaßen als Ergebnis von 0 Ecken-Einfügungen.

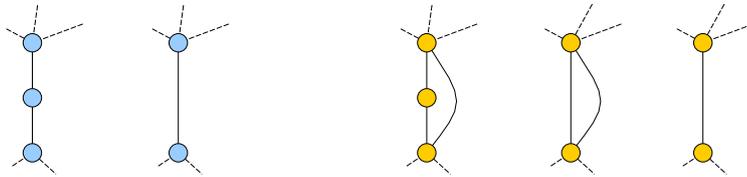


BILD 3.17: Tilgung von Grad-2-Ecken

Zum Nachweis der Nicht-Planarität eines Graphen stehen uns damit sowohl die Kontraktionsmethode als auch die Unterteilungsmethode zur Verfügung. Die Anwendung dieser Methoden ist oft nicht einfach und bedarf auf dem Weg zur sicheren Anwendung vielen Übens. Ab Seite 206 werden wir die Durchführung einer Planaritätsuntersuchung im Detail beschreiben.

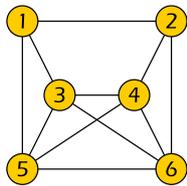


BILD 3.18

Übrigens können wir bei einem nicht-planaren Graphen unter Umständen je nach Vorgehen mal den einen, mal den anderen Kuratowski-Graphen im Kern des vorgelegten Graphen entdecken. Als Beispiel präsentieren wir den Graphen aus Bild 3.18. Wenden wir die Kontraktionsmethode auf die Kante $\{1, 2\}$ an, so erhalten wir sofort den K_5 . Andererseits besitzt der Graph

aus Bild 3.18 jedoch den $K_{3,3}$ als Teilgraphen! Wir erhalten einen solchen Teilgraphen, wenn wir die Kanten $\{3, 5\}$ und $\{4, 6\}$ entfernen.

Abschließend möchten wir einen Satz erwähnen, der in einem gewissen Zusammenhang mit der Theorie der planaren Graphen steht, obwohl sein Anwendungsgebiet das Hamiltonkreisproblem ist: Den *Satz von Grinberg* über hamiltonsche planare Graphen:

Satz 3.92 (Grinberg). *Sei C ein Hamiltonkreis eines planaren Graphen G mit n Ecken. In einer ebenen Darstellung von G zerfallen die Gebiete von G dann in zwei Klassen; nämlich einerseits diejenigen Gebiete, die innerhalb von C liegen, und andererseits diejenigen, die außerhalb von C liegen. Für jede natürliche Zahl j bezeichne α_j die Anzahl der inneren Gebiete von G vom Grade j , und β_j bezeichne die Anzahl der äußeren Gebiete vom Grade j . Dann gilt die Gleichung*

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} (j - 2) (\alpha_j - \beta_j) = 0,$$

wobei die Summation endlich ist, weil sie nur bis zum höchsten Gebietsgrad von G geführt werden muss.

Beweis. Unter den *inneren Sehnen von C* verstehen wir diejenigen Kanten von G , die im Inneren von C liegen, ohne Teil von C zu sein. Ihre Anzahl sei s . Dann ist $s + 1$ die Anzahl der inneren Gebiete von C , d.h.:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j = s + 1. \quad (3.26)$$

Außerdem betrachten wir die Summe über die Grade aller inneren Gebiete von C . Diese Summe ist einerseits $\sum j \cdot \alpha_j$, andererseits $2s + n$, weil jede innere Sehne von C genau zu zwei inneren Gebieten von C gehört und jede der n Kanten von C genau einem inneren Gebiet von C angehört. Somit erhalten wir

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} j \cdot \alpha_j = 2s + n = n - 2 + \sum_{j \in \mathbb{N}} 2\alpha_j, \quad (3.27)$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen durch (3.26) begründet ist. Umstellen von (3.27) liefert

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} (j - 2) \cdot \alpha_j = n - 2. \quad (3.28)$$

Eine entsprechende Überlegung über die äußeren Gebiete von C liefert die Gleichung

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} (j - 2) \cdot \beta_j = n - 2, \quad (3.29)$$

und die Subtraktion von (3.28) und (3.29) führt schließlich zu der behaupteten Gleichung. \square

In dem Beispielgraphen von Bild 3.19 gilt

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= 4, \beta_4 = 4, \alpha_5 = 2, \beta_5 = 3, \\ \alpha_6 &= 2, \beta_6 = 0, \alpha_7 = 0, \beta_7 = 1, \end{aligned}$$

womit die Grinberg-Formel bestätigt wird.

Der Satz von Grinberg wird in der Regel angewandt, um für bestimmte planare Graphen nachzuweisen, dass sie *nicht* hamiltonsch sind. Dafür reichen manchmal einfache zahlentheoretische Überlegungen aus.

Ein planarer Graph mit einer ungeraden Anzahl von Gebieten, die sämtlich vom Grad 4 sind, kann beispielsweise nicht hamiltonsch sein; denn wäre er es doch, so folgte aus der Grinberg-Formel die Beziehung $2 \cdot (\alpha_4 - \beta_4) = 0$, die tatsächlich gar nicht erfüllt sein kann, weil $\alpha_4 = \beta_4$ durch die ungerade Anzahl von Grad-4-Gebieten ausgeschlossen ist.

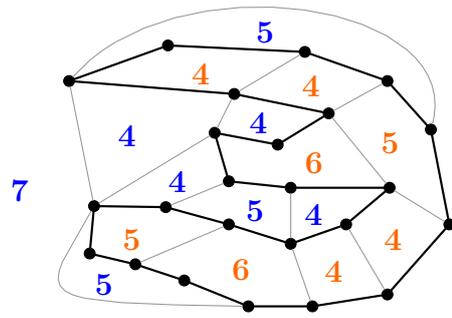


BILD 3.19: Zum Satz von Grinberg

Aufgaben zur Graphentheorie und didaktischer Kommentar

Bei einem Kursus zur Graphentheorie für Schüler dürfen wir im Allgemeinen keine Kenntnisse voraussetzen. Dennoch ist die Graphentheorie dank ihrer Anschaulichkeit ein zugängliches Teilgebiet der Mathematik, und es bietet sich an, diese Anschaulichkeit für einen schwungvollen Einstieg zu nutzen. Wir schlagen für diesen Einstieg die Betrachtung von Eulertouren vor, da wir es hier mit einem reizvollen und doch leicht verständlichen Problem zu tun haben. Dass dieses zunächst so schwer überschaubare Problem eine überraschend elegante und einfache Lösung besitzt (3.78), vermittelt den Schülern vielleicht eine erste Ahnung der teils recht starken Instrumente der Graphentheorie.

Die wenigen Vokabeln, die für das Eulertouren-Problem benötigt werden (im Wesentlichen: Eckengrad und Zusammenhang), lassen sich leicht ad hoc einführen und problemlos anschaulich erfassen. Die gleiche Anschaulichkeit besitzt das Hamiltonkreis-Problem, obwohl hier keine einfachen Lösungen zur Verfügung stehen; wegen der Verwandtschaft der beiden Probleme werden wir dennoch beide in einem Zuge behandeln.

Da für einen systematischen Grundkurs aber echte Begriffe vonnöten sind (und nicht nur bloße Anschauung), sollten wir bald danach einige begriffliche Grundlagen legen; wir erläutern dies kurz ab Seite 193 und bieten dort auch entsprechende Trainingsaufgaben an. Weiterhin bieten wir Unterkapitel zu Eckengradtupeln und zur Graphenisomorphie, zur Planarität und zur Modellierung durch Graphen.

Eulertouren und Hamiltonkreise

Das Thema *Eulertouren* bietet sicherlich einen attraktiven Zugang zur Graphentheorie: Im Allgemeinen wird es allerdings nicht möglich sein, die schwierige Rückwärtsrichtung aus Satz 3.78 mit Schülern begrifflich zu erarbeiten. Die Idee von Carl Hierholzer von der Zusammensetzung von Zykeln zu einer Eulertour ist jedoch für Schüler zumindest *handelnd* nachvollziehbar. Wir stellen daher hier den Hierholzer-Algorithmus vor, der in einem beliebigen zusammenhängenden eulerschen Graphen eine geschlossene Eulertour findet:

Zunächst einmal wird die gesamte Kantenmenge des Graphen in disjunkte Zykeln zerlegt: Wir beginnen an einer beliebigen Ecke x des Graphen, wählen

eine beliebige Kante und reisen an jeder folgenden Ecke auf irgendeiner noch nicht benutzten Kante weiter. Diese Reise wird so lange wie möglich fortgesetzt; kommen wir an einer schon benutzten Ecke vorbei, die ungleich x ist, so kann die Reise dennoch auf jeden Fall weitergeführt werden. Kehren wir allerdings wieder zu der Startecke x zurück, kann es sein, dass der Zykel nicht verlängerbar ist, weil alle von x ausgehenden Kanten verbraucht sind. Im Allgemeinen ist der derart fabrizierter Zykel noch nicht gleich der gesamten Kantenmenge; dann beginnen wir an einer anderen Ecke mit einer frischen Kante von neuem und bauen, wie eben beschrieben, einen weiteren Zykel. Nach endlich vielen Anläufen ist die Kantenmenge des Graphen in Zykel zerlegt.

Jetzt wird rekursiv die eigentliche Eulertour zusammengesetzt: Wir durchlaufen einen beliebigen Zykel Z_1 , bis wir an eine Ecke kommen, die auch von (mindestens) einem anderen Zykel Z_2 besucht wird. Wir durchlaufen dann zunächst den Zykel Z_2 , biegen aber auch von ihm bei jeder sich bietenden Gelegenheit auf neue Zykel ab etc. Irgendwann wird zum ersten Mal ein Zykel Z_n vollständig durchlaufen; an seiner Endecke setzen wir dann Z_{n-1} fort; an dessen Ende wird Z_{n-2} fortgeführt etc. Schließlich werden auch Z_2 und Z_1 zum Abschluss gebracht, und die geschlossene Eulertour ist fertiggestellt.

In der Praxis werden selten mehr als drei oder vier Zykel vorkommen. In der Tat treffen wir in der Schule eher auf das Problem, dass unsere Schüler gleich den ersten Zykel zu einer vollständigen Eulertour ausbauen, da sie bei der Kantenwahl den Gesamtgraphen geschickt im Blick behalten; aus didaktischer Sicht ist das sicher kein Glücksfall, weil

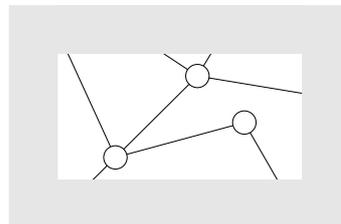


BILD 3.20: Eine Lochmaske

die Hierholzer-Methode so nicht zur Geltung kommt. Es empfiehlt sich daher, den Schülern gezielt den Überblick zu nehmen, indem sie die Zykel fabrizieren müssen, während sie zu jedem Zeitpunkt nur einen kleinen Ausschnitt des Graphen betrachten. Eine Lochmaske (siehe Bild 3.20) leistet hier gute Dienste. Die Schüler verhalten sich so eher wie Computer und setzen die Kantenmenge des Graphen mit größerer Wahrscheinlichkeit aus mehreren Zykeln zusammen.

Die Einfachheit seiner Lösung ist gleichzeitig der Grund dafür, dass das Thema *Eulertouren* kein sehr nahrhafter Unterrichtsgegenstand ist. Die Kernfrage nach der Existenz einer Eulertour wird nach Betrachtung einiger Beispiele schnell langweilig. Vorübergehend bieten Variationen der Kernfrage Abhilfe; in Aufgabe 128 etwa geht es unter anderem darum, wie ein Graph manipuliert werden muss,

damit der resultierende Graph eine Eulertour besitzt. In Aufgabe 130 wird ein alternativer Algorithmus zum Finden einer Eulertour vorgestellt; Aufgabe 132 verfeinert die Idee der offenen Eulertouren; Aufgabe 136 bietet Anlass für kombinatorische Betrachtungen; Aufgabe 133 zeigt, wie eine graphentheoretische Modellierung auf das Problem der Eulertouren führt; und Aufgabe 135 führt zu weiteren leicht variierten Anwendungen des Hauptsatzes 3.78.

Wir wenden uns nun dem schwierigeren Hamiltonkreis-Problem zu. Die folgende Bemerkung nennt einige schultaugliche Hilfsmittel:

Bemerkung 3.93. *Sei G ein Graph. Dann gilt:*

- a) *Ist x eine Ecke vom Grade 2, so sind die beiden mit x inzidierenden Kanten in einem (eventuell vorhandenen)¹¹ Hamiltonkreis von G sicherlich enthalten.*
- b) *Ist x eine Ecke von G , so sind in einem (eventuell vorhandenen) Hamiltonkreis genau zwei der mit x inzidierenden Kanten enthalten. Dies ist eine Verallgemeinerung von a).*
- c) *Ist C ein sehnensfreier¹² Kreis in G , in dem genau zwei Ecken x und y mit einer Ecke aus $G \setminus C$ benachbart sind, so gilt:*
 - i) *Sind x und y benachbart, so ist die Kante $x \cup y$ in einem (eventuell vorhandenen) Hamiltonkreis von G sicherlich nicht enthalten, alle anderen Kanten von C hingegen schon (Bild 3.21, links).*
 - ii) *Sind x und y nicht benachbart, so ist G nicht hamiltonsch (Bild 3.21, rechts).*

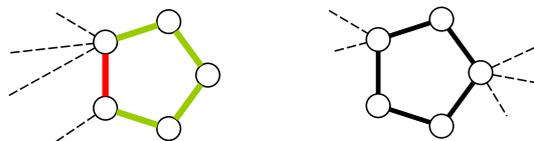


BILD 3.21: Zu Bemerkung 3.93 c)

¹¹ Die in dieser Bemerkung mehrfach auftretende Wendung von dem *eventuell vorhandenen* Hamiltonkreis tritt allein aus didaktischen Gründen in dieser Form auf: Sie trägt der Tatsache Rechnung, dass wir die Bemerkung vor allem dann nutzen werden, wenn wir noch nicht wissen, ob ein Hamiltonkreis vorhanden ist. Eigentlich wäre es klarer, die Existenz des Hamiltonkreises eingangs vorauszusetzen und die Klammerbemerkungen zu streichen.

¹² d.h. außer den Kreiskanten von C gibt es in G keine weiteren Kanten zwischen Ecken von C

- d) Gibt es in G eine Ecke, deren Löschung (mitsamt den inzidierenden Kanten) einen nicht-zusammenhängenden Restgraphen zurücklässt, so ist G nicht hamiltonsch.

Die Aussagen von 3.93 a) und b) sind unmittelbar einleuchtend. Dasselbe gilt für die beiden Aussagen von Teil c). Dabei ist bemerkenswert, dass auch Aussage c ii) kein Spezialfall eines der Kriterien aus Satz 3.84 ist; sie wäre es nur, wenn wir davon ausgingen, dass die beiden Ecken x und y mit Kontakt zum Restgraphen nur durch den Kreis C miteinander verbunden wären.¹³ Dennoch beschreibt c ii) eine recht häufig vorkommende Situation.

Aussage 3.93 d) wiederum ist lediglich eine Wiederholung von Satz 3.84 c). Sie ist besonders leicht verständlich, wenn wir uns klarmachen, dass die hamiltonschen Graphen gerade diejenigen sind, deren Eckenmengen in einem Kreis (im Sinne der Geometrie) dargestellt werden können, in dem geometrisch benachbarte Ecken auch graphentheoretisch benachbart sind (Bild 3.22, links). Löschen wir dort eine Ecke und die mit ihr inzidierenden Kanten (Bild 3.22, Mitte), so bleibt ein zusammenhängender Graph zurück (Bild 3.22, rechts), weil ein an einer Stelle aufgeschnittener Kreis auch nach landläufigem Verständnis immer noch zusammenhängend ist; dabei sind die Kanten, die im Inneren des Kreises verlaufen, ohne Belang.

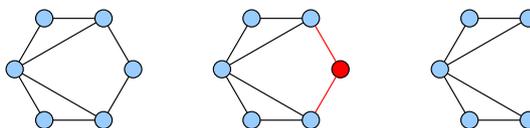


BILD 3.22: Zu Bemerkung 3.93 d)

Wir verweisen nun auf Anwendungsmöglichkeiten von Bemerkung 3.93. Wir betrachten dazu einige der Graphen aus Aufgabe 134; wir nummerieren dafür die oberen fünf Graphen von 1 bis 5. In Graph 3 etwa haben die drei „unteren“ Ecken alle den Grad 2. Ihre Kanten müssten nach Bemerkung 3.93 a) sämtlich einem eventuellen Hamiltonkreis angehören; das ergibt aber schon sechs Kanten, zu viele für einen Hamiltonkreis mit fünf Ecken: Graph 3 ist daher nicht hamiltonsch. In Graph 2 wiederum tritt genau die Situation von 3.93 c ii) auf; deshalb ist auch er nicht hamiltonsch. In Graph 5 ist die Ecke „in der Mitte“ eine sogenannte *Schnittecke*; ihre Entfernung hinterlässt einen

¹³ Denn dann wäre der Graph nicht *2-fach zusammenhängend*.

nicht-zusammenhängenden Teilgraphen, weshalb auch Graph 5 nach Bemerkung 3.93 d) nicht hamiltonsch ist. Die Anwendung von Bemerkung 3.93 c i) wird schließlich in unserer ausführlichen Diskussion von Aufgabe 128 e) demonstriert.

AUFGABE 128:

Ein dänisch-deutscher Radfahrclub wird gegründet. Seine Mitglieder stammen aus Südjütland und aus dem Norden Schleswig-Holsteins. Das Ziel des Clubs ist die Organisation von Radtouren und die Pflege der entsprechenden Radwege (inklusive Beschilderung etc). Die Mitglieder stammen aus 17 Städten und Gemeinden, und auf einer der ersten Vereinssitzungen wird ein Radwegeplan entworfen, der besonders attraktive Radfahrrouten zwischen den verschiedenen Heimatorten der Vereinsmitglieder ausweist (siehe Bild 3.23). Als Kuriosum zählt auch eine fahrradfreundliche Schiffslinie zwischen Esbjerg und Husum zu den aufgeführten Verbindungen.

- a) Der erste Vorsitzende des Vereins möchte zum einjährigen Bestehen des Clubs in den Sommerferien eine mehrwöchige Radtour vorschlagen, die in Flensburg beginnt und endet und alle der aufgeführten Radverbindungen benutzt – aber keine davon mehr als einmal, denn die Radtour wird sonst selbst für erprobte Radfahrer zu lang. Ist eine solche Tour möglich?
- b) Der zweite Vorsitzende hört von gewissen Schwierigkeiten seines Kollegen und schlägt vor, die Vorstellungen des ersten Vorsitzenden in einem Punkt abzuändern: Start und Ziel der Radtour dürfen verschieden sein (und auch verschieden von Flensburg). Sind die Pläne des zweiten Vorsitzenden umsetzbar?
- c) Der Konditionstrainer des Vereins möchte an dem Prinzip des ersten Vorsitzenden festhalten. Allerdings findet er, dass das Radwegenetz ohnehin etwas zu umfangreich ist; er möchte einige – allerdings möglichst wenige – Radverbindungen aus der Karte entfernen und dann den Plan des ersten Vorsitzenden sinngemäß durchführen. Wie viele Radverbindungen müssen dafür (mindestens) entfernt werden? Gibt es mehrere Möglichkeiten bei der Auswahl der zu streichenden Verbindungen?
- d) Der Schatzmeister des Clubs denkt ähnlich wie der Konditionstrainer, nur etwas radikaler. Er möchte die Kosten für die Pflege der Radverbindungen senken und *möglichst viele* Verbindungen aus

dem Radwegenetz entfernen; allerdings soll weiterhin eine Tour durch alle 17 Orte möglich sein – und zwar im Sinne des ersten Vorsitzenden bzw. des Konditionstrainers: Start und Ziel in Flensburg; alle verbleibenden Radverbindungen werden genau einmal benutzt. Wie könnte ein derart reduziertes Radwegenetz aussehen?

- e) Der dänische Schriftführer des Vereins interessiert sich mehr für die Etappenziele als für den Weg: Ihn bewegt die Frage, ob es im ursprünglichen Radwegenetz eine Tour gibt, die in Sønderborg beginnt und endet und jeden anderen Ort genau einmal durchläuft.

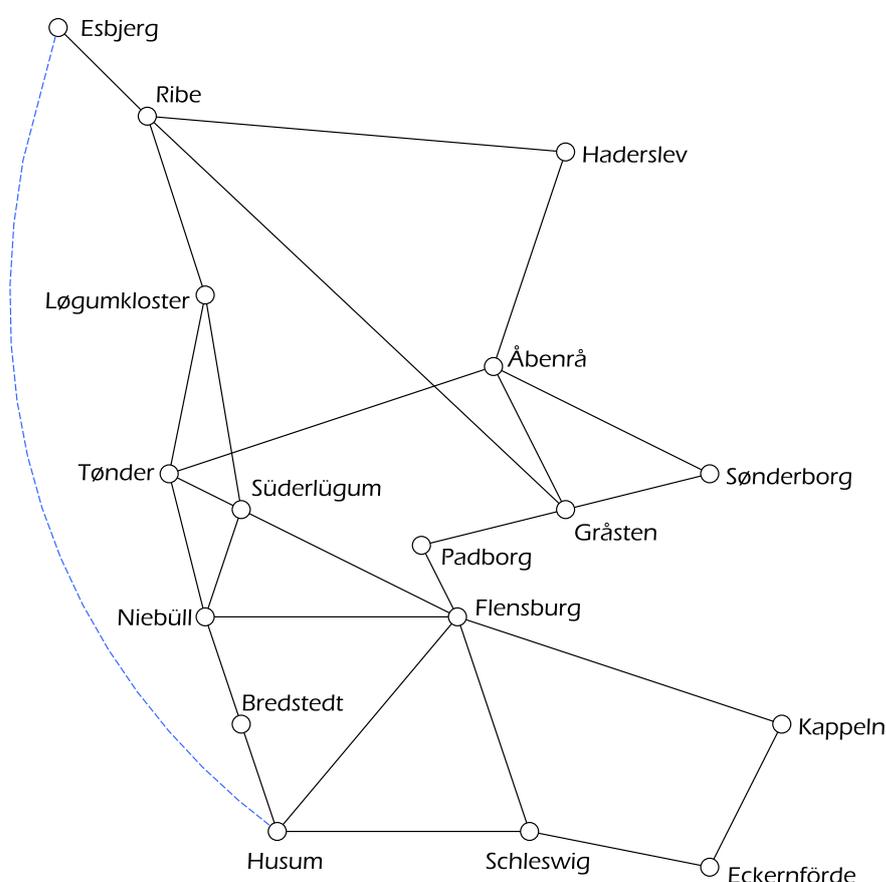


BILD 3.23: Das deutsch-dänische Radwegenetz

Die Lösung von Teil a) der Aufgabe 128 ist für Eingeweihte kein Problem. Fast alle Eckengrade des Radweggraphen sind gerade, aber eben nicht alle: Schleswig und Løgumkloster haben ungeraden Grad. Es kann somit keine geschlossene Eulertour in diesem Graphen geben (Satz 3.78). Der Plan des ersten Vorsitzenden kann nicht umgesetzt werden.

Teil b) handelt von der Suche nach einer offenen Eulertour. Da genau zwei Ecken ungeraden Grad besitzen, existiert eine solche Tour. Start bzw. Ziel dieser Tour müssen dann Løgumkloster bzw. Schleswig (in irgendeiner Reihenfolge) sein. Es fällt nicht schwer, eine solche Tour konkret anzugeben.

In Teil c) müssen wir Kanten aus dem Radweggraphen derart entfernen, dass danach *alle* Eckengrade gerade sind. Insbesondere müssen also eine Schleswig-Kante und eine Løgumkloster-Kante gelöscht werden. Da es sich dabei offensichtlich nicht um dieselbe Kante handeln kann – Schleswig und Løgumkloster sind im Graphen nicht benachbart –, werden die Ecken am anderen Ende der Schleswig-Kante bzw. der Løgumkloster-Kante durch diese Maßnahme zunächst einen ungeraden Grad bekommen. Es sind also mehr als zwei Kantenlöschungen erforderlich. Andererseits sehen wir schnell, dass die Löschung des Kantenzugs Schleswig-Flensburg-Süderlügum-Løgumkloster die Anforderungen erfüllt. Mit weniger Kantenlöschungen geht es nicht, und eine Inspektion des Graphen zeigt schnell, dass keine andere als die genannte Menge von drei Kanten die Anforderungen erfüllt.

Für Teil d) überlegen wir uns, welche Kanten des Radweggraphen für unsere gesuchte Eulertour unentbehrlich sind. Es handelt sich dabei vor allem um diejenigen Kanten, die eine Ecke vom Grad 2 ansteuern; denn würde auch nur eine von diesen entfernt, so könnte die betreffende Ecke kein Bestandteil einer Eulertour mehr sein. In unserem Graphen gibt es zahlreiche derartige Ecken, und es sind insgesamt 13 Kanten, die nach diesem Argument auf jeden Fall in der gesuchten Eulertour liegen; sie sind in Bild 3.24 grün hervorgehoben. Wir sehen, dass nur noch wenige Kanten fehlen, um einen eulerschen Teilgraphen auszuwählen; wir wählen fünf (blaue) Kanten aus, die zusammen mit den grünen Kanten einen solchen eulerschen Teilgraphen unseres Radwegernetzes auf der vollen Eckenmenge bilden. Dieser Teilgraph enthält 18 Kanten, also nur eine mehr als das bei 17 Ecken vorstellbare Minimum. Ginge es auch mit nur 17 Kanten? Nein, denn die Auswahl der fünf blauen Kanten ist optimal: Tønder, Løgumkloster und Süderlügum müssen durch je eine Kante an unsere Eulertour angeschlossen werden, was jedenfalls drei Kanten verbraucht, und von Schleswig muss eine weitere Kante weggeführt werden; diese Kante führt dann nach Husum oder Flensburg, was den zwischenzeitlichen Eckengrad dieser Stadt (im betrachteten Teilgraphen) ungerade werden lässt, so dass eine insgesamt fünfte blaue Kante erforderlich ist.

Teil e) handelt von dem Hamiltonkreis-Problem im vorgegebenen Radweggraphen. Dass der Start in Sønderborg liegen soll, ist unwesentlich. Schon die

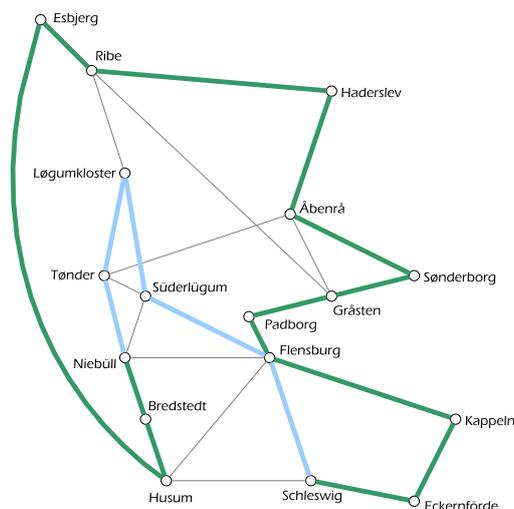


BILD 3.24: Die Tour des Schatzmeisters

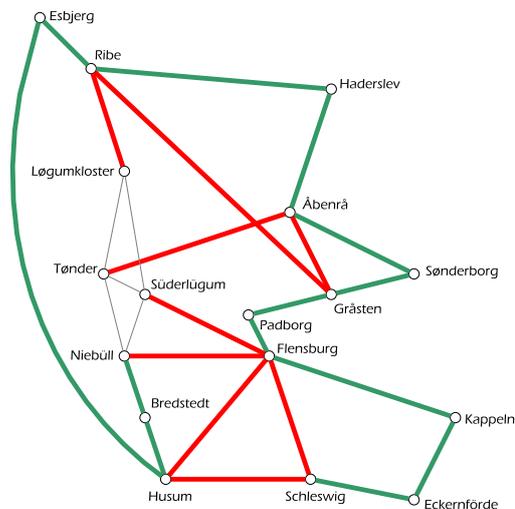


BILD 3.25: Das Problem des Schriftführers

Tour des Schatzmeisters (Bild 3.24) zeigt *beinahe* einen Hamiltonkreis. Nur der doppelte Besuch Flensburgs stört. Lässt man in Bild 3.24 die Schleswig-Flensburg-Kante weg, so erhalten wir immerhin einen *Hamiltonweg*, dessen Start und Ziel allerdings nicht in Sønderborg liegen, sondern in Schleswig bzw. Flensburg. Wie aber ist es um einen *Hamiltonkreis* bestellt? Erstaunlicherweise reicht die Bemerkung 3.93 in ihren Teilen a) und b) aus, um die Nicht-Existenz eines Hamiltonkreises zu beweisen. Zunächst folgen wir 3.93 a) und markieren in Bild 3.25 alle Kanten grün, die auf jeden Fall einem Hamiltonkreis angehören müssten. Manche Ecken mit einem höheren Eckengrad als 2 haben jetzt schon zwei grüne Kanten, und das bedeutet mit Aussage 3.93 b), dass die anderen Kanten, die mit diesen Ecken inzidieren, für einen Hamiltonkreis nicht mehr in Frage kommen; wir färben sie deshalb rot. Wieder einmal bereitet Schleswig jetzt Probleme, denn es steht keine zweite Schleswig-Kante mehr für einen Hamiltonkreis zur Verfügung. Der Wunsch des Schriftführers ist nicht erfüllbar.

Weitere Aufgaben

Zusätzlich betrachte man die Aufgaben 222 bis 224.

AUFGABE 129: Finde mit dem *Hierholzer-Algorithmus* eine Eulertour in dem Graphen von Bild 3.26. Benutze eine Lochmaske, um ohne Gesamtüberblick die Kantenmenge des Graphen zunächst in Zykel zu zerlegen. Setze diese Zykel schließlich zu einer Eulertour zusammen.

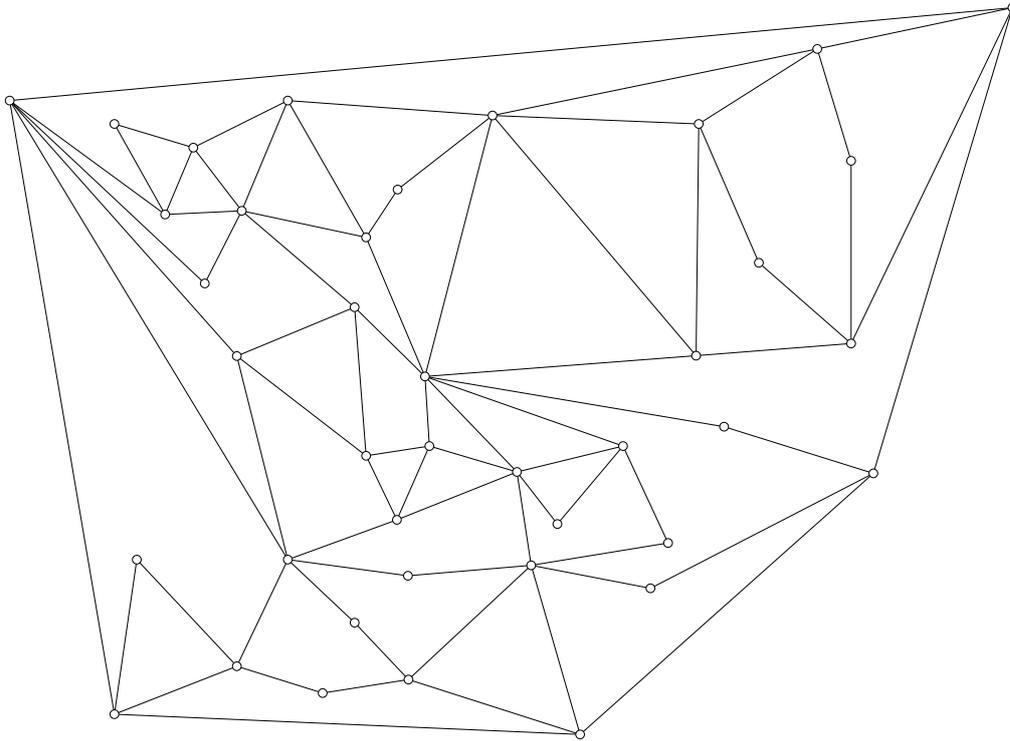


BILD 3.26: Zu den Aufgaben 129 und 130

AUFGABE 130: Finde ein weiteres Mal eine Eulertour des Graphen aus Bild 3.26 – dieses Mal ohne Lochmaske, aber mit dem *Algorithmus von Fleury*:

- (1) Starte an einer beliebigen Ecke.
- (2) Verlasse die aktuelle Ecke möglichst über eine Kante, die keine Brücke des (aktuellen) Graphen ist; wähle also eine Brücke nur, wenn keine Nicht-Brücke vorhanden ist; lösche die soeben durchlaufene Kante sowie eventuell dadurch isolierte Ecken. Wiederhole dann Schritt (2), bis eine Eulertour entstanden ist.

Hinweis: Diese Methode ist derjenigen aus Aufgabe 129 insofern überlegen, als sie stets in *einem* Durchgang die Eulertour aufbaut. Schwierig ist nur, dass man stets aufpassen muss, welche Kanten aktuell Brücken sind und welche nicht. Durch das Löschen der durchlaufenen Kanten werden gelegentlich bisherige Nicht-Brücken zu Brücken. Man erinnere sich daran, dass eine Kante genau dann eine Brücke ist, wenn sie in keinem Kreis liegt.

AUFGABE 131: Zu einer Feier erscheinen fünf Gäste. Der Gastgeber stellt fest, dass unter je drei von diesen Gästen stets zwei sind, die einander kennen, und zwei, die einander nicht kennen. Man beweise, dass der Gastgeber seine fünf Gäste so an einen runden Tisch setzen kann, dass an beiden Seiten jedes Gastes Bekannte dieses Gastes sitzen.

AUFGABE 132: Wir betrachten nacheinander die sechs Figuren aus Bild 3.27. Wie oft muss man den Stift jeweils mindestens absetzen, um die Figur zeichnen zu können, wenn keine Teilstrecke mehrfach gezeichnet werden darf?

Hinweis: Wir können die Figuren als Graphen auffassen. Die Frage ist dann, wie viele Kanten zu dem Graphen hinzugefügt werden müssen, damit eine offene Eulertour möglich wird. Jede zusätzliche Kante entspricht dann einem Absetzen des Stifts.

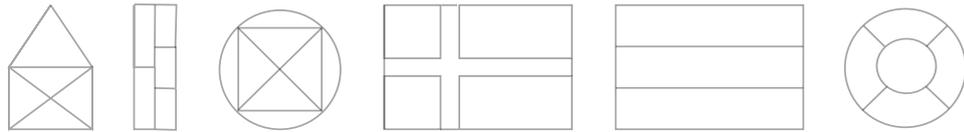


BILD 3.27: Zu Aufgabe 132

AUFGABE 133: Ein Set von Dominosteinen besteht üblicherweise aus 27 Steinen; sie zeigen jede mögliche zweielementige Teilmenge von $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ genau einmal sowie zusätzlich die Doppel-Paare von $(0, 0)$ bis $(6, 6)$. Die Domino-Regel besagt, dass nur Steine aneinandergelegt werden dürfen, wenn deren aneinandergelegte Hälften die gleiche Zahl zeigen.

- Ist es möglich, sämtliche Steine eines Domino-Sets in einem Kreis anzuordnen und dabei die Domino-Regel zu beachten?
- In welcher Weise ändert sich die Antwort auf a), wenn statt der Zahlen von 0 bis 6 die Zahlen von 0 bis 7 oder von 0 bis 8 die Grundlage des Sets bilden würden?
- Der $(3, 4)$ -Stein und der $(5, 0)$ -Stein eines regulären Domino-Sets (von 0 bis 6) sind verlorengegangen. Jetzt sollen möglichst wenige weitere Steine beiseite gelegt werden, damit aus den restlichen Dominosteinen wieder ein Kreis gelegt werden kann. Wie viele Steine müssen mindestens beiseite gelegt werden?

AUFGABE 134: Welche der Graphen aus Bild 3.28 besitzen einen Hamiltonkreis?

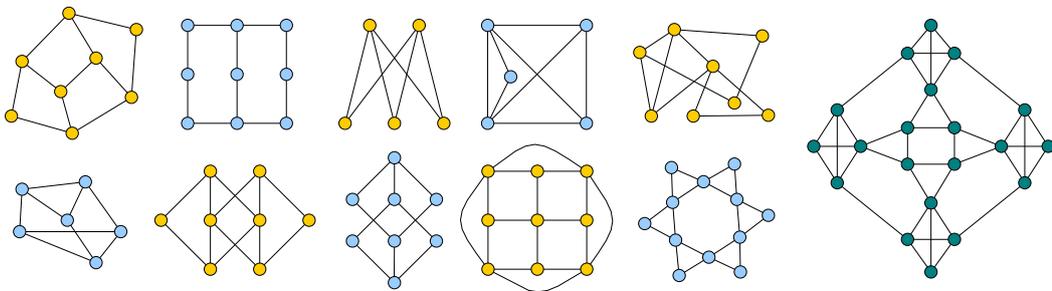


BILD 3.28: Zu Aufgabe 134

AUFGABE 135: Jemand möchte einen Rundgang durch ein Haus mit dem Grundriss aus Bild 3.29 und den umgebenden Garten unternehmen, bei dem jede Tür genau einmal benutzt wird. Zeige, dass dies nicht möglich ist. Wenn nun bei dem Rundgang genau zwei Türen ausgelassen werden dürfen, welche Türen kommen dann dafür in Frage?

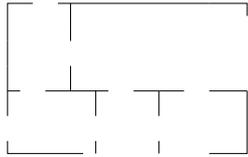


BILD 3.29: Zu Aufg. 135

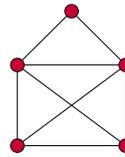


BILD 3.30: Zu Aufg. 136

AUFGABE 136: Eine kombinatorische Frage: Wie viele verschiedene offene Eulertouren gibt es im *Haus des Nikolaus*' (Bild 3.30)? Dabei gelten zwei Touren nur dann als gleich, wenn sie als Tupel komponentenweise gleich sind.

AUFGABE 137: Zeichne zwei Graphen mit jeweils 10 Ecken und 13 Kanten: Der erste soll eine geschlossene Eulertour, aber keinen Hamiltonkreis besitzen, bei dem zweiten sei es umgekehrt. Gibt es auch einen Graphen mit 10 Ecken und 13 Kanten, der beides besitzt?

AUFGABE 138: Begründe, dass der Graph in Bild 3.31 keinen Hamiltonkreis besitzt.

AUFGABE 139: Besitzt der sechszackige Stern aus Bild 3.32 einen Hamiltonkreis?

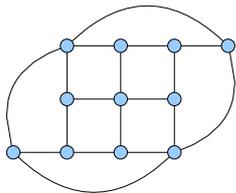


BILD 3.31: Zu Aufg. 138

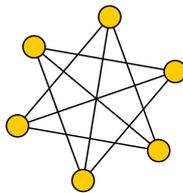


BILD 3.32: Zu Aufg. 139

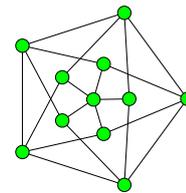


BILD 3.33: Zu Aufg. 140

AUFGABE 140: Der Graph in Bild 3.33 besitzt einen Hamiltonkreis. Versuche, ihn zu finden.

AUFGABE 141: Wir betrachten „Schachbrettgraphen“, in denen die Ecken ein $n \times n$ -Gitter bilden und nur solche Ecken benachbart sind, die ein Turm im Schachspiel mit einem Schritt der Länge 1 verbinden könnte. Zeige, dass die Schachbrettgraphen für $n = 6$ und $n = 8$ jeweils einen Hamiltonkreis besitzen, für $n = 9$ jedoch nicht.

AUFGABE 142: Sechs Diplomaten aus sechs Ländern sollen bei einer Konferenz an einem runden Tisch Platz nehmen. Es gibt allerdings Konflikte zwischen den Ländern A und B, zwischen B und C, zwischen B und E, zwischen C und D sowie zwischen E und F; deshalb sollen die Diplomaten dieser Länder möglichst nicht nebeneinander platziert werden. Ist dies tatsächlich möglich?

Hinweis: Die Situation kann durch einen Graphen mit sechs Ecken modelliert werden, in dem alle Länder außer den jeweiligen Konfliktparteien benachbart sind. Es ist dann die Frage nach der Existenz eines Hamiltonkreises in diesem Graphen zu beantworten.

AUFGABE 143: In dieser Aufgabe benutzen wir den Satz von Grinberg (3.92), um gewisse planare Graphen als nicht-hamiltonsch zu entlarven.

- Zeige, dass die drei blauen Graphen aus Bild 3.34 allesamt nicht hamiltonsch sind.
- In dem roten Graphen aus Bild 3.34 bezeichnen wir die Kanten, die den äußeren Ring mit dem inneren Ring verbinden, als *Zwischenkanten*. Zeige, dass der rote Graph hamiltonsch ist und dass jeder Hamiltonkreis in diesem Graphen zwei benachbarte Zwischenkanten durchläuft.
- Begründe, dass ein planarer Graph nicht hamiltonsch ist, wenn er nur Gebiete der Grade 5, 8 und 7 besitzt und der Grad 7 genau einmal vorkommt.
- Begründe, dass ein planarer Graph nicht hamiltonsch ist, wenn er nur Gebiete der Grade 4, 6 und 9 besitzt und der Grad 9 genau einmal vorkommt.

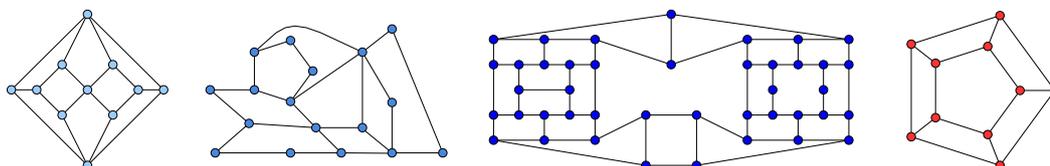


BILD 3.34: Zu Aufgabe 143: Der rote Graph ist hamiltonsch, die drei blauen nicht.

Die Grundlagen der graphentheoretischen Sprache

Da unsere Schüler wohl kaum bis zur Ebene formaler graphentheoretischer Beweise vordringen werden, scheint eine anschauungsfreie Definition von Graphen wie in 3.1 verzichtbar zu sein. Stattdessen verweisen wir unmittelbar auf die graphischen Darstellungen von Graphen. Unverzichtbar hingegen erscheint eine sichere Kenntnis der wichtigsten Grundbegriffe und Sprechweisen; dazu gehören neben *Ecke* und *Kante* die Sprache der Eckenbenachbarung und Kanteninzidenz (3.1) sowie die in Definition 3.4 eingeführten Begriffe wie *isolierte*

Ecke, *regulärer Graph* und *Vollständigkeit*. Auch die Begriffe *Zusammenhang*, *Zusammenhangskomponenten*, *Komplementärgraph* und *Kreis* können ohne Probleme formlos eingeführt werden.

Wir präsentieren im Folgenden eine Liste von Aufgaben zum Üben der graphentheoretischen Sprache; als Werkzeug zum Lösen der Aufgaben sollte die Bilanzgleichung 3.6 zur Verfügung stehen.

AUFGABE 144: Wie viele verschiedene (also paarweise nicht-isomorphe) Graphen mit vier Ecken gibt es? Zeichne jeweils ein Beispiel.

AUFGABE 145: Wie viele verschiedene Graphen mit genau sechs Ecken und genau zwei Komponenten gibt es? Zeichne jeweils ein Beispiel.

AUFGABE 146: Ein vollständiger Graph G besitze mehr als 500 Kanten. Wie viele Ecken hat er dann mindestens?

AUFGABE 147: Die Zusammenhangskomponenten eines Graphen G mit insgesamt 24 Kanten seien jeweils vollständig; je zwei von ihnen haben unterschiedlich viele Ecken. Welche Eckenanzahlen kommen für diesen Graphen in Frage?

AUFGABE 148: Wie viele verschiedene reguläre Graphen mit zwölf Kanten gibt es? Zeichne jeweils ein Beispiel.

AUFGABE 149: Wir betrachten einen Graphen mit n Ecken und $n - 1$ Kanten. Zeige, dass G dann eine Ecke vom Grade 1 oder eine isolierte Ecke enthält.

AUFGABE 150: Welche Kantenzahlen können in einem Graphen mit sechs Ecken, Maximalgrad 5 und Minimalgrad 2 vorkommen?

AUFGABE 151: Gibt es einen Graphen mit 13 Ecken, 23 Kanten, 3 Komponenten, Minimalgrad 3 und Maximalgrad 4?

AUFGABE 152: Wir betrachten verschiedene Graphen mit zehn Ecken und vier Komponenten. Welche Anzahlen von Kanten können in diesen Graphen auftreten?

AUFGABE 153: Welche Kombinationen von Maximal- und Minimalgrad kommen für einen Graphen mit sieben Ecken und acht Kanten in Frage, wenn in diesem Graphen genau zwei verschiedene Eckengrade vorkommen? Zeichne für jede Kombination ein Beispiel.

AUFGABE 154: Zeichne einen zusammenhängenden Graphen, der jeweils genau einen Kreis der Längen 3, 5, 6 und 7 sowie genau zwei Kreise der Länge 4 enthält.

AUFGABE 155: Ein Graph habe n Komponenten, von denen zumindest eine nicht vollständig ist. Zeige, dass der komplementäre Graph einen vollständigen Teilgraphen mit $n + 1$ Ecken enthält.

AUFGABE 156: Zeige, dass es in jedem 4-regulären Graphen mit neun Ecken mindestens ein Dreieck gibt.

Hinweis: Hier helfen anscheinend keine Sätze, sondern nur eine ad-hoc-Betrachtung des Graphen mit Fallunterscheidung.

AUFGABE 157: Wir betrachten einen Graphen G mit folgenden Eigenschaften: G ist dreiecksfrei, und für zwei nicht-benachbarte Ecken x und y gibt es genau zwei weitere Ecken, die jeweils sowohl mit x als auch mit y benachbart sind („die gemeinsame Nachbarschaft von x und y besteht aus genau zwei Ecken“). Zeige, dass G dann regulär ist.

Hinweis: Da G offensichtlich zusammenhängend ist, reicht der Nachweis gleichen Eckengrades für benachbarte Ecken aus.

AUFGABE 158: (*Für Fortgeschrittene*) Es fällt nicht leicht, interessante Beispiele für Graphen mit den Eigenschaften von Aufgabe 157 zu finden; außer einer einzelnen Ecke, einer Strecke und einem Kreis mit vier Ecken gibt es offenbar keine naheliegenden Beispiele. Daher ist folgende Konstruktion eines größeren Beispiels interessant, und man überzeuge sich davon, dass es tatsächlich ein Beispiel ist: Als Ecken betrachte man alle 16 Teilmengen einer vierelementigen Menge, und zwei Ecken seien genau dann benachbart, wenn ihre symmetrische Differenz entweder genau ein Element oder genau vier Elemente enthält. Die symmetrische Differenz Δ ist dabei wie üblich definiert durch $A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

AUFGABE 159: Zeige für jede natürliche Zahl n : Es gibt einen dreiecksfreien Graphen mit n Ecken und $\left\lceil \frac{n^2}{4} \right\rceil$ Kanten, und kein dreiecksfreier Graph mit n Ecken besitzt mehr Kanten.

Hinweis: Der zweite Teil der Aufgabe („Kein dreiecksfreier Graph mit n Ecken besitzt mehr Kanten“) ist ein Spezialfall des *Satzes von Turán*. Der Spezialfall kann durch Induktion recht leicht bewiesen werden: Der triviale Fall $n \leq 2$ bildet den Induktionsanfang, und der Induktionsschritt erfolgt stets von n auf $n + 2$; in dem Graphen mit $n + 2$ Ecken lösche man zwei benachbarte Ecken und wende die Induktionsvoraussetzung auf den Restgraphen an. Zur Vereinfachung kann die Aussage auf gerade n eingeschränkt werden; dann ist die Gaußklammer offensichtlich überflüssig.

AUFGABE 160: Zeige, dass in einem g -regulären Graphen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten kleiner oder gleich $\frac{|E|}{g+1}$ ist.

AUFGABE 161: Wir betrachten einen Graphen G , der genau zwei Kreise und eine geschlossene Eulertour besitzt. Zeige, dass genau eine Ecke von G vom Grade 4 ist und dass alle anderen Ecken vom Grade 2 sind. Zeichne außerdem ein Beispiel mit sieben Kanten.

Isomorphie von Graphen, Eckengradtupel

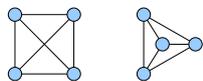


BILD 3.35

In der Schule werden wir Graphen wohl formlos einführen – als Mengen von Punkten, von denen einige durch Linien bzw. Kanten verbunden sind. Diese didaktische Maßnahme verleiht der Frage nach der Isomorphie von Graphen sofort eine gewisse

Brisanz: Zwar wird jeder Schüler einsehen, dass ein Graph sich nicht wesentlich dadurch ändert, dass wir eine seiner Ecken um einige Millimeter verschieben, doch bereits die verschiedenen Darstellungen eines vollständigen Graphen mit vier Ecken (Bild 3.35) sollten für Nachdenklichkeit sorgen; so verschieden die Graphen auch aussehen mögen, ihre Struktur ist doch dieselbe.

Es ist wohl didaktisch günstig, dass Isomorphie-Phänomen zunächst *dynamisch* zu betrachten. Als Werkzeug bietet sich ein Computerprogramm zur Darstellung von Graphen an, etwa der *yEd Graph Editor*, der kostenlos im Internet unter http://www.yworks.com/de/products_yed_about.html¹⁴ verfügbar ist. Der von Geometrie-Software bekannte Zugmodus eines solchen Programms erlaubt die Variation einer Figur am Bildschirm bei automatischer Aufrechterhaltung der Struktur der Figur. Für Graphen bedeutet das, dass die Ecken auf dem Bildschirm ihre Position verändern, ihre Kantenverbindungen aber gleich bleiben. Dem optischen Eindruck nach scheint das Ergebnis der Prozedur oft keine Verwandtschaft mehr mit der Ausgangskonstellation aufzuweisen; bereits das kleine Beispiel aus Bild 3.35 ist ein Beleg dafür. Diese Spannung zwischen (möglicherweise) gleicher Struktur einerseits und verschiedenem Aussehen andererseits verleiht den entsprechenden Aufgaben ihren Reiz.

Der formale Isomorphiebegriff aus Definition 3.3 steht in der Schule wohl nicht zur Verfügung, weil der formale Begriff des Graphen fehlt. Die folgende Aufgabe 162 wird zeigen, auf welche Weise sich die Frage nach der Isomorphie von Graphen dennoch definitiv beantworten lässt – sei es positiv oder negativ.

AUFGABE 162:

Welche der sechs Graphen in Bild 3.36 sind zueinander isomorph?

Zunächst einmal müssen hier einige Reflexe unterdrückt werden; denn auf den ersten Blick ähneln sich der blaue und der grüne Graph, da sie kreisförmig wirken; ebenso der gelbe und der rote Graph, da sie rechteckig erscheinen; der braune

¹⁴ Abrufdatum: 23. März 2012

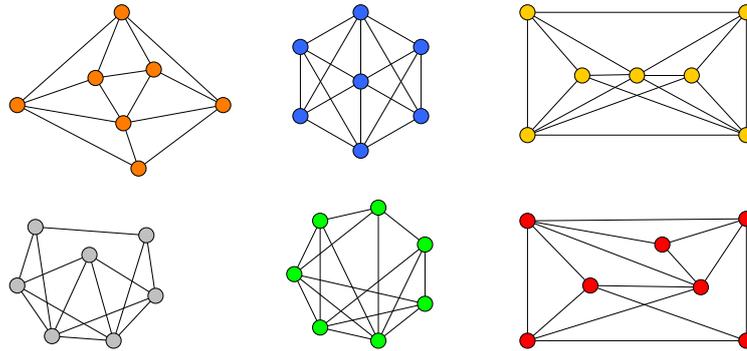


BILD 3.36: Welche Graphen sind isomorph zueinander?

Graph fällt etwas aus der Reihe, weil er der einzige der sechs Graphen ist, dessen Kanten überschneidungsfrei gezeichnet sind. Diese Kriterien taugen jedoch für eine Isomorphie-Untersuchung nicht. Stichhaltige Kriterien sind hingegen die Anzahlen der Ecken und Kanten sowie die jeweiligen Eckengradtupel. Wir stellen daher eine erste Untersuchung bezüglich dieser Merkmale an:

	Eckenanzahl	Kantenanzahl	Eckengradtupel
braun	7	14	(3, 4, 4, 4, 4, 4, 5)
blau	7	16	(4, 4, 4, 4, 5, 5, 6)
gelb	7	16	(4, 4, 4, 4, 5, 5, 6)
grau	7	14	(3, 3, 4, 4, 4, 5, 5)
grün	7	16	(4, 4, 4, 4, 5, 5, 6)
rot	7	14	(3, 3, 4, 4, 4, 5, 5)

Die Eckenanzahl wird uns also nicht helfen, eventuelle Unterschiede aufzudecken; aber bereits die Kantenanzahl sorgt dafür, dass unsere sechs Graphen sich in zwei Untergruppen aufteilen; wir beschäftigen uns zunächst mit den 14-Kanten-Graphen.

Die Tabelle zeigt bereits, dass der graue und der rote Graph aussichtsreiche Isomorphie-Kandidaten sind, denn sie stimmen sogar in ihren Eckengradtupeln überein, während der braune Graph hier ausscheidet. Aber sind der graue und der rote Graph tatsächlich isomorph? Wir untersuchen die Struktur der beiden Graphen genauer, indem wir jetzt nicht nur Nachbarschaften von je zwei Ecken betrachten, sondern auch Kreise der Länge 3. Dabei betrachten wir in den beiden fraglichen Graphen solche Ecken, die einander bei einer tatsächlichen Isomorphie der Graphen entsprechen müssten; wir

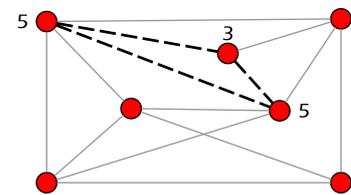


BILD 3.37: Der verräterische 5-5-3-Kreis

wählen für diesen Zweck jeweils die zwei Ecken vom Grade 5 und untersuchen die Kreise der Länge 3, in denen sie liegen. Schnell stellen wir fest, dass es im roten Graphen einen 5-5-3-Kreis gibt, also einen Kreis der Länge 3, dessen Ecken die Grade 5, 5, 3 aufweisen (siehe Bild 3.37). Einen solchen Kreis gibt es in dem grauen Graphen nicht; es gibt dort keine Ecke vom Grade 3, die mit *beiden* Grad-5-Ecken verbunden wäre. Das ist ein kritischer Struktur-Unterschied. Also sind der graue und der rote Graph trotz des begründeten Anfangsverdachts nicht isomorph! Überhaupt gibt es also unter den drei 14-Kanten-Graphen keine strukturgleichen Graphen.

Wir wenden uns nun den drei 16-Kanten-Graphen zu. Alle drei Eckengradtupel sind gleich. Dennoch ist der blaue Graph weder zu dem gelben noch zu dem grünen Graphen isomorph, denn der blaue Graph enthält einen 5-5-6-Kreis¹⁵, die anderen beiden jedoch nicht. Unsere letzte Chance, überhaupt noch eine Isomorphie zu finden, besteht nun im Vergleich des gelben mit dem grünen Graphen. Hoffnungsvoll versuchen wir die Strukturgleichheit nachzuweisen: Beide Graphen besitzen genau eine Ecke vom Grade 6; wir markieren diese in beiden Graphen mit dem Buchstaben *A* (siehe Bild 3.38). Die beiden Ecken vom Grade 5 im gelben Graphen nennen wir *B* bzw. *C*. Aber welche der beiden Grad-5-Ecken im grünen Graphen ist die Entsprechung zu *B*, und welche entspricht *C*? In der Darstellung des gelben Graphen erkennen wir eine gewisse Symmetrie; *B* und *C* scheinen vertauschbar zu sein; wir hoffen, dass diese Vertauschbarkeit auch für die beiden Grad-5-Ecken im grünen Graphen gilt und bezeichnen dort diese Ecken in beliebiger Reihenfolge ebenfalls mit *B* und *C*. Die vier Grad-4-Ecken im gelben Graphen nennen wir *D*, *E*, *F* und *G*. Wir erkennen, dass im gelben Graphen die Ecke *E* die einzige ist, die nicht mit *B* verbunden ist; wir forschen im grünen Graphen nach der Ecke mit eben dieser Eigenschaft und nennen diese auch *E*. Durch weitere Betrachtungen dieser Art weisen wir den letzten drei Ecken des grünen Graphen nach und nach die Bezeichnungen *D*, *F*, *G* zu.

Der eigentliche Isomorphiebeweis steht aber noch aus. Um ihn zu führen, erstellen wir für den gelben Graphen eine *Nachbarschaftsmatrix* (Bild 3.38, Mitte) und markieren benachbarte Eckenpaare. Dabei können wir uns auf eine Hälfte der Matrix beschränken (rechts oben), da die Benachbarung von Ecken eine symmetrische Relation ist. Entscheidend ist nun, dass diese Nachbarschaftsmatrix *exakt* auch die Benachbarungen im grünen Graphen beschreibt, wie man einzeln nachprüfen kann. Somit ist durch die Benennung der Ecken gewissermassen

¹⁵ Gemeint sind wiederum die Eckengrade der drei Ecken des Kreises im Gesamtgraphen.

ein Isomorphismus konstruiert worden: Das gelbe A entspricht dem grünen A , das gelbe B dem grünen etc. Die Gleichheit der Nachbarschaftsmatrizen ist der Nachweis für die in der Isomorphie-Definition 3.3 geforderte „Nachbarschaftstreue“ des Isomorphismus'. Also sind der gelbe und der grüne Graph tatsächlich isomorph, und zwar als einzige der sechs Graphen dieser Aufgabe.

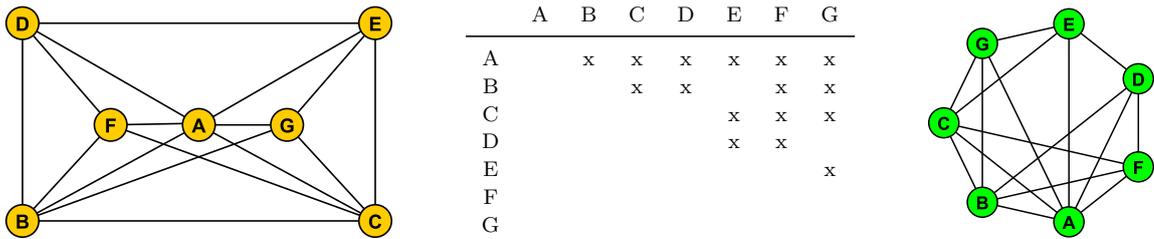


BILD 3.38: Der Strukturvergleich des gelben mit dem grünen Graphen durch eine Nachbarschaftsmatrix

Wir merken an, dass ein Fehlschlag bei dem Vergleich der Nachbarschaftsmatrizen nicht automatisch ein Beweis für die Nicht-Isomorphie der beiden Graphen gewesen wäre; vielleicht wäre dann lediglich eine geänderte Zuordnung der Ecken vom gelben zum grünen Graphen erforderlich gewesen, also gewissermaßen eine andere Benennung der Ecken.

Die Aufgabe 162 hat unter anderem den praktischen Nutzen von Eckengradtupeln demonstriert. Eckengradtupel sind sozusagen die Adressen von Graphen – jeder hat eine, aber leider haben manchmal mehrere Graphen dieselbe Adresse: Die beiden Graphen aus Bild 3.39 sind nicht isomorph und besitzen doch beide das Eckengradtupel $(1, 1, 2, 2, 2)$. Es ist daher eine interessante Aufgabe, einen Graphen aus seinem Eckengradtupel zu rekonstruieren. Die leichte Version dieser Aufgabe verlangt lediglich nach *einem* Graphen mit der vorgelegten Adresse, während die schwierige Version nach möglichst vielen nicht-isomorphen Graphen verlangt, also nach *allen* in Frage kommenden Isomorphie-Typen.

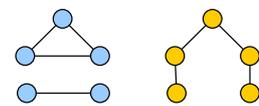


BILD 3.39

Wir werden demnächst in Aufgabe 163 ein Beispiel für den schwierigeren Aufgabentyp in Angriff nehmen; zuvor aber machen wir eine Beobachtung über die Wirkung von Eckenlöschungen auf das Eckengradtupel eines Graphen. Der Graph in Bild 3.40 links hat das Eckengradtupel $(1, 1, 2, 3, 3, 4)$; wir löschen die zentrale Ecke mitsamt den inzidierenden Kanten und erhalten einen Graphen mit dem Eckengradtupel $(1, 0, 1, 2, 2)$ bzw. – nach Umsortierung – $(0, 1, 1, 2, 2)$.

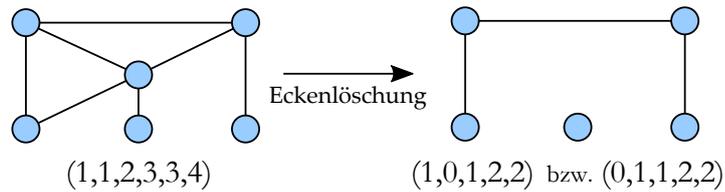


BILD 3.40

Die Eckenlöschung wird von den Eckengradtuplel reflektiert; die Komponente, die der gelöschten Ecke entspricht (hier ganz rechts), wird getilgt; und diejenigen Komponenten, deren Ecken mit der gelöschten Ecke benachbart waren, werden um eins reduziert; alle anderen Komponenten bleiben unverändert.

Die Technik bei der Lösung von Aufgabe 163 wird im Wesentlichen darin bestehen, dass wir in dem gesuchten und noch unbekanntem Graphen *virtuell* Ecken löschen und diesen Vorgang auf das vorgegebene Eckengradtuplel übertragen, in dem dann seinerseits eine Komponente verschwindet, so dass nun ein kürzeres, einfacheres Eckengradtuplel vorliegt. Meist empfiehlt sich die Löschung einer Ecke mit maximalem Eckengrad. Leider hängt die Wirkung einer Eckenlöschung auf das Eckengradtuplel natürlich davon ab, mit welchen Ecken die gelöschte Ecke benachbart war. Möchte man an dieser Stelle den Überblick über alle passenden Isomorphietypen von Graphen behalten, so muss man hier alle denkbaren Kombinationen verfolgen und gegebenenfalls Fallunterscheidungen vornehmen. Durch wiederholte Eckenlöschungen wird schließlich ein derart einfaches Eckengradtuplel erreicht, dass der entsprechende Graph problemlos angegeben werden kann. Jetzt werden die zurückliegenden Eckenlöschungen, die bislang nur an den Eckengradtupleln vollzogen wurden, in umgekehrter Reihenfolge an dem Graphen rückgängig gemacht, bis schließlich ein oder mehrere Graphen vorliegen, die dem ursprünglich vorgelegten Eckengradtuplel entsprechen. Wir illustrieren diese Methode durch unser Vorgehen bei folgender Aufgabe:

AUFGABE 163:

Wie viele paarweise nicht-isomorphe Graphen gibt es, die das Eckengradtuplel $(3, 3, 4, 4, 4, 4)$ besitzen?

Wie zuvor beschrieben werden wir das fragliche Eckengradtuplel durch Löschen von Ecken schrittweise auf einfachere Eckengradtuplel zurückführen, schließlich passende Graphen für die einfachen Eckengradtuplel finden und diese einfachen

Graphen dann durch schrittweises Hinzufügen der gelöschten Ecken zu den gesuchten Graphen erweitern. Das gesamte Vorgehen bei der Lösung dieser Aufgabe ist in Bild 3.41 anschaulich dargestellt.

Wir gehen also davon aus, dass wir einen Graphen mit dem fraglichen Eckengradtupel $(3, 3, 4, 4, 4, 4)$ vorliegen haben und löschen nun eine Ecke mit dem höchsten Eckengrad 4 (beispielsweise die Ecke ganz rechts im Eckengradtupel). Der Eckengrad 4 verrät, dass diese Ecke mit vier der fünf übrigen Ecken verbunden gewesen ist. Je nachdem, ob die eine Ausnahme-Ecke den Eckengrad 3 oder 4 hat, erhalten wir durch die Löschung der einen Ecke das Tupel $(2, 2, 3, 3, 4)$ bzw. $(2, 3, 3, 3, 3)$ – gegebenenfalls nach Sortierung der Komponenten des Tupels. Wir betrachten zunächst die erstgenannte Möglichkeit, die in Bild 3.41 durch rote Pfeile markiert ist.

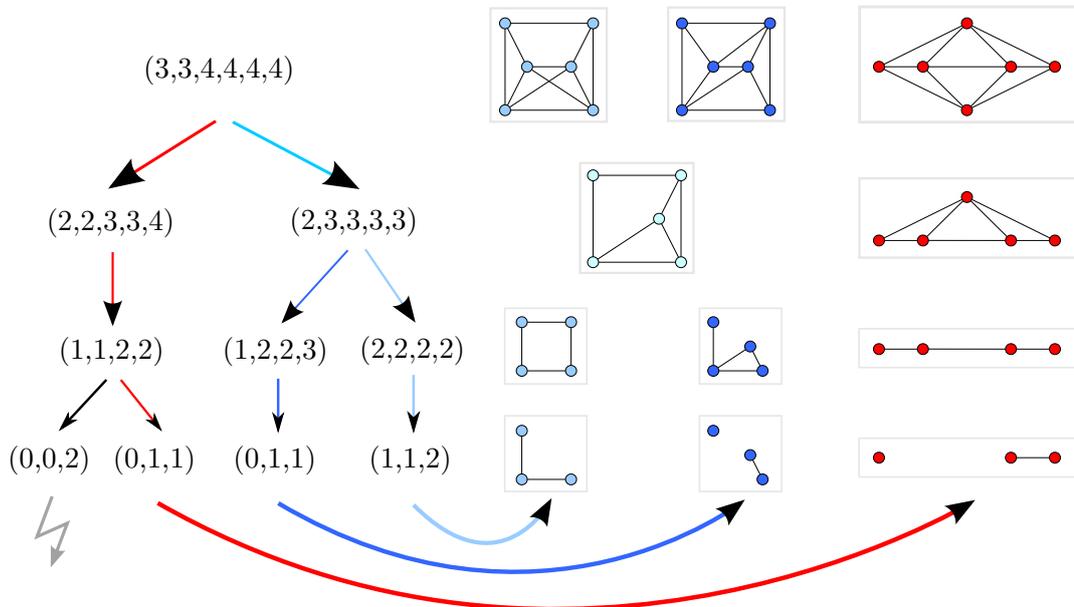


BILD 3.41: Zu Aufgabe 163

Der nächste Schritt ist einfacher, denn aus dem Tupel $(2, 2, 3, 3, 4)$ löschen wir jetzt die Grad-4-Ecke, und diese ist mit *allen* anderen Ecken verbunden. Wir erreichen jetzt also das Tupel $(1, 1, 2, 2)$. Wir löschen nun eine der Grad-2-Ecken; diese ist entweder mit beiden Grad-1-Ecken oder aber mit je einer Grad-1- bzw. Grad-2-Ecke verbunden. Wir erhalten in dem einen Fall das Tupel $(0, 0, 2)$, im anderen $(0, 1, 1)$. Der erste Fall ist jedoch widersprüchlich – es kann keine Grad-2-Ecke geben, wenn die anderen beiden Ecken isoliert sind. Es bleibt hier also nur $(0, 1, 1)$ zu betrachten: Wir könnten den Lösungsprozess noch um

eine Stufe fortführen und dann bei $(0, 0)$ enden, doch verzichten wir darauf; denn schon jetzt ist klar, dass es (bis auf Isomorphie) genau einen Graphen mit dem Gradtupel $(0, 1, 1)$ gibt – nämlich mit drei Ecken und einer Kante. Wir sehen einen solchen Graphen in Bild 3.41 rechts unten in roter Farbe.

Damit haben wir den ersten Zweig der ersten Fallunterscheidung zum Ende geführt. Der zweite (blaue) Zweig verzweigt sich erneut (siehe Bild 3.41), und jeder dieser beiden Unterzweige führt zu genau einem Isomorphietyp. Insgesamt haben wir also Aussichten auf (maximal) drei Kandidaten mit dem gesuchten Eckengradtupel $(3, 3, 4, 4, 4, 4)$. Dass das Eckengradtupel $(0, 1, 1)$ links unten in Bild 3.41 sowohl im roten als auch im dunkelblauen Fall auftritt, ist kein Grund, beide Fälle zu einem Fall zusammenzufassen, denn da der Weg des Eckenabbaus sich in beiden Fällen unterschieden hat, könnten auch die jeweiligen Ergebnisse beim „Wiederaufbau“ der Graphen unterschiedlich sein.

Dieser Wiederaufbau beginnt jetzt: Wir folgen zunächst dem roten Pfeil und gehen von dem Graphen mit den drei Ecken und der einen Kante aus. Die zuletzt gelöschte Ecke wird wieder angefügt – es war eine Grad-2-Ecke, die mit einer Grad-0-Ecke und einer Grad-1-Ecke aus $(0, 1, 1)$ verbunden war. Aus Symmetriegründen ist es strukturell unerheblich, mit welcher der bisherigen Grad-1-Ecken die neue Ecke benachbart ist; eine Fallunterscheidung ist nicht nötig. Nach dem Hinzufügen der Ecke erhalten wir einen Weg mit vier Ecken. Im nächsten Schritt wird eine Grad-4-Ecke hinzugefügt, die mit allen bisherigen Grad-2-Ecken benachbart ist – wir müssen also auch hier keine Fälle unterscheiden. Dies gilt ebenso für den letzten Schritt, denn hier fügen wir eine weitere Grad-4-Ecke hinzu, die mit allen bisherigen Grad-2- und Grad-3-Ecken benachbart ist. Wir enden bei dem roten Graphen rechts oben in Bild 3.41.

Der entsprechende Wiederaufbau verläuft auch in den beiden blauen Zweigen zunächst problemlos; die jeweils ersten beiden Aufbauschritte kommen ohne Fallunterscheidung aus. Allerdings münden beide blauen Zweige nach dem zweiten Aufbauschritt in den gleichen Isomorphietyp (türkiser Graph).

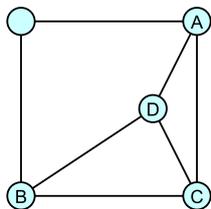


BILD 3.42

Der nun folgende allerletzte Aufbauschritt erfordert Vorsicht: Wir müssen eine Grad-4-Ecke hinzufügen, die mit allen Ecken außer *einer* bisherigen Grad-3-Ecke des türkisen Graphen verbunden ist. Wir benennen die Grad-3-Ecken dieses Graphen (Bild 3.42) und müssen entscheiden, mit welcher der Ecken A, B, C, D die neue Grad-4-Ecke *nicht* verbunden werden soll. Fällt die Wahl auf A , so entsteht der hellblaue Graph (siehe

Bild 3.41 oben); bei B gilt dasselbe – aus Gründen der Symmetrie im türkisen Graphen. Lassen wir die Ecke C ohne Verbindung mit der neuen Grad-4-Ecke, so entsteht der dunkelblaue Graph. Entscheiden wir uns schließlich für D , so zeigt eine kurze Untersuchung, dass auch hier der dunkelblaue Graph entsteht.

Wie man in Bild 3.41 schnell sieht, sind der dunkelblaue Graph und der rote Graph isomorph. Sie stellen also denselben Isomorphietyp dar. Der hellblaue Graph hingegen ist strukturell anders, denn in ihm sind die beiden Grad-3-Ecken benachbart, was auf den anderen Isomorphietyp nicht zutrifft. Es gibt also genau zwei nicht-isomorphe Graphen mit dem Eckengradtupel $(3, 3, 4, 4, 4, 4)$.

Tatsächlich hätten wir uns bei Aufgabe 163 einige Mühe sparen können, wenn wir ganz zu Anfang von den gesuchten Graphen mit dem Eckengradtupel $(3, 3, 4, 4, 4, 4)$ zu den jeweiligen Komplementärgraphen und ihren Eckengradtupeln übergegangen wären. Das Gradtupel der Komplementärgraphen ist offenbar $(1, 1, 1, 1, 2, 2)$, und mit viel weniger Aufwand als bei unserer ersten Lösung hätten wir zeigen können, dass hierfür (bis auf Isomorphie) genau zwei Graphen in Frage kommen. Durch erneuten Übergang zu den Komplementärgraphen hätten wir dann die ursprünglich gesuchten Isomorphietypen gefunden. Bei Eckengradtupeln mit „relativ hohen“ Eckengraden kann also der Übergang zum Komplementär-Tupel hilfreich sein. Dass wir davon bei Aufgabe 163 keinen Gebrauch gemacht haben, mussten wir zwar mit zusätzlichen Aufwand bezahlen, doch wurden wir auf diesem mühevollen Weg durch andere Einsichten belohnt.

Bei der Lösung von Aufgabe 163 haben wir bereits gesehen, dass es nicht für jedes monoton wachsende Tupel nicht-negativer ganzer Zahlen einen entsprechenden Graphen gibt. Gibt es jedoch einen solchen Graphen, so wird das Tupel *graphisch* genannt. Es ist klar, dass in einem graphischen Tupel mit n Komponenten alle Komponenten kleiner als n sind; und gemäß der Bilanzgleichung 3.6 darf auch die Summe aller Komponenten nicht größer sein als $n \cdot (n - 1)$. Aus Satz 3.7 folgt ferner, dass in einem graphischen Tupel die Anzahl der ungeraden Komponenten gerade ist. Aber auch zusammengenommen sind all diese Kriterien nicht hinreichend, wie das fünfte Beispiel aus Aufgabe 170 zeigt. Es gibt aber interessante Charakterisierungen graphischer Tupel: Wir verweisen auf [Wal, S. 11-14] und <http://mathworld.wolfram.com/GraphicSequence.html>.¹⁶

¹⁶ Abrufdatum: 3. April 2012

Weitere Aufgaben

AUFGABE 164: Es gibt (bis auf Isomorphie) genau drei Graphen mit dem Eckengradtupel $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$, von denen zwei zusammenhängend sind. Finde diese Graphen.

AUFGABE 165: Welche der sechs Graphen in Bild 3.43 sind zueinander isomorph?

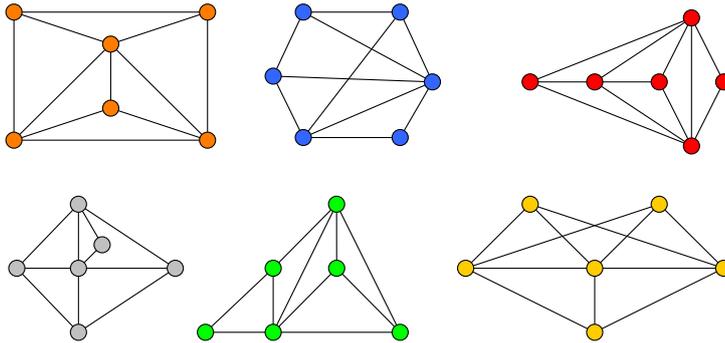


BILD 3.43: Zu Aufgabe 165

AUFGABE 166: Die beiden Graphen aus Bild 3.44 sind einander sehr ähnlich, aber nicht isomorph. Finde einen strukturellen Unterschied.

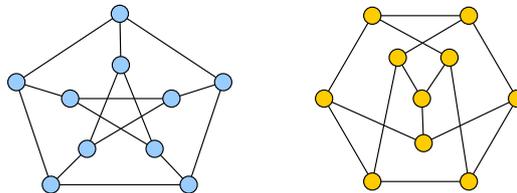


BILD 3.44: Zu Aufgabe 166

AUFGABE 167: Es gibt (bis auf Isomorphie) genau zwei Graphen mit dem Eckengradtupel $(1, 1, 2, 3, 3, 4)$. Finde diese beiden Graphen.

AUFGABE 168: Finde den (bis auf Isomorphie) einzigen Graphen mit dem Eckengradtupel $(2, 2, 3, 3, 3, 3, 6)$, der einen Kreis der Länge 7 enthält.

AUFGABE 169: Finde den (bis auf Isomorphie) einzigen Graphen mit dem Eckengradtupel $(2, 2, 2, 4, 4, 5, 5)$, in dem es ein Dreieck mit den Eckengraden 5-4-2 gibt.

AUFGABE 170: Welche der folgenden Tupel sind Eckengradtupel von geeigneten Graphen?

- $(5, 5, 5, 5, 5, 5)$, $(2, 2, 2, 2, 2)$, $(1, 3, 3, 3, 3)$,
 $(3, 3, 3, 3, 3, 5)$, $(1, 1, 3, 3)$, $(0, 2, 2, 2)$.

AUFGABE 171: Man bestimme alle Graphen G mit folgenden Eigenschaften: G hat genau zwei Ecken vom Grade 2, und alle anderen Ecken haben paarweise verschiedene Eckengrade.

AUFGABE 172: Max und seine Frau Anna sind zu einem Abendessen mit vier weiteren Paaren eingeladen; jeder Gast schüttelt zur Begrüßung die Hand jedes anderen Gastes, sofern sie einander nicht kennen. Später erfährt Max, dass jeder der neun anderen Gäste einer *unterschiedlichen* Anzahl von Personen die Hand geschüttelt hat. Finde heraus, wie vielen Personen Anna die Hand geschüttelt hat.

AUFGABE 173: Beschrifte die acht Ecken des Graphen in Bild 3.45 derart mit den Zahlen von 1 bis 8, dass benachbarte Ecken sich stets um mindestens 2 unterscheiden. *Hinweis:* Beachte, dass zwei Ecken vom Grade 6 sind.

AUFGABE 174: Zeige, dass es bis auf Isomorphie genau zwei selbstkomplementäre Graphen mit fünf Ecken gibt (zur Definition von *selbstkomplementär* siehe 3.5).

AUFGABE 175: Zeige, dass die beiden Graphen aus Bild 3.46 jeweils selbstkomplementär sind.

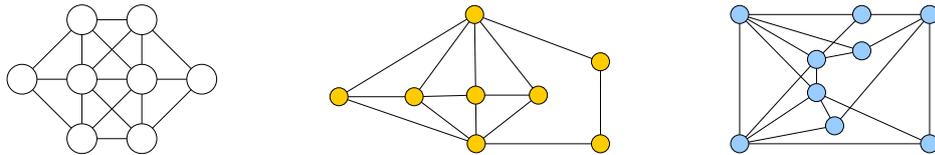


BILD 3.45: Zu Aufg. 173 BILD 3.46: Selbstkomplementäre Graphen (zu Aufg. 175)

AUFGABE 176: Finde einen Graphen mit dem Eckengradtupel $(1, 1, 3, 3, 4, 4, 6, 6)$, der selbstkomplementär ist.

AUFGABE 177: Ein Graph mit 7 Ecken und Minimalgrad 5 besitzt stets einen vollständigen Teilgraphen¹⁷ mit 4 Ecken (eine sogenannte *Clique* mit 4 Ecken).

Hinweis: Die Verallgemeinerung dieser Aufgabe läuft auf eine Variante des *Satzes von Turán* hinaus: Ein Graph mit n Ecken und Minimalgrad g enthält stets eine Clique mit $\lceil \frac{n}{n-g} \rceil$ Ecken, wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl bezeichnet, die größer oder gleich x ist (die Aufrundung von x). Der konkrete Fall lässt sich jedoch leichter beweisen, etwa so: Man nehme an, die Behauptung sei falsch, und betrachte in dem betreffenden Graphen G alle vierelementigen Teilmengen der Eckenmenge und addiere die Kantenanzahlen der jeweiligen „induzierten Teilgraphen“ von G . Diese Summe schätze man in beide Richtungen ab und produziere einen Widerspruch. Siehe auch Aufgabe 203.

¹⁷ Statt *Teilgraph* sollte hier eigentlich der Begriff *Untergraph* verwendet werden. Im Zusammenhang mit Cliquen ist der Unterschied jedoch irrelevant.

Planarität und die Eulerformel

Die Behandlung der Planarität mit Schülerinnen und Schülern ist zweifellos eine reizvolle Angelegenheit: Zum einen können wir ohne Planarität die erstaunliche Eulerformel nicht aussprechen, und zum anderen ist die Frage interessant, ob ein nicht-eben dargestellter Graph vielleicht doch eine ebene Darstellung besitzt. Das möglichst weitgehende Entwirren der Kantenüberschneidungen ist ein Vorgang, der den Einsatz eines Computers ratsam erscheinen lässt, da das ständige Aktualisieren der Darstellung auf dem Papier viel Mühe bereitet. Die von John Tantalo entwickelte Internetseite <http://www.planarity.net/game.php>¹⁸ bietet eine benutzerfreundliche Version des Kantenentwirr-Spiels: Auf mehreren Schwierigkeitsstufen werden planare Graphen in nicht-ebenen Darstellungen präsentiert, und der Spieler hat die Aufgabe, die Ecken des Graphen schrittweise so zu verschieben, dass schließlich eine ebene Darstellung entsteht.

In Gruppen von mehreren Schülern kann das Kantenentwirr-Spiel am Computer auch in Regie der Schüler gespielt werden. In Zweiergruppen baut jeder Schüler etwa mit dem *yEd Graph Editor* einen planaren Graphen, verzieht dessen Ecken zu einer wirr erscheinenden Darstellung mit Kantenüberschneidungen und übergibt diese Darstellung an seinen Partner, der diese Darstellung dann zu entwirren hat.

Doch auch bei der Betrachtung mutmaßlich nicht-planarer Graphen ist der Zugmodus eines Computerprogramms zur Darstellung von Graphen hilfreich. Mit Blick auf den Satz von Kuratowski können Kontraktionen zunächst *erwogen* werden, indem die beiden fraglichen Ecken übereinander geschoben werden; und die tatsächliche Durchführung der Kontraktion erfordert auch nur wenige Schritte: Eine neue Ecke einführen, die Kantenverbindungen der alten zwei Ecken auf die neue Ecke übertragen und die alten zwei Ecken mitsamt den inzidierenden Kanten löschen. Auch Unterteilungen lassen sich am Computer bequem studieren.

In didaktischer Hinsicht sind Nicht-Planaritäts-Nachweise dennoch ein schwieriges Terrain, und zwar unter anderem aus *logischen* und aus *organisatorischen* Gründen. Die logischen Probleme resultieren daraus, dass gewisse Implikationen $A \implies B$ in eben dieser Gestalt *begriffen*, jedoch in Form ihrer Kontrapositionen $\neg B \implies \neg A$ *angewendet* werden. Implikationen der Planaritätserhaltung werden

¹⁸ Abrufdatum: 3. April 2012

so zu Instrumenten eines Nicht-Planaritätsnachweises. So wissen wir etwa über jeden Graphen G : *Ist G planar, so ist auch jeder Teilgraph H von G planar.* Zur Anwendung kommt aber die Kontraposition: *Ist ein gewisser Teilgraph H von G nicht-planar, so ist auch G nicht-planar.* Das ist didaktisch noch nicht so bedenklich, denn mit geringer Mühe kann auch die Kontraposition *unmittelbar* begriffen werden: Unvermeidliche Kantenüberschneidungen in einem Graphen H sind sicherlich auch in jedem Obergraphen G vorhanden. Auch im Falle der Unterteilungen (*G ist genau dann planar, wenn alle Unterteilungen von G planar sind*) kann die Kontraposition in beiden Richtungen intuitiv erfasst werden. Doch bei den Kontraktionen wird es schwierig; wir wissen: *Ist G planar, so ist auch jedes Kontraktionsbild von H planar.* Wir benötigen jedoch auch hier die Kontraposition: *Besitzt ein Graph G ein nicht-planares Kontraktionsbild H , so ist G selbst nicht-planar.* Diese Kontraposition ist intuitiv wesentlich schwieriger zu begreifen als die ursprüngliche Implikation.

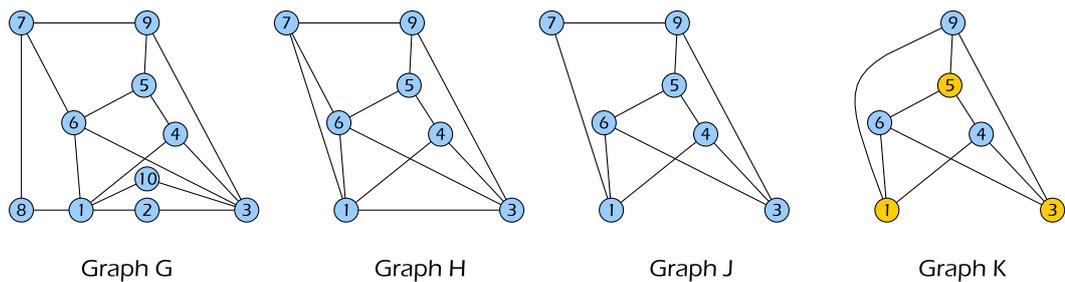


BILD 3.47: Ein Nicht-Planaritäts-Nachweis durch Betrachtung von Unterteilungen

Daraus scheint sich zu ergeben, dass es didaktisch wünschenswert ist, Kontraktionen aus dem Weg zu gehen. Der Satz von Kuratowski in seiner zweiten Version besagt ja, dass dies möglich ist. Doch unter *organisatorischen* Gesichtspunkten ist gerade der Verzicht auf Kontraktionen schmerzlich. Als Beispiel betrachten wir den Graphen G aus Bild 3.47 (links), dessen Nicht-Planarität nachgewiesen werden soll. Beschränken wir uns dabei auf die Betrachtung von Unterteilungen, so führt uns die Tilgung der Ecken $\{8\}$, $\{2\}$ und $\{10\}$ schnell auf den Graphen H (Bild 3.47). Dieser Vorgang besitzt den Vorteil, dass wir den Planaritätsstatus des Ausgangsgraphen links in keinem Fall ändern, also selbst dann nicht, wenn der Ausgangsgraph planar ist. Die Tilgung der Grad-2-Ecken ist eine in jederlei Hinsicht unproblematische Prozedur.

Doch wie setzen wir die Untersuchung fort? Der Graph H besitzt keine Grad-2-Ecken mehr, die wir tilgen könnten. Ist die Nicht-Planaritäts-Vermutung korrekt,

so garantiert der Satz von Kuratowski (3.91) die Existenz eines Teilgraphen von H , der eine Unterteilung einer der beiden Kuratowski-Graphen ist. Wir stehen nun vor dem Problem, einen solchen Teilgraphen anzugeben. Dies verlangt eigentlich eine Reorganisation unseres Denkens: Statt den Graphen H weiter zu verändern und *vorwärts* zu denken, müssen wir den K_5 oder den $K_{3,3}$ betrachten und ihn durch fortgesetzte Unterteilungen *rückwärts* in einen Teilgraphen von H überführen. Tatsächlich können wir den $K_{3,3}$ (Graph K) durch Unterteilungen in den Graphen J transformieren, der ein Teilgraph von H ist. Der Graph J ist also der in Satz 3.91 erwähnte Teilgraph von G .

Unsere Nicht-Planaritäts-Untersuchung ist also in Bild 3.47 teilweise vorwärts und teilweise rückwärts durchgeführt worden. Dieser didaktischen Schwierigkeit können wir aus dem Weg gehen, wenn wir vom Graphen H ausgehend Teilgraphen in Erwägung ziehen, die wiederum durch Tilgung von Grad-2-Ecken in Kuratowski-Graphen überführt werden können. Entfernen wir aus H die Kanten $\{1, 3\}$ und $\{6, 7\}$, so erhalten wir den Teilgraphen J , der nach Tilgung der Ecke $\{7\}$ auf den Kuratowski-Graphen K führt. Auf diese Weise sind wir konsequent vorwärts vorangeschritten. Neben dem Problem, vom Graphen H aus den „richtigen“ Teilgraphen J auszuwählen, müssen wir uns dabei im Klaren sein, dass wir eigentlich mit der Tilgung von Unterteilungen und nicht etwa mit den Unterteilungen selbst hantieren. Die Formulierung des Satzes von Kuratowski in der literaturüblichen Version 3.90 ist daher didaktisch unglücklich. Geschickter ist folgende Formulierung: *Ein Graph G ist genau dann nicht-planar, wenn er einen Teilgraphen enthält, der durch sukzessive Tilgung von Grad-2-Ecken in den K_5 oder in den $K_{3,3}$ überführt werden kann.* Mit dieser Formulierung erscheint der Verzicht auf die Kontraktionsmethode schließlich doch vertretbar.

Zum Vergleich möchten wir jetzt dennoch die Kontraktionsmethode vorführen, um die Nicht-Planarität des Graphen G aus Bild 3.47 zu beweisen. Ist die Kontraktionsmethode die einzig verfügbare, so können wir den Übergang von G nach H nicht als Tilgung von Grad-2-Ecken deklarieren. Etwas umständlich können wir jedoch mit Kontraktionen dasselbe leisten: Die Kante $\{1, 8\}$ wird kontrahiert, und die neue Ecke firmiert unter dem alten Namen $\{1\}$, womit die Ecke $\{8\}$ durch Kontraktion getilgt ist. Ähnlich gehen wir mit den Ecken $\{2\}$ und $\{10\}$ vor und erhalten somit erneut den Graphen H (Bild 3.48). Die Auswahl der nächsten, nicht-trivialen Kontraktionen fällt nicht leicht. Kontrahieren wir aber schließlich die Kanten $\{4, 5\}$ und $\{7, 9\}$ und nennen die neuen Ecken suggestiv $\{45\}$ und $\{79\}$, so erhalten wir den Graphen L , der sich

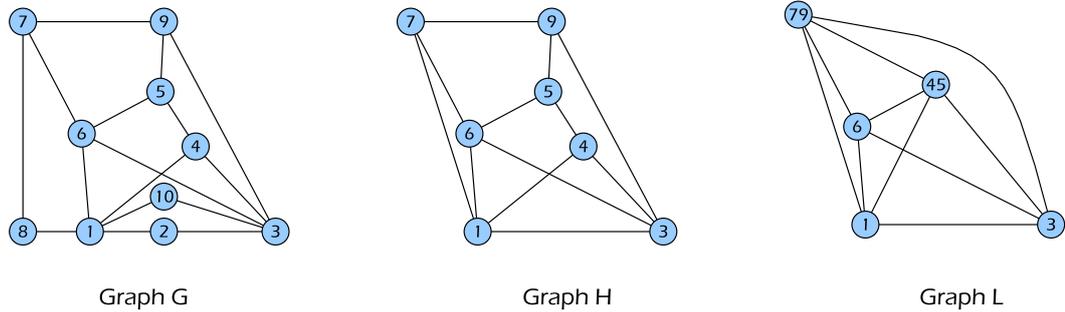


BILD 3.48: Ein Nicht-Planaritäts-Nachweis durch Betrachtung von Kontraktionen

als K_5 entpuppt. Damit ist auch diese Version des Nicht-Planaritäts-Beweises mit Benutzung der Kontraktionsmethode vollendet.

Ob man sich auf eine der beiden Methoden beschränkt, wird im Unterricht sicher auch eine Zeitfrage sein; und wenn man sich beschränkt, wird die Auswahl dieser einen Methode wohl auch von der subjektiven Bevorzugung durch den Unterrichtenden abhängen.

Wir fassen schließlich unser Vorgehen bei einer Planaritätsuntersuchung zusammen und unterstellen dabei die Kenntnis beider Methoden. Planarität wird durch praktisches Herbeiführen einer ebenen Darstellung bewiesen; Nicht-Planarität hingegen durch eine geeignete Kombination folgender Maßnahmen in beliebiger Reihenfolge: *Tilgung von Grad-2-Ecken*, *Übergang zu Teilgraphen* und *Kontraktionen*, wobei als Ergebnis entweder der K_5 oder der $K_{3,3}$ erscheinen muss.

Unsere Nicht-Planaritäts-Beweise fußen dabei allesamt auf der einfachen, fast trivialen Richtung des Satzes von Kuratowski, die in den verschiedenen Versionen des Satzes hinreichende Kriterien für Nicht-Planarität liefert. Die andere, schwierige Richtung des Satzes können wir didaktisch vernachlässigen; sie ist ohnehin von eher psychologischer Bedeutung: Bei einem als nicht-planar eingestuften Graphen hält sie die Motivation für die Suche nach geeigneten Eckentilgungen, Teilgraphen und Kontraktionen aufrecht, denn es gibt ja, sofern die Einstufung richtig ist, mit Sicherheit eine geeignete Folge solcher Maßnahmen. Praktisch niemals jedoch wird die schwierige Implikation des Satzes dazu benutzt, die Planarität eines Graphen tatsächlich zu beweisen, denn ein solches Unterfangen würde ja die Besichtigung aller Teilgraphen erfordern.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 178: Zeichne eine ebene Darstellung eines 4-regulären Graphen mit zehn Gebieten.

AUFGABE 179: Wir interessieren uns für zusammenhängende, planare Graphen G mit folgenden Eigenschaften:

- G hat genau sieben Ecken, aber keine Endecken.
- Jedes Gebiet von G (auch das Außengebiet!) ist entweder ein Dreieck, ein Viereck oder ein Fünfeck.
- Mindestens ein Gebiet von G ist ein Fünfeck.

Wir nennen zwei Graphen G und H mit diesen Eigenschaften *vom selben Typ*, wenn sie in der Anzahl der Dreiecke, Vierecke und Fünfecke jeweils übereinstimmen. Zeichne möglichst viele verschiedene Graphen mit den gesuchten Eigenschaften, die paarweise nicht vom selben Typ sind. Wähle dabei jeweils ein Fünfeck als Außengebiet; und begründe, dass es keine weiteren Graphen mit den gesuchten Eigenschaften gibt, die von anderem Typ sind.

Hinweis: Satz 3.86 (Bilanzgleichung für Gebietsgrade).

AUFGABE 180: Wir betrachten einen Graphen G mit elf Ecken und seinen Komplementärgraphen G^* . Zeige, dass mindestens einer der beiden Graphen nicht-planar ist. Finde außerdem einen Graphen mit sieben Ecken, der ebenso wie sein Komplementärgraph planar ist.

AUFGABE 181: Zeige, dass in einem planaren Graphen mit weniger als 12 Ecken mindestens eine Ecke höchstens den Grad 4 hat.

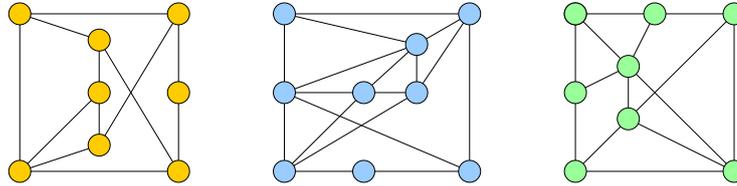
AUFGABE 182: Zeige, dass in einem planaren Graphen mit weniger als 30 Kanten mindestens eine Ecke höchstens den Grad 4 hat.

AUFGABE 183: Wie viele Ecken hat ein planarer Graph mindestens, wenn er fünf Ecken vom Grade 4 enthält?

AUFGABE 184: Wir definieren eine Familie von Graphen: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei G_n der Graph mit der Eckenmenge $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}\}$, und je zwei verschiedene Ecken $\{k\}$ und $\{l\}$ seien genau dann benachbart, wenn eine der beiden Zahlen k, l die andere teilt.

- a) Beweise die Planarität von G_{10} durch eine ebene Darstellung dieses Graphen.
- b) Finde ein einfaches Argument dafür, dass G_{18} nicht planar ist.
- c) Finde die kleinste natürliche Zahl n derart, dass G_n nicht planar ist.

AUFGABE 185: Beweise oder widerlege die Planarität der folgenden Graphen.



AUFGABE 186: Zeige: Sind alle Gebiete eines planaren Graphen Dreiecke – einschließlich des unbegrenzten Außengebiets –, so ist die Anzahl dieser Gebiete gerade.

AUFGABE 187: Beweise: Ein Graph mit Minimalgrad ≥ 6 ist nicht planar.

Hinweis: Satz 3.88.

AUFGABE 188: Zeige, dass ein planarer Graph mit elf Ecken und Minimalgrad 4 stets zusammenhängend ist.

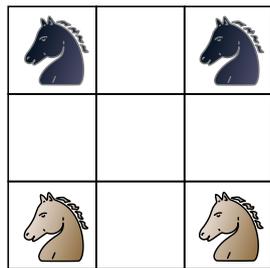


BILD 3.49

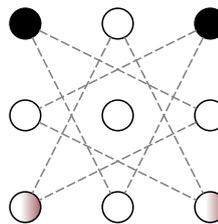


BILD 3.50

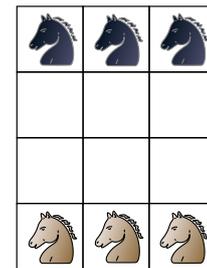


BILD 3.51

AUFGABE 189: Gelegentlich verhilft die Planarisierung einer Graphendarstellung mit anfangs sehr vielen Kantenüberschneidungen zu überraschender Übersicht. Wir betrachten zwei Beispiele aus der Kategorie der Schachbrett-Probleme:¹⁹

- a) Auf einem 3×3 -Schachbrett stehen zwei weiße Springer zwei schwarzen Springern gegenüber (Bild 3.49). Durch möglichst wenige Springerzüge sollen die weißen Springer in die beiden oberen Ecken und die schwarzen Springer die beiden unteren Ecken des Schachbretts gebracht werden, wobei Weiß und Schwarz einander beim Ziehen nicht abwechseln müssen. Natürlich darf jedes Feld des Schachbretts stets nur von höchstens einer Figur besetzt sein. Man versuche zunächst, diese Aufgabe „naiv“ zu lösen.

¹⁹Die hier verwendete Darstellung der Springer-Figuren stammt von der Homepage des italienischen Mathematikstudenten Maurizio Monge: http://poisson.phc.unipi.it/~monge/chess_art.php (Abrufdatum: 11. Februar 2012)

- b) Die Zugmöglichkeiten in dem Problem aus a) können in naheliegender Weise durch einen Graphen dargestellt werden (Bild 3.50). Man finde eine ebene Darstellung dieses Graphen und lese an dieser die Lösung des Problems ab.
- c) Man löse das entsprechende Problem für ein 4×3 -Schachbrett mit jeweils drei Springern pro Farbe (Bild 3.51). Allerdings ist die Lösung hier auch nach der Planarisierung nicht so offensichtlich wie bei dem Problem auf dem 3×3 -Schachbrett.

Die folgenden vier Aufgaben nehmen Bezug auf die *Kreiszahl*, die man im Zusammenhang mit der Eulerformel und der Planarität einführen kann (weil die Kreiszahl die Gebiete von planaren Graphen zählt). Die Aussagen der vier Aufgaben gelten jedoch auch in nicht-planaren Graphen; allerdings können die Aufgaben zur Vermeidung des Begriffs *Kreiszahl* auf zusammenhängende, planare Graphen eingeschränkt werden, wobei dann jeweils $\delta(G)$ durch *Anzahl der Gebiete minus 1* ersetzt werden kann.

AUFGABE 190: Beweise den *Satz vom Maximalgrad*: Für einen Graphen G mit Maximalgrad g gilt: $g \leq |E_1| + 2 \cdot \delta(G)$.

Hinweis: Die Fälle $g = 0$ und $g = 1$ erledige man separat. Im Hauptfall ziehe man die Bilanzgleichung heran – und natürlich die Definition der Kreiszahl.

AUFGABE 191: Zeige, dass für einen Graphen G mit mindestens zwei Ecken gilt:

$$\sqrt{2 \cdot \delta(G) + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}} \leq |E|.$$

AUFGABE 192: In einem Graphen G seien alle Eckengrade mindestens 2, und die Mächtigkeit von G sei ungerade. Zeige, dass G mindestens zwei Kreise enthält.

Hinweis: Satz 3.56, Bilanzgleichung.

AUFGABE 193: Sei G ein Graph, und sei E_2 die Menge all seiner Ecken vom Grad 2. Dann gilt: Hat G eine geschlossene Eulertour, so ist $|E| + |K| \leq \delta(G) + |E_2|$.

Modellierung durch Graphen

Die Graphentheorie eignet sich sehr gut zur Modellierung manch realer Sachverhalte. Erste typische Beispiele waren die Aufgabe 128 über das deutsch-dänische Radwegenetz, Aufgabe 133 über das Domino-Spiel sowie Aufgabe 142 über die Sitzordnung an einem runden Tisch. Es handelt sich hierbei um Aufgaben, bei denen *Modellierung im eigentlichen Sinn* betrieben wird. Damit ist gemeint, dass nach der Übertragung des realen Sachverhalts in das mathematische Modell die mathematische Theorie in Form von Sätzen dazu benutzt wird, um das Problem zunächst auf der mathematischen Ebene zu lösen und die Lösung dann

zurück in die Realität zu übersetzen. Bei den beiden erstgenannten Beispielen handelt es sich etwa um die Theorie der Eulertouren.

Häufig treffen wir jedoch auf Aufgaben, bei denen die Graphentheorie hauptsächlich zur Veranschaulichung eines Sachverhalts benutzt wird, nicht aber zur Findung der eigentlichen Lösung. Es findet also eine Übersetzung in die graphentheoretische Sprache statt, ohne dass danach ein graphentheoretischer Satz bemüht würde. Vielmehr wird die Aufgabe mithilfe der graphentheoretischen Veranschaulichung ad hoc gelöst. Die Graphentheorie wird hier nur zur Schaffung von Übersicht und Klarheit eingesetzt. Wir könnten hier statt von *Modellierung* eher von *Visualisierung* sprechen.

Dass die Visualisierungsaufgaben im Kontext von Schule in der Überzahl sind, liegt sicher auch daran, dass nur wenige ernsthafte graphentheoretische Sätze in der Reichweite von üblichen Schüleraktivitäten liegen; und nur *sehr* wenige dürften in diesem Rahmen sogar beweisbar sein. Am ehesten gilt dies noch für den Satz über die Existenz von Eulertouren (3.79, zumindest in der einfachen Richtung), unsere schlichten Bemerkungen zu Hamiltonkreisen (3.93), die Bilanzgleichung (3.6), den Satz 3.28 über den Zusammenhang von Komplementärgraphen, den Satz von Ramsey im Graphen mit sechs Ecken (3.29) sowie den Heiratssatz (3.69, zumindest in der einfachen Richtung). Auch die Sätze zur Planaritätstheorie sind bei anschaulicher Argumentation noch in Reichweite, inklusive der einfachen – und einzigen wirklich benötigten – Richtung des Satzes von Kuratowski (3.90 bzw. 3.91). Der Satz von Dirac (3.83) wäre zumindest im Falle eines Graphen mit sechs Ecken noch beweisbar; ein Fall, der in den einschlägigen Aufgaben durchaus relevant ist. Einige Ergebnisse zur Theorie der bipartiten Graphen und der Färbungen mögen gegenüber Schülern immerhin noch mitteilbar, wenn auch nicht beweisbar sein.

Trotz dieser Einschränkungen wenden wir uns nun einigen Modellierungsaufgaben zu, in denen diese Sätze tatsächlich zur Lösungsfindung herangezogen werden können.

Echte Modellierungsaufgaben

AUFGABE 194:

Vor langer Zeit gab es im alten China viele Familien von Flugdrachen. Die Drachen transportierten gern Briefe. Die Fürsten des Landes planten daher ein landesweites Postsystem mithilfe der Drachen. Bei der

Ausschreibung zu diesem Projekt erhielten zwei Drachenfamilien gemeinsam den Zuschlag, die anboten, jedes der vielen kleinen chinesischen Städtchen durch Flugdrachen mit jedem anderen direkt zu verbinden. Zur Umsetzung des Projektes wurde jede Direktverbindung genau einer der beiden Drachenfamilien zugeteilt. Jedoch gerieten die Drachen kurz nach dem Start des Postverkehrs derart in Streit, dass die beiden Familien danach gänzlich verfeindet waren. Die Fürsten des Landes wollten daher vermeiden, dass Drachen aus verschiedenen Familien sich bei der Postauslieferung in den Städten begegnen konnten, weil dies zu erheblichen Konflikten führen konnte. Die Fürsten begannen daher zu beratschlagen, ob das Postsystem mit nur einer der beiden Drachenfamilien fortgeführt werden konnte und dennoch Briefkontakt zwischen beliebigen Städtchen möglich sein würde.

Man zeige, dass es tatsächlich möglich war, mit nur einer der beiden Drachenfamilien alle Orte des Landes untereinander zu verbinden, wobei nur die dieser Familie ursprünglich zugeteilten Direktverbindungen verwendet wurden. Umwege über solche Direktverbindungen waren natürlich zugelassen.

Die Grundidee der Modellierung liegt hier auf der Hand: Die Städte werden durch Ecken eines Graphen modelliert, die Direktverbindungen zwischen den Städten durch Kanten. Etwas schwieriger ist die Übersetzung der Tatsache, dass von *zwei* Sorten von Drachen die Rede ist. Entscheidend ist nun, dass die eine Sorte von Drachen genau diejenigen Direktverbindungen kontrolliert, die die andere Sorte *nicht* kontrolliert. Im Modell haben wir es daher mit zwei komplementären Graphen zu tun. Der eine Graph stellt die Städte mit den Verbindungen der ersten Drachenfamilie dar; und der komplementäre Graph repräsentiert die gleichen Städte mit den Verbindungen der zweiten Drachenfamilie. Die Aufgabe verlangt von uns den Nachweis, dass eine der beiden Familien mit ihren bestehenden Direktverbindungen allein für die Verbindbarkeit je zweier chinesischer Städte sorgen kann, dass also zumindest einer der beiden komplementären Graphen zusammenhängend ist.

Genau dieser Nachweis gelingt durch den Verweis auf Satz 3.28, der eben dieses Phänomen ausdrückt. Ist der Satz den Schülern nicht bekannt, was der Normalfall sein dürfte, so läuft die erfolgreiche Erledigung der Aufgabe wohl darauf hinaus, den Beweis von Satz 3.28 nachzubilden. Da der Beweis nicht allzu schwer ist, wenn man den Zusammenhang eines Graphen als Verbindbarkeit je zweier Ecken auffasst, erscheint dieses Vorhaben durchaus machbar.

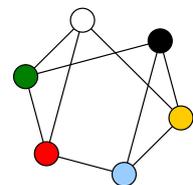
Die Aufgabe 204 greift die Idee des Komplementärgraphen ebenfalls auf; doch bedarf ihre Lösung keines ernsthaften Satzes. Dennoch erleichtert die Kenntnis der Graphentheorie und des Konzepts des Komplementärgraphen den Umgang mit der Aufgabe erheblich: Die graphentheoretische Sprache hilft, die ansonsten etwas unübersichtlichen Informationen des Aufgabentextes innerlich zu sortieren, weil man sie einem bekannten Phänomen zuordnen kann. Auch wenn hier also kein Satz der Graphentheorie zur Anwendung kommt, tritt doch deutlich eine ihrer ordnenden Ideen zutage, so dass es gerechtfertigt sein mag, hier von *eigentlicher Modellierung* zu sprechen. Ähnliche Phänomene treten bei Aufgabe 219 (jede Kreiskante ist eine Nicht-Brücke) und bei Aufgabe 207 auf (der „Feindschaftsgraph“ ist dort ein 3-regulärer Graph, in dem nicht-benachbarte Ecken stets dieselbe Nachbarschaft haben). Im Fall von Aufgabe 219 fällt die Zuordnung zu den eigentlichen Modellierungsaufgaben sogar noch etwas leichter, weil hier mit Satz 3.55 ein richtiger graphentheoretischer Satz zur Verfügung steht.

Einen Grenzfall zwischen echter Modellierung und bloßer Visualisierung stellt die nächste Aufgabe dar:

AUFGABE 195:

Eine Firma stellt zweifarbige Handtücher her. Sechs Farben stehen zur Verfügung. Für die Produktion jedes Handtuchs werden durch eine Maschine zwei verschiedene dieser sechs Farben ausgewählt. Bei einer Qualitätskontrolle wird eine kleine Auswahl von Handtüchern begutachtet. Es stellt sich heraus, dass jede Farbe in dieser Auswahl mindestens dreimal vorkommt. Zeige, dass es dann in dieser Auswahl drei Handtücher gibt, auf denen alle sechs Farben vertreten sind.

Die sechs Farben dieser Aufgabe können durch Ecken eines Graphen modelliert werden; zwei Ecken (Farben) sind durch eine Kante verbunden, wenn die in der Aufgabe beschriebene Auswahl von Handtüchern ein Handtuch mit den entsprechenden Farben enthält. Das nebenstehende Bild zeigt, wie der Graph aussehen könnte. Eine vollständig konkrete Information über das Aussehen des Graphen besitzen wir nicht; immerhin wissen wir aber, dass der Graph den Minimalgrad 3 besitzt, weil ja jede Farbe mindestens dreimal vorkommt. Die Aufgabe verlangt nun den Nachweis, dass – in der Sprache des Modells – der Graph eine perfekte Paarung besitzt, also drei Kanten, die insgesamt alle sechs Ecken überdecken.



Wie könnte dieser Nachweis geführt werden? Denkbar wäre es, sich auf den Satz von Dirac zu berufen (Minimalgrad 3); demnach besitzt der Graph einen Hamiltonkreis, etwa weiß - gelb - blau - schwarz - grün - rot - weiß. Dieser Kreis induziert dann eine perfekte Paarung, in unserem Beispiel weiß/gelb, blau/schwarz, grün/rot, und die Aufgabe ist gelöst. Ohne den Satz von Dirac und ohne Hamiltonkreis muss allerdings wohl mehr Mühe in die Lösung investiert werden. Wir führen eine solche Argumentation hier nicht aus, doch es bleibt festzuhalten, dass der Handtuch-Farben-Graph eine hilfreiche Visualisierung für die Situation der Aufgabe bleibt, selbst wenn keine graphentheoretischen Instrumente wie der Satz von Dirac bemüht werden, sondern stattdessen ad hoc argumentiert wird.

Um die Erzeugung einer perfekten Paarung aus einem Hamiltonkreis geht es auch bei der nächsten Aufgabe:

AUFGABE 196:

Von einem Schachbrett mit 64 Feldern werden zwei Felder entfernt (bzw. verboten). Zeige, dass man die restlichen 62 Felder genau dann mit 31 Dominosteinen überdecken kann, wenn die beiden entfernten Felder von verschiedener Farbe sind. Wir setzen dabei voraus, dass ein Dominostein gerade zwei benachbarte Felder überdecken kann und auch nur in dieser Weise platziert wird.

Der eine Teil der Aufgabe ist verhältnismäßig leicht und weithin bekannt. Wenn die beiden entfernten Felder gleichfarbig sind, etwa weiß, so bleiben 30 weiße und 32 schwarze Felder zurück; diese können durch 31 Dominosteine nicht überdeckt werden, weil jeder Stein genau ein schwarzes und ein weißes Feld überdeckt, so dass die Anzahlen der überdeckten weißen und der überdeckten schwarzen Felder nicht verschieden sein können. Wie aber sehen wir ein, dass bei verschiedenen Farben der entfernten Felder eine Überdeckung stets möglich ist? Das erscheint schwierig, denn die beiden entfernten Felder könnten benachbart sein, sie könnten Eckfelder oder Randfelder oder zentrale Felder sein: Die Lage ist unübersichtlich.

Wir befreien uns aus der misslichen Lage, indem wir eine graphentheoretische Modellierung mitsamt Verallgemeinerung vornehmen und folgenden Satz aussprechen:

Wir betrachten einen bipartiten hamiltonschen Graphen G . (Dann hat G gerade viele Ecken und besitzt eine perfekte Paarung, die von dem

Hamiltonkreis induziert wird.) Wir entfernen nun zwei Ecken mitsamt den inzidierenden Kanten aus G und nennen den Restgraphen G' . Dann gilt: Stammen die beiden entfernten Ecken aus verschiedenen Mengen der Bipartition, so besitzt auch G' eine perfekte Paarung.

Wenn wir diesen Satz beweisen könnten, so wäre Aufgabe 196 sofort gelöst, denn die Modellierung des Schachbretts führt zu einem Graphen, der einerseits hamiltonsch ist (es ist nicht schwer, einen Hamiltonkreis zu finden) und andererseits bipartit ist (weiße Ecken sind nur mit schwarzen Ecken verbunden und umgekehrt). Die von dem Satz versprochene perfekte Paarung entspricht der in Aufgabe 196 gesuchten Überdeckung mit Dominosteinen.

Überraschenderweise ist der Beweis des Satzes in der abstrahierten Situation gar nicht schwer: Haben wir nämlich einen bipartiten Graphen mit Hamiltonkreis vorliegen (Bild 3.52, links) und entfernen sodann aus jeder Menge der Bipartition eine Ecke mitsamt den inzidierenden Kanten (Bild 3.52, Mitte), so wird der Hamiltonkreis entweder auf *einen* Weg reduziert (wenn die entfernten Ecken im Hamiltonkreis benachbart waren) oder der Hamiltonkreis zerfällt in *zwei* disjunkte Wege (Bild 3.52, rechts). Entscheidend ist, dass der Weg bzw. die Wege jeweils eine *gerade* Anzahl von Ecken enthalten, da die eliminierten Ecken aus verschiedenen Mengen der Bipartition stammen. Ein Weg mit einer geraden Anzahl von Ecken besitzt jedoch offensichtlich eine perfekte Paarung, und indem wir die beiden Paarungen der beiden Wege gegebenenfalls vereinigen, erhalten wir eine perfekte Paarung des gesamten Restgraphen G' .

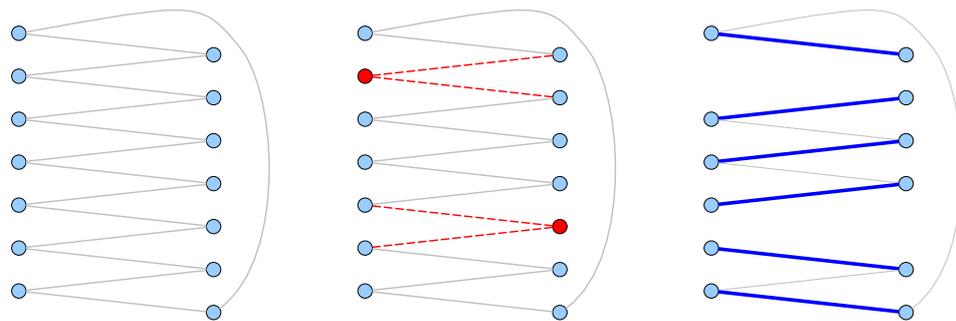


BILD 3.52: Zu Aufgabe 196

Unsere Lösung von Aufgabe 196 zeigt in besonderer Weise die Kraft von Modellierung und Abstraktion: Während wir auf dem tatsächlichen Schachbrett mit zwei entfernten Ecken den Überblick zu verlieren drohten, führt gerade die

Abwendung von dem vertrauten 8×8 -Quadrat des Schachbretts und die Hinwendung zu dessen graphentheoretischer Struktur zur Lösung der Aufgabe.

Es folgt die letzte Aufgabe, die wir in diesem Abschnitt ausführlich diskutieren:

AUFGABE 197:

Der deutsch-dänische Fahrradclub aus Aufgabe 128 ist wieder aktiv: Es soll ein vereinsinternes Tandem-Wettrennen veranstaltet werden, bei dem möglichst viele Teams von je zwei Vorsitzenden der 17 Ortsgruppen gegeneinander antreten. Die Nationalität spielt keine Rolle, aber es sollen nur Teams gebildet werden, die schon einmal zusammen Tandem gefahren sind; ungeübte Teams sollen nämlich nicht der Lächerlichkeit preisgegeben werden. In Bild 3.53 ist zu erkennen, welche Ortsvorsitzende gemäß dieser Vorgabe gemeinsam aufs Rad steigen dürfen. Wie viele Teams können (gleichzeitig) maximal gebildet werden?

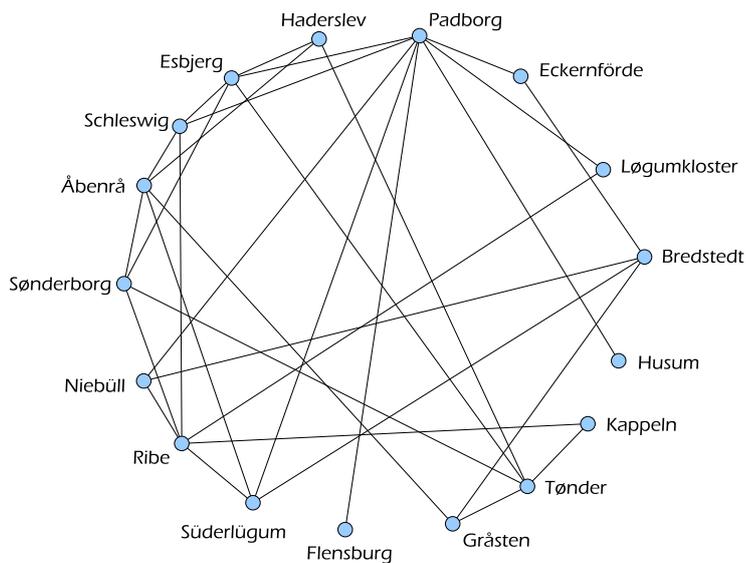


BILD 3.53: Zu Aufgabe 197: Zulässige Tandem-Partner

Die Aufgabe selbst übernimmt hier bereits einen Teil der Modellierung; anstatt einer umständlichen Auflistung von möglichen Tandem-Partnern ist die Information gleich in einem Graphen ausgedrückt. Die Modellierung der Fragestellung fällt leicht; es geht darum, eine möglichst große Paarung der Ecken in dem Graphen von Bild 3.53 zu finden. Das Problem besteht nun offenbar darin,

dass bei einer vorgelegten Paarung von aussichtsreicher Größe nicht klar ist, ob diese wirklich maximal ist; dass die vorgelegte Paarung selbst nicht vergrößert werden kann, reicht für diesen Zweck ja nicht aus; denn vielleicht muss eine maximale Paarung von Anfang an anders angelegt werden.

Der Satz von König (3.68) bietet hier keinen Ausweg, denn unser Graph ist nicht bipartit. Wir setzen unsere Hoffnung daher nun auf Bemerkung 3.67; vielleicht haben wir Glück, und es gibt in unserem Graphen trotz fehlender Bipartition eine Paarung und eine Eckenüberdeckung von gleicher Mächtigkeit, deren Entdeckung die Aufgabe lösen würde. Wie die Suche nach einer solchen Paarung und einer solchen Überdeckung im Einzelnen durchgeführt wird, ist ohne weiterführende Kenntnisse eine interessante Frage der Heuristik und kann zu interessanten Diskussionen unter Schülern führen. Es sei hier verraten, dass der Graph aus Bild 3.53 tatsächlich das Gewünschte besitzt, denn die Kanten Esbjerg-Haderslev, Padborg-Schleswig, Åbenrå-Gråsten, Ribe-Niebull, Bredstedt-Süderlügum und Tønder-Kappeln bilden eine Paarung mit sechs Kanten, und die jeweils erstgenannten Orte jedes Paares bilden eine Eckenüberdeckung mit sechs Ecken. Somit ist die maximale Zahl der Tandem-Teams bei dieser Aufgabe also sechs. Man beachte, dass es aber wohl auch andere Paarungen dieser Mächtigkeit in diesem Graphen gibt.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 198: Am Ende eines kleinen Tanzabends stellt jeder Teilnehmer fest, dass er (oder sie) mit genau zwei der anderen Teilnehmer²⁰ *nicht* getanzt hat. Es haben stets Männer mit Frauen getanzt. Wie viele Teilnehmer kann es an diesem Abend gegeben haben?

AUFGABE 199: In einer Kneipe treffen sich n Menschen ($n \geq 2$), von denen einige miteinander befreundet sind. Zeige, dass es mindestens zwei Kneipenbesucher gibt, die in der Kneipe dieselbe Anzahl von Freunden haben. *Hinweis:* Eckengradtupel!

AUFGABE 200: In einer Kneipe treffen sich sechs Menschen, von denen einige miteinander befreundet sind. Unter je drei Kneipengästen gibt es mindestens zwei Freunde. Beweise, dass es dann in der Kneipe sogar drei Menschen gibt, die paarweise miteinander befreundet sind.

²⁰ Es sind tatsächlich *beliebige andere Teilnehmer* gemeint, nicht etwa Teilnehmer des anderen Geschlechts.

AUFGABE 201: Am Ende einer größeren Abendgesellschaft zeigte es sich, dass keiner der anwesenden Herren mit weniger als zehn und keiner mit mehr als zwölf Damen getanzt hatte, während keine der Damen mit weniger als zwölf und auch keine mit mehr als 14 Herren zum Tanz gegangen war. Keiner der Herren hatte dieselbe Dame mehr als einmal zum Tanz geführt. Hätte jeder der Herren mit jeder Dame genau einmal getanzt, so hätten 480 Tänze stattfinden müssen. (Dabei zählt jeder Tanz, den ein Herr mit einer Dame ausführt, separat; wenn also beispielsweise 15 Paare gleichzeitig tanzen, so zählen wir dies als 15 Tänze und nicht etwa als einen Tanz.) Zeige, dass aus diesen Angaben die Anzahl der anwesenden Damen und Herren eindeutig abgeleitet werden kann, und bestimme außerdem die kleinste und die größte Anzahl von Tänzen, die nach diesen Angaben getanzt worden sein können.
Hinweis: Man betrachte eine einfache Variante der Bilanzgleichung für bipartite Graphen.

AUFGABE 202: Bei einer Abendveranstaltung tanzte jeder der anwesenden Herren mit genau drei Damen, und zwar mit jeder genau einmal. Als alle Teilnehmer nach dem Tanz noch in gemütlicher Runde beieinander saßen und den Abend überblickten, wurde festgestellt, dass jede der anwesenden Damen mit genau zwei Herren, und zwar mit jedem genau einmal, getanzt hatte. Ferner bemerkte man, dass je zwei der Herren im Verlaufe des Abends genau eine gemeinsame Tanzpartnerin gehabt hatten. Wie viele Damen und wie viele Herren waren anwesend?

Hinweis: Wie bei Aufgabe 201 erlaubt eine einfache Modifikation der Bilanzgleichung, das Anzahlverhältnis von Damen zu Herren zu bestimmen. Außerdem betrachte man diejenige Abbildung, die jeder Zweiermenge von Herren die eindeutig bestimmte Dame zuordnet, die mit diesen beiden Herren tanzt, und zeige, dass diese Abbildung eine Bijektion auf die Menge aller anwesenden Damen ist. Die entsprechende Mächtigaussage verhilft zusammen mit der Bilanzgleichung zur Lösung der Aufgabe.

AUFGABE 203: In einer Kneipe treffen sich $(m-1) \cdot n + 1$ Menschen ($m \in \mathbb{N}_{\geq 2}, n \in \mathbb{N}$). Beweise: Unter diesen Menschen gibt es entweder m Leute, die einander paarweise fremd sind, oder es gibt einen Gast, der mindestens n der anderen Gäste kennt.

Hinweis: Die Modellierung der Situation durch einen Nicht-Bekanntschaftsgraphen führt zu der in Aufgabe 177 geschilderten allgemeinen Aussage. Unabhängig davon ist – auch ohne Modellierung – folgende algorithmische Beweisidee denkbar: Die Kneipengäste werden in disjunkte Teilmengen aufgeteilt: Der erste Gast wird der ersten Menge zugewiesen, und jeder folgende Gast kommt nach Möglichkeit in irgendeine schon bestehende Menge, in der sich keine Bekannten von ihm befinden; falls eine solche Menge nicht existiert, wird eine neue Menge für ihn etabliert. Wird die Anzahl der auf diese Weise insgesamt gebildeten Mengen mit k bezeichnet, so unterscheide man die Fälle $k > n$ und $k \leq n$ und überlege sich, dass die Behauptung in jedem Fall richtig ist.

AUFGABE 204: Für zwei Länder, *Normalland* und *Spiegelland*, und ihre Netze von Eisenbahnlinien sei Folgendes vorausgesetzt:

- Jede Stadt X in Normalland hat genau eine Partnerstadt X' in Spiegelland. Dabei gilt: Zu jeder Stadt Y' in Spiegelland gibt es genau eine Stadt Y in Normalland, deren Partnerstadt Y' ist.
- Jede Eisenbahnlinie in Normalland stellt eine unmittelbare Verbindung zwischen zwei Städten her und berührt sonst keine andere Stadt. Diese Aussage trifft auch auf Spiegelland zu.
- Für je zwei Städte A, B in Normalland und ihre Partnerstädte A', B' in Spiegelland gilt: Entweder gibt es eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A und B , aber keine zwischen A' und B' ; oder es gibt eine unmittelbare Eisenbahnverbindung zwischen A' und B' , aber keine zwischen A und B .
- In Normalland gibt es zwei Städte P, Q , die so am Eisenbahnnetz gelegen sind, dass man wenigstens zweimal umsteigen muss, um von P nach Q zu gelangen.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt: In Spiegelland kann man von jeder Stadt zu jeder anderen gelangen, ohne mehr als zweimal umsteigen zu müssen.

AUFGABE 205: Bei einem Mathematik-Wettbewerb ist jeder Schüler mit mindestens drei der anderen befreundet. Zeige, dass man immer eine gerade Anzahl (und zwar mehr als zwei) an Schülern finden und so um einen runden Tisch platzieren kann, dass jeder am Tisch zwei seiner Freunde als Nachbarn hat.

Hinweis: Die graphentheoretische Modellierung führt zu folgendem Satz: In jedem Graphen, in dem alle Ecken mindestens den Grad 3 haben, gibt es einen Kreis gerader Länge. Zum Beweis des Satzes betrachte man einen Weg maximaler Länge in dem Graphen sowie eine Endecke dieses Weges und überlege sich, mit welchen Ecken des Graphen diese Endecke benachbart sein kann.

AUFGABE 206: Ein Land mit fünf Städten und 19 Dörfern ist in neun Bezirke aufgeteilt. Jede Stadt ist per Bus mit mindestens 14 anderen Orten (Städten oder Dörfern) direkt verbunden, jedes Dorf mit höchstens drei anderen Orten. Beweise, dass es mindestens einen Bezirk gibt, in dem je zwei Orte *nicht* per Bus verbunden sind.

Hinweis: Man kann zeigen, dass es mehr Bezirke ohne Städte gibt als Busverbindungen zwischen Dörfern. Dazu betrachte man den (nicht-bipartiten) Graphen mit den Städten „auf der einen Seite“ und den Dörfern „auf der anderen Seite“ und analysiere die Eckengrade.

AUFGABE 207: In einem Königreich leben n Ritter. Je zwei von ihnen sind entweder ein Paar von Freunden oder ein Paar von Feinden. Jeder Ritter hat genau drei Feinde. Im Königreich gilt außerdem das Gesetz: „Ein Feind meines Freundes ist auch mein Feind.“ Man bestimme alle Zahlen n , für die dies möglich ist.

AUFGABE 208: In einem Dorf gibt es sieben Plätze und neun Straßen, die jeweils kreuzungsfrei – notfalls über Brücken – zwei Plätze (in beiden Richtungen) direkt verbinden. Zu jedem Platz führt mindestens eine Straße, aber zwischen zwei Plätzen gibt es höchstens eine Straße. Jemand behauptet, dass man von jedem Platz über eine oder mehrere Straßen zu jedem anderen Platz gelangen kann.

- a) Zeige an zwei geeigneten Beispielen, dass die Behauptung richtig sein kann, aber nicht richtig sein muss.
- b) Beweise, dass die Behauptung auf jeden Fall stimmt, wenn es statt neun sogar zwölf Straßen gibt.
- c) Wie viele Straßen kann das Dorf (mit sieben Plätzen) höchstens haben, wenn keine Brücken oder Unterführungen vorhanden sind? Zeichne einen entsprechenden Stadtplan.

Hinweis: Die Formalisierung von b) lautet offenbar: Jeder Graph mit sieben Ecken und zwölf Kanten, in dem es keine isolierten Ecken gibt, ist zusammenhängend.

AUFGABE 209: In einer großen Stadt gibt es ein zusammenhängendes Netz von Straßenbahnlinien. Wir betrachten nun ausschließlich Straßenbahnfahrten, die an einer Haltestelle beginnen und – möglicherweise mit Umsteigen – an einer anderen Haltestelle enden, ohne dass irgendeine Haltestelle mehr als einmal angefahren wird. Die Länge einer solchen Straßenbahnfahrt ist die Anzahl der angefahrenen Haltestellen, wobei die Einstiegshaltestelle nicht mitgezählt wird.

- a) Zeige: Je zwei längste Straßenbahnfahrten haben mindestens eine gemeinsame Haltestelle.
- b) Zeige: Ist es auch durch Umsteigen nicht möglich, in dem betrachteten Straßenbahnnetz irgendwo im Kreis zu fahren, so haben sogar *alle* längsten Straßenbahnfahrten mindestens eine gemeinsame Haltestelle (also auch wenn es mehr als zwei längste Fahrten gibt).
- c) Erstaunlicherweise kann in b) die Bedingung über fehlende Kreise im Straßenbahnnetz nicht weggelassen werden. Es sind nämlich Straßenbahnnetze denkbar, in denen es zu *jeder* Haltestelle x eine längste Fahrt gibt, die nicht durch x verläuft. Man überzeuge sich davon, dass die beiden Straßenbahnnetze von Bild 3.54 jeweils diese Eigenschaft besitzen.

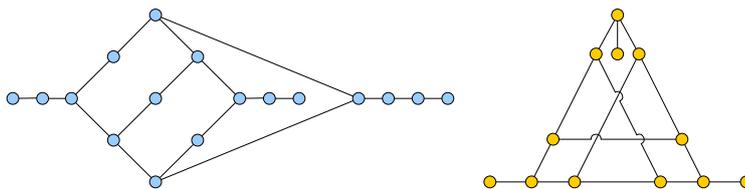


BILD 3.54: Zu Aufgabe 209: Zwei Straßenbahnnetze, in denen nicht alle längsten Fahrten eine Haltestelle gemeinsam haben.

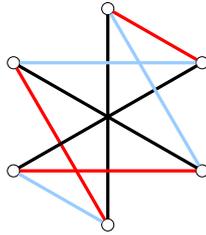
AUFGABE 210: Kantenfärbungen von Graphen haben eine praktische Anwendung bei der Modellierung von Spielplänen für Sportturniere (etwa beim Spielplan der Fußball-Bundesliga): Wir betrachten eine gerade Anzahl n von Mannschaften, die in einem Turnier gegeneinander antreten; jede Mannschaft soll gegen jede der anderen Mannschaften genau einmal spielen, wobei das Turnier in Form von $n - 1$ Spieltagen organisiert sein soll, an denen jeweils jede Mannschaft genau ein Spiel bestreitet. Diese Situation wird durch einen vollständigen Graphen mit n Ecken modelliert, bei der die Ecken für die Mannschaften und die Kanten für die Spiele stehen. Gesucht ist eine zulässige Kantenfärbung des Graphen mit $n - 1$ Farben; die Spiele gleicher Farbe finden dann am selben Spieltag statt.

- a) Es ist nicht unproblematisch, eine solche Kantenfärbung „per Hand“ und ad hoc zu finden. Betrachte Bild 3.55, das eine bereits „angefangene“ Kantenfärbung eines vollständigen Graphen mit sechs Ecken zeigt, und beweise, dass die Kantenfärbung nicht mit insgesamt fünf Farben in zulässiger Weise vervollständigt werden kann, obwohl bei der bisherigen Färbung kein offensichtlicher Regelbruch begangen wurde.
- b) Teil a) zeigt, dass es zumindest bei größerem n vorteilhaft wäre, über einen mathematischen Mechanismus zu verfügen, der die gewünschte Kantenfärbung produziert. Dazu benennen wir die Ecken des vollständigen Graphen mit den Zahlen von 0 bis $n - 1$; die Farben werden von 0 bis $n - 2$ nummeriert. Für zwei verschiedene Ecken x, y des Graphen färben wir die entsprechende Kante mit der Farbe $f(x, y)$, die wir folgendermaßen definieren:

$$f(x, y) := \begin{cases} x, & \text{falls } y = n - 1, \\ y, & \text{falls } x = n - 1, \\ \text{mod} \left(\frac{n}{2} (x + y), n - 1 \right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $\text{mod}(a, b)$ den Rest bei der Division von a durch b . Zeige, dass auf diese Weise tatsächlich eine zulässige Kantenfärbung des Graphen bestimmt wird, dass also niemals zwei Kanten gleicher Farbe inzidieren.

- c) Wir betrachten die Frage, ob bei der Kantenfärbung nach der Methode von b) (mindestens) ein Kreis der Länge 4 entsteht, für dessen Färbung nur zwei Farben verwendet werden. Zeige: Dies ist genau dann der Fall, wenn $n \equiv 4 \pmod{6}$ ist.
- d) Entwickle aus der Methode von Teil b) ein einfaches Verfahren, das zunächst alle Kanten der Farbe 0 einfärbt, dann alle Kanten der Farbe 1 usw.
- e) Bei ungeradem n ist eine zulässige Kantenfärbung des entsprechenden vollständigen Graphen nicht mit $n - 1$ Farben möglich. Stattdessen werden n Farben benötigt. Beweise diese Aussage für den Fall $n = 5$.



Süderlügum:	Tønder, Padborg, Esbjerg
Niebuß:	Løgumkloster, Gråsten
Bredstedt:	Åbenrå, Løgumkloster
Husum:	Haderslev, Gråsten, Åbenrå
Flensburg:	Esbjerg, Ribe, Sønderborg
Schleswig:	Sønderborg, Tønder
Kappeln:	Gråsten
Eckernförde:	Åbenrå, Haderslev

BILD 3.55: Zu Aufg. 210 a): Sechs Kanten müssen noch gefärbt werden.

BILD 3.56: Zu Aufgabe 211: Die Wunschliste der deutschen Orte

AUFGABE 211: Die Städte, die am deutsch-dänischen Radfahrclub aus Aufgabe 128 beteiligt sind, möchten untereinander Städtepartnerschaften bilden, und zwar möglichst so, dass jede dieser Städte eine Partnerstadt im anderen Land hat. Die deutschen Orte haben jeweils eine kleine Wunschliste mit ihren favorisierten Partnerorten abgegeben (siehe Bild 3.56). Da an diesem Club neun dänische, aber nur acht deutsche Orte beteiligt sind, kann die Zuordnung nicht vollständig aufgehen. Zeige, dass es im Rahmen der Wunschliste nicht einmal möglich ist, zumindest jeden deutschen Ort mit einem dänischen zu kombinieren, ohne dass dänische Orte mehrfach vergeben werden.

Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass in dem entsprechenden Graphen die *Hallsche Bedingung* aus dem Heiratssatz (3.69) nicht erfüllt ist.

AUFGABE 212: In einer Stadt soll ein Wasserballturnier stattfinden, an dem acht Mannschaften beteiligt sind. Jede Mannschaft soll genau einmal gegen jede andere spielen. Zur Verfügung stehen zwei Schwimmhallen, die so weit voneinander entfernt sind, dass im Laufe eines Spieltages kein Übergang einer Mannschaft von einer Halle zur anderen erfolgen kann. Außerdem gelten folgende Einschränkungen:

- An jedem Spieltag kann jede Mannschaft höchstens zwei Spiele bestreiten.
- In jeder Halle sind an jedem Spieltag höchstens vier Mannschaften anwesend.

Bei der Planung des Turniers wurde zunächst ein Spielplan aufgestellt, nach dem das Turnier in fünf Tagen durchgeführt werden kann.

- Entwickle das Prinzip einer graphentheoretischen Modellierung des Spielplans mithilfe von Kantenfärbungen (siehe Aufgabe 210). Wie lassen sich die zwei oben genannten Einschränkungen des Spielplans in die Sprache der Graphentheorie übersetzen?
- Zeige mithilfe eines konkreten Graphen, dass das Wasserballturnier auch in vier Tagen absolviert werden kann.

AUFGABE 213: Sechs Mitglieder eines Tennisclubs – drei Mädchen und drei Jungen – möchten an mehreren aufeinanderfolgenden Wochenenden ein Tennisturnier veranstalten. In jedem Spiel sollen dabei zwei gemischte Doppel (ein Mädchen und ein Junge) gegeneinander antreten.

- a) Wie viele Teams (als gemischtes Doppel) können sie insgesamt bilden?
- b) Wie viele Spiele müssen angesetzt werden, so dass jede mögliche Zusammensetzung zweier Teams genau einmal vorkommt?
- c) Stelle mithilfe von Kantenfärbungen eines geeigneten Graphen einen Turnierplan auf (siehe Aufgabe 210), der folgende Bedingungen erfüllt:
 - An jedem der Turnierwochenenden gilt: Kein Team tritt an diesem Wochenende zweimal an; einzelne Spieler dürfen allerdings zweimal eingesetzt werden, aber dann nur in verschiedenen Teams.
 - Jedes nach b) mögliche Spiel wird genau einmal angesetzt.
 - Das Turnier erstreckt sich über so wenige Wochenenden wie möglich.

AUFGABE 214: Die Außenhülle eines Fußballs soll ausschließlich aus zusammengefügten Fünf- bzw. Sechsecken bestehen. Wenn Nähte aufeinandertreffen, so seien es stets genau drei Nähte, die sich in einem Punkt treffen.

- a) Zeige, dass für einen solchen Fußball die Anzahl der Fünfecke von vorneherein feststeht, die Anzahl der Sechsecke jedoch nicht. Entwickle eine Formel, mit der man die Anzahl der Sechsecke aus der Anzahl der Punkte bestimmen kann, an denen Nähte zusammenstoßen.
- b) Der übliche Standardfußball besitzt genau 60 Punkte, an denen Nähte zusammenstoßen. Es ist aber auch ein Fußball mit 26 solchen Punkten denkbar. Zeichne die in die Ebene abgewickelte Hülle eines solchen Fußballs, und zwar derart, dass verschiedene Sechsecke einander nicht berühren (es gibt dann immer noch viele verschiedene Möglichkeiten für die Zeichnung).

Hinweis: Man beachte die Gleichungen (3.6) und (3.86) sowie die Eulerformel.

AUFGABE 215: Auf einer Insel gibt es genau sechs Städte. Jede Stadt ist mit mindestens drei anderen direkt durch Straßen verbunden. Man beweise, dass es vier Städte A , B , C und D derart gibt, dass man direkt von A nach B , von B nach C , von C nach D und wieder von D nach A fahren kann.

AUFGABE 216: Auf jedem Feld eines 5×5 – Schachbretts sitzt genau ein Frosch. Auf ein Signal hin springt jeder Frosch auf eines seiner (maximal vier) Nachbarfelder. Ist es denkbar, dass danach wiederum auf jedem Feld genau ein Frosch sitzt?

AUFGABE 217: Ein Mathematikprofessor möchte in seinem Garten ein Radio in Betrieb nehmen, das dafür zwei Batterien benötigt. Es sind acht passende Batterien vorhanden. Der Professor weiß, dass genau drei dieser acht Batterien noch funktionsfähig sind; aber leider weiß niemand, welche das sind. Der Professor muss nun nacheinander mit je zwei Batterien Tests durchführen; das Radio wird jedoch stumm bleiben, wenn nicht beide Batterien in Ordnung sind. Welches ist die kleinste Anzahl solcher Tests, von der der Professor von vorneherein sagen kann, dass sie bei geschicktem Vorgehen das Radio in Gang bringen wird?

Hinweis: Man betrachte den vollständigen Graphen mit acht Ecken, dessen Ecken die Batterien repräsentieren, und modelliere das Testen zweier Batterien durch das Entfernen der entsprechenden Kante; dann ziehe man Aufgabe 159 zu Rate.

AUFGABE 218: Noah möchte acht verschiedene Tiere in vier Käfigen seiner Arche unterbringen, je zwei pro Käfig. Es stellt sich heraus, dass es für jedes der acht Tiere höchstens drei andere gibt, die sich nicht miteinander vertragen. Zeige, dass Noah eine verträgliche Lösung finden kann.

Hinweis: Falls der Satz von Dirac zur Verfügung steht, reicht seine Anwendung auf den „Verträglichkeitsgraphen“ aus, um einen Hamiltonkreis zu erhalten, der wiederum wegen der geraden Eckenanzahl eine perfekte Paarung induziert.

AUFGABE 219: In einem fernen Lande gibt es ein Straßennetz mit folgenden Eigenschaften: Je zwei verschiedene Dörfer sind durch einen Weg verbunden, der über höchstens drei weitere Dörfer als Zwischenstationen führt. Außerdem gilt für jede Direktverbindung zwischen zwei Dörfern a und b : Wird genau diese Verbindung gesperrt, so sind a und b noch immer über ungesperrte Wege verbunden. Man beweise, dass diese Verbindung auf einem Weg erfolgen kann, der über höchstens acht weitere Dörfer führt.

Hinweise: Die graphentheoretische Modellierung und Verallgemeinerung lautet: In einem zusammenhängenden, brückenlosen Graphen, in dem je zwei Ecken höchstens den Abstand s haben, ist nach Wegnahme einer beliebigen Kante $\{a, b\}$ der Abstand von a und b höchstens $2s + 1$.²¹ Tatsächlich lässt sich diese allgemeine Aussage sogar noch verbessern: Erstens kann $2s + 1$ durch $2s$ ersetzt werden, und zweitens haben nach Wegnahme von $\{a, b\}$ alle Ecken des Graphen einen Abstand von höchstens $2s$ – nicht nur a und b . Doch ist die schwächere Aussage natürlich leichter zu zeigen. Man betrachte dazu einen kleinsten Kreis des Ursprungsgraphen, der die Kante $\{a, b\}$ enthält.

²¹ Wir benutzen hier *Abstand* im Sinne der Definitionen 3.64 und 3.59. Für zwei Ecken mit dem Abstand 4 ist ihre kürzeste Verbindung also durch einen Weg der Länge 4 gegeben, d.h.: durch einen Weg mit vier Kanten und fünf Ecken (also drei „Zwischenecken“). Der eigentliche Aufgabentext illustriert somit den Fall $n = 4$ der verallgemeinerten Aussage.

AUFGABE 220: Wir betrachten ein Land mit n Städten ($n \geq 3$), in dem je zwei verschiedene Städte *entweder* durch eine Buslinie *oder* durch eine Bahnstrecke direkt und in beiden Richtungen verbunden sind. Unter einer *Bus-Bahn-Rundreise* durch dieses Land verstehen wir eine Tour, die in einer dieser Städte beginnt, jede andere von ihnen genau einmal erreicht, dann zum Ausgangspunkt zurückführt und insgesamt keine anderen Verkehrsmittel als Bus oder Bahn benutzt. Beweise, dass es in diesem Land eine Bus-Bahn-Rundreise geben muss, bei der das Verkehrsmittel höchstens einmal gewechselt wird.

Modellierung als Visualisierung

Wir diskutieren nun Aufgaben, bei denen die Modellierung im Wesentlichen auf der Ebene der Visualisierung stehen bleibt und keine graphentheoretischen Sätze zur Aufgabenlösung benutzt werden. Die folgende Aufgabe liefert ein erstes Beispiel:

AUFGABE 221:

In einem Lager für Gefahrstoffe werden verschiedene Substanzen aufbewahrt, von denen einige mit einigen anderen potentiell gefährlich reagieren können. Solche Chemikalien müssen daher in verschiedenen Zonen des Lagers untergebracht werden, die durch Sicherheitsabstände voneinander getrennt sind. In der Tabelle von Bild 3.57 sind Paare gefährlicher Chemikalien mit einem Stern gekennzeichnet. In wie viele Zonen muss das Lager mindestens aufgeteilt sein, um den Sicherheitsanforderungen zu genügen?

	A	B	C	D	E	F	G
A		*	*	*			*
B	*		*	*	*		*
C	*	*		*		*	
D	*	*	*			*	
E		*					
F			*	*			*
G	*	*				*	

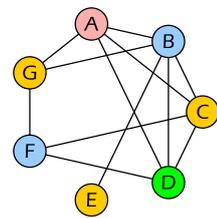
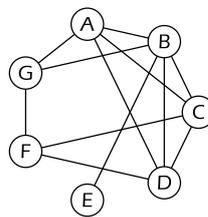


BILD 3.57: Zu Aufgabe 221

BILD 3.58: Dieselbe Information in Form von Graphen

Bereits die Tabelle in Bild 3.57 schafft mehr Übersicht als ein fließender Text, der dieselbe Information in ausformulierten Sätzen enthielte. Doch können wir die Informationen der Aufgabe noch kompakter und übersichtlicher darstellen.

Die zweidimensionale Tabelle weist bereits darauf hin, dass wir es mit einer zweistelligen Relation (auf der Menge gewisser Chemikalien) zu tun haben. Zweistellige symmetrische Relationen auf endlichen Mengen können stets durch Graphen visualisiert werden. Die Elemente der Menge werden zu Ecken, und eine Kante zwischen zwei Ecken x und y signalisiert, dass x und y in der fraglichen Relation stehen.

Im Fall der Aufgabe 221 erhalten wir den Graphen aus Bild 3.58 (links). Die Kanten zwischen zwei Ecken x und y stehen also für die symmetrische Relation „ x und y müssen in verschiedenen Zonen des Lagers aufbewahrt werden“. Die Frage nach der notwendigen Anzahl der Lagerzonen kann dann übersetzt werden in die Frage nach der Anzahl der notwendigen Farben für eine zulässige Eckenfärbung (d.h. derart, dass benachbarte Ecken stets verschieden gefärbt sind). Im Rahmen einer echten Modellierung würden wir nach einem graphentheoretischen Satz suchen, der die Frage klärt. Der *Vier-Farben-Satz* kommt nicht in Frage, weil der vorliegende Graph nicht planar ist. Wir könnten jedoch den *Satz von Brooks* anwenden, der uns garantiert, dass der Maximalgrad unseres Graphen eine obere Grenze für die notwendige Anzahl von Farben ist, also 4. Nun kennt natürlich kaum ein Schüler diesen Satz, und wenn doch, so wäre seine Anwendung hier wohl übertrieben; dass wir nämlich mit vier Farben auskommen, sehen wir sehr schnell – siehe Bild 3.58 (rechts).

Ob mit oder ohne den *Satz von Brooks* – in jedem Fall bleibt zu begründen, dass es nicht mit weniger als vier Farben geht. Der Grund ist jedoch schnell gefunden: Weil die Ecken A , B , C und D paarweise miteinander verbunden sind, müssen mindestens vier Farben benutzt werden.

Da Aufgabe 221 in den allermeisten Fällen wohl ohne Anwendung graphentheoretischer Sätze gelöst wird, leistet die Graphentheorie hier tatsächlich vor allem einen Beitrag zur Visualisierung. Allein die Kenntnis graphentheoretischer Ausdrucksmittel (Graphen, Eckenfärbung) hilft aber bisweilen schon weiter, selbst wenn graphentheoretische Instrumente (Sätze) nicht zur Verfügung stehen.

Bisweilen treffen wir auf Aufgaben, bei denen die Idee der *Planarisierung* zu einer Vereinfachung der ansonsten etwas unübersichtlichen Anschauung führt; dies gilt beispielsweise für solche Aufgaben, bei denen es um *Bewertungen* von Polyedergraphen geht (etwa die Aufgaben 225, 226, 227 und 243). Hier sollen entweder den Ecken, den Kanten oder den Flächen eines dreidimensionalen Körpers Zahlen zugeordnet werden, bei denen die Zuordnung gewisse Eigenschaften besitzt. Im Wesentlichen sind diese Aufgaben meist von zahlentheoretischer

oder kombinatorischer Natur, doch wird der Zugang zum Kern der Aufgabe oft dadurch erheblich vereinfacht, dass die eigentlich dreidimensionale Struktur des fraglichen Körpers zweidimensional dargestellt wird, nämlich durch einen planaren Graphen. Am häufigsten treten der Würfel (das Hexaeder), das Oktaeder und das Dodekaeder auf. Zusammen mit dem Tetraeder und dem Ikosaeder bilden sie die berühmte Reihe der *Platonischen Körper*, die in Bild 3.59 mitsamt den dazugehörigen Graphen dargestellt sind. Für graphentheoretische Anfänger ist die erste Begegnung mit dieser Körper-Graph-Übersetzung bereits in sich ein erhellendes Erlebnis; als besondere Komplikation tritt dabei die Tatsache in Erscheinung, dass jeweils eine Fläche eines solchen Körpers im entsprechenden Graphen durch das unbegrenzte Außengebiet repräsentiert wird.

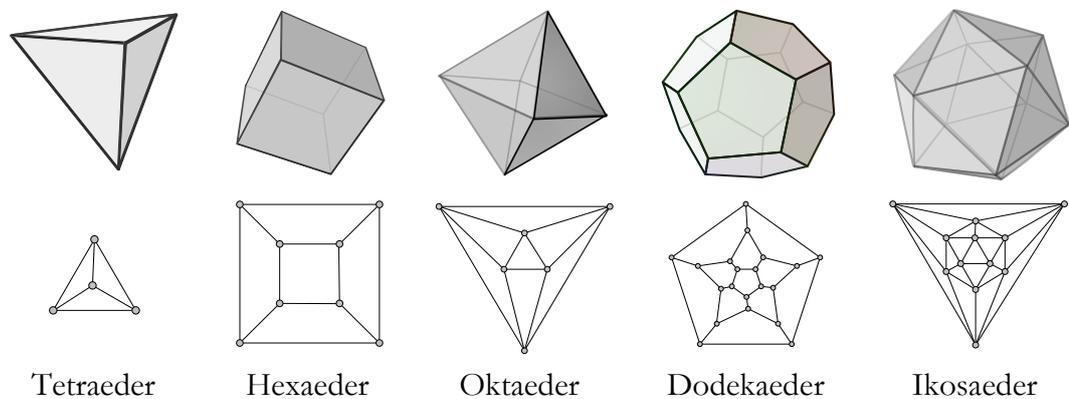


BILD 3.59: Die Platonischen Körper und ihre Darstellung als Graphen

Als Beispiel behandeln wir die Aufgabe 226 c) von Seite 232. Der Oktaedergraph (siehe Bild 3.59) enthält acht Flächen, und jede Kante kommt in genau zwei Flächen vor. Es gilt somit für die gesuchte Kantenbewertung die Bilanzierung

$$\begin{aligned} 8 \cdot \text{konstante Flächensumme} &= 2 \cdot \text{Summe aller Kanten} \\ &= 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 10 + 11 + 14) = 160, \quad (3.30) \end{aligned}$$

woraus sich zwingend ergibt, dass die konstante Flächensumme von Aufgabe 226 c) die Zahl 20 ist.

Bilanzierungen wie (3.30) sind typisch für Aufgaben, die von Bewertungen von Graphen handeln, denn sie erleichtern die weitere Suche erheblich. Da eine Kante mit der Zahl 14 bewertet wird und diese Kante wie jede andere in zwei Flächen auftritt, müssen die beiden anderen Kanten jeweils mit Zahlen bewertet werden, deren Summe 6 ist, um die Flächensumme 20 zu erreichen. Im

Rahmen der Aufgabe 226 c) stehen dafür nur zwei Möglichkeiten zur Verfügung, nämlich 1 und 5 bzw. 2 und 4. Nachdem diese Zuordnungen in einem Oktaedergraphen platziert sind, fällt es leicht, die restlichen Zahlen im Sinne der Aufgabe zu verteilen, und wir erhalten den Graphen aus Bild 3.60 mitsamt Kantenbewertung.

Die Rolle der Graphentheorie in Aufgabe 226 c) und ähnlichen Aufgaben ist sicherlich überschaubar. Dennoch ist der Wert einer übersichtlichen planaren Darstellung der Struktur eines Körpers für die Lösung einer solchen Aufgabe nicht geringzuschätzen, und auch die Bilanzierung (3.30) ist ja immerhin eine Variante der graphentheoretischen Bilanzgleichung.

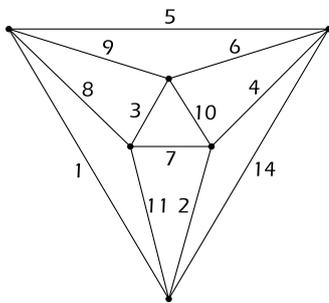


BILD 3.60: Zu Aufgabe 226 c)

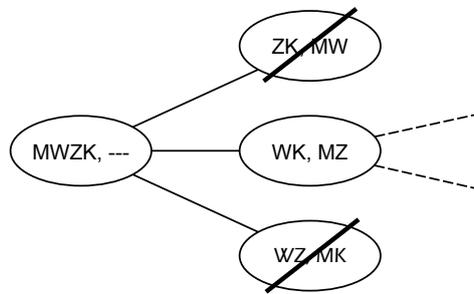


BILD 3.61: Zu Aufgabe 236

Wir wenden uns jetzt Aufgaben zu, die wir mithilfe von *Spielegraphen* analysieren werden: Die Aufgabe 236 ist ein Beispiel dafür. Möchten wir dieses altbekannte Rätsel auf graphentheoretischem Wege lösen, so ist uns nicht mit Graphen geholfen, in denen die Ecken für die vier Reisegefährten oder gar für die beiden Flussufer stehen. Vielmehr müssen wir die verschiedenen *Situationen* erfassen, die sich im Rahmen dieses Fähr-Manövers ergeben können. Eine Situation ist dabei durch die Angabe charakterisiert, welche der vier Gestalten an welchem Flussufer stehen. Stehen der Mann und der Wolf am diesseitigen und die Ziege und der Kohlkopf am jenseitigen Ufer, so können wir dies durch (MW, ZK) abkürzen und als eine Ecke des Spielegraphen auffassen. Zwei derartige Ecken (Situationen) werden durch eine Kante verbunden, wenn die eine Situation durch eine einzige Fährfahrt in die andere überführt werden kann. Das Bild 3.61 zeigt einen Teil des Graphen mit den Übergangsmöglichkeiten im Anschluss an die Startsituation; zwei der Zustände sind aber wegen der Zusatzbedingungen hinsichtlich gefräßiger Reisegegnossen nicht erlaubt und werden daher wieder gestrichen.

Der gesamte Graph zur Darstellung der möglichen Fähr-Manöver kann nicht mehr als 2^4 Ecken enthalten, weil jeder der vier Reisegefährten sich entweder hier oder dort befindet. Im Gesamtgraphen muss dann ein kürzester Weg vom Anfangszustand $(MWZK, -)$ zum Zielzustand $(-, MWZK)$ gefunden werden, eine Aufgabe, die dann sehr leicht fällt. Es ist vielleicht eine reizvolle Erweiterung dieser Aufgabe, Schüler ähnliche Fähr-Aufgaben mit *fünf* Reisegefährten entwickeln zu lassen, bei denen wiederum einige Zustände durch Zusatzbedingungen verboten werden.

Weitere Aufgaben

Die folgenden Aufgaben 222 bis 224 könnten auch in den Aufgabenkatalog zu *Eulertouren* aufgenommen werden. Dass wir sie dennoch in *diesem* Abschnitt platzieren, beruht darauf, dass wir hier den Visualisierungsaspekt als vorrangig betrachten: Der (planare) Würfelgraph als Modell der Ecken-Kanten-Struktur eines Würfels ist hier jeweils die entscheidende Hilfe.

AUFGABE 222: Man untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, alle Kanten eines Würfels so zu durchlaufen, dass nacheinander ohne Unterbrechung jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

AUFGABE 223: Wir betrachten einen Würfel mit seinen zwölf Kanten und seinen zwölf Flächendiagonalen. Gibt es auf diesem Kantennetz eine Eulertour? Was passiert, wenn zusätzlich die vier Raumdiagonalen durchlaufen werden müssen?

AUFGABE 224: Wir betrachten einen Würfel mit Kantenlänge 2. In jedem Eckpunkt, jedem Kantenmittelpunkt und jedem Flächenmittelpunkt befindet sich eine Stadt. Zwei Städte sind genau dann durch eine Straße miteinander verbunden, falls ihr Abstand 1 ist. Gibt es eine Reiseroute, die durch jede Stadt genau einmal führt und schließlich zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

AUFGABE 225: Werden alle zwölf Kanten eines Würfels mit jeweils einer natürlichen Zahl beschriftet, so sprechen wir von einer *Kantenbewertung* des Würfels. Entsprechend kann man mit acht Zahlen eine *Eckenbewertung* eines Würfels produzieren. Bei einer Kantenbewertung besitzt jede Ecke eine *Kantensumme*: die Summe aller Kanten, die in der Ecke einlaufen. Bei einer Eckenbewertung hat jede Fläche des Würfels eine *Flächensumme*: die Summe der vier Ecken, die die Fläche begrenzen.

- a) Zeige, dass mit den Zahlen von 1 bis 12 – jede Zahl genau einmal – keine Kantenbewertung des Würfels hergestellt werden kann, die an allen Ecken zur selben Eckensumme führt.

- b) Ermittle alle natürlichen Zahlen $n \in \{1, 2, \dots, 12\}$ mit folgender Eigenschaft: Ersetzt man in a) die Zahl n durch 13 und belässt die anderen elf Zahlen, so gibt es mit diesen Zahlen eine Kantenbewertung mit konstanter Eckensumme.
- c) Ermittle möglichst viele Eckenbewertungen eines Würfels mit den Zahlen von 1 bis 8 – jede Zahl genau einmal –, so dass die sechs Flächensummen identisch sind. Zwei Eckenbewertungen gelten dabei als gleich, wenn die eine Bewertung durch Drehung oder Spiegelung in die andere überführt werden kann.
- d) Wie viele achtelementige Teilmengen der Menge $\{1, 2, \dots, 10\}$ erlauben eine Eckenbewertung eines Würfels mit diesen acht Zahlen, bei der jede Flächensumme ungerade ist?

AUFGABE 226: In dieser Aufgabe betrachten wir Bewertungen von Oktaedern. Eine *Flächenbewertung* besteht daraus, dass jeder Fläche des Oktaeders eine Zahl zugeordnet wird.

- a) Wie viele verschiedene Flächenbewertungen mit den Zahlen von 1 bis 8 gibt es derart, dass die Zahlen gegenüberliegender Seitenflächen sich stets zur selben Summe addieren?
- b) Wie viele verschiedene Flächenbewertungen mit den Zahlen von 1 bis 8 gibt es derart, dass die Zahlen auf benachbarten Seitenflächen nie die Differenz 1 haben?
- c) Finde eine *Kantenbewertung* eines Oktaeders mit den elf Zahlen von 1 bis 11 und der Zahl 14 – jede Zahl genau einmal – derart, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind.
- d) Gibt es eine *Eckenbewertung* eines Oktaeders mit den Zahlen von 1 bis 6 derart, dass alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind?

AUFGABE 227: Bestimme alle natürlichen Zahlen n , für die es eine Eckenbewertung eines Dodekaeders mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- An jeder Ecke steht genau eine der Zahlen von 1 bis n .
- Jede der Zahlen $1, 2, \dots, n$ kommt gleich oft vor.
- Für jede Seitenfläche ist die Flächensumme dieselbe.

AUFGABE 228: Jemand zeichnet auf ein Zeichenblatt zehn kongruente Kreise, die sich eventuell schneiden. Dadurch wird das Zeichenblatt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen zerlegt. Lassen sich diese Flächen bei jeder Lage der Kreise so mit drei Farben färben, dass jede Fläche genau eine Farbe besitzt und keine einander berührenden Flächen gleich gefärbt sind?

AUFGABE 229: Eine Kindergärtnerin möchte mit neun Kindern in den Zoo gehen: Albert, Bernhard, Claire, Dora, Edward, Franziska, Grete, Hans und Iris. Allerdings möchte Claire auf keinen Fall mit einem der Jungs in den Zoo gehen, und Albert kann außer Dora kein Mädchen ertragen. Edward und Hans dürfen nicht gemeinsam losziehen – das gäbe nur Ärger. Franziska kann Bernhard und Grete nicht leiden, und Iris liegt im Dauerstreit mit Bernhard und Edward, wohingegen die beiden Jungs (Bernhard und Edward) gut miteinander auskommen. Wie viele separate Zoobesuche muss die Kindergärtnerin organisieren, um Konflikte im Zoo zu vermeiden?

AUFGABE 230: Zehn Studenten A, B, C, \dots, J müssen jeweils drei von acht Vorlesungen besuchen (siehe Tabelle in Bild 3.62). Jeder Student kann pro Tag nur eine Vorlesung besuchen. Auf wie viele Tage müssen die acht Vorlesungen also mindestens verteilt werden? Gib einen möglichen Stundenplan an.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	*	*			*			
B	*				*	*		
C	*						*	*
D						*	*	*
E			*				*	*
F			*	*				*
G		*	*	*				
H		*		*	*			
I				*	*			*
J					*	*		*

BILD 3.62: Zu Aufgabe 230



BILD 3.63: Die Karte zu Aufgabe 231

AUFGABE 231: Die Karte²² der Stadtbezirke von Greater London in Bild 3.63 ist so einzufärben, dass Bezirke mit gemeinsamer Grenze verschieden gefärbt sind. Wie viele Farben werden mindestens benötigt?

AUFGABE 232: Im US-Senat werden sieben kleine Ausschüsse eingerichtet, an denen verschiedene Senatoren teilnehmen sollen. Die Ausschüsse A_1 bis A_7 sind folgendermaßen zusammengesetzt:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{\text{Adams, Bradford, Charles}\}, & A_2 &= \{\text{Charles, Davis, Eggers}\}, \\
 A_3 &= \{\text{Adams, Gardner}\}, & A_4 &= \{\text{Eggers, Bradford, Gardner}\}, \\
 A_5 &= \{\text{Howe, Charles, Ford}\}, & A_6 &= \{\text{Eggers, Howe}\}, \\
 A_7 &= \{\text{Davis, Ford}\}.
 \end{aligned}$$

Eines Tages sollen alle sieben Ausschüsse jeweils einmal eine knapp einstündige Sitzung abhalten, und zwar teilweise gleichzeitig; der erste Termin ist um 8 Uhr, der zweite um 9 Uhr usw. Wann kann die letzte Sitzungsrunde beginnen?

²²Quelle: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:BlankMap-LondonBoroughs.svg> (Abrufdatum: 16. Dezember 2012)

AUFGABE 233: Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt, die einer Theatergruppe angehören, wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt. Folgende Tatsachen sind zu berücksichtigen:

- Der männliche Partner soll stets mindestens so groß wie seine Partnerin sein.
- Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.
- Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.
- Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.
- Eva ist größer als Anton.

Gib alle möglichen Zusammenstellungen dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die aufgrund der fünf Angaben nicht ausgeschlossen werden müssen.

AUFGABE 234: Auf einem 4×4 -Schachbrett steht ein einsamer Springer auf A1, dem Feld in der linken unteren Ecke. Mit n Springerzügen soll die Figur auf das diagonal entgegengesetzte Feld D4 gesetzt werden, und zwar so, dass jedes Feld des Schachbretts höchstens einmal betreten wird. Für welche Zahlen n ist das möglich?

AUFGABE 235: Unter einer *geschlossenen Springertour* verstehen wir eine Folge von (erlaubten) Zügen eines Springers auf einem Schachbrett, die jedes Feld des Schachbretts genau einmal berührt und mit dem letzten Schritt auf das Startfeld zurückkehrt.

- a) Zeige auf möglichst einfache Weise, dass es auf einem 4×4 -Schachbrett keine geschlossene Springertour gibt.
- b) Interessanterweise gilt für jede natürliche Zahl n : Ein Schachbrett mit vier Reihen und n Spalten besitzt keine geschlossene Springertour. Ein bekannter Beweis dieser Aussage durch den Ungarn Louis Pósa benutzt neben der bekannten Schwarz-Weiß-Färbung eines solchen Schachbretts eine weitere Färbung; die Felder der beiden mittleren Reihen seien rot, die anderen blau gefärbt. Man überlege sich, dass eine eventuelle Springertour auf dem fraglichen Schachbrett abwechselnd rote und blaue Felder aufsuchen müsste, und rekonstruiere mithilfe dieser Einsicht den Beweis von Pósa.

AUFGABE 236: Ein ganz altes Rätsel: Am Ufer eines Flusses steht ein Mann mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf. Der Mann will mit ihnen auf die andere Flussseite übersetzen, dazu steht ihnen aber nur ein Kahn zur Verfügung, der stets nur den Mann und einen der drei Gefährten tragen kann. Es müssen also immer mindestens zwei Gestalten am Ufer zurückbleiben. Wie muss es der Mann

anstellen, damit nicht der Wolf die Ziege frisst oder die Ziege den Kohlkopf? Er darf diese Paarungen also nicht allein am Ufer zurücklassen. Da immer der Mann rudern muss, möchte er mit so wenig Überfahrten wie möglich auskommen. Mit wie vielen Überfahrten kann er es schaffen?

AUFGABE 237: Drei Missionare und drei Kannibalen wollen einen Fluss überqueren. Ihr Boot fasst nur zwei Personen. Das Problem besteht darin, dass die Missionare aus verständlichen Gründen zu keinem Zeitpunkt an einem der Flussufer in der Minderheit sein möchten. Wie ist der Transport zu bewerkstelligen?

AUFGABE 238: Noch eine Variation von Aufgabe 236: Drei Verbrecher und drei Polizisten müssen einen Fluss überqueren. Es steht ein Boot zur Verfügung, das nur von ein oder zwei Personen gleichzeitig benutzt werden kann. Jeder der Polizisten kann das Boot steuern, von den Verbrechern kann es nur einer. Die Verbrecher wollen wie üblich die Flucht ergreifen; aber selbst dann, wenn sie allein gelassen werden, können sie nicht flüchten, da sie Fußfesseln tragen. Wenn sie aber in Gegenwart eines oder zweier Polizisten in der Überzahl sind, werden sie die Schlüssel für die Fußfesseln gewaltsam rauben, um anschließend die Flucht zu ergreifen. Solange sie diese Gelegenheit jedoch nicht haben, sind sie kooperativ. Wie können die Polizisten die Überquerung des Flusses für die sechs Personen durchführen?

AUFGABE 239: Eine letzte Variation von Aufgabe 236: Während der Regenzeit möchte ein Mann mit einem Boot über den Amazonas setzen, und zwar zusammen mit einem Krokodil, einem Piranha, einem weiteren (allerdings harmlosen) Fisch und einer Alge. Das Boot trägt aber nur den Mann – der als einziger rudern kann – sowie höchstens *zwei* weitere Gefährten. Der Mann darf an keinem der Ufer einen solchen Teil seiner Reisegruppe unbewacht zurücklassen, bei dem es zu Disziplinosigkeiten kommen könnte; das Krokodil möchte nämlich den Piranha fressen, der Piranha den Fisch, der Fisch die Alge und außerdem das Krokodil den Fisch.

- a) Wie muss der Mann das Übersetzen über den Amazonas organisieren, wenn er die Anzahl der Bootsfahrten so niedrig wie möglich halten möchte?
- b) Leider ist die Angelegenheit komplizierter als gedacht: Eine normale Bootsfahrt dauert pro Richtung 10 Minuten; wenn allerdings der Fisch als einziger Passagier an Bord ist, verringert sich diese Zeit auf 7 Minuten, es sei denn, dass neben dem Fisch auch der Piranha mitfährt, was die Reisezeit auf erstaunliche 60 Minuten hochtreibt (wegen der ständigen Kabbeleien zwischen Fisch und Piranha). Auch das Krokodil sorgt für gewisse Unruhe: Ist es der einzige Passagier, so verlängert es das Übersetzen auf 45 Minuten; zusammen mit der Alge immerhin noch auf 20 Minuten; in sonstiger Begleitung bewirkt es nichts. Welches Übersetzmanöver ist jetzt das kürzeste?
- c) Wie verändert sich die Lage, wenn zusätzlich zur Situation von Teil b) der Piranha nicht zusammen mit der Alge Boot fahren darf?

Hinweis: Um den Aufwand zur Lösung dieser Aufgabe abschätzen zu können, wird hier der Graph mit den 14 möglichen Zuständen inklusive der erlaubten Übergänge präsentiert; die Buchstaben stehen für die einzelnen Reisegefährten:

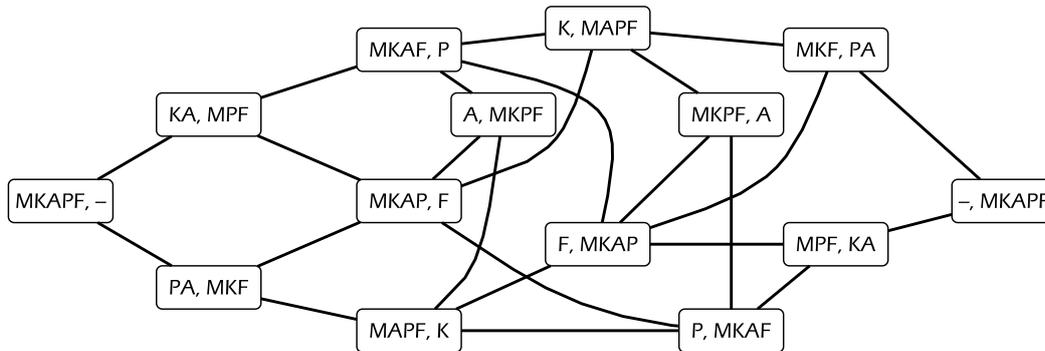


BILD 3.64: Übersetzen über den Amazonas (Aufgabe 239): Der Startzustand ist links, das Ziel rechts.

AUFGABE 240: Ein *Ländergraph* ist die graphentheoretische Entsprechung einer Landkarte: Jedes Land wird durch eine Ecke repräsentiert (seine Hauptstadt), und zwei Länder werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie auf der Landkarte eine gemeinsame Grenzlinie besitzen. Für die praktische Umsetzung seien besonders der *Bundesländer-Graph* (mit den sechzehn deutschen Bundesländern) und der *Südamerika-Graph* (mit sämtlichen Staaten des Kontinents) empfohlen. Man zeichne beide Graphen, bestimme jeweils die Länder mit den höchsten Eckengraden und überlege sich, wie viele Etappen in einer kürzesten Tour durch alle Länder in dem jeweiligen Graphen vorkommen. Außerdem verifiziere man an beiden Beispielen die Gültigkeit des *Vier-Farben-Satzes*. Ist es in diesen Graphen möglich, sogar mit weniger als vier Farben eine zulässige Eckenfärbung zu bewerkstelligen?

AUFGABE 241: Wir betrachten nochmals das Radwegenetz des deutsch-dänischen Radfahrclubs aus Aufgabe 128: Der Club möchte in manchen der 17 Orte des Wegenetzes jeweils ein Informationsbüro einrichten – und zwar so, dass schließlich für jeden Ort x des Netzes gilt: *Wenn es in x kein Büro gibt, so doch in mindestens einem Nachbarort von x* (wobei die Benachbarungen im Radwegenetz gemeint sind). In wie vielen Orten mindestens muss der Club ein Büro eröffnen? Zeige insbesondere, dass es mit weniger Orten nicht gehen kann.

Hinweis: Formalisiert läuft diese Aufgabe darauf hinaus, im fraglichen Graphen nach einer kleinsten *dominierenden Eckenmenge* zu suchen. Diese Fragestellung ist im Allgemeinen ziemlich schwierig.

AUFGABE 242: Das Spiel *Die Türme von Hanoi* ist altbekannt: Eine bestimmte Anzahl von verschieden großen Kreisscheiben – meist drei – steckt auf einer Stange, wobei sich die Scheiben von oben nach unten vergrößern. Jeder Zug des Spiels besteht darin, eine (oberste) Scheibe eines Stapels abzunehmen und auf eine der anderen Stangen zu stecken, von denen insgesamt drei zur Verfügung stehen. Dabei müssen kleinere Scheiben stets oberhalb von größeren Scheiben zu liegen kommen. Das Ziel ist, den ursprünglichen Stapel auf einer der beiden anderen Stangen wiederaufzubauen. Gefragt ist nach der minimalen Anzahl der dafür benötigten Spielzüge.

Weniger bekannt als das Spiel selbst ist die Möglichkeit seiner graphentheoretischen Analyse: Man erfinde eine Notation für die möglichen Spielzustände und zeichne den entsprechenden Spielegraphen, an dem die Lösung der Aufgabe leicht ablesbar ist. Bei Interesse zeichne man auch die Graphen für das Spiel mit vier bzw. mit zwei Scheiben, wobei die Anzahl der Stangen stets 3 ist. Auf diese Weise wird die Verwandtschaft der verschiedenen Graphen des *Hanoi-Spiels* für unterschiedliche Anzahlen von Kreisscheiben sichtbar. Wer sich für den Zusammenhang dieser Graphen mit dem *Sierpinski-Dreieck* interessiert, sei auf [Stew, S. 229-239] verwiesen.



BILD 3.65: Zwei Spielzustände bei Aufgabe 242: Der Startzustand ist links; die Situation rechts ist ein zulässiger Zwischenzustand.

AUFGABE 243: Eine Aufgabe zum Jahreswechsel 2012 / 2013: Die Seiten eines Würfels sind mit je einer natürlichen Zahl beschriftet, und zwar folgendermaßen:

- Bildet man für jede Würfecke das Produkt der drei Zahlen auf den anliegenden Seiten, so ist die Summe dieser acht Produkte 2013.
- Vergrößert man jede der sechs Zahlen auf den Würfelseiten um 10 und multipliziert dann jeweils gegenüberliegende Zahlen miteinander, so ist die Summe dieser drei Produkte 2012.

Finde die sechs Zahlen, mit denen der Würfel beschriftet ist, und beweise, dass es keine anderen Lösungsmöglichkeiten gibt.

Anmerkung: Diese Aufgabe verbindet auf harmlose Weise die drei mathematischen Gebiete unserer ersten drei Kapitel: Zur einfacheren Visualisierung der Würfeltopographie liefert die *Graphentheorie* einen kleinen Beitrag (Würfelgraph); die *Zahlentheorie* steuert die Idee bei, die Zerlegung von 2013 in Primfaktoren zu untersuchen; und die *Algebra* stellt mit der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel das Instrument zur Verfügung, mit der sich die Eindeutigkeit der Aufgabenlösung formal zeigen lässt.

4 Geometrie

Theoretische Grundlagen der ebenen euklidischen Geometrie

In diesem Kapitel geht es um einen Aufbau der synthetischen euklidischen Geometrie der Ebene. Wir verfolgen dabei von Anfang an das didaktische Ziel, moderne Strukturmathematik in einer prinzipiell schulverträglichen Form zu betreiben. Das bedeutet insbesondere, dass wir einerseits Gebrauch von einer fachwissenschaftlichen Hintergrundtheorie und einem sorgfältig zu entwickelnden Begriffsapparat machen, andererseits aber beim Aufbau der Theorie gewisse Raffungen vornehmen, um insbesondere in den Anfangsgründen zeitraubende Beweise evidenter Aussagen auszusparen.

Die wissenschaftliche Hintergrundtheorie ist auf einer axiomatischen Basis errichtet, die so ökonomisch wie möglich gehalten ist. Keine Aussage, die aus bereits aufgesammelten Axiomen ableitbar ist, wird ihrerseits als Axiom geführt. Das führt bekanntermaßen dazu, dass auch zweifellos evidente Aussagen (etwa: „Jede Strecke besitzt genau einen Mittelpunkt“) zum Gegenstand eines Beweises werden. Diese Evidenz resultiert aus der Tatsache, dass in jedem von uns eine ziemlich zuverlässige Anschauung eines geometrischen Standardmodells vorhanden ist, der sogenannten Zeichenebene. In der Tat fassen Schüler verständlicherweise die geometrische Theorie als Beschreibung der Zeichenebene auf, während doch eigentlich die Zeichenebene nur ein Modell der geometrischen Theorie ist. Unsere Anschauung der Zeichenebene und unsere Intuition versorgen uns mit einer durchaus reichhaltigen Menge von Grundeinsichten, die wir das *gewöhnliche Evidenzniveau* nennen. Nur wenige dieser Grundeinsichten sind in einer wissenschaftlichen Hintergrundtheorie tatsächlich Axiome, und der Beweis der anderen Grundeinsichten mithilfe der Axiome führt zu jenem Anfangsteil der Theorie, den man gelegentlich als die *Etablierung des gewöhnlichen*

Evidenzniveaus bezeichnet und dessen Durchführung in der Schule wohl als unangenehm langwierig empfunden würde.

Wir streben daher in dieser Arbeit eine geometrische Theorie mit einer ungewöhnlich breiten und unökonomischen Basis an, die gar nicht mehr zwischen den eigentlichen Axiomen und beweisbaren Grundeinsichten unterscheidet. Wir werden diese grundlegenden Aussagen als *Grundtatsachen* bezeichnen und (zumindest dem Schüler gegenüber) unbewiesen lassen. Den Leser dieser Arbeit werden wir in der Regel durchaus darüber informieren, ob eine Grundtatsache in der von uns unterstellten Hintergrundtheorie ein Axiom oder aber beweisbar ist; gegenüber dem Schüler werden wir es eher unterlassen. Diese Grundtatsachen können wir nochmals unterscheiden: Während manches *implizite* Grundtatsachen sind, die derart selbstverständlich erscheinen, dass wir sie in der Schule gar nicht gesondert erwähnen, sondern nur stillschweigend unterstellen, werden *explizite* Grundtatsachen im Unterricht genannt. Diese Unterteilung in implizite und explizite Grundtatsachen ist sicherlich nicht eindeutig und Gegenstand didaktischen Ermessens. In der Tat werden wir in dieser Arbeit diese Grundtatsachen im Zweifelsfall eher explizit herausstellen und es dem jeweiligen Anwender überlassen, dem Lehrer also, ob er den Sachverhalt nicht doch lieber als *implizite* Grundtatsache auffassen möchte.

Jeder Leser und Lehrer ist natürlich eingeladen, die Beweislücken bei den beweisbaren Grundtatsachen zu seiner eigenen mathematischen Ertüchtigung zu schließen. Immerhin stellt dieses Geometrie-Kapitel nicht nur einen didaktischen Entwurf, sondern durch seine große Nähe zur axiomatischen Theorie auch eine Ermunterung zu eigenem wissenschaftlichen Handeln dar. Auch gegenüber dem Schüler darf das Konzept der breiten Axiomenbasis nicht derart degenerieren, dass schließlich jede Aussage, deren Beweis nicht schnell gefunden wird, alsbald zur Grundtatsache erklärt und ein Beweis damit verzichtbar wird. Der axiomatische Charakter der Theorie und die Idee, neue Aussagen aus bereits bekannten durch Schlussfolgerungen zu gewinnen, sollen den Geometrieunterricht weiterhin prägen. Von grundlegender Bedeutung bleibt auch die Aneignung der geometrischen Sprache und ihre konsequente Verwendung in mündlicher und schriftlicher Sprache durch den Lehrer wie durch den Schüler; in der Benutzung der Sprache vollzieht sich das begriffliche Denken, und hier liegt der zentrale Bildungswert der Geometrie. Gelingt dieses Unternehmen, so sind die logischen Raffungen bei der Etablierung des gewöhnlichen Evidenzniveaus leicht verschmerzbar.

Die hier verwendete wissenschaftliche Hintergrundtheorie stammt im Wesentlichen von Dr. Rudolf Schnabel, der sie in einer Vorlesung an der Universität Kiel im Wintersemester 1993/94 dem Verfasser dieser Arbeit und anderen Studenten

vorgestellt hat. Die Theorie gliedert sich deutlich in drei Teile: abstrakte Geometrie ohne Längenmaß, reelle Geometrie mit Längenmaß und reelle Geometrie mit Längen- und Winkelmaß.

Der Abschnitt A handelt von abstrakten euklidischen Ebenen; dabei handelt es sich im Wesentlichen um erweiterte affine Ebenen. Eine affine Ebene selbst ist nichts weiter als eine Inzidenzstruktur. Es gibt Punkte und Geraden; ein Punkt A liegt auf einer Geraden g oder auch nicht; zwei verschiedene Punkte besitzen genau eine Verbindungsgerade; zu jedem Punkt A und jeder Geraden g gibt es genau eine parallele Gerade zu g durch A . Die Geraden sind dabei Mengen von Punkten, und die Inzidenzrelation ist identisch mit der Elementbeziehung. Die Erweiterung zu einer euklidischen Ebene besteht darin, dass zusätzlich eine senkrecht-Relation auf der Menge der Geraden und eine Kongruenz-Relation auf der Menge der Strecken eingeführt wird. Letzteres ist also lediglich eine Relation, die feststellt, ob zwei Strecken gleich lang sind oder nicht. Im Prinzip ist die Geometrie auf dieser Stufe maßfrei. Es gibt also keine Abstandsfunktion, zumindest keine, die unsere üblichen Erwartungen an eine solche erfüllen würde; allenfalls taugt sie dazu, von zwei Strecken festzustellen, ob sie gleich lang sind oder nicht.

Zu den schulfremden Eigenschaften des Begriffs der (maßfreien) euklidischen Ebene gehört die Tatsache, dass es viele verschiedene Modelle dafür gibt. Zwar ist auch die sogenannte Zeichenebene ein solches Modell – wenn man das auf ihr vorhandene Längenmaß und die daraus resultierende Anordnung „vergisst“ –, aber es gibt auch endliche Modelle. Das kleinste und wohl auch bekannteste Modell dieser Art ist das 9-Punkte-Modell: Die gesamte Ebene besteht hier aus neun Punkten, es gibt genau zwölf Geraden, und jede Gerade enthält genau drei Punkte. Wir teilen diese Geraden in zwei Typen ein: Bild 4.1 zeigt die Geraden vom Typ I; Bild 4.2 jene vom Typ II. Die Lage der Punkte in den Abbildungen ist dabei unerheblich; es zählt nur die Gruppierung zu Geraden, die wir durch verschiedene Farben zum Ausdruck bringen.

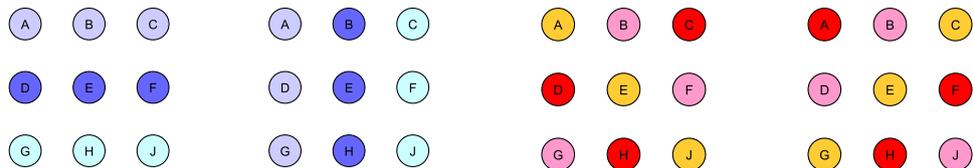


BILD 4.1: *Das 9-Punkte-Modell mit seinen sechs Geraden vom Typ I...*

BILD 4.2: *... und seinen sechs Geraden vom Typ II.*

Diese Struktur, die zunächst bloß eine affine Ebene darstellt, kann durch Einführung einer senkrecht-Relation und einer Streckenkongruenz-Relation zur euklidischen Ebene ausgebaut werden. Zwei Geraden heißen demnach senkrecht, wenn sie vom gleichen Typ sind und genau einen gemeinsamen Punkt besitzen. Eine primitive Abstandsfunktion wird folgendermaßen definiert: Der Abstand zweier Punkte X und Y sei 0, wenn $X = Y$ ist; er sei 1, wenn $X \neq Y$ ist und die Verbindungsgerade von X und Y vom Typ I ist; und er sei 2, wenn $X \neq Y$ ist und die Verbindungsgerade von X und Y vom Typ II ist. Aus dieser eigentümlichen Abstandsfunktion wird die Streckenkongruenz fabriziert: Zwei Strecken UV und XY heißen gleich lang, wenn der Abstand von U zu V derselbe ist wie derjenige von X zu Y . Dass diese Abstandsfunktion sich nicht so verhält wie es von einem richtigen Längenmaß erwartet wird, erkennen wir bereits daran, dass A , B und C allesamt auf derselben Geraden liegen (siehe Bild 4.1) und dennoch paarweise den Abstand 1 haben – ein Phänomen, das es in der Zeichenebene nicht gibt.

Trotz seiner Merkwürdigkeiten ist das 9-Punkte-Modell eine euklidische Ebene (ohne Längenmaß), und *wegen* seiner Merkwürdigkeiten ist es ein hervorragender Übungsgegenstand. Alle Sätze unseres Abschnitts A zur abstrakten Geometrie ohne Längenmaß gelten auch hier; und alle unsere Beweise dieses Abschnitts müssen auch hier Bestand haben. Dieser Umstand zwingt uns beim Argumentieren streng genommen dazu, die vielen vermeintlich selbstverständlichen Grundannahmen, die allein aus der Vertrautheit mit der Zeichenebene resultieren, stets genau zu prüfen und im Zweifelsfall zu verwerfen. Diese Strenge verlangen wir natürlich nicht uneingeschränkt dem Schüler ab – aber uns selbst, dem Erwachsenen, der hier durch diese Strenge die Verbindung von lockerer Schulgeometrie und axiomatischer Hochschulgeometrie aufrechterhalten kann.

Am Anfang von Abschnitt B werden wir den Übergang zur reellen Geometrie vollziehen. Die euklidische Ebene bleibt uns als Unterbau erhalten, wird aber durch das Längenmaß angereichert. Wir unterstellen dann also die Existenz einer Abstandsfunktion, die weitreichende zusätzliche Eigenschaften erfüllt. In der Tat sind diese Eigenschaften derart weitreichend, dass es dann nur noch ein einziges Modell für diese Struktur gibt (bis auf Isomorphie). Dieses Modell ist der Vektorraum $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, der in der Oberstufe unserer Gymnasien als Gegenstand der analytischen Geometrie auftritt und schon auf den unteren Klassenstufen als Zeichenebene stillschweigend und natürlich ohne Verweis auf die formale algebraische Struktur eingeführt wird. Die vertraute Metrik der Zeichenebene ist hier das Längenmaß, das in der analytischen Geometrie durch die Festsetzung

$|(x_1, y_1), (x_2, y_2)| := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ algebraisch erfasst wird; und die senkrecht-Relation wird ebenso entweder intuitiv begriffen oder algebraisch mithilfe des Skalarprodukts ausgedrückt. Die Schwierigkeiten beim Aufbau der analytischen Geometrie sind ein Thema für sich, auf das wir in dieser Arbeit nicht eingehen.¹ Ohnehin bleiben wir bei unserem synthetischen Vorgehen; d.h. wir verzichten auch in der reellen Geometrie auf eine Algebraisierung und verwenden stattdessen *Punkt* und *Gerade* als undefinierte Grundbegriffe.

Innerhalb der reellen Geometrie mit Längenmaß ist der Strahlensatz die erste große Station. Auf die schulischen Schwierigkeiten bei seinem Beweis werden wir ausführlich eingehen. Aus dem Strahlensatz werden wir den Satz des Pythagoras entwickeln, der wiederum der Ausgangspunkt für die eigentliche Längenrechnung ist. In dieser Arbeit werden wir zahlreiche Längenformeln am Dreieck entwickeln, von denen die meisten in der Schule unbekannt sind. In den Beweisen wird dort der sogenannte *Antipythagoras* eine bedeutende Rolle spielen, mit dessen Hilfe wir Fallunterscheidungen bezüglich der Anordnung von Punkten in vielen Konfigurationen elegant vermeiden werden. In jedem Fall ist die in dieser Arbeit vorgestellte Längenrechnung ein lohnendes Betätigungsfeld zur Übung der elementaren Algebra.

Als dritter Teil unserer Theorie folgt dann der Abschnitt C über die Geometrie mit Winkelmaß. Wir werden dort (auf den Seiten 307 ff.) kurz diskutieren, warum der Umgang mit dem Winkelbegriff traditionell problematisch ist, und dann doch eine Lösung dieses Problems vorschlagen. Mit dem dann definierten Winkelmaß werden wir zunächst die elementare Winkellehre etablieren; dazu gehören beispielsweise die Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, der Nebenwinkelsatz und Sätze über Winkel in Parallelogrammen und Trapezen.

Mit der Einführung der Sinus- und der Cosinusfunktion folgt dann jener Teil der Winkellehre, der traditionell unter dem Namen *Trigonometrie* bekannt ist. Dabei werden die klassischen Sätze behandelt, vor allem der Sinussatz und der Cosinussatz, aber auch der weniger bekannte Projektionssatz. Von jener Stelle der Theorie gehen dann unabhängig voneinander drei Wege aus: Einer führt zu den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus und den Monotonieeigenschaften dieser Funktionen; ein zweiter führt zu den Kongruenzsätzen und zu dem Hauptergebnis über ähnliche Dreiecke („Winkelgleichheit ist äquivalent zur Verhältnissgleichheit“); und ein dritter führt zu den Sätzen am Kreis, etwa

¹ Man beachte hierzu allerdings den Aufsatz *Zur Diskussion gestellt: Analytische Geometrie – schlicht und natürlich* von Hinrich Lorenzen (in: MNU 55 (2002) 4, S. 231-233).

zum Peripheriewinkelsatz und zum Kennzeichnungssatz für Sehnenvierecke. Ungewöhnlich ist dabei, dass die beiden letztgenannten Wege erst dann, nämlich innerhalb der Trigonometrie, besprochen werden. Üblicherweise werden die entsprechenden Ergebnisse der Theorie als Bestandteile der elementaren Winkellehre aufgefasst; innerhalb *unseres* Theoriegebäudes sind die dazugehörigen Beweise jedoch erst mit trigonometrischen Mitteln zu führen. Wir werden an Ort und Stelle die entsprechenden Probleme im Einzelnen diskutieren. Insbesondere werden wir zeigen, dass die Bedeutung der Kongruenzsätze in der Schule traditionell deutlich überschätzt wird und dass viele Aufgaben, die üblicherweise mithilfe von Kongruenzsätzen oder anderer Winkeltheorie gelöst werden, durchaus winkelfrei bewiesen werden können. Auf den Seiten 379 ff. werden wir im Rahmen unseres didaktischen Kommentars einige Beispiele dafür eingehend studieren und auf diese Weise nebenbei begründen, warum die späte Platzierung der Kongruenzsätze innerhalb der Theorie kein didaktisches Problem ist. Als heuristisches Mittel zum Finden von geometrischen Zusammenhängen bleiben Kongruenzüberlegungen an Dreiecken natürlich weiterhin von Bedeutung; als Instrument zum Führen von Beweisen allerdings spielen sie weder in unserer Theorie noch bei unseren Aufgaben eine ernsthafte Rolle.

Theoretische Grundlagen der abstrakten Geometrie

Grundbegriffe

Die gegenständlichen Grundbegriffe der abstrakten Geometrie ohne Längenmaß sind *Punkt* und *Gerade*, wobei jede Gerade eine Menge von Punkten ist. Die Menge aller Punkte sprechen wir gelegentlich als „die Ebene“ an. Die Axiome der affinen Ebene gehören für uns zu den impliziten Grundtatsachen: Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden (sowie die daraus resultierende Eindeutigkeit des Schnittpunkts von Geraden), Existenz und Eindeutigkeit der Parallele sowie die Reichhaltigkeitsaussage über die Existenz eines nicht-kollinearen Dreiecks. Dabei gehören *Parallelität* und *Dreieck* bereits zu den abgeleiteten Begriffen, die eigentlich erst nach der *Affinen Ebene* definiert werden können, dann aber retrospektiv zum Zwecke der kompakten Formulierung der affinen Axiome gern verwendet werden. Zu den Strecken und Dreiecken – also Paaren bzw. Tripeln von Punkten – treten *Vierecke* und allgemein *n-Ecke* als weitere abgeleitete Begriffe hinzu, also 4-Tupel bzw. *n*-Tupel von Punkten, wobei wir die Tupel hier ohne Klammern und ohne Kommata schreiben. Ein

n -Eck heißt *kollinear*, wenn seine sämtlichen n Punkte (Ecken) auf derselben Geraden liegen; und es heißt *echt*, wenn es nicht kollinear ist und seine Punkte (Ecken) paarweise verschieden sind. Unser n -Eck-Begriff ist recht tolerant und umfasst zahlreiche Objekte, die in Klassenzimmern auf Befremden stoßen: So gibt es unter den Vierecken überschlagene, eingeschlagene oder dreiecksförmige Vertreter (mit drei Ecken auf einer Geraden). In jedem Fall regelt die *Bildkonvention* die Darstellung eines n -Ecks durch eine Zeichnung: Diejenigen Punkte der Zeichnung, die aufeinanderfolgende Punkte des Tupels repräsentieren, werden durch Geradenstücke miteinander verbunden, ebenso der letzte und der erste Punkt des Tupels. Dies gilt schon für Strecken.

Die Grundbegriffe bringen bereits eine Fülle von Redeweisen und Notationen mit sich: Dazu gehören die Sprechweisen der Inzidenz: „Der Punkt A liegt auf der Geraden g “, „Die Geraden g und h schneiden einander im Punkte S “, „ S ist Schnittpunkt von g und h “, „Die Gerade h geht durch den Punkt B “ etc. sowie die Redeweise von den *gegenüberliegenden Seiten* eines Vierecks. Zu den Notationen gehören AB für die Strecke mit den Endpunkten A und B ; und \overline{AB} für die Verbindungsgerade dieser Punkte.²

Ferner wird die Parallelität definiert: Zwei Geraden g und h heißen parallel (in Zeichen: $g \parallel h$), wenn g und h identisch sind oder ihr Durchschnitt leer ist; und ein echtes Viereck $ABCD$ heißt Parallelogramm, wenn die Beziehungen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ gelten. In einem n -Eck sprechen wir in naheliegender Weise von *benachbarten* Ecken, und eine *Seite* eines solchen n -Ecks ist eine Strecke, deren Punkte benachbarte Ecken eines solchen n -Ecks sind. Eine *Diagonale* ist entsprechend eine Strecke, deren Punkte nicht-benachbarte Ecken des n -Ecks sind. In Abgrenzung von den Begriffen *Seite* und *Diagonale* – also Strecken – verwenden wir für die entsprechenden Geraden die Worte *Seitenlinie* und *Diagonallinie*,³ wie wir überhaupt im Folgenden den Zusatz *-linie* stets für den Übergang von einer (echten) Strecke zu der entsprechenden Geraden gebrauchen werden: *Seitenhalbierende* und *Seitenhalbierendenlinie*, *Höhe* und *Höhenlinie* etc. Falls keine Verwechslung zu befürchten ist, ist ein laxer Umgang

² In der Literatur – und besonders hartnäckig in Schulbüchern – werden die beiden Symbole AB und \overline{AB} traditionell andersherum verwendet. Das ist aber misslich, denn eine Strecke *ist* ja ein Paar von Punkten und wird daher durch ein solches referenziert, wenn auch ohne Klammern und Komma. Die Verbindungsgerade von A und B hingegen ist im Allgemeinen weit mehr als nur das Paar dieser Punkte; in der Tat könnte man den waagerechten Strich über dem Punktepaar als Verweis auf die (nicht-injektive) Funktion betrachten, die jeder echten Strecke die entsprechende Verbindungsgerade zuordnet.

³ natürlich nur dann, wenn die Strecke aus *verschiedenen* Punkten besteht

mit dieser Sprachregelung erlaubt.

In euklidischen Ebenen gibt es zusätzlich die strukturellen Grundbegriffe *senkrecht* als Relation auf der Menge der Geraden und die *Streckenkongruenz* als Relation auf der Menge der Strecken. Für den Umgang mit der senkrecht-Relation wird das Symbol \perp eingeführt; ebenso die Begriffe *Lot* und *Lotfußpunkt*. Die Symmetrie der senkrecht-Relation und die Symmetrie der Streckenkongruenz sind ebenso implizite Grundtatsachen wie die Existenz und die Eindeutigkeit des Lotes; die letztgenannten Tatsachen erlauben die Redeweise von *dem* Lot durch den Punkt A auf die Gerade g . Die Streckenkongruenz bringt die Redeweise mit sich, dass zwei Strecken gleich lang seien. Wir könnten dafür das Symbol $AB \equiv CD$ einführen; das hätte den Vorteil, dass die Streckenkongruenz als eine Relation eingeführt wird, die unabhängig von irgendeiner Abstandsfunktion ist. Im Hinblick auf die spätere Einführung des Längenmaßes und aus Gründen der Ökonomie entscheiden wir uns jedoch für die vorgezogene Verwendung metrischer Symbolik: Wir schreiben also $|AB| = |CD|$ für die Kongruenz der Strecken AB und CD und führen mit den Betragstrichen eine Abstandsfunktion auf der Menge der Strecken nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ein, die später im Rahmen der reellen Geometrie zu einem Längenmaß ausgebaut wird. Somit ist klar, dass mit $|AB|$ eine nicht-negative reelle Zahl gemeint ist, doch wird diese Schreibweise im Rahmen der abstrakten Geometrie ausschließlich zur Feststellung von Längengleichheit benutzt, zur Kongruenz von Strecken eben; arithmetische Längenbetrachtungen wie Längenvergleiche oder Summen von Längen kommen nicht vor. Zur Symmetrie der Streckenkongruenz tritt als weitere implizite Grundtatsache die Definitheit hinzu, d.h. für alle Punkte A, B gilt: $|AB| = 0 \iff A = B$. Die *Dreieckskongruenz* schließlich wird direkt aus der Streckenkongruenz abgeleitet: Wir nennen zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ *kongruent*, wenn gilt: $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|, |CA| = |C'A'|$, und schreiben dafür kurz: $ABC \equiv A'B'C'$.

Die Relation *senkrecht* und die Streckenkongruenz ermöglichen unter anderem die Einführung der Begriffe *gleichschenkliges Dreieck* und *rechtwinkliges Dreieck*. In diesem Zusammenhang gewinnt erstmals die Tupelbeschreibung von n -Ecken als *geordnete* Aufzählung von Punkten an Bedeutung; so sagen wir etwa, das echte Dreieck ABC sei gleichschenklig, wenn $|AC| = |BC|$ gilt; und rechtwinklig, wenn $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ gilt; auf diese Weise ersparen wir uns Redeweisen wie „gleichschenklig mit der Spitze C “ oder „rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C “. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC bezeichnen wir die Seiten AC und BC als *Katheten* und die Seite AB als *Hypotenuse*. Solche Konventionen

dienen offensichtlich der Ökonomie – auch später bei Vierecken –, führen aber bei Uneingeweihten anfangs zu Verwirrung, weil das Dreieck ABC rechtwinklig sein mag, das Dreieck BCA jedoch nicht. Hier ist also Disziplin im Umgang mit der geometrischen Sprache erforderlich, die sich später auszahlen wird, etwa im Umgang mit der *Dreieckskongruenz*.

Die Streckenkongruenz führt außerdem zu den Begriffen *Mittelpunkt*, *Verdopplungspunkt*⁴ und *Mittellot* – jeweils in Bezug auf eine Strecke –, zu den entsprechenden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen sowie zu der Redeweise, dass eine Gerade eine Strecke halbiert.⁵

Mittellot- und Parallelogrammregel sowie der Mittelparallelsatz

Es treten nun erstmals explizite Grundtatsachen auf. Die ersten beiden sind in der Hintergrundtheorie tatsächlich Axiome, während die Grundtatsachen 4.3 und 4.4 beweisbar sind. Danach liefern wir mit dem Beweis für die Umkehrung des Mittelparallelsatzes ein erstes und instruktives Beispiel für die Beweistechnik *Variieren der Konfiguration*.

Grundtatsache 4.1 (Mittellotregel). *Seien A, B, C, M Punkte mit: $A \neq B$, $C \neq M$, $M \in \overline{AB}$. Dann folgt aus je zweien der folgenden Aussagen die jeweils dritte:*

$$(1) \ M \text{ ist Mittelpunkt von } AB \quad (2) \ \overline{CM} \perp \overline{AB} \quad (3) \ |CA| = |CB|.$$

Grundtatsache 4.2 (Parallelogrammregel). *In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang.*

⁴ Man beachte die Asymmetrie des Begriffs *Verdopplungspunkt*: Der Verdopplungspunkt einer Strecke AB ist im Allgemeinen verschieden vom Verdopplungspunkt von BA . Die formale Definition lautet: Der Verdopplungspunkt von AB ist der Punkt C mit der Eigenschaft: B ist Mittelpunkt von AC .

⁵ Dass jede Strecke einen Mittelpunkt besitzt, ist zwar evident, gilt aber gar nicht für jede affine Ebene: Im *Vier-Punkte-Modell* besteht jede Gerade aus genau zwei Punkten, und die entsprechenden Strecken besitzen somit keinen Mittelpunkt. Tatsächlich unterstellen wir bei unserem Theorie-Aufbau, dass wir es mit affinen Ebenen zu tun haben, in denen das *Fano-Axiom* gilt, in denen es also ein Parallelogramm gibt, dessen Diagonallinien einander schneiden. Dies gilt dann sogar für *alle* Parallelogramme in diesen affinen Ebenen. Die Existenz von Streckenmittelpunkten wird aus dieser Parallelogramm-Eigenschaft gefolgert. Wir hingegen schleusen andersherum das Fano-Axiom ein, indem wir die Existenz dieser Mittelpunkte als Grundtatsache anerkennen.

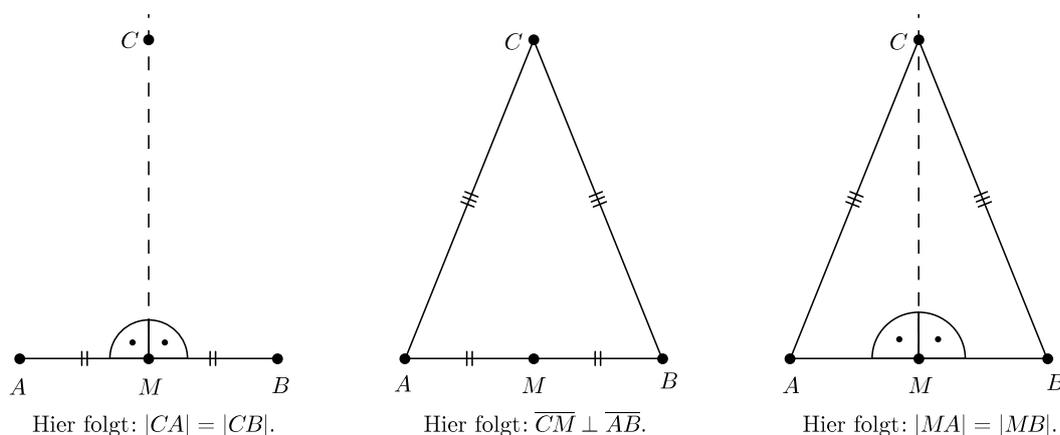


BILD 4.3: Die drei Implikationen der Mittellotregel

Grundtatsache 4.3 (Mittelparallelsatz). Sei ABC ein echtes Dreieck, und seien M und N die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. BC . Dann folgt: \overline{MN} ist parallel zu \overline{AC} .

Grundtatsache 4.4 (Verträglichkeit von senkrecht und parallel). Für je drei Geraden g, h, h' mit $h \perp g$ gilt: $h' \parallel h \iff h' \perp g$.

Aus den Grundtatsachen 4.1 und 4.4 folgt, dass die Relation \perp irreflexiv ist, was wir aber wohl eher als implizite Grundtatsache auffassen. Die folgende Aussage ist eine Anwendung des Mittelparallelsatzes 4.3:

Satz 4.5 (Satz von Varignon über das Seitenmittenviereck). Sei $ABCD$ ein echtes Viereck, und seien K, L, M und N die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA . Dann gilt: Ist $KLMN$ ein nicht-kollineares Viereck, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Wir setzen voraus, dass $KLMN$ nicht-kollinear ist. Die Parallelität gegenüberliegender Seitenlinien von $KLMN$ ergibt sich direkt aus dem Mittelparallelsatz. Unklar ist zunächst nur, ob dieses Viereck echt ist. Es reicht nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Nachweis aus, dass K von L, M und N verschieden ist. Wäre etwa $K = L$, so wäre $A = C$, im Widerspruch zur Echtheit von $ABCD$. Ebenso können wir $K = N$ ausschließen. Aus $K = M$ würde schließlich wegen $\overline{MN} \parallel \overline{KL}$ folgen, dass die beiden Parallelen identisch wären – im direkten Widerspruch zur Nicht-Kollinearität von $KLMN$. \square

Satz 4.6 (Umkehrung des Mittelparallelsatzes). Sei ABC ein echtes Dreieck. Sei M der Mittelpunkt von AB , und sei $N \in \overline{BC}$ mit $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$. Dann folgt: N ist der Mittelpunkt von BC .

Beweis. Sei N' der Mittelpunkt von BC . Nach Grundtatsache 4.3 ist dann $\overline{MN'} \parallel \overline{AC}$. Also sind sowohl $\overline{MN'}$ als auch \overline{MN} Parallelen zu \overline{AC} durch M . Aus der Eindeutigkeit der Parallelen folgt: $\overline{MN'} = \overline{MN}$. Aus der Eindeutigkeit des Schnittpunkts folgt dann $N' = N$, d.h. N ist tatsächlich der Mittelpunkt von BC . \square

Der Beweis von Satz 4.6 liefert ein erstes Beispiel für die Beweistechnik des *Variierens der Konfiguration*: Aus einer gewissen (bereits bewiesenen oder per Axiom etablierten) Implikation wird im Zusammenspiel mit einer Eindeutigkeitsaussage die Umkehrung der Implikation abgeleitet. Wir betrachten ein Dreieck ABC , den Seitenmittelpunkt M von AB und irgendeinen Punkt N auf \overline{BC} . Die Grundtatsache 4.3 liefert uns die folgende Implikation: Wenn N der Mittelpunkt von BC ist, so folgt $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$. In Satz 4.6 möchten wir genau die entsprechende Umkehrung beweisen; wollten wir dies direkt erledigen, so müssten wir für N die Aussage $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ voraussetzen und dann zeigen, dass N der Mittelpunkt von BC ist. Wir hätten damit jedoch erhebliche Probleme. Statt N betrachten wir nun daher denjenigen Punkt, der gerade die Eigenschaft hat, die wir uns von N erhoffen, nämlich den Mittelpunkt N' von BC . Alles hängt nun davon ab, die Identität $N = N'$ nachzuweisen, was hier leicht gelingt: Die Gerade $\overline{MN'}$ ist nach der bereits bewiesenen Implikation aus Satz 4.3 parallel zu \overline{AC} und geht durch M ; dasselbe gilt nach Voraussetzung für \overline{MN} , so dass die Eindeutigkeit der Parallelen die Gleichheit $\overline{MN'} = \overline{MN}$ erzwingt. Damit sind N' und N Schnittpunkte von \overline{MN} und \overline{BC} , und die Eindeutigkeit des Schnittpunkts erlaubt die Schlussfolgerung $N' = N$.

Das logische Gerüst des Beweisprinzips wird nun allgemein beschrieben:

BEWEISPRINZIP „VARIIEREN DER KONFIGURATION“

Seien $A(x)$ und $B(x)$ Aussageformen über einer Menge M von Objekten, und es gelte:

- (1) Für alle $x \in M$: $A(x) \implies B(x)$.
- (2) Es gibt ein $x \in M$ mit der Eigenschaft $A(x)$.
- (3) Es gibt höchstens ein $x \in M$ mit $B(x)$.

Dann gilt auch die Umkehrung von (1); d.h. für alle $x \in M$ gilt:
 $B(x) \implies A(x)$.

Im Fall von Satz 4.6 ist M die Menge der Punkte auf \overline{BC} ; die Aussageform $A(x)$ ist die Mittelpunkteigenschaft von BC , und $B(x)$ ist die Parallelitätsaussage. Die Grundtatsache 4.3 liefert Aussage (1), die implizite Grundtatsache der Existenz des Mittelpunkts ist Aussage (2), und die Eindeutigkeit der Parallele sorgt für (3).

Wir werden dieses Beweisprinzip bei unseren geometrischen Beweisen oft verwenden und es dann manchmal bei diesem Stichwort belassen. Schon im Beweis des Diagonalsatzes am Anfang des nächsten Abschnitts wird es beim Beweis der zweiten Implikation erneut zur Anwendung dieses Prinzips kommen.

Diagonalsatz, Mittellotprinzip, Satz des Thales

Die drei Sätze dieses Abschnitts sind unmittelbare Folgerungen aus den Grundtatsachen. Sie sind von grundlegender Bedeutung und treten im Folgenden immer wieder auf:

Satz 4.7 (Diagonalsatz). *Ein echtes Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn seine Diagonalen einander halbieren. Anders formuliert: Ein echtes Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn der Mittelpunkt von AC auch der Mittelpunkt von BD ist.*

Beweis. Sei $ABCD$ ein echtes Viereck. Wir nehmen zunächst an, dass der Mittelpunkt M von AC auch der Mittelpunkt von BD ist. Seien N und L die Mittelpunkte von BC bzw. AD . Durch Anwendung von Grundtatsache 4.3 auf verschiedene Teildreiecke folgt: $\overline{AB} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{CD}$. Mit der Transitivität von \parallel ergibt sich $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Mit einem analogen Schluss folgt auch $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, d.h. $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Wir setzen nun andersherum voraus, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Sei M der Mittelpunkt von AC , und sei D' der Verdopplungspunkt von BM . Nach der eben bereits bewiesenen Implikation ist $ABCD'$ dann ein Parallelogramm. Wegen der Eindeutigkeit der Parallelen gilt: $\overline{CD} = \overline{CD'}$ und $\overline{AD} = \overline{AD'}$. Somit folgt: $D, D' \in \overline{CD} \cap \overline{AD}$, und die Eindeutigkeit des Schnittpunkts liefert $D = D'$. Also ist das Viereck $ABCD$ dasselbe wie $ABCD'$ und mithin ein Parallelogramm. \square

Aus Satz 4.7 folgt insbesondere, dass die Diagonallinien eines Parallelogramms einander schneiden. Eine unmittelbare Folgerung aus der Mittellotregel ist das sogenannte Mittellotprinzip:

Satz 4.8 (Mittellotprinzip). *Sei AB eine echte Strecke. Dann gilt für alle Punkte X :*

$$|XA| = |XB| \iff X \text{ liegt auf dem Mittellot von } AB.$$

Als erste weithin bekannte Aussage folgt nun der Satz des Thales. Wir formulieren ihn „kreislos“ – ein didaktischer Kommentar zu diesem Aspekt folgt auf Seite 343 im Zusammenhang mit den entsprechenden Aufgaben.

Satz 4.9 (Thales). *Sei ABC ein echtes Dreieck, und sei M der Mittelpunkt von AB . Dann gilt:*

$$ABC \text{ ist rechtwinklig} \iff |MA| = |MC|.$$

Beweis. Sei N der Mittelpunkt von AC . Dann gelten folgende Äquivalenzen:

$$ABC \text{ ist rechtwinklig} \iff \overline{BC} \perp \overline{AC} \iff \overline{MN} \perp \overline{AC} \iff |MA| = |MC|.$$

Dabei ist der zweite Äquivalenzpfeil durch den Mittelparallelensatz und die Verträglichkeit von \parallel und \perp begründet; der dritte durch das Mittellotprinzip. \square

Das Haus der Vierecke

Der einzige spezielle Viereckstyp, den wir bisher erwähnt haben, sind die Parallelogramme. Darüber hinaus möchten wir sieben weitere Viereckstypen definieren:

Definition 4.10. Ein echtes Viereck $ABCD$ heißt ...

Raute, wenn alle vier Seiten gleich lang sind;

Rechteck, wenn je zwei benachbarte Seitenlinien aufeinander senkrecht stehen;

Quadrat, wenn es eine Raute und ein Rechteck ist;

symmetrischer Drachen, wenn \overline{AC} das Mittellot von BD ist;

symmetrisches Trapez, wenn AB und CD dasselbe Mittellot besitzen;

(schiefer) Drachen, wenn \overline{AC} durch den Mittelpunkt von BD geht;

(schiefes) Trapez, wenn \overline{AB} und \overline{CD} parallel sind.

Die Mengen dieser Vierecke bezeichnen wir in naheliegender Weise jeweils mit den Kürzeln Ra , Re , Q , sD , sT , D und T . Das Kürzel P möge außerdem für die Menge der Parallelogramme stehen.

Man beachte, dass bei den vier letztgenannten Viereckstypen (sD, sT, D, T) die Tupelbeschreibung mit der Reihenfolge der Ecken erneut von besonderer Bedeutung ist. Insgesamt bilden die hier erwähnten acht Viereckstypen zusammen mit der Menge aller echten Vierecke einen Verband bezüglich der Inklusion, der traditionell das *Große Haus der Vierecke* genannt wird. Insbesondere ist der Schnitt von je zwei dieser Viereckstypen ebenfalls ein Element dieses Verbands, und diese Schnittaussagen können im entsprechenden Verbandsdiagramm (Bild 4.4) leicht abgelesen werden; im Einzelnen lauten sie

$$Ra \cap Re = Q, \quad sD \cap P = Ra, \quad P \cap sT = Re, \quad D \cap T = P. \quad (4.1)$$

Die Beweise dieser Aussagen sind entweder völlig offensichtlich oder ergeben sich aus den vorangegangenen Sätzen, wobei häufig das Variieren einer Konfiguration erfolgreich angewendet werden kann. Als Beispiel beweisen wir die Aussage $D \cap T = P$; die Inklusion „von rechts nach links“ ergibt sich direkt aus dem Diagonalsatz bzw. den Definitionen von Parallelogramm und Trapez, weswegen wir nur die andere Inklusion genauer betrachten: Sei also $ABCD$ ein Drachen und ein Trapez. Sei M der Mittelpunkt von BD , und sei C' der Verdopplungspunkt von AM . Dann ist $ABC'D$ nach dem Diagonalsatz ein Parallelogramm. Insbesondere gilt: $\overline{C'D} \parallel \overline{AB}$, und weil $ABCD$ ein Trapez ist, gilt auch $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$. Beide Parallelitätsaussagen führen wegen der Eindeutigkeit der Parallelen zu $\overline{C'D} = \overline{CD}$, insbesondere also $C' \in \overline{CD}$. Insgesamt haben wir damit die Inzidenzen $C' \in \overline{CD}, C' \in \overline{AC'}, C \in \overline{CD}$ und $C \in \overline{AC'}$, wobei die letzte Inzidenz daraus folgt, dass $ABCD$ ein Drachen ist. Also sind sowohl C als auch C' Schnittpunkt von \overline{CD} und $\overline{AC'}$, und die Eindeutigkeit des Schnittpunkts liefert $C = C'$. Also ist $ABCD$ genau wie $ABC'D$ ein Parallelogramm. Die Aussage $D \cap T = P$, die wir hiermit bewiesen haben, ist durchaus von praktischem Nutzen; man betrachte etwa die Aufgaben 265 und 266.

Die zweite Gleichung von (4.1) impliziert insbesondere, dass jede Raute ein Parallelogramm ist. Dies ist keine Selbstverständlichkeit, sondern eine sehr bemerkenswerte Aussage, durch die Streckenkongruenz (auf Seiten der Rauten) und Inzidenz bzw. Parallelität (auf Seiten der Parallelogramme) miteinander verbunden sind; zwei Relationen also, die sich eigentlich fremd sind.⁶ Man möge daher auf jeden Fall darauf verzichten, Rauten von vorneherein als Parallelogramme mit gleich langen Seiten zu definieren, weil dies das geschilderte Berührungsphänomen von Streckenkongruenz und Inzidenz verdecken würde.

⁶ In ähnlicher Weise sind die Streckenkongruenz und die senkrecht-Relation durch das Mittellotprinzip miteinander verbunden.

Die Durchschnitte von Viereckstypen, die im „Haus der Vierecke“ nicht benachbart sind, lassen sich im Verbandsdiagramm 4.4 dennoch in der üblichen Weise ablesen, und die dazugehörigen Beweise können stets durch schlichte Mengenbetrachtungen abgehandelt werden; so ist beispielsweise

$$sD \cap T = (sD \cap D) \cap T = sD \cap (D \cap T) = sD \cap P = Ra. \quad (4.2)$$

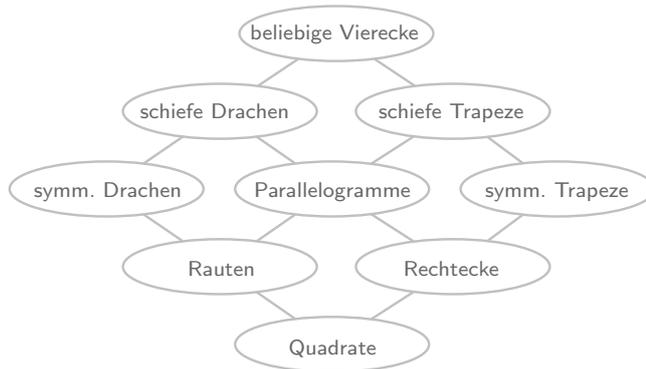


BILD 4.4: Das Haus der Vierecke

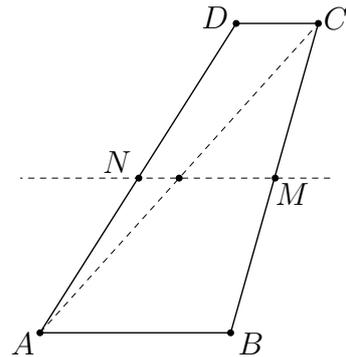


BILD 4.5: Zu Hilfssatz 4.11

Denjenigen Teilverband, der nur aus P , Ra , Re und Q besteht, nennen wir das *Kleine Haus der Vierecke*. Nachdem wir die Parallelelogramme bereits durch ihr Diagonalverhalten charakterisiert haben (Diagonalensatz), wäre auch für die anderen Viereckstypen, und insbesondere für diejenigen im *Kleinen Haus der Vierecke*, eine solche Charakterisierung möglich. Wir nehmen hier jedoch davon Abstand, denn tatsächlich reichen die anderen Diagonalcharakterisierungen an die Bedeutung der entsprechenden Aussage über Parallelelogramme nicht heran.

Das didaktische Potential des *Hauses der Vierecke* ist jedenfalls erheblich; insbesondere bietet sich hier die Gelegenheit, das begriffliche Denken und das logische Ordnen auf begrenztem Terrain intensiv zu üben.

Hilfssatz 4.11. *In einem Trapez $ABCD$ sei g die Parallele zu \overline{AB} durch den Mittelpunkt M von BC . Dann verläuft g auch durch den Mittelpunkt N von AD .*

Beweis. (Bild 4.5) Sei h die Parallele zu \overline{CD} durch N . Die Umkehrung des Mittelparallelensatzes – angewandt auf die Dreiecke CDA und ABC – ergibt in Verbindung mit der Trapez-Eigenschaft von $ABCD$, dass h und g jeweils durch den Mittelpunkt von AC gehen und parallel sind. Also sind h und g identisch, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Kreise

Definition 4.12. Seien M und A verschiedene Punkte, und sei r eine nicht-negative reelle Zahl. Dann heißt die Menge

$$k(M, A) := \{X \mid |MX| = |MA|\}$$

der *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* M durch A und

$$k(M, r) := \{X \mid |MX| = r\}$$

der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem *Radius* r . Es gilt offensichtlich $k(M, A) = k(M, |MA|)$. Für zwei verschiedene Punkte X, Y eines Kreises k bezeichnen wir die Strecke XY als *Sehne* von k ; falls der Mittelpunkt von k auf \overline{XY} liegt, sagen wir statt *Sehne* meist *Durchmesser*.

Die *Sehnenregel* ist eine Spezialisierung des Mittellotprinzips:

Satz 4.13 (Sehnenregel). *Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M , und sei XY eine Sehne von k . Dann liegt M auf dem Mittellot von XY .*

Während manche Grundtatsachen über Kreise implizit bleiben (etwa: Eindeutigkeit des Mittelpunkts), wird deren Schnittverhalten explizit angesprochen:

Grundtatsache 4.14 (Schnittverhalten von Kreis und Gerade). *Ein Kreis und eine Gerade haben entweder keinen, genau zwei oder genau einen gemeinsamen Punkt. Im letztgenannten Fall wird die Gerade als Tangente des Kreises und der gemeinsame Punkt als Berührungspunkt bezeichnet, und wir sagen dann, die Gerade berühre den Kreis in diesem Punkt. Im Fall von genau zwei Schnittpunkten nennen wir die Gerade eine Sekante des Kreises.*

Von großer praktischer Bedeutung ist die folgende Charakterisierung von Tangenten:

Satz 4.15 (Tangentenkriterium). *Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt M , sei g eine Gerade, und sei B ein gemeinsamer Punkt von k und g . Dann gilt: Die Gerade g ist genau dann eine Tangente von k , falls $\overline{BM} \perp g$ ist.*

Der Beweis von Satz 4.15 geht am bequemsten über die Kontraposition der Äquivalenzaussage und benutzt die Sehnenregel und die Eindeutigkeit des Lotes.

Grundtatsache 4.16 (Schnittverhalten zweier Kreise). *Zwei verschiedene Kreise haben entweder keinen, genau zwei oder genau einen gemeinsamen Punkt. Im letztgenannten Fall sagen wir, dass die Kreise einander in diesem Punkt berühren und bezeichnen diesen als Berührungspunkt der beiden Kreise.*

Es folgt eine Beschreibung des Berührens von Kreisen; auch hier empfiehlt sich ein Beweis per Kontraposition:

Satz 4.17. *Seien k und l Kreise mit den verschiedenen Mittelpunkten M bzw. N . Außerdem sei B ein gemeinsamer Punkt von k und l . Dann gilt: Die Kreise k und l berühren einander genau dann, wenn B auf \overline{MN} liegt.*

Definition 4.18. Ein Kreis k heißt *Umkreis* eines n -Ecks, wenn jede Ecke des n -Ecks auf k liegt.

Satz 4.19 (Umkreismittelpunkt). *Jedes echte Dreieck ABC hat genau einen Umkreis, den wir gelegentlich mit $k(ABC)$ bezeichnen. Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittellote der Seiten des Dreiecks. Insbesondere haben also alle drei Mittellote einen Punkt gemeinsam.*

Satz 4.20. *Ein Trapez hat genau dann einen Umkreis, wenn es symmetrisch ist; und ein Parallelogramm hat einen Umkreis genau dann, wenn es ein Rechteck ist.*

Der Beweis von Satz 4.20 ist einfach und benutzt das Mittellotprinzip.

Satz 4.21 (Der Satz des Thales als Ortslinienaussage). *Sei ABC ein echtes Dreieck, und sei M der Mittelpunkt von AB . Dann gilt: ABC ist genau dann rechtwinklig, wenn C auf $k(M, A)$ liegt. In diesem Zusammenhang nennen wir $k(M, A)$ den Thaleskreis über AB .*

Punktspiegelung und Geradenspiegelung

Wie in der Geometrie üblich werden wir im Folgenden das Bild eines Objekts A bei einer Abbildung σ nicht durch $\sigma(A)$, sondern durch $A\sigma$ notieren.

Definition 4.22. Sei Z ein Punkt. Dann heißt diejenige Abbildung, die jeden Punkt X auf den Verdopplungspunkt von XZ abbildet, die *Punktspiegelung an Z* . Z heißt in diesem Zusammenhang das *Zentrum* der Punktspiegelung.

Grundtatsache 4.23 (Eigenschaften der Punktspiegelung). *Sei Z ein Punkt, und sei σ die Punktspiegelung an Z . Dann ist σ eine selbstinverse, längentreue Abbildung mit Z als einzigem Fixpunkt; d.h. für alle Punkte X, Y gilt:*

- $X\sigma\sigma = X$
- $|X\sigma Y\sigma| = |XY|$
- $X\sigma = X \iff X = Z$.

Zur leichteren Beschreibung der Geradenspiegelung vereinbaren wir zunächst die Schreibweise X_g für den Fußpunkt des Lotes von einem Punkt X auf eine Gerade g .

Definition 4.24. Sei g eine Gerade. Dann heißt diejenige Abbildung, die jeden Punkt X auf den Verdopplungspunkt von XX_g abbildet, die *Geradenspiegelung an g* . In diesem Zusammenhang heißt g auch die *Achse* dieser Geradenspiegelung.

Grundtatsache 4.25 (Eigenschaften der Geradenspiegelung). *Sei g eine Gerade, und sei σ die Geradenspiegelung an g . Dann gilt:*

- σ ist eine selbstinverse Abbildung.
- Die Fixpunkte von σ sind genau die Punkte auf g .
- Für alle Punkte $A \notin g$ ist g das Mittellot von $AA\sigma$.
- σ ist längentreu (Strecken werden also auf gleichlange Strecken abgebildet).

Die (beweisbaren) Eigenschaften der Spiegelungen aus den Listen der Grundtatsachen 4.23 und 4.25 sind allesamt evident, weswegen ihre Einstufung als Grundtatsachen gerechtfertigt erscheint, doch ist der Beweis der Längentreue jeweils eine gewisse Herausforderung. Das gilt insbesondere für die Entartungsfälle, in denen eine Strecke und ihre Bildstrecke kollinear sind. Weitere Treue-Eigenschaften von Spiegelungen folgen im Rahmen der reellen Geometrie in Satz 4.48.

Über die Spiegelungen hinaus werden wir keine weiteren Abbildungen der Ebene auf sich explizit betrachten. Translationen (Verschiebungen) können, wenn es notwendig erscheint, als Hintereinanderausführungen von Spiegelungen implizit auftreten. Auf Drehungen können wir wegen des vorläufigen Verzichts auf Winkel ohnehin jetzt nicht eingehen.

Symmetrische n -Ecke

Definition 4.26. Ein n -Eck V heißt *achsen-* bzw. *punktsymmetrisch*, wenn es eine Geraden- bzw. Punktspiegelung σ gibt mit folgender Eigenschaft: Je zwei benachbarte Ecken von V werden durch σ auf benachbarte Ecken von V abgebildet.

Unsere Definition von Symmetrie impliziert also, dass die Eckenmenge eines symmetrischen n -Ecks durch die Spiegelung auf sich selbst abgebildet wird, doch geht sie mit der Forderung nach der Nachbarschaftserhaltung von Ecken darüber hinaus. Würden wir auf diese Zusatzforderung verzichten, so wäre der formale Symmetriebegriff nicht im Einklang mit unserer Intuition und das Viereck aus Bild 4.6 würde als achsensymmetrisch gelten; denn die Punktmenge $\{A, B, C, D\}$ geht ja bei der Spiegelung an \overline{AB} in sich selbst über. Dass unsere Intuition hier das Prädikat „symmetrisch“ verweigert, liegt nicht daran, dass das Viereck überschlagen ist; immerhin erkennen wir das überschlagene Viereck aus Bild 4.7 (links) wohl als symmetrisch an. Vielmehr liegt die Nicht-Symmetrie des Vierecks aus Bild 4.6 daran, dass beispielsweise B und C benachbart sind, die Bildpunkte B und D (bei der Spiegelung an der einzig in Frage kommenden Spiegelachse) jedoch nicht. Daher sehen wir in der Zeichnung zwar die Seite BD , vermissen aber die entsprechende Bildseite BC . Solange wir allerdings nur die Punktsymmetrie an echten Vierecken erkunden, können wir die explizite Forderung nach der Nachbarschaftserhaltung fallen lassen, denn diese ergibt sich hier bemerkenswerterweise bereits aus der Eigenschaft, dass die Eckenmenge des Vierecks auf sich selbst abgebildet wird.

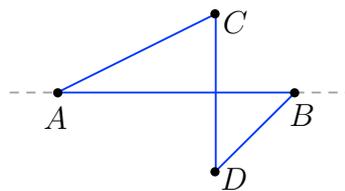


BILD 4.6: Ein nicht-symmetrisches Viereck trotz „symmetrischer Eckenmenge“

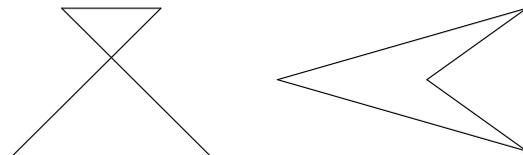


BILD 4.7: Auch überschlagene oder eingeschlagene Vierecke können durchaus symmetrisch sein.

Satz 4.27 (Charakterisierung symmetrischer Vierecke). *Ein echtes Viereck $ABCD$ ist genau dann punktsymmetrisch, wenn $\{A, B, C, D\}$ die Eckenmenge eines Parallelogramms ist; und es ist achsensymmetrisch genau dann, wenn mindestens eine der folgenden Aussagen gilt:*

- $\{A, B, C, D\}$ ist die Eckenmenge eines symmetrischen Trapezes.
- $ABCD$ oder $BCDA$ ist ein symmetrischer Drachen.⁷

Beweis. Die Rückwärtsrichtungen der beiden Äquivalenzaussagen sind nahezu trivial. Die Vorwärtsrichtung der Punktsymmetrie-Aussage ergibt sich aus dem Diagonalensatz. Etwas komplizierter ist lediglich die Vorwärtsrichtung der Achsensymmetrieaussage: Sei also $ABCD$ ein achsensymmetrisches, echtes Viereck. Sei g die (nach Definition 4.26 sicherlich vorhandene) Gerade mit der Eigenschaft: Je zwei benachbarte Ecken von $ABCD$ werden durch die Geradenspiegelung σ an g auf benachbarte Ecken von $ABCD$ abgebildet. Wir unterscheiden nun danach, ob es unter den Ecken A, B, C, D einen Fixpunkt gibt (also einen Punkt X mit $X\sigma = X$) oder nicht.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass es einen solchen Punkt nicht gibt. Dann gilt: $A\sigma \in \{B, C, D\}$. Gilt etwa $A\sigma = B$, so folgt $C\sigma = D$,⁸ so dass also AB und CD dasselbe Mittellot besitzen und daher $ABCD$ ein symmetrisches Trapez ist. Gilt stattdessen $A\sigma = C$ oder $A\sigma = D$, so sind $ACBD$ bzw. $ADBC$ jeweils symmetrische Trapeze. In diesem Fall haben wir also Benachbarungen von Ecken nicht betrachten müssen.

Im anderen Fall gibt es in der Menge $\{A, B, C, D\}$ mindestens einen Fixpunkt. Es gibt dann sogar genau *zwei* Fixpunkte in dieser Menge; gilt nämlich etwa $A\sigma = A$ und $B\sigma = C$, so bleibt, locker gesagt, nur noch D als Bildpunkt von sich selbst übrig. Gäbe es hingegen einen dritten Fixpunkt, so wären sogar alle vier Punkte aus $\{A, B, C, D\}$ zwangsläufig Fixpunkte von σ und lägen damit allesamt auf der Spiegelachse g , was der Echtheit des Vierecks widerspräche.⁹

⁷ Man beachte, dass wir diese Bedingung nicht durch folgende Aussage ersetzen können: „ $\{A, B, C, D\}$ ist die Eckenmenge eines symmetrischen Drachens.“ Täten wir es dennoch, so würden wir uns Exemplare wie das Viereck aus Bild 4.6 als achsensymmetrische Figuren einhandeln.

⁸ Denn wäre $C\sigma = A$, so hätten wir $C = C\sigma\sigma = A\sigma = B$ – ein Widerspruch zur Echtheit des Vierecks; wäre $C\sigma = B$, so hätten wir $C = C\sigma\sigma = B\sigma = A\sigma\sigma = A$ – ebenso ein Widerspruch zur Echtheit des Vierecks; und $C\sigma = C$ würde der in diesem Fall geltenden Vorgabe widersprechen, dass keiner der vier Ecken ein Fixpunkt bei der Abbildung σ ist.

⁹ Hier könnten wir vornehmer argumentieren, indem wir folgenden Satz benutzen: Eine selbstinverse Permutation auf einer endlichen Menge mit gerader Mächtigkeit besitzt

Wir nennen die beiden Fixpunkte X und Y und die beiden anderen Punkte U und V . U und V werden dann durch σ aufeinander abgebildet. Wir erkennen nun leicht, dass X und Y in dem vorliegenden Viereck nicht benachbart sind, denn wären sie es doch, etwa gemäß dem Schema $U - X - Y - V(-U)$, so wären U und X benachbart, die betreffenden Bilder V und X jedoch nicht. Die beiden Fixpunkte des Vierecks $ABCD$ bei der Spiegelung an g sind also nicht benachbart; es sind somit entweder A und C oder aber B und D . Im ersten Fall ist $g = \overline{AC}$, womit $ABCD$ ein symmetrischer Drachen ist; im zweiten Fall ist $g = \overline{BD}$, womit $BCDA$ ein solcher ist. \square

Der Satz 4.27 ist in seiner Aussage etwas umständlich. Dies liegt vor allem daran, dass er auf „merkwürdige“ Vierecke Rücksicht nehmen muss, insbesondere auf überschlagene. Es liegt daher nahe, sich auf die zahme, intuitive Vierecksvorstellung aus der Schule zurückzuziehen und die Charakterisierung symmetrischer Vierecke dann griffiger zu formulieren. Im Rahmen der abstrakten Geometrie gelingt dies jedoch noch nicht, da wir hier kein reelles Längenmaß und damit auch keine *zwischen*-Relation zur Verfügung haben. Erst in der reellen Geometrie werden wir *normale Vierecke* definieren können (Seite 274) und gleich danach den Satz über symmetrische normale Vierecke aussprechen (Satz 4.50), der das Gewünschte leistet.

Winkelhalbierende

Es ist bemerkenswert, dass wir bereits in der abstrakten Geometrie von Winkelhalbierenden sprechen können, obwohl das Winkelmaß noch längst nicht eingeführt ist. Tatsächlich definieren wir Winkelhalbierende winkelfrei als Symmetrieachsen von Geradenpaaren:

Satz und Definition 4.28. *Seien g, h verschiedene Geraden, die einander im Punkt S schneiden; und sei w eine weitere Gerade. Dann sind folgende zwei Aussagen äquivalent:*

- *Die Geraden g und h werden bei der Spiegelung an w aufeinander abgebildet.*
- *Es gibt einen Punkt $A \in g \setminus \{S\}$ und einen Punkt $B \in h \setminus \{S\}$ derart, dass $|SA| = |SB|$ gilt und w das Mittellot von AB ist.*

Fixpunkte in gerader Anzahl – möglicherweise also keinen einzigen. Dieser Satz ist per Induktion leicht zu beweisen. Hier stellt σ eine selbstinverse Permutation auf der Menge $\{A, B, C, D\}$ dar.

Erfüllt w eine (und damit beide) dieser Aussagen, so heißt w eine Winkelhalbierende von g, h . In einem Dreieck ABC verstehen wir unter einer Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC die Winkelhalbierende zweier Seitenlinien des Dreiecks. Sprechen wir in Bezug auf das Dreieck ABC von einer Winkelhalbierenden bei C , so ist eine Winkelhalbierende der Seitenlinien $\overline{CA}, \overline{CB}$ gemeint; Entsprechendes gilt für die beiden anderen Ecken des Dreiecks.

Die Aussage von Satz 4.28 enthält implizit die Geradentreue von Geradenspiegelungen: Geraden werden auf Geraden abgebildet. Das ist etwas irritierend, weil wir im Anschluss an Grundtatsache 4.25 eigentlich beschlossen haben, den Beweis der Geradentreue von Spiegelungen auf Satz 4.48 zu verschieben; tatsächlich wird der Beweis dort mit Mitteln der metrischen Geometrie (Dreiecksgleichung) besonders kurz ausfallen. Wollten wir Satz 4.28 hingegen hier in der abstrakten Geometrie beweisen, so müssten wir einen umständlicheren Beweisgang in Kauf nehmen; immerhin wäre dies durchaus machbar. Wir verzichten jedoch auf diese Möglichkeit und akzeptieren die Geradentreue von Spiegelungen an dieser Stelle zunächst als Grundtatsache, womit der (hier nicht ausgeführte) Beweis von Satz 4.28 zu einer leichten Übung wird.

Wir kommen nun zur Ortslinien-Charakterisierung von Winkelhalbierenden:

Satz 4.29 (Winkelhalbierende als Ortslinie). *Seien g, h zwei Geraden mit dem Schnittpunkt S , und sei X ein beliebiger Punkt. Dann gilt $|XX_g| = |XX_h|$ genau dann, wenn X auf einer Winkelhalbierenden von g, h liegt. Insbesondere geht jede Winkelhalbierende von g, h durch S .*

Auf den Winkelhalbierenden von g, h liegen also genau jene Punkte, deren Abstand zu g derselbe ist wie deren Abstand zu h .

Satz 4.30 (Zweideutigkeit der Winkelhalbierenden). *Seien g, h zwei Geraden mit dem Schnittpunkt S . Dann gilt: Falls es eine Winkelhalbierende von g, h gibt, so besitzen g, h insgesamt genau zwei Winkelhalbierende. Diese verlaufen beide durch S und stehen senkrecht aufeinander.*

Beweis. (Bild 4.8) Sei w eine Winkelhalbierende von g, h . Dass S auf jeder Winkelhalbierenden von g, h liegt, insbesondere also auf w , ist bereits in Satz 4.29 enthalten. Nach Definition 4.28 finden wir außerdem einen Punkt $A \in g \setminus \{S\}$ und einen Punkt $B \in h \setminus \{S\}$ derart, dass $|SA| = |SB|$ gilt und w das Mittellot von AB ist.

Sei nun v das Lot auf w durch S . Wir zeigen zunächst, dass auch v eine Winkelhalbierende von g, h ist. Sei also B' der Verdopplungspunkt von BS . Dann gilt $|SB'| = |SB| = |SA|$, und mit dem Satz des Thales folgt die Rechtwinkligkeit des Dreiecks $B'BA$. Es gilt also $v \perp w \perp \overline{AB} \perp \overline{AB'}$, und mehrfache Anwendung des Satzes über die Verträglichkeit von \perp und \parallel führt somit auf $v \perp \overline{AB'}$. Weil außerdem $|SA| = |SB'|$ gilt, folgt mit der Mittellotregel, dass v das Mittellot von AB' ist. Nach Definition 4.28 ist v damit eine Winkelhalbierende von g, h .

Es bleibt zu zeigen, dass es keine weiteren Winkelhalbierenden von g, h gibt. Sei also u irgendeine von w verschiedene Winkelhalbierende von g, h . Wir müssen zeigen, dass u mit v übereinstimmt. Wir wissen bereits, dass S auf u liegt (Satz 4.29). Sei σ die Spiegelung an u . Dann ist u das Mittellot von $AA\sigma$ (Grundtatsache 4.25).¹⁰ Wegen der Längentreue von σ gilt ferner

$$|SA'| = |SA| (= |SB|). \tag{4.3}$$

Das Dreieck $A\sigma BA$ ist echt ($u \neq w!$), und mit dem Satz des Thales ergibt sich daher aus (4.3), dass es auch rechtwinklig ist. Insgesamt gilt also $u \perp \overline{AA\sigma} \perp \overline{AB} \perp w$, also $u \perp w$, und die Eindeutigkeit des Lotes (durch S auf w) erzwingt die gewünschte Identität von u und v . \square

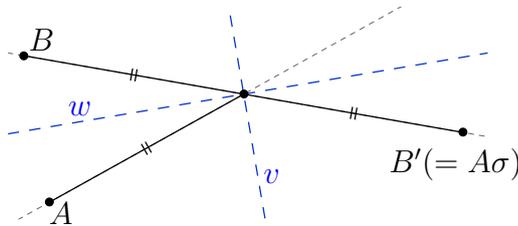


BILD 4.8: Zu Satz 4.30

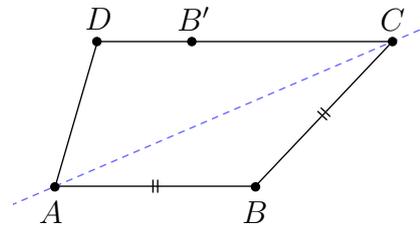


BILD 4.9: Zu Satz 4.31

Wir schließen hier noch einen Satz an, den wir später in der Längenrechnung für einen bequemen Beweis des Satzes von Apollonius benötigen werden:

Satz 4.31. Sei $ABCD$ ein Trapez. Dann ist die Diagonallinie \overline{CA} genau dann eine Winkelhalbierende von \overline{CB} , \overline{CD} , wenn AB und BC gleich lang sind.

¹⁰ An dieser Stelle geht die Tatsache in die Argumentation ein, dass A nicht auf u liegt. Andernfalls wären nämlich g, u und h identisch, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass g und h einen Schnittpunkt haben.

Beweis. (Bild 4.9) Sei B' der Bildpunkt von B bei der Spiegelung an \overline{CA} ; dann ist $ABCB'$ ein symmetrischer Drachen. Wir führen unseren Beweis nun durch eine einzige Äquivalenzumformung; es gilt:

$$\begin{aligned} \overline{CA} \text{ ist eine Winkelhalbierende von } \overline{CB}, \overline{CD} &\iff B' \in \overline{CD} \\ \iff \overline{CD} = \overline{CB'} &\iff_{\substack{\overline{AB} \parallel \overline{CD}}} ABCB' \text{ ist ein Trapez} \\ \iff_{sD \cap T = Ra} ABCB' \text{ ist eine Raute} &\iff_{ABCB' \in sD} |AB| = |BC|. \end{aligned}$$

□

Höhen und Seitenhalbierende im Dreieck

Dieser Abschnitt markiert den Beginn der eigentlichen Dreieckslehre. Die Begriffe *Höhe*, *Höhenlinie*, *Höhenfußpunkt*, *Seitenhalbierende* und *Seitenhalbierendenlinie* seien wie üblich definiert.

Satz und Definition 4.32 (Umdreieck). *Sei ABC ein echtes Dreieck, und seien K, L, M die Mittelpunkte von BC bzw. CA bzw. AB . Außerdem seien A', B', C' die Verdopplungspunkte von AK bzw. BL bzw. CM . Dann ist $A'B'C'$ ein echtes Dreieck mit den Seitenmitten A, B, C , und es gilt:*

$$\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}, \quad \overline{B'C'} \parallel \overline{BC}, \quad \overline{C'A'} \parallel \overline{CA}.$$

Wir nennen $A'B'C'$ das Umdreieck von ABC .

Beweis. (Bild 4.10) Zunächst einmal sind $A'BAC$ und $BC'AC$ nach Konstruktion echte Vierecke; dabei geht auch die Echtheit von ABC in die Argumentation ein. Gemäß Diagonalensatz (und wiederum nach Konstruktion) sind $A'BAC$ und $BC'AC$ daher Parallelogramme, d.h. es gilt

$$\overline{A'B} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{BC'}. \tag{4.4}$$

Also sind A', B, C' kollinear, und die zweifache Anwendung der Parallelogrammregel zeigt außerdem $|A'B| = |BC'|$, d.h. B ist der Mittelpunkt von $A'C'$. Die beiden anderen Mittelpunktsaussagen ergeben sich analog. Aus der Kollinearität von A', B, C' folgt zusammen mit (4.4) insbesondere $\overline{C'A'} \parallel \overline{CA}$; die anderen behaupteten Parallelitätsaussagen ergeben sich wiederum analog. Die Punkte A' und C' sind verschieden, denn ansonsten würden A', B, C' in einem Punkt zusammenfallen, was der Parallelogramm-Eigenschaft von $A'BAC$ widersprechen

würde. Mit analoger Argumentation können wir ausschließen, dass A' und B' bzw. B' und C' zusammenfallen. Wäre das Dreieck $A'B'C'$ schließlich kollinear, so auch dessen Seitenmittendreieck ABC , im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $A'B'C'$ tatsächlich ein echtes Dreieck. \square

Satz 4.33. *In jedem echten Dreieck ABC schneiden die drei Höhenlinien einander in einem Punkt, dem sogenannten Höhenschnittpunkt des Dreiecks.*

Beweis. Wir betrachten wie an dieser Stelle üblich das Umdreieck $A'B'C'$ von ABC . Aus Satz 4.32 ergibt sich, dass die Höhenlinien von ABC die Mittellote der Seiten von $A'B'C'$ sind. Dass die Höhenlinien von ABC einander in einem Punkt schneiden, folgt also daraus, dass die Mittellote des Umdreiecks dies tun (gemäß Satz 4.19). \square

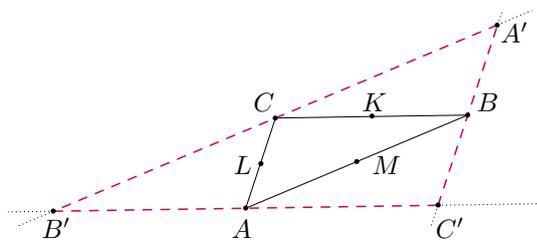


BILD 4.10: Zu Satz 4.32

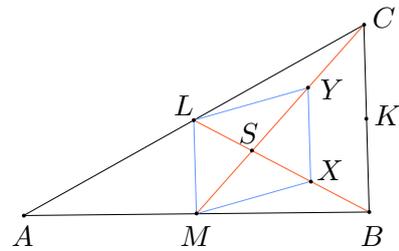


BILD 4.11: Zu Satz 4.35

Definition 4.34 (Teilung im Verhältnis 2:1). Seien X, Y, Z Punkte mit $X \neq Z$. Wir sagen, Y teile die Strecke XZ im Verhältnis 2:1, wenn der Mittelpunkt von XY zugleich der Verdopplungspunkt von ZY ist.

Wir fassen die Eindeutigkeit des 2:1-Teilungspunkts (im Sinne von Definition 4.34) als implizite Grundtatsache auf.

Satz 4.35. *Sei ABC ein echtes Dreieck mit den Seitenmitten K, L, M (siehe Bild 4.11). Falls zwei Seitenhalbierendenlinien von ABC einander schneiden, so schneiden alle drei Seitenhalbierendenlinien einander in einem Punkt S , und dieser Punkt S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1, d.h. S ist der 2:1-Teilungspunkt von AK, BL und CM .*

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass \overline{BL} und \overline{CM} einander schneiden; den Schnittpunkt nennen wir S . Seien X und Y außerdem die Mittelpunkte von BS bzw. CS . Dann ist $XYLM$ das Seitenmittenviereck von $ABSC$. Wir möchten den Satz von Varignon anwenden und

müssen dafür zunächst klären, dass $XYLM$ nicht kollinear ist; wäre es nämlich doch kollinear, so lägen X und Y auf \overline{LM} , sodass wegen der Eindeutigkeit des Schnittpunkts $X = L$ und $Y = M$ wäre; das hieße aber, dass S sowohl der Verdopplungspunkt von BL als auch derjenige von CM wäre und damit identisch mit *zwei* Ecken des Umdreiecks von ABC – im Widerspruch zu dessen Echtheit (Satz 4.32). Also ist $XYLM$ tatsächlich nicht-kollinear, und somit ist dieses Viereck nach Satz 4.5 ein Parallelogramm. Der Diagonalschnittpunkt von $XYLM$ ist S , und die Behauptung über die 2:1-Teilung von BL und CM folgt daher aus dem Diagonalsatz.

Es fehlt noch der Nachweis der Behauptung bezüglich der *dritten* Seitenhalbierenden. Da \overline{BL} und \overline{CM} nicht parallel sind, schneidet \overline{AK} mindestens eine dieser Geraden, etwa \overline{BL} . Den Schnittpunkt bezeichnen wir mit S' ; indem wir das Argument aus dem letzten Absatz nochmals auf BL und AK anwenden, erkennen wir, dass S' der 2:1-Teilungspunkt von BL und AK ist. Die Eindeutigkeit des 2:1-Teilungspunkts von BL zeigt, dass S' und S identisch sind, womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

Den Punkt S aus Satz 4.35 bezeichnen wir, falls vorhanden, wie üblich als *Schwerpunkt* des Dreiecks ABC . Tatsächlich ist die Existenz dieses Punkts in euklidischen Ebenen keine Selbstverständlichkeit. Wir betrachten etwa im 9-Punkte-Modell das echte Dreieck ACG (siehe Bilder 4.1 und 4.2): Der Mittelpunkt von CG ist E , und die entsprechende Seitenhalbierendenlinie ist $\{A, E, J\}$. Der Mittelpunkt von AG ist D , und die entsprechende Seitenhalbierendenlinie ist die Gerade $\{J, B, D\}$. Offensichtlich besitzen diese beiden Seitenhalbierendenlinien keinen gemeinsamen Punkt. Dass die Seitenhalbierendenlinien zumindest in der Zeichenebene (als einzigem Modell der reellen euklidischen Geometrie) einander stets schneiden, werden wir später klären (Seite 285).

Umkreis-Höhen-Satz und Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz

Satz 4.36 (Umkreis-Höhen-Satz). *Wir betrachten ein echtes Dreieck ABC mit dem Höhenschnittpunkt H . Außerdem seien M der Mittelpunkt von AB und H' der Verdopplungspunkt von HM . Dann ist CH' ein Durchmesser von $k(ABC)$; insbesondere ist der Mittelpunkt von CH' zugleich der Mittelpunkt von $k(ABC)$.*

Beweis. (Bild 4.12) Ist eines der Dreiecke ABC , BCA , CAB rechtwinklig, so folgt die Behauptung direkt aus dem Satz des Thales. Andernfalls ist das Viereck

$HAH'B$ echt, und M ist nach Voraussetzung in diesem Viereck der gemeinsame Mittelpunkt der Diagonalen; also ist $HAH'B$ nach dem Diagonalsatz ein Parallelogramm. Die Parallelität von $\overline{H'B}$ und \overline{AH} sorgt zusammen mit der Verträglichkeit von \perp und \parallel dafür, dass $CH'B$ ein *rechtwinkliges* Dreieck ist. Analog ist $CH'A$ ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck. Für den Mittelpunkt U von CH' gilt somit nach dem Satz des Thales: $|UB| = |UC| = |UH'| = |UA|$. Also ist U der Umkreismittelpunkt von ABC , und CH' ist ein Durchmesser dieses Umkreises. \square

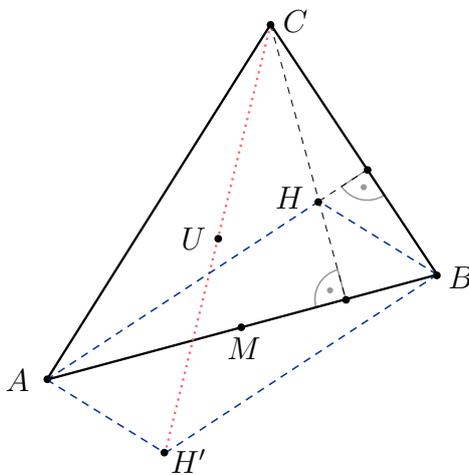


BILD 4.12: Zum Umkreis-Höhen-Satz

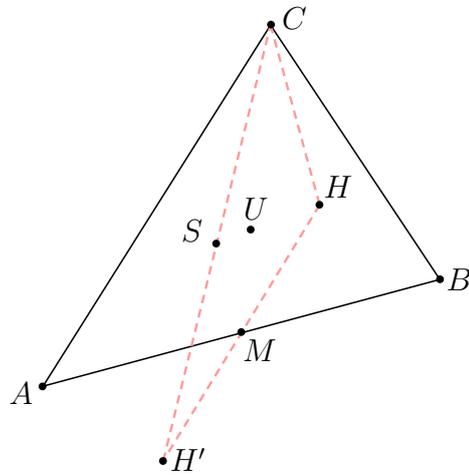


BILD 4.13: Zum Satz von Euler

Satz 4.37 (Ergänzung zum Umkreis-Höhen-Satz). *Sei ABC ein echtes Dreieck mit dem Höhenschnittpunkt H . Dann liegt der Bildpunkt H'' von H bei der Spiegelung an \overline{AB} auf $k(ABC)$. Außerdem gilt: Falls das Dreieck ABH echt ist, liegen $k(ABH)$ und $k(ABC)$ spiegelbildlich zu \overline{AB} .*

Beweis. Sei H' wie in Satz 4.36. Wir betrachten zunächst einige Spezialfälle: Ist eines der Dreiecke BCA bzw. CAB rechtwinklig, so gilt $H \in \{A, B\}$, und die Aussage des Satzes ist trivial. Ist ABC hingegen gleichschenkelig, so ist $H'' = H'$, und die Aussage dieses Satzes folgt dann aus Satz 4.36.

Wir gehen nun davon aus, dass keiner der erwähnten Spezialfälle vorliegt. Dann ist $H'H''H$ ein echtes Dreieck. Sei X der Mittelpunkt von HH'' ; nach Konstruktion der Geradenspiegelung liegt X auf \overline{AB} , und unter Verwendung des Mittelparallelsatzes ergibt sich

$$\overline{H''H'} \parallel \overline{XM} = \overline{AB} \perp \overline{HH''} = \overline{CH''}.$$

Hieraus folgt gemäß der Verträglichkeit von \perp und \parallel , dass $CH'H''$ ein rechtwinkliges Dreieck ist. Also liegt H'' auf dem Thaleskreis über CH' ; gemäß Satz 4.36 ist dies aber der Umkreis von ABC . Also liegt H'' auf $k(ABC)$.

Falls ABH echt ist, ist auch ABH'' echt; und wegen $H'' \in k(ABC)$ gilt dann $k(ABC) = k(ABH'')$. Das Bild von $k(ABC)$ bei der Spiegelung an \overline{AB} ist daher identisch mit dem Spiegelbild von $k(ABH'')$, und dieses Spiegelbild ist $k(ABH)$, weil A und B Fixpunkte dieser Spiegelung sind und H'' das Spiegelbild von H ist. \square

Satz 4.38 (Satz über die Euler-Gerade). *Sei ABC ein echtes Dreieck mit dem Höhenschnittpunkt H , Schwerpunkt S und Umkreismittelpunkt U . Dann liegen H, S, U auf einer Geraden, und S teilt die Strecke HU im Verhältnis 2:1.*

Beweis. (Bild 4.13) Sei M der Mittelpunkt von AB , und sei H' der Bildpunkt von H bei der Spiegelung an M . Dann haben die Dreiecke ABC und CHH' eine gemeinsame Seitenhalbierende, nämlich CM . Der Schwerpunkt S von ABC ist der 2:1-Teilungspunkt von CM , dieser ist aber auch Schwerpunkt von CHH' ; S ist also der gemeinsame Schwerpunkt beider Dreiecke. Insbesondere liegt S somit auf \overline{HU} – gemäß Satz 4.36 ist das nämlich eine Seitenhalbierendenlinie von CHH' – und teilt die Strecke HU im Verhältnis 2:1. \square

Satz 4.39 (Zwei-Kreise-Satz). *Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck, und sei $D \in \overline{AB}$ mit $D \neq A, B$. Dann ist der Umkreis von BCD das Bild des Umkreises von ACD bei der Geradenspiegelung an \overline{CD} . Insbesondere sind die Radien der Umkreise gleich groß.*

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von AB ; sei g das Lot von C auf \overline{CD} ; und seien A' und B' die Schnittpunkte von g mit den Loten auf \overline{AB} durch A bzw. B . Wir wenden den Satz des Thales auf die rechtwinkligen Dreiecke $A'DC$ und $A'DA$ an und erkennen, dass der Mittelpunkt K von $A'D$ der Mittelpunkt des Umkreises $k(ADC)$ ist; analog ist der Mittelpunkt L von $B'D$ der Mittelpunkt des Umkreises $k(BDC)$.

Nach der Mittellotregel steht \overline{CM} senkrecht auf \overline{AB} . Die Anwendung von Hilfssatz 4.11 auf das Trapez $A'ABB'$ zeigt also, dass C der Mittelpunkt von $A'B'$ ist. Die Gerade \overline{CD} ist damit das Mittellot von $A'B'$, und aus dem Mittellotprinzip folgt, dass die Strecken $A'D$ und $B'D$ gleich lang sind – und das sind Durchmesserstrecken von $k(ADC)$ bzw. $k(BDC)$. Damit sind auch die Radien der beiden Umkreise gleich.

Wir haben damit insbesondere gezeigt, dass $CLDK$ eine Raute ist, und mit dem Diagonalensatz und dem Mittellotprinzip folgt daraus leicht, dass die Umkreismittelpunkte K und L bei der Geradenspiegelung an \overline{CD} auf einander abgebildet werden. Aus der Längentreue der Geradenspiegelung folgt schließlich, dass dann auch $k(ACD)$ und $k(BCD)$ Bilder von einander sind. \square

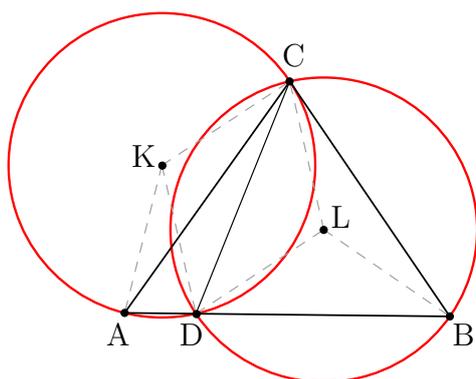


BILD 4.14: Der Zwei-Kreise-Satz

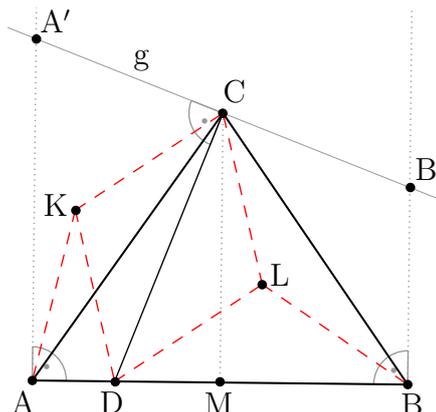


BILD 4.15: Beweisfigur zum Zwei-Kreise-Satz

Satz 4.40 (Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz). *Sei ABC ein echtes Dreieck, das nicht gleichschenkelig ist, und sei w eine Winkelhalbierende von ABC bei C . Dann gilt: Die Gerade w und das Mittellot m von AB schneiden einander auf dem Umkreis von ABC .¹¹*

Beweis. Wären w und m parallel, so stände w nach der Verträglichkeit von \perp und \parallel senkrecht auf \overline{AB} ; der Bildpunkt A' von A bei der Spiegelung an w läge auf \overline{BC} (weil w eine Symmetrieachse von \overline{AC} und \overline{BC} ist) und auf \overline{AB} (wegen $w \perp \overline{AB}$), also wäre $A' = B$, d.h. w wäre das Mittellot von AB ; insbesondere läge dann C auf dem Mittellot von AB , was nach dem Mittellotprinzip und

¹¹ Wie wir später sehen werden, gibt es in euklidischen Ebenen mit reellem Längenmaß für je zwei nicht-parallele Geraden g, h genau zwei Winkelhalbierende von g, h ; daraus ergibt sich, dass in solchen Ebenen folgende Erweiterung des Umkreis-Winkelhalbierenden-Satzes gilt: Sei ABC ein echtes Dreieck mit dem Umkreis k , und sei $X (\neq C)$ ein Schnittpunkt von k mit dem Mittellot von AB ; dann ist \overline{CX} eine Winkelhalbierende bei C . Wir weisen vorsorglich darauf hin, dass wir in der Geometrie mit Längenmaß den Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz stillschweigend um diese Aussage erweitern werden. In den momentan diskutierten *abstrakten* euklidischen Ebenen ohne Längenmaß gilt diese Erweiterung aber im Allgemeinen nicht.

wegen der Nicht-Gleichschenkligkeit von ABC aber nicht der Fall ist. Also gibt es tatsächlich einen Schnittpunkt von w und m ; wir nennen ihn X .

Sei nun B' der Bildpunkt von B bei der Spiegelung an w . Dann liegt B' auf \overline{AC} , und $AB'X$ ist ein echtes Dreieck (hier geht erneut die Nicht-Gleichschenkligkeit von ABC ein). Tatsächlich ist $AB'X$ sogar ein *gleichschenkliges* Dreieck, denn $B'X$ ist die Bildstrecke von BX bei der Spiegelung an w und somit von gleicher Länge; und BX und AX sind gleichlang, weil X auf dem Mittellot m von AB liegt (Mittellotprinzip).

Auf das gleichschenklige Dreieck AXB' und den Punkt C wird nun der Zwei-Kreise-Satz angewandt (mit C in der Rolle von D in der Notation jenes Satzes); die Vorbedingung $C \neq A, B'$ ist jedenfalls erfüllt. Gemäß dem Zwei-Kreise-Satz ist $k(AXC)$ das Bild von $k(B'XC)$ bei der Spiegelung an w ; jenes Bild von $k(B'XC)$ ist aber identisch mit $k(BXC)$ (weil die Dreiecke $B'XC$ und BXC selber voneinander Spiegelbilder sind). Folglich sind $k(AXC)$ und $k(BXC)$ identisch. Also liegen A, B, C, X auf demselben Kreis, nämlich auf $k(ABC)$. Insbesondere liegt X auf diesem Umkreis. \square

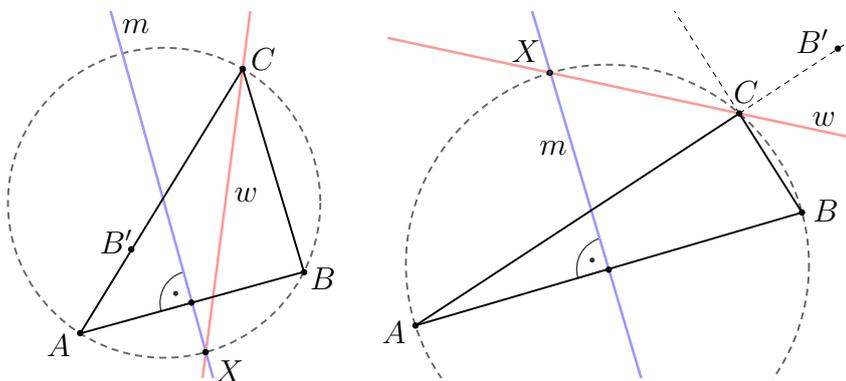


BILD 4.16: Die Aussage und der Beweis des Umkreis-Winkelhalbierenden-Satzes für verschiedene Winkelhalbierende bei C .

Der Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz ist nicht nur ein praktisches Hilfsmittel zum Lösen zahlreicher geometrischer Probleme, sondern er ist auch ein Beispiel für eine Aussage, von der es überrascht, dass sie mit Mitteln der *abstrakten* Geometrie überhaupt beweisbar ist. Eigentlich erweckt der Satz den Eindruck, dass man zu seinem Beweis den Peripheriewinkelsatz benötigen würde, der in unserer Theorie aus gutem Grund noch lange auf sich warten lässt. Der Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz zeigt somit besonders markant, wie weit die Möglichkeiten der abstrakten Geometrie reichen.

Der Feuerbachkreis

Satz 4.41 (Feuerbachkreis). *Sei ABC ein echtes Dreieck mit dem Höhenschnittpunkt H und dem Umkreismittelpunkt U . Dann liegen die drei Seitenmittelpunkte von ABC , die drei Fußpunkte der Höhen von ABC und die Mittelpunkte der Strecken AH , BH , CH auf demselben Kreis, dem sogenannten Feuerbachkreis des Dreiecks ABC . Dessen Mittelpunkt ist zugleich der Mittelpunkt der Strecke HU , und dessen Durchmesser ist so groß wie der Radius von $k(ABC)$.*

Beweis. Seien X, Y, Z die Seitenmittelpunkte von AB, BC bzw. CA (Bild 4.17, links), und sei k der Umkreis von XYZ . Wir zeigen zunächst, dass die drei Höhenfußpunkte ebenfalls auf k liegen. Aus Symmetriegründen genügt hierfür der entsprechende Nachweis für den Fußpunkt C' der Höhe durch C . Zur Vermeidung von Trivialitäten setzen wir hier zusätzlich $C' \neq X, B$ voraus. Dann ist $XC'YZ$ ein Trapez mit $|XZ| = |C'Y|$ ¹² und damit nach der Aussage von Aufgabe 261 ein Parallelogramm oder ein symmetrisches Trapez (siehe Lösungshinweis dort). Wegen $C' \neq B$ ist $XC'YZ$ kein Parallelogramm, also ein symmetrisches Trapez und besitzt daher nach Satz 4.20 einen Umkreis. Also liegt C' auf dem Umkreis von XYZ , d.h. auf k .

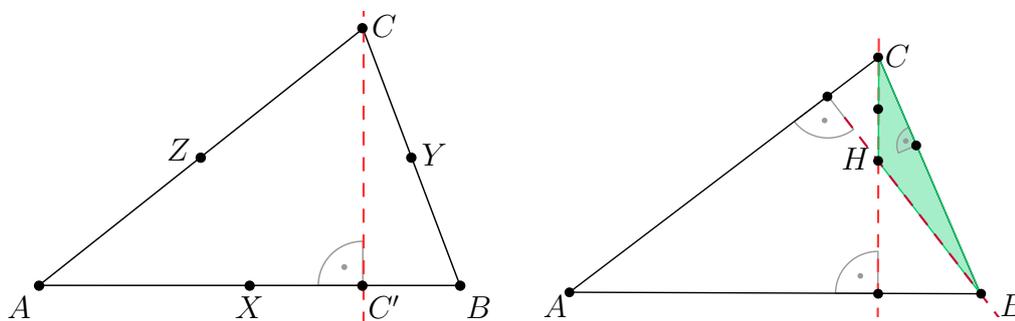


BILD 4.17: Zum Satz über den Feuerbachkreis

Für den Beweis der nächsten Teilbehauptung ist es wiederum aus Symmetriegründen ausreichend zu zeigen, dass der Mittelpunkt von CH auf k liegt. Bislang haben wir immerhin bewiesen, dass in jedem echten Dreieck zumindest die drei Seitenmittelpunkte und die drei Höhenfußpunkte auf demselben Kreis liegen. Dies gilt somit auch für das Dreieck CBH , falls es denn echt ist (Bild 4.17, rechts). Dessen Höhenfußpunkte sind aber bemerkenswerterweise genau

¹²Nach dem Mittelparallelsatz ist $XZYB$ nämlich ein Parallelogramm; nach der Parallelogrammregel folgt $|XZ| = |YB|$; und der Satz der Thales liefert im Dreieck CBC' die Gleichung $|YB| = |C'Y|$.

diejenigen des Ausgangsdreiecks ABC , die ja allesamt auf k liegen, wie wir schon wissen. Das bedeutet insbesondere, dass auch der Mittelpunkt der Seite CH auf k liegt, was zu zeigen war. Falls CBH hingegen nicht echt ist, so gilt entweder $C = H$ oder $B = H$ – im ersten Fall ist der Mittelpunkt von CH mit C identisch, weswegen die gewünschte Aussage aus dem Satz des Thales folgt, und im zweiten Fall ist der Mittelpunkt von CH mit dem Mittelpunkt von CB identisch, weshalb hier gar nichts zu zeigen bleibt.

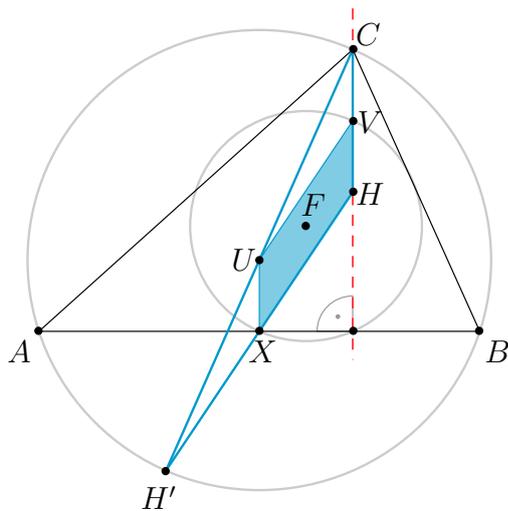


BILD 4.18

Wir wenden uns nun der Behauptung über den Mittelpunkt und den Durchmesser von k zu. Sei V der Mittelpunkt von HC , und sei H' der Verdopplungspunkt von HX (Bild 4.18). Nach dem Umkreis-Höhen-Satz ist $H'C$ ein Durchmesser des Umkreises von ABC ; insbesondere ist U zugleich der Mittelpunkt dieses Umkreises und der Mittelpunkt von $H'C$. Wenn wir den Mittelparallelsatz auf das Dreieck $HH'C$ anwenden, erkennen wir, dass $XHVU$ ein Parallelogramm ist; der Mittelpunkt F von HU ist gemäß dem Diagonalsatz

also auch der Mittelpunkt von XV ; und XV ist nach dem Satz des Thales ein Durchmesser von k , was wiederum bedeutet, dass der Mittelpunkt F dieser Strecke tatsächlich der Mittelpunkt von k ist. Indem wir ein letztes Mal den Mittelparallelsatz anwenden – erneut auf $HH'C$ –, sehen wir, dass auch $XVCU$ ein Parallelogramm ist. Aus der Parallelogrammregel folgt daher, dass XV und UC gleich lang sind, d.h. der Durchmesser von k entspricht dem Radius von $k(ABC)$. \square

Theoretische Grundlagen der reellen Geometrie mit Längenmaß

Von der Abstandsfunktion zum Längenmaß

Der Übergang zur reellen euklidischen Geometrie erfolgt durch die Erweiterung der schon bisher vorhandenen Abstandsfunktion zu einem Längenmaß: Es wird jetzt verlangt, dass die Abstandsfunktion zusätzlich zu Symmetrie und Definitheit drei weitere Axiome erfüllt; es sind dies die *Dreiecksungleichung*, die *Dreiecksgleichung* und das eigentlich reelle Axiom der *Streckenabtragung*:

Grundtatsache 4.42. *Es gelten folgende Aussagen:*

- Für alle Punkte A, B, C ist $|AC| \leq |AB| + |BC|$. [Dreiecksungleichung]
- Für alle kollinearen Dreiecke ABC gilt:

$$|AB|, |BC| \leq |AC| \implies |AB| + |BC| = |AC|. \quad \text{[Dreiecksgleichung]}$$

- Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$, alle Punkte A und alle Geraden g mit $A \in g$ gibt es einen Punkt $B \in g$ mit: $|AB| = r$. [Streckenabtragung].

Von den drei neuen Axiomen ist die Dreiecksgleichung wohl diejenige, die didaktisch am heikelsten ist. Die Vorbedingung $|AB|, |BC| \leq |AC|$ drückt im Zusammenspiel mit der Kollinearität der drei Punkte A, B, C aus, dass der Punkt B *zwischen* den Punkten A und C liegt, und die didaktische Schwierigkeit besteht natürlich darin, dass geometrische Zeichnungen allzuoft *zwischen*-Beziehungen von Punkten suggerieren, von denen nicht immer sofort klar ist, ob sie tatsächlich auch jenseits der Anschauung Bestand haben. Wir werden die *zwischen*-Relation zunächst einmal formal einführen und die Dreiecksgleichung dann bequem umformulieren:

Definition 4.43. Von drei Punkten A, B, C sagen wir, dass B *zwischen* A und C liegt, wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen und die Ungleichungen $|AB|, |BC| \leq |AC|$ gelten. Gilt in beiden Fällen sogar die echte Ungleichung, so sagen wir auch, dass B *echt zwischen* A und C liegt.

Liegt B zwischen A und C , so nennen wir B gelegentlich auch einen *Zwischen-Punkt* der Strecke AC oder einen *inneren Punkt* dieser Strecke und notieren dies bisweilen durch das Symbol $\overset{A}{\bullet} \text{---} \overset{B}{\bullet} \text{---} \overset{C}{\bullet}$.

Man beachte, dass auch die Punkte A und B selbst jeweils zwischen A und B liegen. Außerdem ist klar, dass von drei kollinearen Punkten stets (mindestens) einer zwischen den beiden anderen liegt. Die Umformulierung der Dreiecksgleichung lautet nun knapp: Liegt der Punkt B zwischen den Punkten A und C , so gilt: $|AB| + |BC| = |AC|$.

Ferner beachte man, dass bei der *zwischen*-Beziehung stets nur interessiert, welcher Punkt in der Mitte liegt, d.h. die beiden Aussagen $\overset{A}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$ und $\overset{C}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{A}{\bullet}$ sind stets äquivalent.

Schließlich sei erwähnt, dass das Längenmaß nun eine Grundlage darstellt für Bemerkungen derart, dass ein Punkt *innerhalb* oder *außerhalb* eines bestimmten Kreises liege.

Weitere metrische Grundtatsachen und die Lot-Ungleichung

Es folgen weitere Bemerkungen zum Längenmaß, die wir trotz ihrer Beweisbarkeit als Grundtatsachen behandeln:

Grundtatsache 4.44. *Sei AB eine echte Strecke. Dann gelten folgende Aussagen:*

- a) *Ein Punkt M ist Mittelpunkt von AB genau dann, wenn die Gleichungskette $|AM| = \frac{1}{2}|AB| = |BM|$ gilt. [Arithmetische Charakterisierung des Mittelpunkts]*
- b) *Für jede positive reelle Zahl r gibt es genau zwei Punkte X auf \overline{AB} mit $|AX| = r$. [Zweideutigkeit der Streckenabtragung]*
- c) *Für jede positive reelle Zahl r mit $r \leq |AB|$ gibt es genau einen Punkt X mit $\overset{A}{\bullet} - \overset{X}{\bullet} - \overset{B}{\bullet}$ und $|AX| = r$. [Eindeutigkeit der Streckenabtragung innerhalb einer Strecke]*
- d) *Für jede positive reelle Zahl q gibt es genau einen Punkt X mit $\overset{A}{\bullet} - \overset{X}{\bullet} - \overset{B}{\bullet}$ und $\frac{|AX|}{|XB|} = q$.¹³ [Eindeutigkeit des Teilungspunkts innerhalb einer Strecke]*

Die *Lot-Ungleichung* möchten wir trotz ihrer Anschaulichkeit als Satz explizieren; wir bieten sie in zwei Varianten an:

¹³ Sollte die Evidenz dieser Aussage als nicht hinreichend empfunden werden, kann sie leicht aus Aussage c) abgeleitet werden (mit $r := \frac{q}{1+q}$).

Satz 4.45 (Lot-Ungleichung).

- a) Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck ABC . Dann gilt: $|AC|, |BC| < |AB|$.
- b) Seien X ein Punkt, g eine Gerade und Y der Fußpunkt des Lots von X auf g . Dann gilt für alle Punkte $Z \in g$: $|XY| \leq |XZ|$.

Beweis. Wir beweisen zunächst die erste Aussage. Sei M der Mittelpunkt von AB . Mithilfe von Dreiecksungleichung, Satz des Thales und der arithmetischen Charakterisierung des Mittelpunkts erkennen wir:

$$|AC| \leq |AM| + |MC| = |AM| + |AM| = 2 \cdot |AM| = |AB|.$$

Somit gilt zumindest: $|AC| \leq |AB|$. Würde hier das Gleichheitszeichen gelten, so läge A nach dem Mittellotprinzip auf dem Mittellot von BC , was zu einem Widerspruch zur Eindeutigkeit des Lots (von A auf \overline{BC}) führen würde. Es gilt also tatsächlich sogar die echte Ungleichung $|AC| < |AB|$. Die entsprechende Ungleichung für $|BC|$ ergibt sich analog.

Die Aussage b) geht nur insoweit über a) hinaus, als nun auch der Fall berücksichtigt wird, dass XYZ kein echtes Dreieck ist. Doch eine kurze Inspektion aller denkbaren Fälle zeigt schnell, dass auch dann die behauptete Ungleichung stets gilt. □

Aus der Lot-Ungleichung ergeben sich zwei leichte Folgerungen:

Folgerung 4.46 (Echte Dreiecksungleichung). Für ein echtes Dreieck ABC gilt stets: $|AB| < |BC| + |CA|$.

Folgerung 4.47. Für je drei Punkte A, B, C gilt:

$$|AB| + |BC| = |AC| \iff \overset{A}{\bullet} \text{---} \overset{B}{\bullet} \text{---} \overset{C}{\bullet}.$$

Durch Folgerung 4.47 wird also zum Ausdruck gebracht, dass die Gültigkeit der Dreiecksgleichung sogar *äquivalent* zu der fraglichen *zwischen*-Beziehung ist.

Weitere Eigenschaften von Spiegelungen

Satz 4.48 (Weitere Eigenschaften von Spiegelungen). Eine längentreue Abbildung der Ebene auf sich selbst (also eine Abbildung, bei der jede Strecke gleich

lang zu ihrer Bildstrecke ist) ist auch geradentreu, paralleltreu und senkrecht-treu, d.h. Geraden werden auf Geraden abgebildet, parallele Geradenpaare auf parallele Geradenpaare, senkrechte Geradenpaare auf senkrechte Geradenpaare. Wegen der Längentreue von Punkt- und Geradenspiegelungen (Grundtatsachen 4.23 und 4.25) treffen die genannten Eigenschaften also insbesondere auf Spiegelungen zu.

Beweis. Sei σ eine längentreue Abbildung der Ebene. Wir beweisen zunächst die Geradentreue von σ . Dafür reicht es zu zeigen, dass für alle Punkte A, B, C die Äquivalenz

$$A, B, C \text{ sind kollinear} \iff A\sigma, B\sigma, C\sigma \text{ sind kollinear} \quad (4.5)$$

gilt; und dafür ist es wiederum hinreichend, die Äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \iff \begin{array}{ccc} A\sigma & B\sigma & C\sigma \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \quad (4.6)$$

einzusehen. Die Gültigkeit von (4.6) ergibt sich tatsächlich aus Folgerung 4.47 in Verbindung mit der Längentreue von σ . Damit ist die Geradentreue von σ bewiesen.

Wir wenden uns nun der Paralleltreue von σ zu und betrachten daher eine weitere Gerade h mit $g \parallel h$. Um Triviales zu vermeiden, nehmen wir $g \neq h$ an. Wir finden leicht ein Parallelogramm $ABCD$ mit $A, B \in g$ und $C, D \in h$. Der Diagonalsatz ergibt in Verbindung mit Längen- und Geradentreue, dass auch $A\sigma B\sigma C\sigma D\sigma$ ein Parallelogramm ist. Somit gilt $g\sigma = \overline{A\sigma B\sigma} \parallel \overline{C\sigma D\sigma} = h\sigma$.

Zum Nachweis der Senkrechttreue von σ nehmen wir nun $g \perp h$ an. Wir finden problemlos eine Raute $ABCD$ mit $A, C \in g$ und $B, D \in h$. Geradentreue und Längentreue sorgen dafür, dass nun auch $A\sigma B\sigma C\sigma D\sigma$ eine Raute ist, woraus mit dem Mittellotprinzip die gewünschte senkrecht-Beziehung folgt. \square

Wir fügen hier einen Satz über symmetrische Vierecke ein, den wir bereits in der abstrakten Geometrie angekündigt haben, dort aber nicht aussprechen konnten. Wir müssen allerdings zunächst definieren, was *normale* Vierecke sind; mithilfe dieses Begriffs *normales Viereck* gelingt dann endlich die schulübliche Charakterisierung symmetrischer Vierecke:

Definition 4.49 (Normale Vierecke). Ein Viereck $ABCD$ heißt *normal*, wenn es echt ist, die Diagonallinien \overline{AC} und \overline{BD} einander schneiden und dieser Schnittpunkt sowohl echt zwischen A und C als auch echt zwischen B und D liegt.

Normale Vierecke sind also diejenigen, die ohnehin als einzige Vierecke die Klassenzimmer unserer Schulen bevölkern, nämlich solche, die weder überschlagen noch eingeschlagen noch dreiecksartig sind (mit drei kollinearen Ecken). Wenn in der Literatur oder in der Schule explizit diese Vierecke angesprochen werden sollen, so ist meist von *konvexen* Vierecken die Rede. Die Konvexität wird dabei entweder über Winkel definiert (alle „Innenwinkel“ sind kleiner als 180°) oder mithilfe von lediglich anschaulichen Anordnungsbetrachtungen (jeder Punkt, der zwischen zwei Ecken des Vierecks liegt, befindet sich „innerhalb“ des Vierecks). Die erste Variante steht für uns schon deshalb nicht zur Verfügung, weil wir bislang kein Winkelmaß eingeführt haben; und die zweite Variante ist recht kompliziert und nicht ohne Weiteres formalisierbar. Deshalb verwenden wir als Ersatz für Konvexität den Normalitätsbegriff aus Definition 4.49.

Längst nicht alle Vierecke, die in unserem Haus der Vierecke repräsentiert sind, sind zwangsläufig normal. Für Parallelogramme wird die Normalität durch den Diagonalsatz gesichert, und damit auch für Rauten, Rechtecke und Quadrate. Bei Drachen und Trapezen hingegen fällt es leicht, nicht-normale Exemplare zu finden; dies gilt sogar für die *symmetrischen* Drachen und Trapeze.

Es folgt nun die Charakterisierung der symmetrischen Vierecke unter den normalen Vierecken:

Satz 4.50. *Ein normales Viereck $ABCD$ ist punktsymmetrisch genau dann, wenn es ein Parallelogramm ist; und es ist achsensymmetrisch genau dann, wenn eines der Vierecke $ABCD$, $BCDA$ ein symmetrisches Trapez oder ein symmetrischer Drachen ist.*

Beweis. Die Rückwärtsrichtungen der beiden Äquivalenzen sind trivial. Wir beweisen also nur die beiden Vorwärtsrichtungen: Sei $ABCD$ ein normales, punktsymmetrisches Viereck. Nach Satz 4.27 ist dann $\{A, B, C, D\}$ die Eckenmenge eines Parallelogramms, und weil $ABCD$ normal ist, gilt $\overline{AC} \nparallel \overline{BD}$. Beide Tatsachen zusammen erzwingen aber die Beziehungen $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; und das heißt, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Sei nun $ABCD$ ein normales, achsensymmetrisches Viereck. Mit Blick auf Satz 4.27 und unsere Behauptung müssen wir uns nur mit dem Fall beschäftigen, dass $\{A, B, C, D\}$ die Eckenmenge eines symmetrischen Trapezes ist. Die Normalität von $ABCD$ bedeutet erneut: $\overline{AC} \nparallel \overline{BD}$. Somit sind es nicht die Strecken AC und BD , die ein gemeinsames Mittellot haben (wegen der Verträglichkeit von \perp und \parallel), sondern entweder AB und CD – dann ist $ABCD$ ein symmetrisches Trapez –, oder AD und BC – dann ist $BCDA$ ein symmetrisches Trapez. \square

Parallelprojektion und Strahlensatz

Um eine bequeme Formulierung des Strahlensatzes zu ermöglichen, führen wir zunächst *Parallelprojektionen* ein:

Definition 4.51. Seien g, h Geraden, und sei l eine dritte Gerade, die sowohl g als auch h schneidet. Diejenige Abbildung π , die jeden Punkt A von g auf den Schnittpunkt von h und der Parallelen zu l durch A abbildet, heißt die *Parallelprojektion von g auf h längs l* . Im Falle $l \perp h$ bezeichnen wir diese Abbildung auch als *Orthogonalprojektion*.

Grundtatsache 4.52 (Erster Strahlensatz). *Seien g, h, π wie in Definition 4.51. Dann gibt es genau eine positive reelle Zahl r mit folgender Eigenschaft:*

$$\text{Für alle } A, B \in g \text{ gilt } |A\pi B\pi| = r \cdot |AB|.$$

Diese Zahl r nennen wir den Dehnungsfaktor der Parallelprojektion π .

Diese Fassung des Strahlensatzes ist offenbar äquivalent zu der schulüblichen Aussage, dass für alle Punkte $A, B, C, D \in g$ mit $A \neq B$ und $C \neq D$ gilt:

$$\frac{|A\pi B\pi|}{|AB|} = \frac{|C\pi D\pi|}{|CD|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|C\pi D\pi|}{|A\pi B\pi|}.$$

Es geht jedenfalls darum, dass für eine fixierte Parallelprojektion das Längenverhältnis von Bildstrecke zu Strecke nicht von der betrachteten Strecke abhängt.

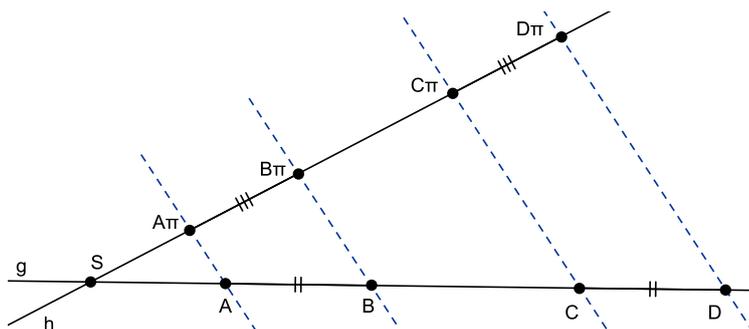


BILD 4.19: Zur Kongruenztreue der Parallelprojektion

Der Strahlensatz stellt sowohl historisch als auch didaktisch eine ernsthafte Hürde dar. Seine Aussage ist „ziemlich“ evident, aber wohl nicht evident genug, um ihn gegenüber Schülern guten Gewissens als Grundtatsache zu präsentieren;

immerhin ist der Strahlensatz ein Grundpfeiler der Längenrechnung, und weitere gewichtige Sätze werden sich aus ihm ergeben, so dass er gut abgesichert sein sollte. Leider ist ein vollwertiger Beweis in der Schule kaum machbar; das gilt nicht nur für die berüchtigte Schwierigkeit im Zusammenhang mit irrationalen Streckenverhältnissen, sondern bereits für eine vermeintlich einfache Vorstufe des Satzes. Letzten Endes wird uns daher doch nichts anderes übrig bleiben, als den Strahlensatz als unbewiesene Grundtatsache zu akzeptieren.

Dennoch möchten wir die üblichen Plausibilitätsbetrachtungen zum Strahlensatz einer knappen Untersuchung unterziehen und dabei einige historische und didaktische Anmerkungen machen. Eine Vorstufe zum Strahlensatz besteht in der *Kongruenztreue* der Parallelprojektion: Sind AB und CD zwei gleich lange Strecken auf g , so sind $A\pi B\pi$ und $C\pi D\pi$ auf h ebenfalls gleich lang (siehe Bild 4.19). Diese Aussage ist in der Schule durchaus leicht beweisbar. Wir verzichten hier nur deshalb auf einen Beweis, weil wir auf den späteren Stufen der Argumentation ohnehin einen Beweis schuldig bleiben werden.

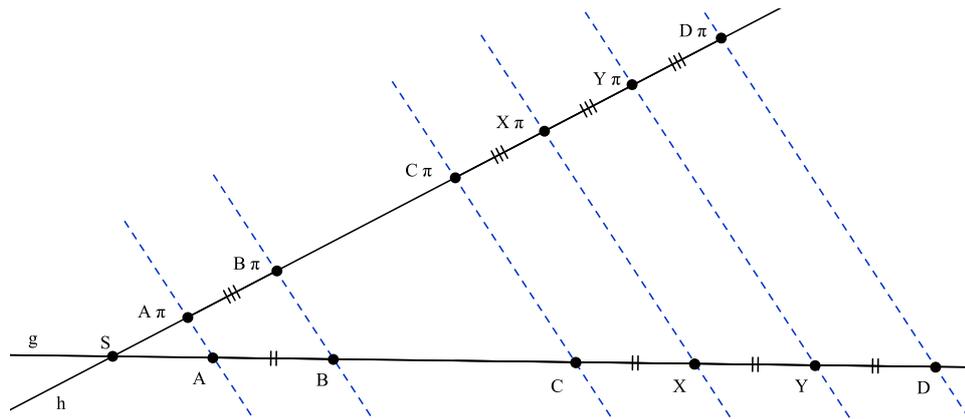


BILD 4.20: Zum Beweis des Strahlensatzes im Fall ganzzahliger Längenverhältnisse

Der nächste Schritt besteht in der Betrachtung von solchen Strecken auf g , die ein *ganzzahliges* Längenverhältnis aufweisen. Wir fixieren also zwei Strecken AB und CD auf g mit $\frac{|CD|}{|AB|} = n$, wobei n eine natürliche Zahl ist, und behaupten nun, dass zugleich $\frac{|C\pi D\pi|}{|A\pi B\pi|} = n$ ist. Dies scheint eine harmlose Folgerung aus der Kongruenztreue der Parallelprojektion zu sein. In der Schule wird manchmal eine Figur wie in Bild 4.20 gezeichnet, die den Fall $n = 3$ illustriert. Zwischen C und D werden die Punkte X und Y eingefügt derart, dass CX , XY und YD allesamt gleich lang wie AB sind. Die Kongruenztreue sorgt nun in der Tat dafür, dass die korrespondierenden Strecken auf h untereinander ebenfalls gleich

lang sind. Da wir *sehen*, dass sich die Strecke $C\pi D\pi$ aus drei solchen Strecken zusammensetzt, muss diese Strecke also dreimal so lang sein wie $A\pi B\pi$, und diese Einsicht ist hier das Ziel. Die letztgenannte Schlussfolgerung muss in einem formalen Beweis aus einer mehrfachen Anwendung der Dreiecksungleichung bestehen, und diese Anwendung setzt voraus, dass die *zwischen*-Beziehungen der fraglichen Punkte auf h so sind, wie wir sie in Bild 4.20 erkennen: $X\pi$ liegt zwischen $C\pi, D\pi$; und $Y\pi$ liegt zwischen $X\pi, D\pi$; und daher gilt

$$|C\pi D\pi| = |C\pi X\pi| + |X\pi D\pi| = |C\pi X\pi| + |X\pi Y\pi| + |Y\pi D\pi| = 3 \cdot |A\pi B\pi|,$$

d.h. wie behauptet ist $\frac{|C\pi D\pi|}{|A\pi B\pi|} = 3 = \frac{|CD|}{|AB|}$. Das Problem besteht nun darin, dass wir jenseits der Anschauung ohne Weiteres keinen Beweis für die fraglichen *zwischen*-Beziehungen zustande bringen werden. Was hier fehlt, ist die *Zwischentreue* der Parallelprojektion; sie würde uns garantieren, dass die fraglichen Punkte auf h in derselben Reihenfolge liegen wie ihre jeweiligen Urbilder auf g . Zwar können wir die hier dringend benötigte Zwischentreue mit wenig Mühe aus dem Strahlensatz *folgern*, doch gelingt es uns nicht, die Zwischentreue *vor* dem Strahlensatz zu beweisen. Schon die hier diskutierte Vorstufe des Strahlensatzes verlangt also nach einem anderen, technisch aufwendigeren Beweis, der kaum schultauglich ist und hier nicht geführt werden soll. Immerhin sind wir per Anschauung in der Lage, den Strahlensatz im Fall *ganzzahliger* Streckenverhältnisse auf g plausibel zu machen.

Die nächste Stufe im Beweisgang des Strahlensatzes besteht in der Betrachtung *rationaler* Streckenverhältnisse auf g . Es geht also um jene Fälle, in denen es natürliche Zahlen m, n gibt derart, dass $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{m}{n}$ ist. Wir wählen einen Punkt $X \in g$ mit

$$|CX| = \frac{1}{n} \cdot |AB| = \left(\frac{1}{m} \cdot |CD|\right). \quad (4.7)$$

Aus (4.7) folgen die Beziehungen

$$|CD| = m \cdot |CX| \quad \text{und} \quad |AB| = n \cdot |CX|, \quad (4.8)$$

die dank der bereits akzeptierten Teil-Gültigkeit des Strahlensatzes für ganzzahlige Längenverhältnisse zu den Gleichungen

$$|C\pi D\pi| = m \cdot |C\pi X\pi| \quad \text{und} \quad |A\pi B\pi| = n \cdot |C\pi X\pi| \quad (4.9)$$

führen. Unter Mitwirkung von (4.8) und (4.9) ergibt sich die Gleichungskette

$$\frac{|C\pi D\pi|}{|CD|} = \frac{m \cdot |C\pi X\pi|}{m \cdot |CX|} = \frac{|C\pi X\pi|}{|CX|} = \frac{n \cdot |C\pi X\pi|}{n \cdot |CX|} = \frac{n \cdot |C\pi X\pi|}{|AB|} = \frac{|A\pi B\pi|}{|AB|}.$$

Damit ist die gewünschte Verhältnisgleichheit auch in diesem Fall nachgewiesen. Allerdings stützt sich dieser Nachweis auf die vorherige Stufe ganzzahliger Längenverhältnisse, bei der die Übertragung der *zwischen*-Beziehungen von g auf h lediglich anschaulich verifiziert wurde.

Zu der Einschränkung über die ungewisse Übertragung der *zwischen*-Beziehungen von der einen Geraden auf die andere kommt auf der letzten Stufe des Beweises schließlich das fundamentale Problem hinzu, dass zwei Strecken keinesfalls immer ein rationales Längenverhältnis besitzen. Angeblich war es Hippasos von Metapont, der um 480 v. Chr. bei Überlegungen zum Längenverhältnis von Diagonale zu Seite im regelmäßigen Fünfeck (oder nach anderen Quellen: im Quadrat) entdeckte, dass es Strecken gibt, die kein gemeinsames Maß besitzen. Diese Entdeckung irrationaler Streckenverhältnisse wies auf eine empfindliche Lücke im antiken Beweiskgang des Strahlensatzes hin und erschütterte die griechische Mathematik dieses Zeitalters in erheblichem Maße. Nach alter Legende führte diese Entdeckung zur sogenannten „antiken Grundlagenkrise“ der Mathematik, und Hippasos' Tod bei einem Schiffbruch im Mittelmeer wurde demnach von seinen Zeitgenossen als gerechte Strafe für seinen Frevel an sakrosankten Grundvorstellungen angesehen.¹⁴ Moderne Forschung zu diesem Thema lässt es hingegen zunehmend fraglich erscheinen, ob die Entdeckung des Irrationalen tatsächlich als frevelhafte Tat angesehen wurde, die ein ganzes Zeitalter in eine Krise stürzte; demnach galt diese Entdeckung durchaus eher als eine Errungenschaft.¹⁵

Die Entdeckung des Hippasos verlangte jedenfalls auch jenseits des Strahlensatzes nach einer mathematischen Klärung. Nach allgemeiner Überzeugung der Wissenschaftshistoriker wurde diese erstmals von Eudoxos von Knidos geliefert, der in seiner Proportionenlehre auch irrationale Streckenverhältnisse berücksichtigte; seine Theorie ist uns durch Euklid überliefert, der sie im fünften Buch seiner *Elemente* wiedergab. Diese Theorie ist mangels leistungsfähiger arithmetischer Symbolik für den modernen Leser eine schwierige Lektüre; in gewisser Weise können wir sie als einen umständlichen Vorläufer der Dedekindschen Theorie der Schnitte auffassen, und die mehr als zwei Jahrtausende zwischen Eudoxos und Dedekind sind ein Ausdruck der tiefgreifenden historischen Schwierigkeiten in der Erfassung irrationaler Zahlen.

Der moderne Abschluss des Strahlensatz-Beweises benutzt natürlich die Tatsache, dass – modern gesprochen – die Menge der rationalen Zahlen *dicht* in der

¹⁴ siehe hierzu etwa [vW, S. 71 f.]

¹⁵ siehe etwa [Fow, S. 302-308]

Menge der reellen Zahlen liegt, dass also irrationale Zahlen immerhin beliebig gut durch rationale Zahlen angenähert werden können. Dieser Aspekt liegt bei genauer Betrachtung selbstverständlich erst recht nicht mehr in Reichweite der Schule.

Für den Schulunterricht bleibt damit die Beschränkung auf den ganzzahligen bzw. rationalen Fall: Hier ist der skizzierte antike Beweisgang ja zumindest anschaulich nachvollziehbar; und sein Kern, die Kongruenztreue der Parallelprojektion, ist sogar lupenrein beweisbar.

Zwischentreue der Parallelprojektion und das Axiom von Pasch

Satz 4.53. *Jede Parallelprojektion ist zwischentreu. Das bedeutet: Ist π eine Parallelprojektion von einer Geraden g auf eine Gerade h , so gilt für alle $A, B, C \in g$:*

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \iff \begin{array}{ccc} A\pi & B\pi & C\pi \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} .$$

Beweis. Ist r der Dehnungsfaktor von π (gemäß dem ersten Strahlensatz), so gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} B\pi \text{ liegt zwischen } A\pi \text{ und } C\pi &\iff |A\pi B\pi| + |B\pi C\pi| = |A\pi C\pi| \iff \\ r \cdot |AB| + r \cdot |BC| = r \cdot |AC| &\iff |AB| + |BC| = |AC| \iff \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} . \end{aligned}$$

□

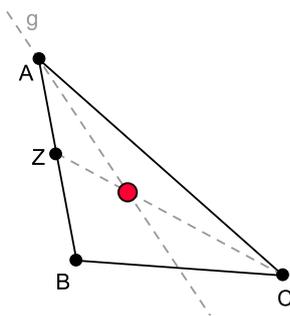


BILD 4.21: Zum Axiom von Pasch

Im Zusammenhang mit der Zwischentreue von Parallelprojektionen notieren wir eine weitere Aussage zur *zwischen*-Relation, die allgemein als *Axiom von Pasch* bezeichnet wird und die uns gemäß unserer intuitiven Auffassung von *zwischen* evident erscheint. Wir dürfen sie daher als Grundtatsache betrachten, obwohl sie im Rahmen unserer Theorie durchaus beweisbar ist – wenn auch mit erheblichem Aufwand. Moritz Pasch entlarvte diese Aussage (offenbar als erster Mathematiker) als stillschweigende Grundannahme der

Euklidischen Geometrie. Er selbst verwendete die *zwischen*-Relation als (undefinierten) Grundbegriff (wie *Punkt*, *Gerade*, *senkrecht* etc.) und benutzte die später nach ihm benannte Aussage daher als Axiom. In unserem Aufbau der

Geometrie hingegen ist die *zwischen*-Relation ein mithilfe des Längenmaßes und der Kollinearität *definierter* Begriff, was hier zur Beweisbarkeit dieser Aussage führt. Der große Aufwand und das Bewusstsein für die ohnehin notwendige didaktische Raffung der Theorie lassen uns aber von einem Beweis absehen.

Grundtatsache 4.54 (Axiom von Pasch). *Seien ABC ein echtes Dreieck, Z ein Punkt echt zwischen A und B , und g eine Gerade durch A . Dann gilt: Die Gerade g schneidet \overline{BC} in einem Punkt (echt) zwischen B und C genau dann, wenn g die Gerade \overline{CZ} in einem Punkt (echt) zwischen C und Z schneidet (siehe Bild 4.21).*

Der zweite Strahlensatz und die Umkehrung der Strahlensätze

In bekannter Weise folgt aus dem ersten Strahlensatz der zweite; bei unserem Vorgehen wird dabei deutlich, dass der zweite Strahlensatz im Unterschied zum ersten nicht ohne die explizite Behandlung des Schnittpunkts der Geraden g und h auskommt.

Satz 4.55 (Zweiter Strahlensatz). *Wir verwenden erneut die Bezeichnungen von Definition 4.51 und nennen den Schnittpunkt von g und h außerdem S . Dann gilt für alle Punkte $A, B \in g$ mit $A, B \neq S$:*

$$\frac{|A\pi A|}{|SA|} = \frac{|B\pi B|}{|SB|}.$$

Die Umkehrung der Strahlensätze ist ein Gebiet, auf dem in der Schule oft unsauber gearbeitet wird. So wird behauptet, dass für zwei Geraden g und h mit dem Schnittpunkt S und für Punkte $A, B \in g$ und $C, D \in h$ aus der Gleichung $\frac{|SC|}{|SA|} = \frac{|SD|}{|SB|}$ bereits die Parallelität von \overline{AC} und \overline{BD} folge. Diese Behauptung wird gern von der bekannten Figur aus Bild 4.22 begleitet und wirkt auch recht überzeugend. Dennoch ist sie falsch, denn wir können etwa den Punkt C aus Bild 4.22 durch sein Bild bei der Spiegelung an S ersetzen; die Verhältnisgleichung bleibt erhalten, aber die Parallelität geht offensichtlich verloren (Bild 4.23).

Vielleicht sind es neben Bild 4.22 auch historische Gründe, die uns hier in Versuchung führen: Der Begriff „Strahl“ bedeutet ja wohl eigentlich „Halbgerade“, und auf einer „Halbgeraden“ ist die Lage von C in Bild 4.23 nicht denkbar, wenn die Halbgerade im Punkt S beginnt und durch D verläuft. Doch unsere moderne Formulierung des Strahlensatzes mithilfe von Geraden statt Halbgeraden

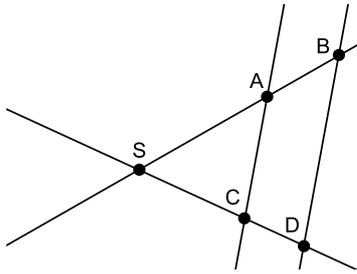


BILD 4.22: Zur Umkehrung des Strahlensatzes: So stellt man es sich oft vor...

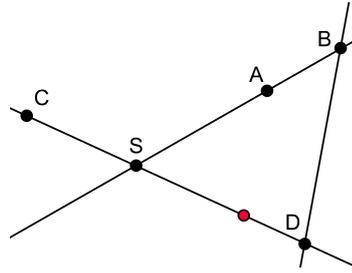


BILD 4.23: ... aber so kann die Figur auch aussehen: C liegt jetzt „auf der anderen Seite“ von S.

verlangt nach einer logisch einwandfreien Umkehrung. Entscheidend ist, dass die *zwischen*-Beziehung auf g mit derjenigen auf h korrekt korrespondiert:

Satz 4.56 (Umkehrungen der Strahlensätze). *Seien g, h zwei Geraden mit dem Schnittpunkt S . Ferner seien A und B Punkte auf g sowie C und D Punkte auf h derart, dass alle vier Punkte von S verschieden sind und eine der drei folgenden Bedingungen gilt:*

$$(1) \overset{S}{\bullet} \overset{A}{\bullet} \overset{B}{\bullet} \text{ und } \overset{S}{\bullet} \overset{C}{\bullet} \overset{D}{\bullet}; \quad (2) \overset{S}{\bullet} \overset{B}{\bullet} \overset{A}{\bullet} \text{ und } \overset{S}{\bullet} \overset{D}{\bullet} \overset{C}{\bullet}; \quad (3) \overset{A}{\bullet} \overset{S}{\bullet} \overset{B}{\bullet} \text{ und } \overset{C}{\bullet} \overset{S}{\bullet} \overset{D}{\bullet}.$$

Dann gelten die beiden Implikationen

$$\frac{|SC|}{|SA|} = \frac{|SD|}{|SB|} \implies \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

und

$$\frac{|AC|}{|SA|} = \frac{|BD|}{|SB|} \implies \overline{AC} \parallel \overline{BD}.$$

Diese Umkehrungen werden natürlich durch Variieren der Konfiguration bewiesen. Man betrachtet etwa die Parallelprojektion π von g auf h längs \overline{BD} und erhält unter Mitwirkung der ursprünglichen Strahlensätze und der Identität $B\pi = D$ die Gleichungskette

$$\frac{|SA\pi|}{|SA|} = \frac{|SB\pi|}{|SB|} = \frac{|SD|}{|SB|} = \frac{|SC|}{|SA|},$$

also

$$|SA\pi| = |SC|. \tag{4.10}$$

Weil einer der Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt ist, können wir dank der Zwischentreue der Parallelprojektion und der Eindeutigkeit der Streckenabtragung

innerhalb einer Strecke (Grundtatsache 4.44) aus (4.10) den Schluss ziehen, dass $A\pi$ und C identisch sind, womit wiederum die gewünschte Parallelität gezeigt ist.

Die Strahlensätze sind in der Schultradition auch der Ausgangspunkt für die Ähnlichkeitstheorie von Dreiecken. Wir können diese Theorie an dieser Stelle noch nicht ausführen, weil wir bislang auf den Winkelbegriff verzichten. Insbesondere müssen wir das Hauptergebnis dieser kleinen Theorie auf später verschieben (4.121). Das Phänomen der Ähnlichkeit hingegen können wir schon jetzt vorsorglich erfassen:

Definition 4.57 (Ähnlichkeit von Dreiecken). Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen *ähnlich*, wenn es eine reelle Zahl r gibt mit der Eigenschaft:

$$|A'B'| = r \cdot |AB|, \quad |B'C'| = r \cdot |BC|, \quad |C'A'| = r \cdot |CA|.$$

Wir schreiben dann kurz: $ABC \sim A'B'C'$.

Die Sätze von Menelaos und Ceva

Satz 4.58 (Menelaos). Sei g eine Gerade, die alle Seitenlinien des Dreiecks ABC schneidet, und zwar derart, dass keiner der drei Schnittpunkte identisch mit A , B oder C ist. Die Schnittpunkte auf den Seitenlinien \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{CA} nennen wir X , Y bzw. Z (Bild 4.24). Dann gilt:

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|} = 1.$$

Beweis. (Bild 4.24) Sei S der Schnittpunkt von g und der Parallelen zu \overline{BC} durch A . Die zweimalige Anwendung des zweiten Strahlensatzes führt zu den Gleichungen

$$\frac{|BY|}{|AS|} = \frac{|XB|}{|XA|} \quad \text{und} \quad \frac{|YC|}{|AS|} = \frac{|CZ|}{|ZA|}.$$

Das Umstellen dieser Gleichungen und das Eliminieren von $|AS|$ führen direkt auf die behauptete Gleichung. □

Satz 4.59 (Ceva). Sei S ein Punkt, der auf keiner der drei Seitenlinien des Dreiecks ABC liegt. Außerdem gelte: $\overline{SC} \parallel \overline{AB}$, $\overline{SA} \parallel \overline{BC}$, $\overline{SB} \parallel \overline{AC}$. Die drei entsprechenden Schnittpunkte nennen wir X , Y bzw. Z (Bild 4.25). Dann gilt:

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|} = 1. \tag{4.11}$$

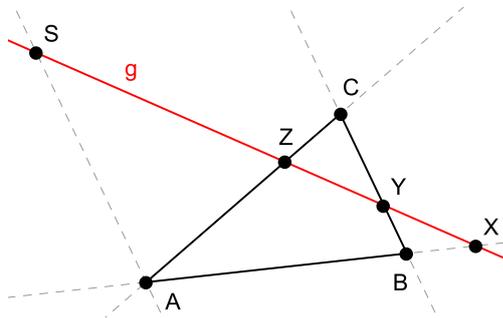


BILD 4.24: Zum Satz von Menelaos

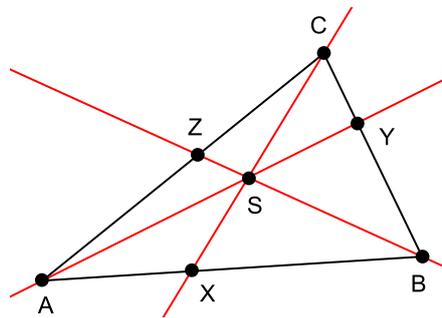


BILD 4.25: Zum Satz von Ceva

Beweis. Die behauptete Gleichung ergibt sich aus der zweimaligen Anwendung des Satzes von Menelaos (4.58); und zwar zum einen im Dreieck CXB bezüglich der Geraden \overline{AY} , zum anderen im Dreieck CAX bezüglich der Geraden \overline{BZ} . \square

Die Sätze von Ceva und Menelaos gehören zusammen mit den Strahlensätzen zu denjenigen geometrischen Aussagen, die hinsichtlich ihrer Umkehrungen in der Literatur oft sehr nachlässig behandelt werden. Allzu oft finden sich hier bloße Bemerkungen wie „Die Umkehrung gilt ebenfalls“; d.h. es wird behauptet, dass aus der jeweiligen Gleichung des Satzes die entsprechende Lagebeziehung folgt. Im Falle des Satzes von Ceva etwa wird behauptet, dass für ein echtes Dreieck ABC und für Punkte X, Y, Z auf $\overline{AB}, \overline{BC}$ bzw. \overline{CA} , die nicht mit den Ecken A, B oder C zusammenfallen, aus der Gleichung (4.11) bereits folgt, dass $\overline{CX}, \overline{AY}$ und \overline{BZ} einander in einem Punkte schneiden. Dabei werden stillschweigend Zusatzannahmen über *zwischen*-Beziehungen gemacht, von denen zweifelhaft ist, ob jeder Leser sich ihrer bewusst ist. Im Falle von Ceva sind verschiedene korrekte Versionen als Umkehrung denkbar. Eine einfache Variante sei hier genannt:

Satz 4.60 (Umkehrung des Satzes von Ceva). *Sei ABC ein echtes Dreieck, und seien $X \in \overline{AB}, Y \in \overline{BC}, Z \in \overline{CA}$ Punkte derart, dass keiner der drei Punkte X, Y, Z mit einem der Punkte A, B, C identisch ist. Dann gilt: Liegen X, Y, Z jeweils zwischen A, B bzw. B, C bzw. C, A und ist die Gleichung (4.11) erfüllt, so gehen $\overline{CX}, \overline{AY}$ und \overline{BZ} durch einen gemeinsamen Punkt.*

Beweis. Wir gehen davon aus, dass X, Y, Z alle oben angegebenen *zwischen*-Bedingungen erfüllen. Wir variieren nun die Konfiguration: Durch zweimalige Anwendung des Axioms von Pasch (Grundtatsache 4.54) erkennen wir, dass \overline{AY} und \overline{CX} einen Schnittpunkt S zwischen C und X haben; und ferner

besitzen \overline{BS} und \overline{AC} einen Schnittpunkt Z' zwischen C und A . Damit ist die Ausgangsfigur des Satzes von Ceva hergestellt – mit Z' in der Rolle von Z –, und eben dieser Satz liefert somit die Gleichung

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ'|}{|Z'A|} = 1. \quad (4.12)$$

Da nach Voraussetzung zusätzlich die Gleichung

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BY|}{|YC|} \cdot \frac{|CZ|}{|ZA|} = 1 \quad (4.13)$$

gilt, ergibt sich durch Kombination von (4.12) und (4.13) die Gleichung

$$\frac{|CZ'|}{|Z'A|} = \frac{|CZ|}{|ZA|}. \quad (4.14)$$

Die Gleichung (4.14) lässt tatsächlich wie gewünscht den Schluss $Z' = Z$ zu – aber nur deshalb, weil beide Punkte *zwischen* A und C liegen; dieser *zwischen*-Aspekt wird an dieser Stelle (und auch bei den anderen oben genannten Sätzen) häufig unterdrückt. Die „Rechtsgrundlage“ für die Schlussfolgerung $Z' = Z$ ist die *Eindeutigkeit der Streckenabtragung innerhalb einer Strecke* (Grundtatsache 4.44). Insgesamt ist damit gezeigt, dass die Geraden \overline{CX} , \overline{AY} und \overline{BZ} tatsächlich allesamt durch den Punkt S gehen. \square

Diese Umkehrung des Satzes von Ceva sorgt insbesondere für den Beweis, dass die Seitenhalbierenden von ABC (in der vorliegenden *reellen* euklidischen Ebene) einander tatsächlich schneiden; denn die Seitenmittelpunkte X, Y, Z des Dreiecks erfüllen offenbar die Voraussetzungen dieser Umkehrung. Natürlich könnten wir dieses Ergebnis auch ohne die Ceva-Umkehrung erreichen; um das Axiom von Pasch aber kommen wir nicht herum.

Der Winkelhalbierendensatz des Apollonius

Wir haben in der abstrakten Geometrie bereits einige wichtige Aussagen über Winkelhalbierende gewonnen. Allerdings gibt es abstrakte euklidische Ebenen, in denen nicht alle Paare einander schneidender Geraden Winkelhalbierende besitzen; dies gilt insbesondere für alle *endlichen* euklidischen Ebenen, also etwa für das 9-Punkte-Modell. In der Geometrie mit reellem Längenmaß jedoch ist die Existenz der Winkelhalbierenden gesichert:

Satz 4.61 (Existenz von Winkelhalbierenden). *Je zwei nicht-parallele Geraden g, h besitzen eine Winkelhalbierende (und damit nach Satz 4.30 genau zwei Winkelhalbierende, die aufeinander senkrecht stehen und durch den Schnittpunkt von g und h gehen).*

Beweis. Der schlichte Beweis ahmt die klassische Zirkel- und Lineal-Methode zur Konstruktion einer Winkelhalbierenden nach. Sei also S der Schnittpunkt der Geraden g und h . Wähle per Streckenabtragung $A \in g$ und $B \in h$ mit $|SA| = 1 = |SB|$. Dann ist das Mittellot von AB nach Definition 4.28 eine Winkelhalbierende von g, h . \square

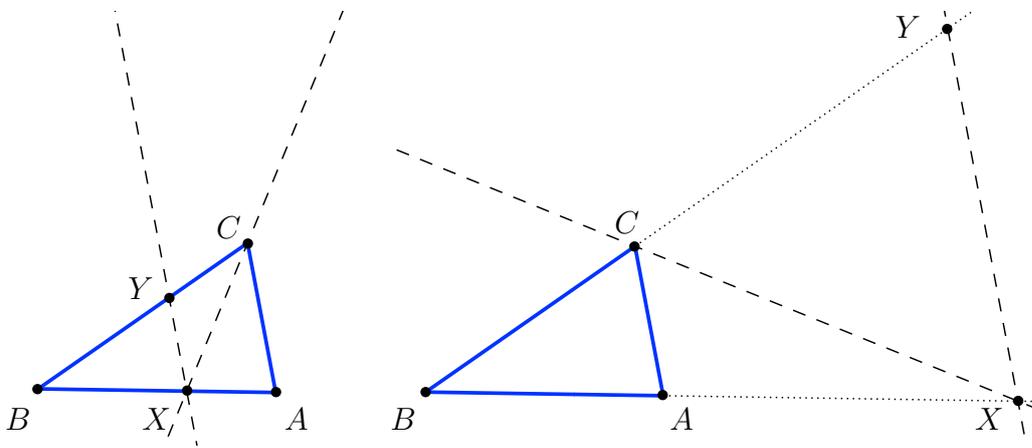


BILD 4.26: Der Satz des Apollonius mit verschiedenen Winkelhalbierenden

Satz 4.62 (Satz des Apollonius). *Sei ABC ein echtes Viereck, und sei X ein Punkt auf \overline{AB} , der von A und B verschieden ist. Dann ist \overline{CX} eine Winkelhalbierende von $\overline{CA}, \overline{CB}$ genau dann, wenn*

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|CA|}{|CB|} \quad (4.15)$$

gilt.

Beweis. (Bild 4.26) Sei Y der Schnittpunkt der Parallelen zu \overline{CA} durch X mit der Geraden \overline{CB} . Dann sind X und Y von den Punkten A, B, C verschieden. Der erste Strahlensatz liefert die Gleichung

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|CY|}{|YB|}, \quad (4.16)$$

und der zweite Strahlensatz führt zu

$$\frac{|XY|}{|YB|} = \frac{|CA|}{|CB|}. \quad (4.17)$$

Die Kombination von (4.16) und (4.17) verhilft uns schließlich zu der Gleichung

$$\frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|XY|}{|CY|} = \frac{|CA|}{|CB|}. \quad (4.18)$$

Die Gleichungen (4.18) und (4.15) ähneln einander; für unseren Beweis bleibt lediglich zu zeigen, dass der Quotient $\frac{|XY|}{|CY|}$ genau dann $= 1$ ist, wenn \overline{CX} eine Winkelhalbierende von $\overline{CA}, \overline{CB}$ ist. Genau dies haben wir mit Satz 4.31 aber schon längst bewiesen. \square

Die Eindeutigkeit des Teilungspunkts innerhalb einer Strecke (Grundtatsache 4.44 d) garantiert uns, dass es im echten Dreieck ABC genau einen Punkt X mit $\overset{A}{\bullet} \xrightarrow{X} \overset{B}{\bullet}$ und $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|CA|}{|CB|}$ gibt; nach dem Satz des Apollonius gibt es daher genau eine Winkelhalbierende von \overline{CA} und \overline{CB} , die \overline{AB} in einem Punkt zwischen A und B schneidet. Diese Gerade nennen wir die *innere Winkelhalbierende* bei C im Dreieck ACB .¹⁶ Nach Satz 4.30 gibt es allerdings noch eine weitere Winkelhalbierende von \overline{CA} und \overline{CB} , die wir dann die *äußere Winkelhalbierende* bei C nennen. Sofern das Dreieck ABC nicht gleichschenkelig ist, hat auch diese zweite Winkelhalbierende einen Schnittpunkt mit \overline{AB} , der die Strecke AB nach Satz 4.62 ebenfalls im Verhältnis $\frac{|CA|}{|CB|}$ teilt.

Satz 4.63. *Die drei inneren Winkelhalbierenden eines echten Dreiecks ABC haben einen Punkt gemeinsam.*

Beweis. Steht die Umkehrung des Satzes von Ceva zur Verfügung (4.60), so ergibt sich der Beweis unserer Behauptung aus dem Satz des Apollonius (4.62): Demnach erfüllt das Produkt der drei Teilungsverhältnisse die Ceva-Gleichung (4.11), und die Umkehrung des Satzes von Ceva führt zu der Behauptung dieses Satzes. Dabei ist entscheidend, dass die Teilungspunkte *zwischen* den Endpunkten der jeweiligen Dreiecksseiten liegen.

Wir bieten nun einen Beweis ohne Benutzung der Ceva-Umkehrung an, der allerdings bei genauer Betrachtung nichts weiter als eine Spezialisierung des Beweises der Ceva-Umkehrung ist: Seien X und Y die Schnittpunkte der

¹⁶ Bei der Angabe der Ecken des Dreiecks spielt die Reihenfolge der Ecken hier ausnahmsweise keine Rolle. Wir können auf die Angabe des Dreiecks auch verzichten, wenn es – bis auf die Reihenfolge der Ecken – klar ist, von welchem Dreieck die Rede ist.

inneren Winkelhalbierenden bei A bzw. bei B mit den jeweiligen Gegenseiten von ABC . Nach dem Axiom von Pasch schneiden \overline{AX} und \overline{BY} einander in einem Punkt I , der im Inneren von AX und im Inneren von BY liegt. Nach der Charakterisierung von Winkelhalbierenden als Ortlinien (Satz 4.29) gilt außerdem

$$|II_{\overline{CA}}| = |II_{\overline{BA}}| = |II_{\overline{CB}}|,$$

und dies bedeutet wiederum nach Satz 4.29, dass \overline{CI} eine Winkelhalbierende von $\overline{CA}, \overline{CB}$ ist. Nach dem Axiom von Pasch schneidet \overline{CI} die Gerade \overline{AB} in einem inneren Punkt von AB ; also ist \overline{CI} die innere Winkelhalbierende bei C . Somit liegt der Punkt I auf allen drei inneren Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC (nämlich auf $\overline{AX}, \overline{BY}$ und \overline{CI}). \square

Der Satz des Apollonius erlaubt auch die einfache Längenberechnung der Abschnitte, in die eine Dreiecksseite von der inneren Winkelhalbierenden durch die gegenüberliegende Ecke geteilt wird:

Folgerung 4.64. *Sei ABC ein echtes Dreieck, und sei X der Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden bei C mit \overline{AB} . Dann gilt:*

$$|AX| = \frac{|CA| \cdot |AB|}{|CB| + |CA|} \quad \text{und} \quad |BX| = \frac{|CB| \cdot |AB|}{|CB| + |CA|}.$$

Beweis. Weil X ein innerer Punkt von AB ist, gilt $|AX| + |BX| = |AB|$. Aus dem Satz des Apollonius (4.62) folgt weiterhin

$$|AX| = \frac{|CA|}{|BC|} \cdot |BX| = \frac{|CA|}{|BC|} \cdot (|AB| - |AX|).$$

Das Umstellen dieser Gleichung nach $|AX|$ liefert die gewünschte Formel für $|AX|$; analog verfähre man mit $|BX|$. \square

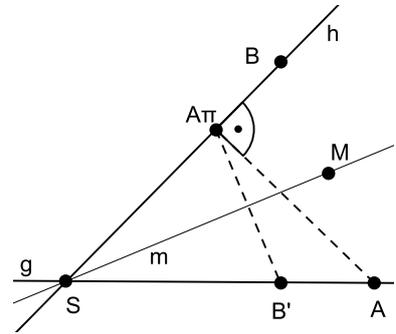
Definition 4.65 (Inkreis). Sei ABC ein echtes Dreieck. Nach Satz 4.63 gibt es genau einen Punkt I , der auf allen drei inneren Winkelhalbierenden von ABC liegt. Gemäß Satz 4.29 hat I von allen Seitenlinien von ABC denselben Abstand, den wir mit r_i bezeichnen. Den Kreis $K(I, r_i)$ nennen wir den *Inkreis* des Dreiecks ABC und r_i seinen *Inkreisradius*. Offenbar berührt der Inkreis gemäß Satz 4.15 alle drei Seitenlinien des Dreiecks.

Der Satz des Pythagoras

Hilfssatz 4.66. Seien g, h Geraden mit dem Schnittpunkt S , und es gelte $g \not\perp h$. Sei π die Orthogonalprojektion von g auf h und ρ die Orthogonalprojektion von h auf g . Dann gilt: π und ρ haben denselben Dehnungsfaktor.

Beweis. Wähle (per Streckenabtragung) einen Punkt $A \in g$ und einen Punkt $B \in h$ mit: $|SA| = 1 = |SB|$. Sei m das Mittellot von AB , und sei M der Mittelpunkt von AB . Dann liegt S auf m , und $|SA\pi|$ ist der Dehnungsfaktor von π .

Sei B' der Bildpunkt von $A\pi$ bei der Spiegelung an m . Weil m eine Symmetrieachse (Winkelhalbierende) von g, h ist, liegt B' auf g . Da zum einen das Dreieck $ABA\pi$ nach Konstruktion rechtwinklig ist (Orthogonalprojektion!) und zum anderen m das Mittellot von $A\pi B'$ ist und M auf dieser Geraden m liegt, folgt mit dem Mittellotprinzip:



$$|MB'| = |MA\pi| \stackrel{\text{Thales}}{=} |MA|.$$

Aus $|MB'| = |MA|$ folgt mit der Rückwärtsrichtung des Satzes von Thales, dass das Dreieck ABB' rechtwinklig ist; B' ist also der Fußpunkt des Lotes von B auf g und somit identisch mit $B\rho$ (auch ρ ist eine Orthogonalprojektion). Es gilt also nun:

$$|SB\rho| = |SB'| = |SA\pi|, \tag{4.19}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen dadurch begründet ist, dass SB' die Bildstrecke von $SA\pi$ bei der Spiegelung an m ist. In Gleichung (4.19) steht links der Dehnungsfaktor von ρ , rechts der Dehnungsfaktor von π . Die Einsicht in die Gleichheit beider Größen war das Ziel dieses Beweises. \square

Satz 4.67 (Satz des Pythagoras). Sei ABC ein echtes Dreieck. Dann gilt:

$$ABC \text{ ist rechtwinklig} \iff |BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2. \tag{4.20}$$

Die Gleichung auf der rechten Seite von (4.20) gilt überdies in jedem Dreieck ABC , in dem C mit A oder B zusammenfällt; diese Tatsache schließen wir in die Aussage des Satzes ein, um bei Pythagoras-Anwendungen die entsprechenden Entartungen des Dreiecks nicht immer wieder als separate Fälle betrachten zu müssen. Man beachte jedoch, dass die Pythagoras-Gleichung nicht gilt, wenn $A = B$ und $C \neq A, B$ ist.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Vorwärtsrichtung des Satzes. Wir nehmen also an, dass ABC rechtwinklig ist, und bezeichnen den Fußpunkt des Lots von C auf \overline{AB} mit X . Wir wenden nun zweimal den Hilfssatz 4.66 an; zunächst mit der Rollenverteilung $g := \overline{AB}$ und $h := \overline{AC}$, dann mit $g := \overline{AB}$ und $h := \overline{BC}$. Indem wir die Dehnungsfaktoren der jeweiligen Orthogonalprojektionen als Quotienten von Dreiecksseitenlängen schreiben und die Gleichheit dieser Dehnungsfaktoren ausnutzen, erhalten wir zum einen $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AX|}{|AC|}$, zum anderen $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BX|}{|BC|}$. Einfaches Umstellen führt zu den Gleichungen

$$|AC|^2 = |AB| \cdot |AX| \quad \text{und} \quad |BC|^2 = |AB| \cdot |BX|. \quad (4.21)$$

Mit der Lot-Ungleichung erkennen wir außerdem: $|AX| \leq |AC| \leq |AB|$ und $|BX| \leq |BC| \leq |AB|$. Die Anwendung der Dreiecksungleichung führt daher zu $|AX| + |BX| = |AB|$. Wir können nun die beiden Gleichungen aus (4.21) zusammenfassen und erhalten

$$\begin{aligned} |BC|^2 + |AC|^2 &= |AB| \cdot |BX| + |AB| \cdot |AX| \\ &= |AB| \cdot (|BX| + |AX|) = |AB| \cdot |AB| = |AB|^2, \end{aligned}$$

womit die Vorwärtsrichtung des Satzes bewiesen ist.

Die Rückwärtsrichtung beweisen wir durch Variieren der Konfiguration: Zunächst setzen wir die Gültigkeit der Gleichung

$$|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2 \quad (4.22)$$

voraus. Wir möchten den Punkt B variieren, betrachten daher das Lot von C auf \overline{AC} und tragen auf diesem Lot einen Punkt B' mit $|CB'| = |CB|$ ab. Für das rechtwinklige Dreieck $AB'C$ können wir die bereits bewiesene Vorwärtsrichtung des Satzes ausnutzen und erhalten

$$|B'C|^2 + |AC|^2 = |AB'|^2. \quad (4.23)$$

Der Vergleich der Gleichungen (4.22) und (4.23) liefert im Zusammenspiel mit $|CB'| = |CB|$ die Gleichheit $|AB'| = |AB|$. Im Falle $B = B'$ sind wir mit unserem Beweis fertig, denn dann ist das Dreieck ABC identisch mit $AB'C$ und daher wie dieses rechtwinklig. Andernfalls folgern wir aus $|AB'| = |AB|$, dass A auf dem Mittellot von BB' liegt; für C gilt dies ebenfalls (nach Konstruktion ist $|CB'| = |CB|$). Also ist \overline{AC} das Mittellot von BB' , was uns insbesondere zu $\overline{BB'} \perp \overline{AC}$ führt; es gilt aber auch $\overline{B'C} \perp \overline{AC}$, und die Eindeutigkeit des Lots (durch B' auf \overline{AC}) liefert die Gleichheit $\overline{BB'} = \overline{B'C}$. Das Dreieck BCB' ist also kollinear. Daher ist $\overline{BC} = \overline{B'C}$, und aus $\overline{B'C} \perp \overline{AC}$ folgt $\overline{BC} \perp \overline{AC}$, d.h. das Dreieck ABC ist rechtwinklig. \square

Der hier vorgestellte Beweis für den Satz des Pythagoras ist etwas aufwendiger als die üblichen Flächenbeweise des Schulunterrichts. Er hat aber zwei gravierende Vorteile: Zum einen ist er *tatsächlich* ein Beweis. Die Flächenbeweise der Schule, insbesondere die Zerlegung eines Quadrats in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke und ein kleineres Quadrat, sind sicherlich von didaktischem Wert, vor allem wegen ihrer suggestiven Eingängigkeit; doch handelt es sich bei ihnen in hohem Grade um anschauungsgebundene und theoriefreie Argumentationen. Insbesondere der Begriff der Fläche, der ihr zentrales Element ist, ist – als Begriff – vollkommen ungeklärt, und die Flächenargumente, insbesondere diejenigen der Addition von Flächen, werden allein auf Basis der Anschauung geführt. All dies gilt für unseren Beweis nicht. Zum anderen korrigiert unser Beweis das Missverständnis, dass es sich bei dem Satz des Pythagoras um einen Flächensatz handle („Die Summe der Quadrate über den Katheten ergibt das Quadrat über der Hypotenuse“), denn genau wie unsere Formulierung des Satzes von Längen handelt, benutzt auch unser Beweis ausschließlich Längenargumente: Im Satz des Pythagoras geht es eben um *Seitenlängen* von Dreiecken.

Aus dem Satz des Pythagoras ergeben sich bekanntermaßen diese Folgerungen:

Satz 4.68. *Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, und sei X der Fußpunkt des Lotes von C auf \overline{AB} . Dann gilt:*

- $|AC|^2 = |AB| \cdot |AX|$ und $|BC|^2 = |AB| \cdot |BX|$ ¹⁷ [Kathetensatz]
- $|CX|^2 = |AX| \cdot |BX|$ [Höhensatz]
- $|CX| \cdot |AB| = |AC| \cdot |BC|$. [Flächensatz]

Der Beweis dieser Aussagen erfolgt durch einfache Anwendung des Satzes des Pythagoras auf die rechtwinkligen Teildreiecke ACX und BCX , der Dreiecksungleichung $|AX| + |BX| = |AB|$ und der Binomischen Formeln.

Der Antipythagoras

Wir werden in Kürze Längenbetrachtungen auch an nicht-rechtwinkligen Dreiecken vornehmen. Dabei tritt oft die missliche Notwendigkeit auf, Fallunterscheidungen bezüglich gewisser *zwischen*-Beziehungen vorzunehmen. Ein typisches Beispiel liegt vor, wenn wir in einem (echten) Dreieck ABD den Fußpunkt C

¹⁷ Diese Gleichungen haben wir bereits im Beweis des Satzes von Pythagoras hergeleitet; siehe (4.21).

der Höhenlinie durch D betrachten. Es sind dann die drei Fälle $\overset{A}{\bullet} \overset{C}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$, $\overset{A}{\bullet} \overset{B}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ und $\overset{B}{\bullet} \overset{A}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ zu unterscheiden, die jeweils zu einer anderen Dreiecksungleichung führen. Es geht jetzt darum, eine kompakte algebraische Bedingung zu finden, die die drei verschiedenen Dreiecksungleichungen bündelt, die zu diesen *zwischen*-Beziehungen gehören. Präziser: Wir suchen eine praktikable algebraische Bedingung, die von den Seitenlängen eines Dreiecks genau dann erfüllt wird, wenn dieses Dreieck kollinear ist.

Dass das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c kollinear ist, ist gemäß Folgerung 4.47 äquivalent dazu, dass (mindestens) eine der Gleichungen

$$a + b = c, \quad a + c = b, \quad b + c = a, \quad (4.24)$$

gilt, und ist damit äquivalent zur Aussage

$$a + b - c = 0 \quad \text{oder} \quad a - b + c = 0 \quad \text{oder} \quad -a + b + c = 0. \quad (4.25)$$

Diese *oder*-Aussage ist wiederum äquivalent zu der einzigen Gleichung

$$(a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (-a + b + c) = 0. \quad (4.26)$$

Würden wir den Ausdruck auf der linken Seite von (4.26) ganz oder teilweise ausmultiplizieren, so erhielten wir einen wenig ansprechenden Term, der sich in künftigen Berechnungen unangenehm bemerkbar machen würde. Unangenehm wäre daran vor allem die Tatsache, dass a, b und c zumindest teilweise in ungeraden Potenzen auftreten würden. Wir schaffen Abhilfe, indem wir (4.26) zunächst mit dem Faktor $(a + b + c)$ multiplizieren; das ist ein äquivalenter Übergang, solange wir die Betrachtung auf nicht-negative Werte von a, b, c beschränken, was wir ja ohnehin tun, da es sich um Streckenlängen handelt. Selbst im kritischen Fall $a + b + c = 0$ bleibt die Äquivalenz der Umformung gewahrt. Wir erhalten also die Aussage

$$(a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (-a + b + c) = 0. \quad (4.27)$$

Wenn wir jetzt ausmultiplizieren, erhalten wir nur quadratische Terme. Zunächst gruppieren wir die Summanden in den Klammern:

$$[(a + b) + c] \cdot [(a + b) - c] \cdot [c + (a - b)] \cdot [c - (a - b)] = 0, \quad (4.28)$$

dann multiplizieren wir die Faktoren paarweise, stellen um und erhalten

$$[2ab + (a^2 + b^2 - c^2)] \cdot [2ab - (a^2 + b^2 - c^2)] = 0. \quad (4.29)$$

Eine letzte Multiplikation führt schließlich auf

$$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 0. \quad (4.30)$$

Gleichung (4.30) ist also insgesamt äquivalent zu der Aussage, dass die drei Punkte mit den Abständen a, b, c auf einer Geraden liegen, wobei es unerheblich ist, welche *zwischen*-Beziehung dabei gilt. Seltsamerweise versteckt (4.30) die Symmetrie dieses Sachverhalts; tatsächlich aber ist der Term auf der linken Seite dieser Gleichung voll-symmetrisch, d.h. invariant bei Permutationen der Werte von a, b, c . Die konkrete Gestalt dieses Terms hängt nicht zuletzt davon ab, wie wir in (4.27) die vier Faktoren vor dem Ausmultiplizieren gruppieren. Eine andere Entscheidung dort hätte durchaus zu dem Term $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ führen können.

Da dieser Term – in welcher Gestalt auch immer – für uns eine zentrale Rolle spielen wird, führen wir seinetwegen zur Abkürzung eine Funktion ein:

Definition und Satz 4.69. *Für alle reellen Zahlen a, b, c definieren wir*

$$F(a, b, c) := 4ab - (a + b - c)^2.$$

Es gilt stets

$$F(a, b, c) = 2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2) \quad (4.31)$$

bzw. für die quadrierten Terme

$$\begin{aligned} F(a^2, b^2, c^2) &= (a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (-a + b + c) \quad (4.32) \\ &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2. \end{aligned}$$

Die Funktion F nennen wir die Heronische Funktion und benutzen den Buchstaben F in Gleichungen auch als Abkürzung für den Term $F(a^2, b^2, c^2)$.

Die Gleichung (4.31) ist leicht nachzurechnen und zeigt die volle Symmetrie der Funktion F , d.h. eine Permutation der drei Argumente a, b, c verändert den Funktionswert nicht. Die anderen Gleichungen folgen aus den Termumformungen in den Gleichungen von (4.27) bis (4.30). Unsere Überlegungen am Anfang dieses Abschnitts bzw. Gleichung (4.32) zeigen:

Satz 4.70 (Antipythagoras). *Das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c ist genau dann kollinear, wenn $F = 0$ ist.*¹⁸

Der Name *Antipythagoras* ist der Tatsache geschuldet, dass diese Aussage in gewisser Hinsicht ein Gegenstück zum Satz des Pythagoras ist. Eine Grundidee der Längenrechnung besteht nämlich darin, diverse geometrische Konfigurationen durch Fällen von Loten auf rechtwinklige bzw. kollineare Dreiecke zurückzuführen, und diese beiden Dreieckstypen werden durch Gleichungen charakterisiert, die von den Quadraten der Seitenlängen handeln. Überraschenderweise ist dabei dem scheinbar einfacheren Dreieckstyp – dem kollinearen Dreieck – die kompliziertere Gleichung zugeordnet. Insgesamt wird sich dennoch herausstellen, dass die Kombination von *Pythagoras*- und *Antipythagoras*-Gleichungen nicht zu einer Eskalation immer komplexerer Terme und Gleichungen führt. Stattdessen werden unsere algebraischen Umformungen immer wieder Gelegenheit bieten, die Heronische Funktion F zur *Vereinfachung* von Termen einzusetzen, so dass viele unserer Ergebnisse kompakt formuliert werden können, die ansonsten eher sperrig zu notieren wären. Dass sowohl beim *Pythagoras* als auch beim *Antipythagoras* in den Formeln nur quadratische Terme auftreten, ist ein weiteres Zeichen für die Verwandtschaft der beiden Aussagen. In der Tat werden wir bald sehen, dass sie gut miteinander harmonisieren. Da die Längenrechnung auch jenseits von *Pythagoras* und *Antipythagoras* eine „quadratische“ Theorie ist, werden wir Längenformeln ganz allgemein in quadrierter Form notieren; wir geben also beispielsweise eine Formel für h^2 statt für h selbst an und ersparen uns dadurch nebenbei auch lästige Wurzeln.

In Beweisen wird der *Antipythagoras* ein wertvolles Instrument zur Vermeidung von Fallunterscheidungen sein: Wann immer ein Punkt C auf der Geraden \overline{AB} liegt, gilt die *Antipythagoras*-Gleichung für die Seitenlängen von ABC ; unabhängig davon, welcher der drei Punkte zwischen den beiden anderen liegt. Das erste Beispiel für eine solche Verwendung des *Antipythagoras*' wird der Beweis der Höhenformel sein.

Der *Antipythagoras* ist sicherlich ein recht „schulfremdes“ Element der Längenrechnung, so dass es schwerfallen mag, seine Eleganz und Kompaktheit dort zur Anwendung zu bringen. Wer deswegen auf ihn verzichtet, muss im Folgenden die Anwendung des *Antipythagoras*' stets durch die entsprechende Fallunterscheidung ersetzen und in diversen Gleichungen die Funktion F gegen einen entsprechenden Term austauschen.

¹⁸ Es sei an die Abkürzung $F := F(a^2, b^2, c^2)$ erinnert.

Höhenformel und Heronische Flächenformel

Für alle weiteren geometrischen Betrachtungen vereinbaren wir eine *Generalkonvention*: Es sei ABC ein echtes Dreieck mit den Seitenlängen $a := |BC|$, $b := |CA|$ und $c := |AB|$; für die Länge der Höhen, Seitenhalbierenden und inneren Winkelhalbierenden – genauer: für die Länge der jeweiligen Strecke von einer Ecke des Dreiecks bis zum Schnittpunkt mit der gegenüberliegenden Seitenlinie – verwenden wir die Bezeichnungen h_a, h_b, h_c bzw. s_a, s_b, s_c bzw. w_a, w_b, w_c ; wobei der Index stets gleichermaßen für die gegenüberliegende Seitenlinie wie für die durchlaufene Ecke steht. Wenn wir bei diesen Bezeichnungen den Index weglassen, so ist stets der Index c gemeint. Die mit c indizierten Formeln können durch Permutation der Variablen leicht in entsprechende Formeln für a und b umgewandelt werden.

Um die Formel für die Länge einer Höhe im Dreieck herzuleiten, wenden wir zum ersten Mal die Technik an, Pythagoras- und Antipythagoras-Gleichungen geschickt zu verbinden. Das Lot durch eine Ecke des Dreiecks produziert (jedenfalls im Hauptfall) zwei rechtwinklige Dreiecke, und der Lotfußpunkt bildet zusammen mit den beiden anderen Ecken ein kollineares Dreieck.

Satz 4.71 (Höhenformel). *Es gilt: $h^2 = \frac{1}{4c^2} \cdot F$.*

Beweis. Sei X der Fußpunkt der Höhe durch C . Wir definieren $p := |AX|$ und $q := |XB|$. Da ABX ein kollineares Dreieck mit den Seitenlängen p, q, c ist, führt der *Antipythagoras* zusammen mit den Pythagoras-Gleichungen aus den Dreiecken ACX und BCX auf folgende Gleichungskette:¹⁹

$$\begin{aligned} 0 &= F(p^2, q^2, c^2) = F(b^2 - h^2, a^2 - h^2, c^2) = F(b^2 - h^2, c^2, a^2 - h^2) \\ &= 4(b^2 - h^2)c^2 - (b^2 - h^2 + c^2 - (a^2 - h^2))^2 \\ &= 4b^2c^2 - 4h^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = F - 4h^2c^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Umstellen und Division durch $4c^2$ liefern die Formel der Behauptung. \square

¹⁹Die Dreiecke ACX und BCX sind nicht unbedingt rechtwinklig: X könnte mit A oder B zusammenfallen, so dass ein kollineares Dreieck entsteht. Wie wir in unserer Zusatzbemerkung zum Satz des Pythagoras festgehalten haben, gilt die Pythagoras-Gleichung aber auch in diesem Entartungsfall. Entscheidend ist allerdings, dass weder A noch B mit C zusammenfallen; das Dreieck ABC ist ja echt. Man beachte diesen speziellen Fall bei der Anwendung der Pythagoras-Gleichung auch in zukünftigen Beweisen. Wir werden nicht jedes Mal explizit darauf hinweisen.

Die Kürze des Beweises von Satz 4.71 ist ein Verdienst des *Antipythagoras'*. Innerhalb des Beweises findet eine typische Technik ihre Anwendung, nämlich das geschickte Permutieren der drei Argumente der Funktion F beim dritten Gleichheitszeichen von (4.33). Nur durch diese Maßnahme wird die weitere Vereinfachung des vorliegenden Terms möglich, da so beim Auswerten der Funktion F zwei h^2 -Teilterme eliminiert werden.

Aus der Höhenformel ergibt sich sehr leicht die sogenannte *Flächenformel* für das Produkt $\frac{1}{2}ch$. Zwar benutzen wir *Fläche* nicht als selbstständigen geometrischen Begriff, stellen aber doch in Rechnung, dass $\frac{1}{2}ch$ üblicherweise als ein Maß für die Fläche des Dreiecks ABC betrachtet wird. Immerhin zeigt die Flächenformel auch ohne den Begriff der Fläche, dass das Produkt $\frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$ nicht von der Wahl der Dreiecksseite (und der dazugehörigen Höhe) abhängt, sondern eine *Invariante* eines jeden Dreiecks ist.

Bemerkung 4.72 (Heronische Flächenformel). *Es gilt: $(\frac{1}{2}ch)^2 = \frac{1}{16}F$.*

Die Flächenformel wird traditionell Heron zugeschrieben und in der Literatur meist durch die Gleichung *Flächenquadrat* $= s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)$ mit der Abkürzung $s := \frac{a+b+c}{2}$ notiert. Die Gleichwertigkeit dieser Formel und derjenigen aus Bemerkung 4.72 ist mithilfe von Gleichung (4.32) leicht zu erkennen.

Mithilfe der Höhenformel können wir nun formal beweisen, dass es ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z genau dann gibt, wenn alle drei Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

Satz 4.73 (Existenz von Dreiecken mit vorgegebenen Seitenlängen). *Seien x, y, z positive reelle Zahlen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) *Es gibt ein echtes Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z .*
- (2) *Es gilt: $x + y > z$, $x + z > y$, $y + z > x$.*
- (3) *Es gilt: $F(x^2, y^2, z^2) > 0$.*

Beweis. Die Implikation (1) \implies (2) folgt aus der dreimaligen Anwendung der (echten) Dreiecksungleichung, und die Implikation (2) \implies (3) ergibt sich aus Satz 4.69. Mit etwas Mühe ist lediglich der Nachweis der Implikation (3) \implies (1) verbunden: Es gelte also $F(x^2, y^2, z^2) > 0$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte zudem $x \leq y \leq z$. Wir definieren: $v := \frac{x^2+z^2-y^2}{2z}$. Durch Nachrechnen überzeugen wir uns leicht von der Ungleichung $0 < v < z$. Wir

finden also durch Streckenabtragung auf irgendeiner Geraden g zwei Punkte A und B mit $|AB| = z$ sowie einen weiteren Punkt X zwischen A und B mit $|BX| = v$. Sei l das Lot auf g durch X . Durch erneute Streckenabtragung finden wir einen Punkt C auf l mit $|XC| = \frac{F(x^2, y^2, z^2)}{4z^2}$. Dann ist ABC ein echtes Dreieck, in dem CX die Höhe durch C ist. Durch Anwenden der Höhenformel und des Pythagoras' auf die Dreiecke BCX und ACX überzeugen wir uns von den Gleichungen $|CB| = x$ und $|CA| = y$; dabei wird auch benutzt, dass X zwischen A und B liegt. Also ist ABC ein echtes Dreieck mit den Seitenlängen x, y, z . □

Folgerung 4.74 (Schnittverhalten von Kreisen). *Zwei Kreise mit den Radien r und s und dem Mittelpunktsabstand d (> 0) schneiden einander genau dann in zwei Punkten, wenn $F(r^2, s^2, d^2) > 0$ ist.*

Satz 4.75. *Seien k ein Kreis und A ein Punkt, der außerhalb von k liegt. Dann gilt: Es gibt genau zwei Punkte $B, B' \in k$ derart, dass \overline{AB} und $\overline{AB'}$ Tangenten an k sind, und für die Tangentenabschnitte gilt $|AB| = |AB'|$.*

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von k , und sei $B \in k$. Das Tangentenkriterium und der Satz des Thales liefern dann folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \text{ ist eine Tangente an } k &\iff \overline{AB} \perp \overline{BM} \\ \iff AMB \text{ ist rechtwinklig} &\iff B \text{ liegt auf dem Thaleskreis über } AM. \end{aligned}$$

Die fraglichen Berührungspunkte sind also genau die Schnittpunkte von k mit dem Thaleskreis über AM . Diese beiden Kreise mit den Radien $|BM|$ und $\frac{1}{2}|AM|$ und dem Mittelpunktsabstand $\frac{1}{2}|AM|$ schneiden einander gemäß Folgerung 4.74 genau dann in zwei Punkten, wenn $F(|BM|^2, \frac{1}{4}|AM|^2, \frac{1}{4}|AM|^2) > 0$ ist. Dies ist in der Tat der Fall, weil $|AM| > |BM|$ ist: Der Punkt A liegt ja außerhalb des Kreises. Also gibt es wie behauptet genau zwei Berührungspunkte B, B' .

Die Behauptung bezüglich der Tangentenabschnitte folgt aus dem Satz des Pythagoras, denn die rechtwinkligen Dreiecke AMB und AMB' stimmen in zwei entsprechenden Seitenlängen überein, und somit auch in der dritten, d.h. $|AB| = |AB'|$. □

Wer die Höhenformel ohne den *Antipythagoras* ansteuern möchte, kann die Gleichungskette (4.33) im Rahmen einer Fallunterscheidung mit drei Fällen durch drei einzelne Rechnungen ersetzen. Alternativ gibt es die Möglichkeit, zunächst die verallgemeinerte Version des Kathetensatzes ohne den *Antipythagoras* zu beweisen:

Satz 4.76 (Verallgemeinerung des Kathetensatzes für beliebige Dreiecke). *Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 4.71 gilt:*

$$pc = \frac{1}{2} |b^2 + c^2 - a^2| \quad \text{und} \quad qc = \frac{1}{2} |a^2 + c^2 - b^2|.$$

Der Beweis dieses Satzes verlangt ebenfalls eine Fallunterscheidung nach den Fällen $p + q = c$ bzw. $p + c = q$ bzw. $q + c = p$. Dabei treten stets dieselben Pythagoras-Gleichungen wie in unserem Beweis der Höhenformel auf. Der verallgemeinerte Kathetensatz kann dann zum Beweis der Höhenformel (und damit auch der Flächenformel) benutzt werden. Andersherum könnten wir die Höhenformel natürlich auch für den Beweis von Satz 4.76 einsetzen.

Vier-Punkte-Formel, Seiten- und Winkelhalbierendenformel

Hilfssatz 4.77. *Im echten Dreieck ABC sei X ein Punkt zwischen A und B . Dann ist CX höchstens so lang wie die längere der beiden Seiten CA und CB , d.h. es gilt:*

$$|CX| \leq \max \{|CA|, |CB|\}. \quad (4.34)$$

Liegt X sogar echt zwischen A und B , so gilt in (4.34) sogar die echte Ungleichung.

Beweis. (Bild 4.27) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $|CA| \geq |CB|$ an. Wir müssen somit die Ungleichung $|CX| \leq |CA|$ zeigen.

Sei Y der Schnittpunkt von \overline{AC} und der Parallelen zu \overline{BC} durch X . Nach dem zweiten Strahlensatz und wegen $|CA| \geq |CB|$ gilt

$$|YX| = |YA| \cdot \frac{|CB|}{|CA|} \leq |YA|. \quad (4.35)$$

Wegen der Zwischentreue der Parallelprojektion (Satz 4.53) liegt Y zwischen C und A ; es gilt also

$$|CY| + |YA| = |CA|. \quad (4.36)$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir abschließend die Abschätzung

$$|CX| \leq |CY| + |YX| \stackrel{(4.35)}{\leq} |CY| + |YA| \stackrel{(4.36)}{=} |CA|. \quad (4.37)$$

Die Zusatzbemerkung über den Fall der echten *zwischen*-Beziehung ergibt sich daraus, dass wir in (4.37) dann sogar die echte Dreiecksungleichung anwenden können. \square

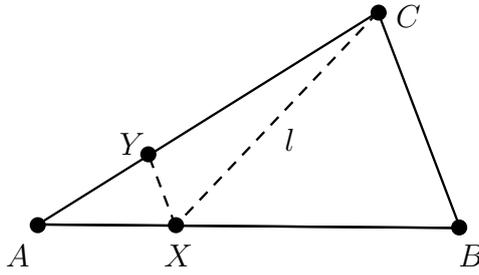


BILD 4.27: Zu Satz 4.77

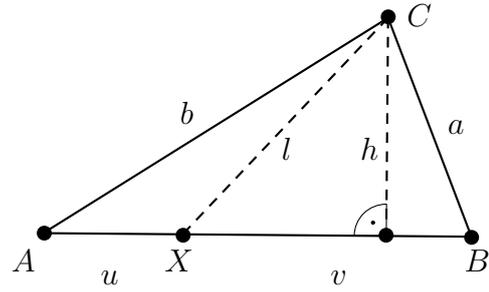


BILD 4.28: Zu Satz 4.78

Satz 4.78 (Vier-Punkte-Formel, Satz von Stewart). *Sei X ein Punkt zwischen A und B . Wir definieren $u := |AX|$, $v := |XB|$ und $l := |CX|$ (Bild 4.28). Dann gilt:*

$$l^2 = \frac{u}{c} \cdot a^2 + \frac{v}{c} \cdot b^2 - u \cdot v. \quad (4.38)$$

Beweis. (Bild 4.28) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $b \geq a$ an. Nach Hilfssatz 4.77 ist dann auch $b \geq l$. Wir betrachten nun die Dreiecke ABC und AXC ; beide Dreiecke besitzen eine gemeinsame Höhe, nämlich jene durch C . Wir können die Länge h dieser Höhe sowohl in dem einen als auch in dem anderen Dreieck durch die Höhenformel ausdrücken. Wir erhalten dann die Gleichungskette

$$\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = h^2 = \frac{4b^2u^2 - (b^2 + u^2 - l^2)^2}{4u^2}. \quad (4.39)$$

Das Kürzen der außen stehenden Terme in (4.39), anschließende Subtraktion von b^2 und Multiplikation mit (-4) führen zu

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{c^2} = \frac{(b^2 + u^2 - l^2)^2}{u^2},$$

was wir auch durch

$$[u \cdot (b^2 + c^2 - a^2)]^2 = [c \cdot (b^2 + u^2 - l^2)]^2 \quad (4.40)$$

notieren können. Wegen $b \geq a$ und $b \geq l$ stehen auf beiden Seiten der Gleichung (4.40) innerhalb der eckigen Klammern *positive* Größen, so dass wir den Übergang zu

$$u \cdot (b^2 + c^2 - a^2) = c \cdot (b^2 + u^2 - l^2)$$

vollziehen können. Ausmultiplizieren, Umstellen und Zusammenfassen führen zu der Gleichung

$$l^2 = \frac{u}{c} \cdot a^2 + \left(1 - \frac{u}{c}\right) \cdot b^2 + u(u - c). \quad (4.41)$$

Da X zwischen A und B liegt, gilt $u + v = c$; wir können also in (4.41) den Term $1 - \frac{u}{c}$ durch $\frac{v}{c}$ ersetzen; ebenso den Term $u - c$ durch $-v$, und so erreichen wir schließlich die gewünschte Gleichung (4.38). \square

Satz 4.79 (Seitenhalbierendenformel, Winkelhalbierendenformel). *Es gelten die Gleichungen*

$$s^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \quad \text{und} \quad w^2 = ab \cdot \left(1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right). \quad (4.42)$$

Beweis. Beide Formeln folgen direkt aus der Vier-Punkte-Formel (4.38). Im Falle der Seitenhalbierenden gilt mit den entsprechenden Bezeichnungen: $u = v = \frac{c}{2}$. Für die Herleitung der Winkelhalbierendenformel greifen wir auf die Folgerung 4.64 aus dem Satz des Apollonius zurück: Es gilt demgemäß $u = \frac{bc}{a+b}$ und $v = \frac{ac}{a+b}$, und aus der Vier-Punkte-Formel ergibt sich dann die Winkelhalbierendenformel. \square

Formeln für Umkreis- und Inkreisradius

Als Erweiterung unserer Generalkonvention bezeichnen wir den Umkreisradius des echten Dreiecks ABC mit r_u und den Inkreisradius mit r_i .

Satz 4.80. *Für die Abstände des Höhenschnittpunkts H von den Ecken gelten folgende Gleichungen:*

$$|HC|^2 = 4r_u^2 - c^2, \quad |HB|^2 = 4r_u^2 - b^2, \quad |HA|^2 = 4r_u^2 - a^2. \quad (4.43)$$

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt der Nachweis einer der drei Gleichungen; wir wählen die Formel für $|HB|^2$. Falls H auf \overline{AB} liegt, ist entweder BCA oder CAB rechtwinklig, und die Behauptung ergibt sich schlicht aus dem Satz des Thales und dem Satz des Pythagoras. Wir setzen daher nun $H \notin \overline{AB}$ voraus. Wie im Beweis des Umkreis-Höhen-Satzes betrachten wir den Mittelpunkt M von AB und den Verdopplungspunkt H' von HM , und erneut erkennen wir mit dem Diagonalensatz, dass $HAH'B$ ein Parallelogramm ist (Bild 4.12 auf Seite 265). Die fragliche Größe $|HB|^2$ ist also genauso groß wie $|AH'|^2$ (Parallelogrammregel), und weil das Dreieck $CH'A$ nach dem Umkreis-Höhen-Satz und dem Satz des Thales rechtwinklig mit der Hypotenusenlänge $2r_u$ ist, folgt die behauptete Gleichung mit dem Satz des Pythagoras. \square

Satz 4.81 (Umkreisradiusformel). *Es gilt $r_u^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{F}$.*

Beweis. Falls H auf \overline{AB} liegt, ist entweder BCA oder CAB rechtwinklig, und die Behauptung ergibt sich aus dem Satz des Thales und dem Satz des Pythagoras. Wir setzen daher nun $H \notin \overline{AB}$ voraus. Sei C' der Fußpunkt der Höhe durch C . Zunächst vereinbaren wir einige Bezeichnungen für Streckenlängen (Bild 4.29), nämlich

$$x := |CH|, \quad y := |C'H|, \quad z := |AH|.$$

Die Längen x und z kontrollieren wir mithilfe von Satz 4.80. Es gilt

$$x^2 = 4r_u^2 - c^2 \quad \text{und} \quad z^2 = 4r_u^2 - a^2. \quad (4.44)$$

Indem wir zweimal den Satz des Pythagoras und ein weiteres Mal Satz 4.80 anwenden, erhalten wir für die dritte Größe die Gleichungskette

$$y^2 = z^2 - |AC'|^2 = 4r_u^2 - a^2 - b^2 + h^2. \quad (4.45)$$

Da CHC' ein kollineares Dreieck ist, folgt mit dem *Antipythagoras* unter Verwendung von (4.44) und (4.45), der Höhenformel sowie der Definition von F :

$$\begin{aligned} 0 &= F(h^2, x^2, y^2) = 4h^2(4r_u^2 - c^2) - (h^2 + 4r_u^2 - c^2 - 4r_u^2 + a^2 + b^2 - h^2)^2 \\ &= \frac{F}{c^2}(4r_u^2 - c^2) - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = \left(\frac{4r_u^2 \cdot F}{c^2} - F\right) + (F - 4a^2b) = \frac{4r_u^2 \cdot F}{c^2} - 4a^2b^2. \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit $\frac{c^2}{4}$ und das Umstellen der Gleichungskette liefern die gewünschte Gleichung. \square

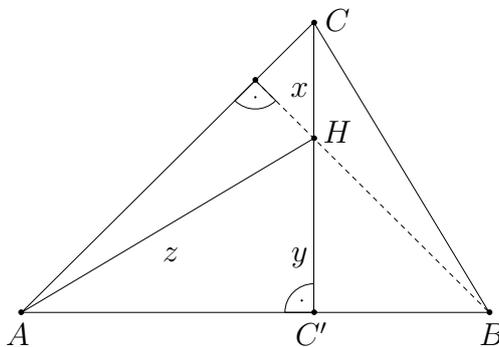


BILD 4.29: Zur Umkreisradiusformel

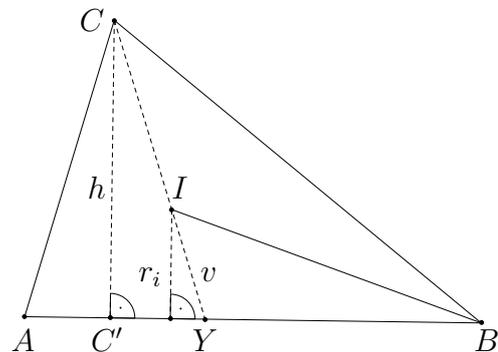


BILD 4.30: Zur Inkreisradiusformel

Wir können außerdem eine asymmetrische Form der Umkreisradiusformel herleiten; es gilt

$$r_u^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{F} = \frac{a^2 b^2 \cdot 4c^2 h^2}{4h^2 \cdot F} = \frac{a^2 b^2 \cdot F}{4h^2 \cdot F} = \frac{a^2 b^2}{4h^2},$$

also $r_u = \frac{ab}{2h}$. Aus dieser Gleichung könnten wir die Aussage des Zwei-Kreise-Satzes über gleich große Umkreise im Zusammenhang mit gleichschenkligen Dreiecken gewinnen.

Satz 4.82 (Inkreisradiusformel). *Es gilt: $r_i^2 = \frac{F}{4(a+b+c)^2}$.*

Beweis. (Bild 4.30) Den Fußpunkt der Höhe durch C nennen wir C' , und den Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden bei C mit der gegenüberliegenden Seitenlinie bezeichnen wir mit Y . Der Inkreismittelpunkt I liegt sicherlich zwischen C und Y (innere Winkelhalbierende, Axiom von Pasch). Ferner benutzen wir die Bezeichnungen $u := |BY|$, $w := |CY|$, $v := |IY|$. Der Inkreisradius r_i tritt schließlich als Länge des Lots von I auf \overline{AB} auf, welches parallel zur Höhenlinie $\overline{CC'}$ ist und damit die Grundlage für die Anwendung des zweiten Strahlensatzes bildet.

Die Berechnung von u bzw. v gelingt mithilfe von Folgerung 4.64. Es gilt somit

$$v = \frac{uw}{a+u} = \frac{\frac{ac}{a+b} \cdot w}{a + \frac{ac}{a+b}} = \frac{\frac{wc}{a+b}}{1 + \frac{c}{a+b}} = \frac{wc}{a+b+c},$$

und die Strahlensatzbeziehung $\frac{r_i}{h} = \frac{v}{w}$ führt dann auf die Gleichungskette

$$r_i^2 = v^2 \cdot \frac{h^2}{w^2} = \frac{w^2 c^2 h^2}{(a+b+c)^2 \cdot w^2} = \frac{4c^2 h^2}{4(a+b+c)^2} = \frac{F(a^2, b^2, c^2)}{4(a+b+c)^2},$$

wobei im letzten Schritt die Höhenformel angewendet wird. □

Parallelogrammformel, Sehnen-Sekanten-Satz und Tangentensatz

Wir wenden uns nun einigen Sätzen der Längenrechnung zu, die nicht von Dreiecken handeln. Es sind dies zwei Sätze am Kreis (Sehnen-Sekanten-Satz und Tangentensatz) sowie die Parallelogrammformel zur arithmetischen Kennzeichnung von Parallelogrammen. Zunächst einmal benötigen wir einen Hilfssatz, der doch noch einmal von Dreiecken handelt:

Hilfssatz 4.83. *Die Seitenhalbierendenformel $s^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$ aus Satz 4.79 gilt in jedem Dreieck, also auch dann, wenn ABC kollinear ist oder gar Ecken des Dreiecks zusammenfallen.*

Beweis. Sei also ABC ein beliebiges Dreieck, und sei M der Mittelpunkt von AB . Wir betrachten zunächst den Sonderfall, dass im Dreieck ABC manche Ecken zusammenfallen. Im Unterfall $C = A$ gilt $c = a$, $b = 0$ und $s = \frac{1}{2}c$, womit die Formel bestätigt wird. Der Unterfall $C = B$ verhält sich analog mit $c = b$, $a = 0$ und $s = \frac{1}{2}c$. Im dritten Unterfall $A = B$ gilt $M = A$ und $a = b = s$ sowie $c = 0$, so dass die Seitenhalbierendenformel auch hier Bestand hat.

Wir untersuchen nun den Fall, dass die drei Ecken zwar paarweise verschieden, aber kollinear sind. Auch hier betrachten wir Unterfälle; zunächst $a = b$. Dann ist $C = M$, und es gelten die Gleichungen $s = 0$ und $c = 2a = 2b$, so dass die Seitenhalbierendenformel erneut bestätigt wird. Wir untersuchen jetzt den anderen Unterfall, also $a \neq b$. Der Antipythagoras liefert in den kollinearen Dreiecken AMC und BMC die Gleichungskette

$$F\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2, s^2, b^2\right) = 0 = F\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2, s^2, a^2\right).$$

Das Auswerten der Funktion F und Vereinfachen führen zu der Gleichung

$$\left(\frac{c^2}{4} + s^2 - b^2\right)^2 = \left(\frac{c^2}{4} + s^2 - a^2\right)^2.$$

Wegen $a \neq b$ lässt dies die Schlussfolgerung

$$\left(\frac{c^2}{4} + s^2 - b^2\right) = -\left(\frac{c^2}{4} + s^2 - a^2\right)$$

zu, und einfaches Umstellen dieser Gleichung führt erneut zu der gewünschten Formel.

In allen anderen Fällen ist das Dreieck ABC echt, und die Gültigkeit der Seitenhalbierendenformel ergibt sich dann aus Satz 4.79. \square

Satz 4.84. Sei $ABCD$ ein echtes Viereck, und es seien M und N die Mittelpunkte von AC bzw. BD . Mit den Bezeichnungen $a := |AB|$, $b := |BC|$, $c := |CD|$, $d := |DA|$, $e := |AC|$, $f := |BD|$ gelten dann folgende drei Aussagen:

- a) $4|MN|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (e^2 + f^2)$.
[Abstandsformel für die Diagonalenmittelpunkte im Viereck]
- b) Es ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (e^2 + f^2) \geq 0$.
- c) $ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ erfüllt ist. [Parallelogrammformel]

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass b) eine triviale Folgerung aus a) ist. Auch c) ergibt sich mithilfe des Diagonalensatzes aus a), weil $ABCD$ genau dann ein Parallelogramm ist, wenn $M = N$ ist. Wir müssen also nur a) beweisen.

Wir wenden zunächst den Diagonalensatz an, und dann dreimal die Seitenhalbierendenformel, die ja gemäß Hilfssatz 4.83 in beliebigen Dreiecken gilt: erst im Dreieck ACN (mit der Seitenhalbierenden MN), dann in den Dreiecken ACD und ACB (mit den Seitenhalbierenden DM bzw. BM). Wir erhalten folgende Termumformung:

$$\begin{aligned} 4|MN|^2 &= 2|DM|^2 + 2|BM|^2 - |BD|^2 \\ &= (|AD|^2 + |CD|^2 - \frac{1}{2}|AC|^2) + (|AB|^2 + |BC|^2 - \frac{1}{2}|AC|^2) - |BD|^2 \\ &= |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2 - |AC|^2 - |BD|^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (e^2 + f^2). \end{aligned}$$

□

Die Parallelogrammformel ermuntert uns zu der Frage, ob wir auch andere Viereckstypen arithmetisch kennzeichnen können. Für die Vierecke aus dem *Kleinen Haus der Vierecke*, die ja alle Parallelogramme sind, ist dies recht einfach möglich. Dabei zählt sich die Ungleichung aus Satz 4.84 b) aus (siehe Aufgabe 330).

Satz 4.85 (Sehnen-Sekanten-Satz). *Wir betrachten einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sowie zwei verschiedene Punkte $A, B \in k$. Ferner sei C ein weiterer Punkt auf \overline{AB} , und es sei $d := |CM|$. Dann gilt:*

$$ab = |d^2 - r^2|, \text{ also } |CA| \cdot |CB| = |d^2 - r^2|. \quad (4.46)$$

Beweis. Sei N der Mittelpunkt von AB . Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$d^2 - |CN|^2 = |MN|^2 = r^2 - \frac{c^2}{4}, \quad (4.47)$$

und zwar sogar dann, wenn A, B, C, M, N auf einer Geraden liegen – die Pythagoras-Gleichungen gelten dann wegen $M = N$ weiterhin. Wir ersetzen in (4.47) den Term $|CN|^2$ gemäß der Seitenhalbierendenformel, stellen um, multiplizieren mit (-4) , addieren $4a^2b^2$ und erhalten dann unter Berücksichtigung des Antipythagoras' im kollinearen Dreieck ABC die Gleichungskette

$$4a^2b^2 - 4(d^2 - r^2)^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = F = 0.$$

Umstellen und Division durch 4 führen zu der Gleichung

$$a^2b^2 = (d^2 - r^2)^2,$$

aus der sich die behauptete Gleichung direkt ergibt. \square

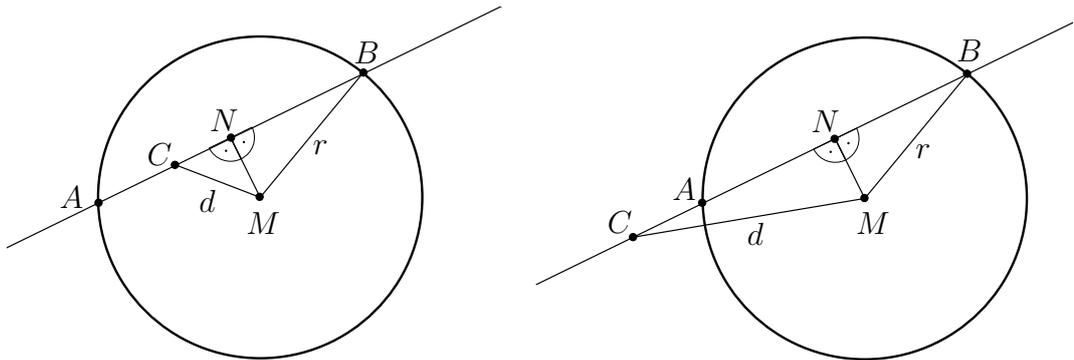


BILD 4.31: Zu Satz 4.85 als Sehnenatz (links) bzw. als Sekantensatz (rechts)

Satz 4.86 (Ergänzungen zum Sehnen-Sekanten-Satz).

- a) Seien A, B, A', B' Punkte auf demselben Kreis mit $A \neq B$ und $A' \neq B'$. Ferner sei C der Schnittpunkt von \overline{AB} und $\overline{A'B'}$. Dann gilt:

$$|CA| \cdot |CB| = |CA'| \cdot |CB'|. \quad (4.48)$$

- b) Es seien C, B verschiedene Punkte und $k(M, r)$ ein Kreis derart, dass \overline{CB} den Kreis $k(M, r)$ im Punkt B berührt. Ferner sei $d := |CM|$. Dann gilt:

$$|CB|^2 = d^2 - r^2. \quad [\text{Tangentensatz}]$$

Regelmäßige n -Ecke

In diesem kurzen Abschnitt werden wir knapp auf regelmäßige n -Ecke eingehen. Diese sind bekanntlich ein reizvoller und historisch bedeutsamer Gegenstand der Geometrie, doch möchten wir ihre Behandlung nicht vertiefen und werden in dieser Arbeit keine weiteren Ergebnisse auf diesem Abschnitt begründen, sondern lediglich in einigen Aufgaben regelmäßige n -Ecke ansprechen. Wir erlauben uns daher bei der Klassifizierung der Diagonalen und bei der Beschreibung der zweiten Grundtatsache über regelmäßige n -Ecke ausnahmsweise eine nicht

vollständig formalisierte Sprache. Der Grundbegriff des regelmäßigen n -Ecks jedoch erfüllt die üblichen Anforderungen an begriffliche Präzision durchaus; er wird hier natürlich ohne Benutzung von Winkeln etabliert:

Definition 4.87. Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 3$. Dann heißt ein n -Eck *regelmäßig*, wenn es echt ist, einen Umkreis besitzt, alle Seiten gleich lang sind und jede Diagonale länger als jede Seite ist.

Jedes regelmäßige n -Eck können wir in naheliegender und (bis auf Isomorphie) eindeutiger Weise einem Graphen im Sinne der Graphentheorie zuordnen; Ecken und Benachbarung werden direkt von der Geometrie in die Graphentheorie übertragen. Der zugeordnete Graph ist dabei stets ein Kreis im Sinne der Graphentheorie (siehe Definition 3.50 auf Seite 156). Wegen des Zusammenhangs eines Kreises sind je zwei Ecken dieses Graphen durch einen Weg verbindbar (siehe Definition 3.59 auf Seite 160). Diese Brücke zwischen Geometrie und Graphentheorie benutzen wir nun zur Klassifizierung der Diagonalen eines regelmäßigen n -Ecks:

Definition 4.88 (Diagonalen im regelmäßigen n -Eck). Sei k eine natürliche Zahl, und sei XY eine Diagonale eines regelmäßigen n -Ecks. Wir sagen dann, die Diagonale XY sei *von k -ter Art*, wenn in dem zugeordneten Graphen der kürzeste Weg zwischen den Ecken X und Y die Länge $k + 1$ hat. Wir könnten also locker formulieren, dass eine Diagonale k -ter Art zwei Ecken eines regelmäßigen n -Ecks verbindet, die durch k andere Ecken des n -Ecks getrennt sind.

Grundtatsache 4.89. Sei k eine natürliche Zahl, und seien XY und UV zwei verschiedene Diagonalen von k -ter Art desselben regelmäßigen n -Ecks. Dann sind XY und UV gleich lang.

Grundtatsache 4.90. Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 5$. Wenn wir ein regelmäßiges n -Eck durch Fortlassen von $n - 4$ Ecken zu einem Viereck „ausdünnen“ (unter Beibehaltung der Reihenfolge der verbleibenden Ecken), so ist das entstehende Viereck stets normal.

Während ein Beweis von Grundtatsache 4.89 durchaus noch leicht durchführbar ist, scheint das entsprechende Unternehmen bei Grundtatsache 4.90 eine echte Herausforderung zu sein.

Theoretische Grundlagen der reellen Geometrie mit Winkelmaß

Trotz ihrer Anschaulichkeit sind Winkel als begriffliche Gegenstände hoch kompliziert. In der Literatur, insbesondere in Schulbüchern, sind zahlreiche Versuche zu ihrer Definition unternommen worden: Dabei werden Winkel meist entweder als besondere *Ebenenausschnitte* (was auch immer das ist), als *Paare von Halbgeraden* oder als *Paare von Geraden* angesprochen. Oft ist simultan von zwei oder gar vier Winkeln die Rede, die mühsam – und eher vage – dadurch beschrieben werden, dass Halbgeraden oder Geraden „im mathematisch positiven Drehsinn“ ineinander überführt werden.

Wir möchten auf die Fülle der Probleme des Winkelbegriffs nicht im Detail eingehen und verweisen auf die Darstellung dieses Themas in [Lor]. Stattdessen stellen wir gleich einen Ausweg aus dem Dilemma vor, der im Wesentlichen darin besteht, Winkel *gar nicht* zu definieren. Als *Begriff* werden Winkel hier nicht vorkommen. Unser Vorgehen orientiert sich vielmehr an der Einführung des Längenmaßes: Der Gegenstand der Messung stimmt auch dort in Anschauung und Begriff nicht überein: Während wir anschaulich ein „Geradenstück“ messen, das unendlich viele Punkte enthält und ein eher kompliziertes Objekt ist, ist der begriffliche Gegenstand ein Paar von Punkten – ein vergleichsweise schlichtes Objekt. Das Längenmaß selbst ist lediglich eine Funktion auf der Menge dieser Punktepaare. Wir kommen dort also ohne eine Begriffsbildung für jenes Objekt aus, das wir anschaulich als das eigentliche Objekt der Messung auffassen.

Das entsprechende Vorgehen bei Winkeln besteht darin, ebenfalls ein recht dürres und simples Objekt zum Gegenstand der Messung zu machen, nämlich ein Tripel von drei nicht-kollinearen Punkten. Ein solches Tripel repräsentiert ja gemäß unserer Anschauung einen Winkel, was sich auch in der Sprechweise „Winkel ABC “ oder der Notation $\angle ABC$ niederschlägt, und ist dabei doch begrifflich ein viel einfacheres Objekt als ein Ebenenausschnitt oder dergleichen. Mit Punktetripeln haben wir aber auch bisher schon hantiert und sie dabei *Dreiecke* genannt. Wir werden also tatsächlich – vielleicht etwas überraschend – ganz auf Winkel als eigenständige Objekte unserer Theorie verzichten und stattdessen eine Funktion einführen – das *Winkelmaß* –, die jedem echten Dreieck eine positive reelle Zahl zuordnet. Die Beschränkung auf *echte* Dreiecke erspart uns künftig die Auseinandersetzung mit schwierigen Grenzfällen.

Wir werden es also mit einer „Winkeltheorie ohne Winkel“ zu tun haben. Dennoch sind Winkel als Objekte der Anschauung und als Redeweise natürlich

weiterhin zugelassen – gewissermaßen inoffiziell. Im nächsten Abschnitt geht es um die axiomatische Einführung eines Winkelmaßes, dessen Eigenschaften möglichst gut mit unserer Vorstellung harmonieren.

Einführung des Winkelmaßes

Definition 4.91 (Winkelmaß). Sei Δ die Menge aller echten Dreiecke. Eine Funktion $\angle : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ heißt *Winkelmaß*, wenn für alle $ABC, A'B'C' \in \Delta$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

Symmetrieregeln: $\angle ABC = \angle CBA$.

Kongruenzregel: Aus $ABC \equiv A'B'C'$ folgt $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Additionsregel: Für jeden Punkt X , der echt zwischen A und B liegt, gilt $\angle ACX + \angle XCB = \angle ACB$.

Formregel: Für jeden Punkt X , der echt zwischen A und B liegt, gilt $\angle ABC = \angle XBC$.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass \angle ein Winkelmaß ist. Das volle Bild von \angle bezeichnen wir mit \mathbb{W} .

Alle vier Regeln des Winkelmaßes erscheinen natürlich: Die *Symmetrieregeln* drückt gewissermaßen die Vertauschbarkeit der Schenkel bei der Winkelmessung aus; sie ist derartig grundlegend, dass wir sie im Folgenden sehr häufig unkommentiert anwenden werden. Die *Kongruenzregel* ist ein Ersatz für den Kongruenzsatz SSS der Schultradition.

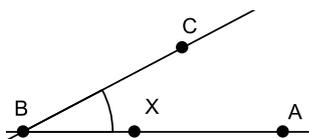


BILD 4.32

Die beiden anderen Winkelregeln sind komplizierter, weil sie von der Anordnung von Punkten handeln: Die *Additionsregel* erlaubt unter gewissen Voraussetzungen das Addieren von Winkelgrößen und etabliert damit die Winkelrechnung, während die *Formregel* gewisse

Freiheiten bei der Angabe von Schenkeln eines Winkels als Axiom etabliert: Es kommt vor allem auf den Scheitelpunkt des Winkels an; ob wir also den Winkel ABC oder den Winkel XBC untersuchen, ist zumindest solange egal, wie X zwischen A und B liegt. Die Formregel legalisiert damit gewissermaßen unsere traditionelle Methode der Winkelkennzeichnung in geometrischen Figuren. Wie in Bild 4.32 markieren wir einen Winkel, ohne die entsprechenden Punkte auf den Schenkeln explizit anzugeben; es ist ja auch belanglos, ob ABC oder XBC

gemeint ist, denn deren Winkelmaße sind gleich – auch unserer Anschauung nach –, und zwar eben deshalb, weil X (echt) zwischen A und B liegt.

Wir bereiten die Definition des traditionellen Gradmaßes mit einer Grundtatsache über rechte Winkel vor. Wir könnten sie mit Streckenabtragung, dem Satz des Pythagoras und mit der Kongruenzregel leicht beweisen:

Grundtatsache 4.92 (Rechte Winkel). *Seien ABC und $A'B'C'$ rechtwinklige Dreiecke. Dann gilt: $\angle BCA = \angle B'C'A'$.*

Definition und Satz 4.93 (Gradmaß). *Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck, und sei x eine reelle Zahl. Wir definieren: $1^\circ := \frac{1}{90}\angle BCA$ und $x^\circ := x \cdot 1^\circ$. Nach Grundtatsache 4.92 gilt dann offenbar für alle rechtwinkligen Dreiecke $A'B'C'$: $\angle B'C'A' = 90^\circ$.*

Das Symbol 1° steht also für den 90. Teil des Maßes eines rechten Winkels, also für eine reelle Zahl.

Basiswinkelsatz, Winkelsumme im Dreieck, Nebenwinkel

Satz 4.94 (Basiswinkelsatz). *Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck. Dann ist ABC gleichwinklig, d.h. es gilt: $\angle CAB = \angle BAC$.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus $ABC \equiv BAC$ und der Kongruenzregel. □

Satz 4.95 (Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck). *Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Dann gilt: $\angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$.*

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von AB . Nach dem Satz des Thales sind ACM und BCM jeweils gleichschenklige Dreiecke, auf die wir den Basiswinkelsatz anwenden können. Indem wir zusätzlich die Formregel, die Symmetrieregeln und die Additionsregel heranziehen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle CAB &= \angle MBC + \angle CAM = \angle MCB + \angle MCA \\ &= \angle BCM + \angle MCA = \angle BCA = 90^\circ. \end{aligned}$$

□

Aus Satz 4.95 lässt sich insbesondere leicht ableiten, dass aus $\angle BCA = 90^\circ$ die Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABC folgt.

Hilfssatz 4.96. Sei ABC ein echtes Dreieck, in dem AB die (bzw. eine) längste Seite ist. Dann gilt: Der Fußpunkt X der Höhe von C auf \overline{AB} liegt zwischen A und B .

Beweis. Der Beweis ergibt sich wahlweise aus der Lot-Ungleichung oder dem Satz des Pythagoras. \square

Satz 4.97 (Winkelsumme im beliebigen Dreieck). Sei ABC ein echtes Dreieck. Dann gilt: $\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA = 180^\circ$.

Beweis. O.B.d.A. sei AB die (bzw. eine) längste Seite des Dreiecks. Die Anwendung von Satz 4.95 auf die Dreiecke ACX und BCX führt zusammen mit Hilfssatz 4.96 und der Additionsregel auf die gewünschte Gleichung. \square

Damit ist nun klar, dass alle Winkel ein Maß echt zwischen $0^\circ (= 0)$ und 180° besitzen, d.h. das Bild \mathbb{W} von \angle ist eine Teilmenge des offenen Intervalls $(0^\circ, 180^\circ)$. In der Schule unterstellen wir natürlich, dass \mathbb{W} *gleich* diesem Intervall ist; doch ein Beweis dieser Aussage ist schwierig. Wir werden sie daher auch nicht als (implizite) Grundtatsache deklarieren, denn im Gegensatz zu anderen Grundtatsachen wäre der Beweis hier nicht ohne Weiteres mit den zur Verfügung stehenden Mitteln zu führen. Tatsächlich benötigen wir diese Explizierung von \mathbb{W} allerdings gar nicht, und so werden wir künftig die Menge der Winkelmaße weiterhin mit \mathbb{W} ansprechen. Immerhin werden wir in Satz 4.114 einige weitere Einsichten über \mathbb{W} gewinnen.

Satz 4.98 (Nebenwinkel). Seien ABC ein echtes Dreieck und D ein Punkt mit $\overset{D}{\bullet} - \overset{A}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$ und $D \neq A$. Dann gilt: $\angle DAB = 180^\circ - \angle CAB$.

Der Beweis von Satz 4.98 ergibt sich aus der mehrfachen Anwendung des Winkelsummensatzes und der Winkelregeln.

Satz 4.99 (Scheitelwinkel). Seien A, B, C, D, S paarweise verschiedene Punkte derart, dass \overline{AB} und \overline{CD} einander in S schneiden und die Beziehungen $\overset{A}{\bullet} - \overset{S}{\bullet} - \overset{B}{\bullet}$ und $\overset{C}{\bullet} - \overset{S}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$ gelten. Dann folgt: $\angle ASC = \angle BSD$.

Beweis. Durch zweimalige Anwendung des Nebenwinkelsatzes (4.98) erhalten wir

$$\angle ASC = 180^\circ - \angle CSB = \angle BSD.$$

\square

Satz 4.100 (Winkel-Strecken-Vergleich). *Sei ABC ein echtes Dreieck. Dann gilt:*

$$\angle CAB < \angle CBA \iff |CB| < |CA|.$$

(„In einem echten Dreieck liegt der kleineren Seite der kleinere Winkel gegenüber.“)

Beweis. Es gelte zunächst: $|CB| < |CA|$. Gemäß der *Streckenabtragung innerhalb einer Strecke* (Grundtatsache 4.44) finden wir einen Punkt B' zwischen C und A mit: $|CB'| = |CB|$, so dass wir auf das Dreieck $BB'C$ den Basiswinkelsatz anwenden können. Unter zusätzlicher Verwendung diverser Winkelregeln folgt:

$$\begin{aligned} \angle CAB &= 180^\circ - (\angle ABC + \angle BCA) = 180^\circ - ((\angle ABB' + \angle B'BC) + \angle BCA) \\ &< 180^\circ - (\angle B'BC + \angle BCA) = 180^\circ - (\angle B'BC + \angle BCB') \\ &= \angle CB'B = \angle B'BC < \angle B'BC + \angle B'BA = \angle CBA. \end{aligned}$$

Die andere Implikation beweisen wir per Kontraposition. Es gelte also: $|CB| \geq |CA|$. Zu zeigen ist nun die Ungleichung $\angle CAB \geq \angle CBA$. Im Falle $|CB| = |CA|$ folgt die gewünschte Ungleichung direkt aus dem Basiswinkelsatz. Andernfalls gilt $|CB| > |CA|$, und die Behauptung folgt dann aus der Anwendung der bereits bewiesenen Implikation – mit vertauschten Rollen von A und B . \square

Folgerung 4.101 (Umkehrung des Basiswinkelsatzes). *Sei ABC ein gleichwinkliges Dreieck, d.h. es gelte: $\angle CAB = \angle BAC$. Dann ist ABC gleichschenkelig.*

Der folgende Satz zeigt, dass die in der abstrakten Geometrie gewählte Bezeichnung *Winkelhalbierende* für eine Symmetrieachse eines Geradenpaares verträglich ist mit unserer Vorstellung von einer Winkelhalbierenden im Sinne des Winkelmaßes:

Satz 4.102 (Winkelhalbierende halbiert Winkel). *Sei ABC ein echtes Dreieck, und sei w die innere Winkelhalbierende bei C . Sei X der Schnittpunkt von w und \overline{AB} . Dann gilt: $\angle ACX = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle XCB$.*

Beweis. Sei Y der Schnittpunkt von \overline{CB} und der Parallelen zu \overline{CA} durch X , und analog sei Y' der Schnittpunkt von \overline{CA} und der Parallelen zu \overline{CB} durch X .

Nach Satz 4.31 ist $CYXY'$ eine Raute; also sind YCX und $Y'CX$ kongruent, und die Kongruenzregel impliziert damit

$$\angle YCX = \angle Y'CX. \quad (4.49)$$

Weil X ein innerer Punkt von AB ist (innere Winkelhalbierende!), folgt mit der Zwischentreue der Parallelprojektion, dass auch Y und Y' innere Punkte von CB bzw. CA sind. Aus (4.49) folgt daher mit Verweis auf die Formregel:

$$\angle ACX = \angle Y'CX = \angle YCX = \angle BCX,$$

und die Additionsregel erlaubt daraus die Schlussfolgerung

$$\angle ACB = \angle ACX + \angle XCB = \begin{cases} 2 \cdot \angle ACX \\ 2 \cdot \angle XCB, \end{cases}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Winkel in Vierecken

Während wir bei Winkelbetrachtungen im Dreieck lediglich nicht-echte Dreiecke ausgeschlossen haben, müssen wir bei Vierecken etwas vorsichtiger sein. In der Tat werden wir uns hier auf die Untersuchung *normaler* Vierecke beschränken. Damit erreichen wir zum einen, dass beispielsweise überschlagene Vierecke außen vor bleiben; bei diesen ist anschaulich ohnehin nicht recht klar, welche Winkel angesprochen werden sollen. Zum anderen sind auch „dreiecksförmige“ Vierecke somit ausgeschlossen, jene Vierecke also, bei denen drei der vier Ecken kollinear sind; denn die Normalität eines Vierecks erzwingt die Echtheit jedes seiner vier Teildreiecke. In einem normalen Viereck $ABCD$ sind also die Größen $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ sowie $\angle DAC$ bereits definiert, und diese sollen gemeint sein, wenn künftig von den Winkeln bzw. Winkelgrößen eines Vierecks die Rede sein wird. Wir verwenden dabei in diesem Zusammenhang die üblichen Abkürzungen

$$\alpha = \angle DAC, \quad \beta = \angle ABC, \quad \gamma = \angle BCD, \quad \delta = \angle CDA$$

als Generalkonvention. Man erinnere sich an dieser Stelle daran, dass nur die Vertreter des *Kleinen Hauses der Vierecke* Normalität garantieren. Es gibt also durchaus Drachen und Trapeze – und zwar sogar jeweils symmetrische –, auf die unsere Winkeltheorie für Vierecke nicht anwendbar sein wird.

Satz 4.103. *Die Winkelsumme in einem normalen Viereck ist stets 360° , d.h. in einem normalen Viereck $ABCD$ ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.*

Beweis. Sei $ABCD$ ein normales Viereck mit dem Diagonalschnittpunkt S . Vielfache Anwendung der Additions- und Formregel und des Winkelsummensatzes im Dreieck führt zu folgender Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
 \angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA & \\
 &= (\angle DAS + \angle SAB) + \angle ABC + (\angle BCS + \angle SCD) + \angle CDA \\
 &= (\angle SAB + \angle ABC + \angle BCS) + (\angle DAS + \angle SCD + \angle CDA) \\
 &= (\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA) + (\angle DAC + \angle ACD + \angle CDA) \\
 &= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.
 \end{aligned}$$

□

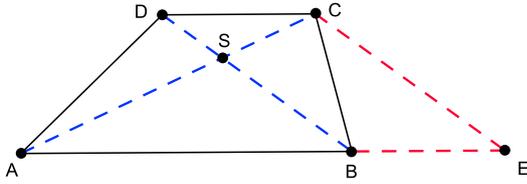
Satz 4.104. *In jedem Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel gleich groß, und je zwei benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180° .*

Beweis. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Dann gilt gemäß der Parallelogrammregel, dass DAB und BCD kongruent sind, und mit der Kongruenzregel für Winkel folgt $\angle DAB = \angle BCD$. Für das andere Paar gegenüberliegender Winkel gilt Entsprechendes. Da $ABCD$ als Parallelogramm normal ist (Diagonalsatz), folgt mit Satz 4.103 daraus direkt die Behauptung über benachbarte Winkel. □

Satz 4.105 (Winkel im normalen Trapez). *In jedem normalen Viereck $ABCD$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) $ABCD$ ist ein Trapez (2) $\alpha + \delta = 180^\circ$ (3) $\beta + \gamma = 180^\circ$.

Beweis. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist wegen der 360° -Winkelsumme im normalen Viereck ohnehin klar. Wir beschränken uns daher nun auf den Nachweis der Äquivalenz von (1) und (2) und beginnen mit der Implikation (1) \implies (2).



Sei also $ABCD$ ein normales Trapez. Die Normalität von $ABCD$ garantiert die Existenz eines Schnittpunkts S von \overline{AC} und \overline{BD} , der einerseits echt zwischen A und C und andererseits echt zwischen B und D liegt. Sei l die Parallele zu \overline{BD} durch C , und sei E der Schnittpunkt von l und \overline{AB} . Dann ist $BECD$ ein Parallelogramm, und deshalb gilt nach Satz 4.104

$$\angle CDB + \angle DBE = 180^\circ. \quad (4.50)$$

Die Zwischentreue der Parallelprojektion (von \overline{AC} auf \overline{AB} längs l) sorgt außerdem dafür, dass aus $\overset{A}{\bullet} \overset{S}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ die Beziehung $\overset{A}{\bullet} \overset{B}{\bullet} \overset{E}{\bullet}$ folgt. Somit ergibt sich die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \alpha + \delta &= \angle DAB + \angle CDA \underset{\overset{A}{\bullet} \overset{S}{\bullet} \overset{C}{\bullet}}{=} \angle DAB + (\angle CDS + \angle SDA) \\ &\underset{\overset{B}{\bullet} \overset{S}{\bullet} \overset{D}{\bullet}}{=} \angle DAB + (\angle CDB + \angle BDA) = (\angle DAB + \angle BDA) + \angle CDB \\ &\underset{\text{Winkelsumme } ABD}{=} (180^\circ - \angle ABD) + \angle CDB \underset{(4.50)}{=} (180^\circ - \angle ABD) + (180^\circ - \angle DBE) \\ &\underset{\overset{A}{\bullet} \overset{B}{\bullet} \overset{E}{\bullet}}{=} (180^\circ - \angle ABD) + \angle ABD = 180^\circ. \end{aligned}$$

Der Beweis der Implikation (2) \implies (1) ist leider etwas aufwendiger. Sei also $ABCD$ ein normales Viereck mit der Eigenschaft (2). Wir müssen nun die Parallelität von \overline{AB} und \overline{CD} zeigen. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gäbe einen Schnittpunkt S von \overline{AB} und \overline{CD} . Mithilfe der Normalität von $ABCD$ können wir ausschließen, dass S mit einer der Ecken von $ABCD$ zusammenfällt. Es gilt also (innerhalb unseres Widerspruchsbeweises) einerseits für A, B, S genau eine *echte zwischen*-Beziehung; andererseits auch für C, D, S . Jeweils drei mögliche *zwischen*-Beziehungen auf zwei Geraden führen zu insgesamt neun denkbaren Lagebeziehungen, die wir in Bild 4.33 veranschaulichen. Erfreulicherweise lassen sich stets mehrere Fälle mit demselben Argument zum Widerspruch führen:

In den fünf „blauen“ Fällen ergibt sich jeweils ein Widerspruch zur Winkelsumme im echten Dreieck BCS . Wir betrachten als Beispiel Fall II: Gemäß der Formregel gilt einerseits

$$\angle SBC = \angle ABC = \beta,$$

andererseits

$$\angle SCB = \angle DCB = \gamma = 180^\circ - \beta,$$

so dass die Summe *zweier* Winkel des Dreiecks BCS bereits 180° beträgt. Die anderen „blauen“ Fälle verlaufen analog, wobei in Fall IX die Winkel bei B und C ihre Rollen tauschen, wie man mithilfe des Nebenwinkelsatzes schnell sieht.

Die beiden „roten“ Fälle sind von ähnlicher Struktur, nur dass sich hier der Widerspruch im Dreieck ADS zeigt. In Fall III etwa gilt einerseits

$$\angle SDA = \angle CDA = \delta = 180^\circ - \alpha,$$

andererseits

$$\angle SAD = \angle BAD = \alpha.$$

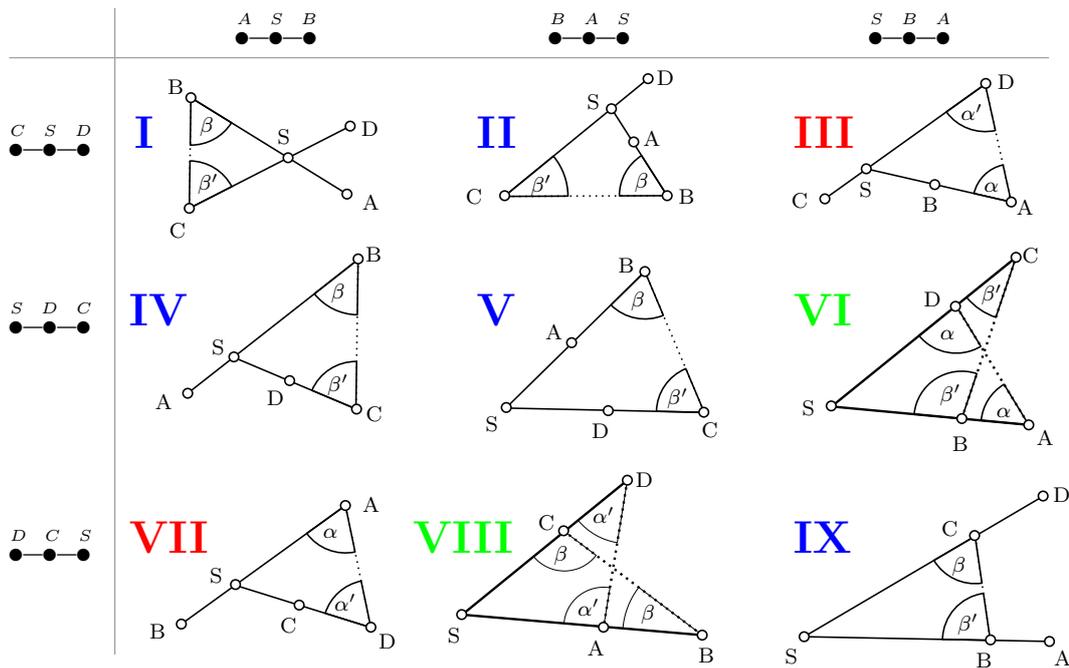


BILD 4.33: Die neun möglichen Lagebeziehungen im Widerspruchsbeweis der Implikation $(2) \implies (1)$ von Satz 4.105: Dabei werden die Abkürzungen $\alpha' := 180^\circ - \alpha$ und $\beta' := 180^\circ - \beta$ verwendet.

Feinsinniger geht es in den beiden „grünen“ Fällen zu. In Fall VI stellt sich heraus, dass sowohl ADS als auch BCS gleichschenklige Dreiecke sind, denn es gilt

$$\angle SAD = \angle BAD = \alpha$$

und

$$\angle SDA = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha,$$

so dass die Umkehrung des Basiswinkelsatzes (4.101) hier die Gleichschenkligkeit von ADS erzwingt. Dies gilt analog auch für BCS . Da aber die *zwischen-*Beziehungen $\overset{S}{\bullet} \overset{B}{\bullet} \overset{A}{\bullet}$ und $\overset{S}{\bullet} \overset{D}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ gelten, folgt mit der Umkehrung des ersten Strahlensatzes die Parallelität von \overline{AD} und \overline{BC} . Hier wird aber ein Widerspruch zur Zwischentreue der Parallelprojektion erkennbar (Satz 4.53): Aus $\overset{S}{\bullet} \overset{B}{\bullet} \overset{A}{\bullet}$ müsste die entsprechende Beziehung für die Bildpunkte der Parallelprojektion folgen, also $\overset{S}{\bullet} \overset{C}{\bullet} \overset{D}{\bullet}$. Tatsächlich gilt stattdessen $\overset{S}{\bullet} \overset{D}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$.

Im anderen „grünen“ Fall VIII tritt der Widerspruch auf dieselbe Weise zutage, so dass der Beweis für die Implikation (2) \implies (1) hiermit abgeschlossen ist. \square

Satz 4.106 (Winkel im Parallelogramm). *In jedem normalen Viereck $ABCD$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
- (2) Je zwei gegenüberliegende Winkel von $ABCD$ sind gleich groß.
- (3) Je zwei benachbarte Winkel von $ABCD$ ergänzen sich zu 180° .

Beweis. Die Implikation (1) \implies (2) ergibt sich aus Satz 4.104.

Für den Beweis von (2) \implies (1) betrachten wir ein normales Viereck $ABCD$ mit der Eigenschaft (2). Dann gilt also $\gamma = \alpha$ und $\delta = \beta$ und somit wegen der 360° -Winkelsumme auch

$$\alpha + \beta = 360^\circ - (\gamma + \delta) = 360^\circ - (\alpha + \beta),$$

woraus unmittelbar $\alpha + \beta = 180^\circ$ folgt. Analog können wir für andere Paare benachbarter Winkel argumentieren.

Schließlich wenden wir uns der Implikation (3) \implies (1) zu. Sei also $ABCD$ ein normales Viereck mit der Eigenschaft (3). Dann gilt:

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma = \beta + \alpha = \gamma + \delta = 180^\circ,$$

so dass gemäß Satz 4.105 sowohl $ABCD$ als auch $BCDA$ Trapeze sind. Damit ist $ABCD$ ein Parallelogramm. \square

Die Sätze 4.105 und 4.106 über Winkel in Trapezen und Parallelogrammen stellen einen gewissen Ersatz für den klassischen Satz über sogenannte Stufen- und Wechselwinkel an parallelen Geraden dar, der in unserer Theorie als Folge unseres Winkelbegriffs nicht in seiner üblichen Form ausgesprochen werden kann, also mit „freischwebenden“ Winkeln. Wir können also immer dann, wenn wir eigentlich den Stufen- bzw. Wechselwinkelimpuls in uns spüren, die vorliegende Konfiguration notfalls so durch Hilfspunkte ergänzen, dass ein Parallelogramm oder ein normales Trapez vorliegt, und dann einen der beiden Sätze 4.105 bzw. 4.106 anwenden. Dabei ist vielleicht dem Parallelogramm-Satz der Vorzug zu geben, weil seine Anwendung ohne den lästigen Nachweis der Normalität auskommt. Wer dennoch mit Stufenwinkeln am Trapez hantieren möchte, wird gelegentlich von folgendem Satz profitieren:

Satz 4.107 (Stufenwinkel am Trapez). *Sei ABC ein echtes Dreieck, und seien $D \in \overline{AC}$ und $E \in \overline{BC}$ verschiedene Punkte mit $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ und $\overset{A}{\bullet} \overset{D}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$, wobei hier die echte zwischen-Beziehung gelten möge. Dann ist*

$$\angle EDC = 180^\circ - \angle EDA = \angle BAC.$$

Beweis. Wegen der Zwischentreue der Parallelprojektion folgt aus $\overset{A}{\bullet} \overset{D}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ zunächst einmal $\overset{B}{\bullet} \overset{E}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$. Sei nun F derjenige Punkt auf \overline{AB} , für den $ADEF$ ein Parallelogramm ist; nach Voraussetzung gibt es einen solchen Punkt jedenfalls. Wiederum wegen der Zwischentreue der Parallelprojektion liegt F echt zwischen A und B . Indem wir jetzt den Nebenwinkelsatz, den Satz 4.106 über Winkel im Parallelogramm sowie zweimal die Formregel anwenden, erhalten wir

$$\angle EDC = 180^\circ - \angle EDA = \angle FAD = \angle BAD = \angle BAC.$$

□

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen Bemerkungen zur Winkeladdition in Vierecken ab, die beim Lösen von Aufgaben gelegentlich von praktischer Bedeutung sind:

Bemerkung 4.108 (Winkeladdition in normalen Vierecken). *Sei $ABCD$ ein normales Viereck. Dann gilt:*

- a) $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$.
- b) Für jeden Punkt E , der echt zwischen B und C liegt, ist $\angle BAE + \angle EAD = \angle BAD$.
- c) Ist E ein Punkt echt zwischen B und C und ist F ein Punkt echt zwischen C und D , so ist $\angle BAE + \angle EAF + \angle FAD = \angle BAD$.

Beweis. Die Aussage a) resultiert direkt aus der Normalität von $ABCD$ und der Additionsregel. Die Aussage b) wird bewiesen, indem mithilfe des Axioms von Pasch die Normalität des Vierecks $ABED$ gezeigt wird; die Winkeladdition ergibt sich dann aus a). Für den Beweis der Aussage c) schließlich zeigen wir wiederum mit dem Axiom von Pasch zunächst die Normalität von $AECD$, dann von $Aefd$; in beiden Fällen geschieht dies analog zum Normalitätsbeweis in b). Die Aussage zur Winkeladdition ergibt sich dann aus der Normalität von $Aefd$ und den Aussagen a) und b), wobei die Aussage a) auf das Viereck $Aefd$ angewendet wird. \square

Sinus und Cosinus

Dieser Abschnitt markiert den Beginn der klassischen Trigonometrie mit der Behandlung der entsprechenden Funktionen. Wir bereiten deren Einsatz durch einen Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke vor.

Satz 4.109 (Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke). *Es seien ABC und $A'B'C'$ rechtwinklige Dreiecke mit folgenden Eigenschaften:*

- $|CA| = |C'A'|$
- $\angle CAB = \angle C'A'B'$ oder $\angle CBA = \angle C'B'A'$.

Dann gilt: $ABC \equiv A'B'C'$. („Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und einem nicht-rechten Winkel übereinstimmen“.)

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $\angle CAB = \angle C'A'B'$. Unser erstes Ziel ist der Nachweis von $|BC| = |B'C'|$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen o.B.d.A. $|BC| > |B'C'|$ an. Dann finden wir per Streckenabtragung einen Punkt B'' echt zwischen C und B mit $|B''C| = |B'C'|$. Dann gilt: $\angle AB''C \equiv \angle A'B'C'$, denn die beiden Dreiecke sind jeweils rechtwinklig, stimmen in beiden Katheten und damit (gemäß Pythagoras) auch in der Hypotenuse überein. Insbesondere gilt also: $\angle CAB'' = \angle C'A'B'$. Wir wenden nun die Additionsregel an und erhalten:

$$\angle CAB = \angle CAB'' + \angle B''AB = \angle C'A'B' + \angle B''AB > \angle C'A'B',$$

womit ein Widerspruch zu $\angle CAB = \angle C'A'B'$ auftritt. Somit erkennen wir: $|BC| = |B'C'|$. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ stimmen also in beiden Katheten überein und damit – nach Pythagoras – auch in der Hypotenuse. Also sind sie kongruent.

Im anderen Fall, $\angle CBA = \angle C'B'A'$, verhilft uns der Winkelsummensatz zu der Einsicht $\angle CAB = \angle C'A'B'$. Unter dieser Voraussetzung haben wir im ersten Fall die Behauptung aber bereits bewiesen. \square

Satz 4.110. *Seien ABC und $A'B'C'$ zwei rechtwinklige Dreiecke mit $\angle CAB = \angle C'A'B'$. Dann gelten die beiden Gleichungen*

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|A'B'|} \quad \text{und} \quad \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|A'B'|}.$$

Beweis. Im Falle $|C'A'| = |CA|$ folgt die Behauptung direkt aus Satz 4.109. Wir können uns also hier auf den Fall verschiedener Längen von $C'A'$ und CA beschränken und setzen daher o.B.d.A. $|C'A'| < |CA|$ voraus. Dann finden wir einen Punkt C'' echt zwischen A und C mit: $|C''A| = |C'A'|$. Sei B'' der Schnittpunkt von \overline{AB} und der Parallelen zu \overline{BC} durch C'' . Wegen der Zwischentreue der Parallelprojektion liegt B'' echt zwischen A und B . Aufgrund der Verträglichkeit von \perp und \parallel ist dann auch $AB''C''$ ein rechtwinkliges Dreieck, und zwar mit den Zusatzeigenschaften $|C''A| = |C'A'|$ (gemäß Konstruktion) und

$$\angle C''AB'' = \angle CAB = \angle C'A'B',$$

wobei hier die erste Winkelgleichheit durch zweifache Anwendung der Formregel begründet ist und die zweite nach Voraussetzung gilt. Nach Satz 4.109 gilt also

$$AB''C'' \equiv A'B'C'. \tag{4.51}$$

Daraus ergeben sich die gewünschten Gleichungen

$$\frac{|BC|}{|AB|} \stackrel{\text{2. Strahlensatz}}{=} \frac{|B''C''|}{|AB''|} \stackrel{(4.51)}{=} \frac{|B'C'|}{|A'B'|}$$

und

$$\frac{|AC|}{|AB|} \stackrel{\text{1. Strahlensatz}}{=} \frac{|AC''|}{|AB''|} \stackrel{(4.51)}{=} \frac{|A'C'|}{|A'B'|}.$$

\square

Satz und Definition 4.111 (Sinus und Cosinus). *Sei $\alpha \in \mathbb{W}$ mit $\alpha < 90^\circ$, und sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle CAB = \alpha$.²⁰ Wir definieren dann*

$$\sin \alpha := \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{und} \quad \cos \alpha := \frac{|AC|}{|AB|}$$

und stellen fest, dass diese Definition nach Satz 4.110 nicht von der konkreten Wahl des Dreiecks ABC abhängt.

²⁰Die Existenz eines solchen Dreiecks ist klar: Weil α in \mathbb{W} liegt, gibt es ein Dreieck mit der Winkelgröße α , und durch Fällen eines Lotes produzieren wir leicht ein Dreieck mit der gewünschten Eigenschaft.

Definition 4.112 (Erweiterung von Sinus und Cosinus). Sei $\alpha \in \mathbb{W}$ mit $\alpha > 90^\circ$. Wir definieren dann

$$\sin \alpha := \sin(180^\circ - \alpha) \text{ und } \cos \alpha := -\cos(180^\circ - \alpha),$$

wobei die jeweils rechts stehenden Ausdrücke durch Definition 4.111 bereits festgelegt sind. Zusätzlich definieren wir

$$\sin 90^\circ := 1 \text{ und } \cos 90^\circ := 0.$$

Auf diese Weise sind nun \sin und \cos als Funktionen auf \mathbb{W} eingeführt. Es ist leicht zu zeigen, dass die Werte der Sinusfunktion im halboffenen Intervall $(0, 1]$ liegen und diejenigen der Cosinusfunktion im abgeschlossenen Intervall $[-1, 1]$. Ferner ist klar, dass $\cos \alpha$ genau im Fall $\alpha < 90^\circ$ *positiv* ist, genau im Fall $\alpha > 90^\circ$ *negativ* und genau im Fall $\alpha = 90^\circ$ *gleich Null*. Darüber hinaus gilt:

Satz 4.113 (Eigenschaften von \sin und \cos). Sei $\alpha \in \mathbb{W}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- a) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. [„Symmetrie des Cosinus“]
- b) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. [„Symmetrie des Sinus“]
- c) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. [„Trigonometrischer Pythagoras“]
- d) $\alpha < 90^\circ \implies \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$. [„Komplementarität von Sinus und Cosinus“]

Außerdem ist die Cosinusfunktion injektiv; und die Sinusfunktion ist auf $\mathbb{W}_{\leq 90^\circ}$ injektiv.²¹ Für die Sinusfunktion ergibt sich daraus für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$ die Implikation

$$\sin \alpha = \sin \beta \implies (\alpha = \beta \text{ oder } \alpha = 180^\circ - \beta). \quad (4.52)$$

Beweis. Die Aussagen a) und b) ergeben sich direkt aus Definition 4.112; und Aussage c) folgt dann aus der ursprünglichen Definition 4.111 und aus dem Satz des Pythagoras. Wir beweisen nun die Injektivität des Sinus auf $\mathbb{W}_{\leq 90^\circ}$. Seien also $\alpha, \alpha' \in \mathbb{W}_{\leq 90^\circ}$ mit $\sin \alpha = \sin \alpha'$. Im Fall $\sin \alpha = 1 = \sin \alpha'$ folgt nach Definition sofort: $\alpha = 90^\circ = \alpha'$. Wir dürfen also jetzt voraussetzen, dass die beiden fraglichen Sinuswerte kleiner als 1 sind. Dann gibt es nach

²¹ Der Beweis der Monotonie von Sinus und Cosinus ist komplizierter und erfolgt erst in Satz 4.124 – nach den Additionstheoremen.

Definition 4.111 zwei rechtwinklige Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit $\angle CAB = \alpha$ und $\angle C'A'B' = \alpha'$ – und dank der Streckenabtragung und dem Strahlensatz dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|AB| = 1 = |A'B'|$ annehmen. Dann gilt

$$|AC| = \frac{|AC|}{1} = \sin \alpha = \sin \alpha' = \frac{|A'C'|}{1} = |A'C'|,$$

also $|AC| = |A'C'|$, und wegen des Satzes von Pythagoras gilt dann auch $|BC| = |B'C'|$. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind somit kongruent, und mit der Kongruenzregel folgt

$$\alpha = \angle CAB = \angle C'A'B' = \alpha',$$

womit die Injektivität des Sinus auf $\mathbb{W}_{\leq 90^\circ}$ bewiesen ist. Weil \cos auf $\mathbb{W}_{\leq 90^\circ}$ nicht-negative Werte annimmt, folgt mit dem Satz des Pythagoras aus der Injektivität des Sinus auf diesem Intervall auch diejenige des Cosinus. Die volle Injektivität des Cosinus auf \mathbb{W} ergibt sich dann leicht mithilfe der Definition 4.112. □

Realisierung von Winkelmaßen und Winkelabtragung

Satz 4.114 (Realisierungssatz). *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$. Dann gilt:*

$$\alpha + \beta < 180^\circ \implies \alpha + \beta \in \mathbb{W} \tag{4.53}$$

$$\alpha + \beta < 180^\circ \implies \text{Es gibt ein Dreieck } ABC \text{ mit } \angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta. \tag{4.54}$$

Wir nennen die Aussage (4.53) die starke Abgeschlossenheit von \angle , und (4.54) bezeichnen wir als die starke Realisierung von Winkelmaßen.

Beweis. Wir betrachten zunächst abgeschwächte Versionen der behaupteten Implikationen, nämlich die *schwache Realisierung*:

$$\alpha, \beta < 90^\circ \implies \text{Es gibt ein Dreieck } ABC \text{ mit } \angle CAB = \alpha \text{ und } \angle ABC = \beta \tag{4.55}$$

sowie die *schwache Abgeschlossenheit*:

$$\alpha, \beta < 90^\circ \implies \alpha + \beta \in \mathbb{W}. \tag{4.56}$$

Der Clou des Beweises besteht darin, die vier Aussagen in geeigneter Reihenfolge zu betrachten. Wir beginnen mit der *schwachen Realisierung* (4.55). Es gelte

also $\alpha, \beta < 90^\circ$. Durch Streckenabtragung finden wir zunächst eine Strecke AB mit

$$|AB| = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha,$$

und dann per *Streckenabtragung innerhalb einer Strecke* auch einen Punkt X mit $\overset{A}{\bullet} \overset{X}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$ und

$$|AX| = \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

Auf dem Lot durch X auf \overline{AB} tragen wir außerdem einen Punkt C mit

$$|XC| = \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

ab. In dem so konstruierten echten Dreieck ABC gilt nach dem Satz des Pythagoras sowie dem trigonometrischen Pythagoras $|AC| = \sin \beta$ und $|BC| = \sin \alpha$. Daher sind die Winkelmaße α und β in diesem Dreieck wie gewünscht realisiert, denn der Sinus liefert in den rechtwinkligen Dreiecken ACX und BCX die Gleichungen $\sin \angle CAX = \sin \alpha$ und $\sin \angle XBC = \sin \beta$, also gemäß der Formel auch $\sin \angle CAB = \sin \alpha$ und $\sin \angle ABC = \sin \beta$, und die Injektivität des Sinus auf $\mathbb{W}_{<90^\circ}$ führt zu $\angle CAB = \alpha$ und $\angle ABC = \beta$. Damit ist die *schwache Realisierung* bewiesen.

Aus der schwachen Realisierung ergibt sich nun die *schwache Abgeschlossenheit* (4.56). In dem soeben konstruierten Dreieck hat der dritte Winkel wegen der 180° -Winkelsumme das Winkelmaß $180^\circ - (\alpha + \beta)$, und dessen problemlos zu konstruierender Nebenwinkel hat das Maß $\alpha + \beta$, d.h. $\alpha + \beta \in \mathbb{W}$.

Wir wenden uns nun der *starken Abgeschlossenheit* (4.53) zu; es gelte also $\alpha + \beta < 180^\circ$. Unabhängig von dieser Voraussetzung gilt sowieso $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} < 90^\circ$, und wegen der Existenz von inneren Winkelhalbierenden und Satz 4.102 gilt $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in \mathbb{W}$. Wegen der schwachen Abgeschlossenheit (4.56) ist somit auch die entsprechende Summe in \mathbb{W} enthalten, d.h. es gilt: $\frac{\alpha + \beta}{2} \in \mathbb{W}$. Diese Summe ist wegen der Voraussetzung $\alpha + \beta < 180^\circ$ kleiner als 90° , und die erneute Anwendung der schwachen Abgeschlossenheit führt somit auf $\alpha + \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} \in \mathbb{W}$. Damit ist auch die starke Abgeschlossenheit bewiesen.

Es folgt der Beweis der *starken Realisierung* (4.54): Unter der Voraussetzung $\alpha + \beta < 180^\circ$ betrachten wir die drei Zahlen α, β und $180^\circ - (\alpha + \beta)$, die allesamt in \mathbb{W} liegen: α und β gemäß Voraussetzung; wegen der starken Abgeschlossenheit auch $\alpha + \beta$; und wegen der Existenz des Nebenwinkels somit auch $180^\circ - (\alpha + \beta)$. Aus rein arithmetischen Gründen sind zwei dieser drei Winkel kleiner als 90° , und die schwache Realisierung sorgt nun für die Existenz eines Dreiecks, in

dem diese zwei Winkelgrößen auftreten. Wegen der 180° -Winkelsumme tritt in jenem Dreieck dann auch die dritte Winkelgröße auf. Damit ist jedenfalls gezeigt: Es gibt ein Dreieck mit den Winkelgrößen α und β . \square

Auch wenn wir noch immer nicht beweisen können, dass \mathbb{W} identisch mit dem Intervall $(0^\circ, 180^\circ)$ ist, verhelfen uns die beiden letzten Sätze doch immerhin zu der Einsicht, dass \mathbb{W} eine recht „reichhaltige“ Menge ist: Rechtwinklige und gleichseitige Dreiecke zeigen die Existenz von 90° - und 60° -Winkeln, und mithilfe von Satz 4.102 erkennen wir, dass sukzessive Halbierungen dieser Winkelmaße immer wieder auf weitere Elemente aus \mathbb{W} führen. Der Realisierungssatz zeigt mit seiner Abgeschlossenheitsaussage über \mathbb{W} schließlich, dass auch alle Summen dieser Zahlen wiederum in \mathbb{W} liegen, sofern sie nur kleiner als 180° sind. Damit ließe sich wohl bereits zeigen, dass \mathbb{W} zumindest *dicht* in dem Intervall $(0^\circ, 180^\circ)$ liegt; d.h. jede Zahl aus $(0^\circ, 180^\circ)$ kann beliebig gut durch Elemente aus \mathbb{W} approximiert werden.

Satz 4.115 (Winkelabtragung). *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$ mit $\alpha + \beta < 180^\circ$, und sei AB eine echte Strecke. Dann gibt es einen Punkt $C \notin \overline{AB}$ derart, dass die Gleichungen $\angle CAB = \alpha$ und $\angle ABC = \beta$ gelten.*

Beweis. Wir beschränken uns darauf, den (leicht durchführbaren) Beweis nur zu skizzieren. Die *starke Realisierung* aus Satz 4.114 garantiert die Existenz eines echten Dreiecks $A'B'C'$ mit $\angle C'A'B' = \alpha$ und $\angle A'B'C' = \beta$. Jetzt führen wir gewissermaßen eine SSS-Zirkelkonstruktion eines Punktes C mit $ABC \equiv A'B'C'$ durch: Der Satz 4.73 und die Folgerung 4.74 sorgen gemeinsam dafür, dass die Kreise $k(A, |A'C'|)$ und $k(B, |B'C'|)$ einander schneiden. Wir wählen einen der Schnittpunkte, nennen ihn C und erkennen, dass nach Konstruktion tatsächlich $ABC \equiv A'B'C'$ gilt. Die Winkelgleichheit folgt dann mit der Kongruenzregel. \square

Sinussatz, Projektionssatz, Cosinussatz

Bei der Herleitung der folgenden trigonometrischen Sätze folgen wir der Devise, so selten wie möglich konfiguratив zu schließen – also mithilfe von Figuren, insbesondere Dreiecken. Stattdessen suchen wir stets einen rein rechnerischen Beweis für unsere trigonometrischen Aussagen und gehen auf diese Weise unangenehmen Fallunterscheidungen möglichst aus dem Weg. Bei der trigonometrischen Flächenformel und dem Projektionssatz allerdings kommen wir um

konfigurative Überlegungen nicht herum. Wir werden im Folgenden stets neben den üblichen Seitenbezeichnungen auch die traditionellen Winkelbezeichnungen α, β, γ für die Winkelgrößen in einem echten Dreieck ABC verwenden.

Satz 4.116 (Trigonometrische Flächenformel). *Sei ABC ein echtes Dreieck, und sei X der Fußpunkt der Höhe durch C auf \overline{AB} . Wir definieren wie üblich: $h := |CX|$. Dann gilt:*

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \quad \text{und damit auch} \quad \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin \alpha. \quad (4.57)$$

Beweis. Wir machen eine Fallunterscheidung: Fällt X mit A zusammen, so ist CBA ein rechtwinkliges Dreieck. Es gilt also $\sin \alpha = 1$ und $h = b$, womit Gleichung (4.57) bestätigt wird.

Fällt X mit B zusammen, so ist CAB ein rechtwinkliges Dreieck. Es gilt also nach Definition des Sinus die gewünschte Gleichung (4.57).

Fällt X weder mit A noch mit B zusammen, so ist CAX ein rechtwinkliges Dreieck, und einer der drei Punkte A, B, X liegt echt zwischen den beiden anderen. Handelt es sich bei dem Zwischen-Punkt um X oder um B , so gilt

$$\sin \alpha = \sin \angle CAB \underset{\text{Formregel}}{=} \sin \angle CAX \underset{\text{Def. 4.111}}{=} \frac{|CX|}{|CA|} = \frac{h}{b},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Ist A der fragliche Zwischen-Punkt, so gilt ganz ähnlich

$$\sin \alpha = \sin \angle CAB \underset{\text{Satz 4.98}}{=} \sin \angle (180^\circ - CAX) \underset{\text{Def. 4.112}}{=} \sin \angle CAX = \frac{|CX|}{|CA|} = \frac{h}{b}.$$

Damit ist die Behauptung in jedem Fall bewiesen. \square

Satz 4.117 (Sinussatz). *Sei ABC ein echtes Dreieck mit dem Umkreisradius r_u . Dann gilt:*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2 \cdot r_u.$$

Beweis. Aus Symmetriegründen reicht der Nachweis der Gleichung $\frac{a}{\sin \alpha} = 2 \cdot r_u$. Wie in Satz 4.116 sei h die Länge der Höhe durch C . Es gilt dann:

$$\frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 \alpha = \left(\frac{1}{2} b c \sin \alpha \right)^2 = \left(\frac{1}{2} c h \right)^2 = \frac{1}{16} F(a^2, b^2, c^2) = \frac{1}{16} \frac{a^2 b^2 c^2}{r_u^2}, \quad (4.58)$$

wobei beim zweiten Gleichheitszeichen die trigonometrische Flächenformel benutzt wird (4.57), beim dritten die Heronische Flächenformel (Bemerkung 4.72) und beim vierten die Umkreisradiusformel aus Satz 4.81. Die Gleichungskette (4.58) liefert zunächst die Gleichheit $4 \sin^2 \alpha = \frac{a^2}{r_u^2}$, die dann auf $2 \sin \alpha = \frac{a}{r_u}$ führt. Einfaches Umstellen schließt diesen Beweis ab. \square

Satz 4.118 (Projektionssatz). *Sei ABC ein echtes Dreieck. Dann gilt:*

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha.$$

Beweis. Wieder seien X der Fußpunkt der Höhe durch C und h die Länge von CX . Falls X mit A zusammenfällt, so ist CBA ein rechtwinkliges Dreieck, und es gilt $\cos \alpha = 0$. Die Behauptung folgt dann aus der Definition von $\cos \beta$ im Dreieck CBA .

Fällt X mit B zusammen, so ist die Argumentation analog – mit CAB anstelle von CBA .

Fällt X weder mit A noch mit B zusammen, so liegt einer der Punkte A, X, B echt zwischen den beiden anderen. Ist X dieser Zwischen-Punkt, so gilt²²

$$\begin{aligned} a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha &= a \cdot \cos \angle ABC + b \cdot \cos \angle CAB \\ &= a \cdot \cos \angle XBC + b \cdot \cos \angle CAX = a \cdot \frac{|XB|}{a} + b \cdot \frac{|AX|}{b} \\ &= |XB| + |AX| = |AB| = c. \end{aligned}$$

Ist A der Zwischen-Punkt, so gilt

$$\begin{aligned} a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha &= a \cdot \cos \angle ABC + b \cdot \cos \angle CAB \\ &= a \cdot \cos \angle XBC + b \cdot \cos(180^\circ - \angle CAX) \\ &= a \cdot \cos \angle XBC - b \cdot \cos \angle CAX = a \cdot \frac{|XB|}{a} - b \cdot \frac{|AX|}{b} \\ &= |XB| - |AX| = |AB| = c. \end{aligned}$$

Ist schließlich B der fragliche Zwischen-Punkt, so gilt

$$\begin{aligned} a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha &= a \cdot \cos \angle ABC + b \cdot \cos \angle CAB \\ &= a \cdot \cos(180^\circ - \angle XBC) + b \cdot \cos \angle CAX \\ &= -a \cdot \cos \angle XBC + b \cdot \cos \angle CAX = -a \cdot \frac{|XB|}{a} + b \cdot \frac{|AX|}{b} \\ &= -|XB| + |AX| = |AB| = c. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis in jedem Fall erbracht. □

Satz 4.119 (Cosinussatz). *Sei ABC ein echtes Dreieck. Dann gilt:*

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

²² Wir benutzen bei den folgenden Gleichungsketten die Formregel, die Definitionen von Sinus und Cosinus (4.111 und 4.112), den Nebenwinkel-Satz (4.98) und die Dreiecksungleichung.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch dreimalige Anwendung des Projektionssatzes. Erst wird die entsprechende Formel für a benutzt (also $a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta$), etwas später diejenigen für c und b , und zwar umgestellt nach $\cos \gamma$ bzw. $\cos \beta$ bzw. $\cos \alpha$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{a}{b} - \frac{c}{b} \cdot \cos \beta &= \frac{a}{b} - \frac{c}{b} \cdot \frac{c-b \cdot \cos \alpha}{a} &= \frac{a^2 - c^2 + b \cdot c \cdot \cos \alpha}{ab} \\ &= \frac{a^2 - c^2 + b \cdot c \cdot \frac{b-a \cdot \cos \gamma}{c}}{ab} &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} - \cos \gamma. \end{aligned}$$

Umstellen der Gleichung führt direkt auf die behauptete Gleichung. \square

Kongruenzsätze für Dreiecke

Satz 4.120 (Kongruenzsätze). *Seien ABC und $A'B'C'$ zwei echte Dreiecke. Die Größen im zweiten Dreieck bezeichnen wir mit den „gestrichenen“ Varianten der üblichen Bezeichnungen aus dem ersten Dreieck (also mit a' statt a usw). Dann sind die beiden Dreiecke kongruent, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

WSW: $\alpha = \alpha'$ und $c = c'$ und $\beta = \beta'$

SWS: $b = b'$ und $\alpha = \alpha'$ und $c = c'$

SSW: $a = a'$ und $b = b'$ und $\alpha = \alpha'$ und $a > b$.

Beweis. Gilt die WSW-Bedingung, so folgt aus dem Winkelsummensatz zunächst $\gamma = \gamma'$ und dann

$$b \underset{\text{Sinussatz}}{=} c \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = c \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin \gamma'} \underset{\text{Sinussatz}}{=} b' \quad \text{und} \quad a \underset{\text{Sinussatz}}{=} c \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = c' \cdot \frac{\sin \alpha'}{\sin \gamma'} \underset{\text{Sinussatz}}{=} a',$$

womit die Kongruenz von ABC und $A'B'C'$ erwiesen ist.

Gilt die SWS-Bedingung, so folgt

$$a^2 \underset{\text{Cosinussatz}}{=} b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos \alpha' \underset{\text{Cosinussatz}}{=} a'^2,$$

also $a = a'$, womit ebenfalls alles gezeigt ist.

Ist die SSW-Bedingung erfüllt, so ist der Kongruenzbeweis etwas aufwendiger. Nach dem Cosinussatz gilt ohnehin

$$c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2 - b^2, \quad (4.59)$$

woraus die Aussage

$$(c - b \cos \alpha)^2 = a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \alpha \quad (4.60)$$

folgt. Unter der SSW-Bedingung gilt außerdem

$$\begin{aligned} (c' - b \cos \alpha)^2 &= (c' - b' \cos \alpha')^2 \stackrel{\text{analog zu (4.60)}}{=} a'^2 - b'^2 + b'^2 \cos^2 \alpha' \\ &= a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \alpha \stackrel{(4.60)}{=} (c - b \cos \alpha)^2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Aus (4.61) folgt

$$(c' - b \cos \alpha) = (c - b \cos \alpha) \quad \text{oder} \quad (c' - b \cos \alpha) = -(c - b \cos \alpha). \quad (4.62)$$

Im ersten Fall von (4.62) sind wir sofort fertig, denn aus der Gleichung $c' - b \cos \alpha = c - b \cos \alpha$ folgt offensichtlich $c' = c$ und damit die gewünschte Kongruenz der beiden Dreiecke. Wir werden nun zeigen, dass der andere Fall von (4.62), also $(c' - b \cos \alpha) = -(c - b \cos \alpha)$, nicht eintritt. Träte er nämlich doch ein, so erhielten wir die Gleichungskette

$$\begin{aligned} 2b \cos \alpha = c + c' &\stackrel{\text{Projektionssatz}}{=} (a \cos \beta + b \cos \alpha) + (a' \cos \beta' + b' \cos \alpha') \\ &= a \cos \beta + a \cos \beta' + 2b \cos \alpha, \end{aligned}$$

was wiederum auf $\cos \beta = -\cos \beta' = \cos(180^\circ - \beta')$ führte. Wegen der Injektivität der Cosinusfunktion (Satz 4.113) könnten wir daraus $\beta = 180^\circ - \beta'$ folgern, was dann

$$\gamma' = 180^\circ - \alpha' - \beta' = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - \beta) = \beta - \alpha$$

zur Folge hätte und wegen $\gamma' > 0$ die Schlussfolgerung $\beta > \alpha$ erzwingen würde. Das wäre aber ein Widerspruch zum Satz über den Winkel-Strecken-Vergleich (Satz 4.100), denn es gilt nach Voraussetzung $a > b$. \square

Ähnlichkeit und Verhältnisgleichheit

Satz 4.121 (Ähnliche Dreiecke). *Seien ABC und $A'B'C'$ echte Dreiecke. Dann gilt:*

$$ABC \sim A'B'C' \iff \alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'.$$

(„Zwei echte Dreiecke sind genau dann verhältnisgleich, wenn sie winkelgleich sind.“)

Beweis. Es gelte zunächst: $ABC \sim A'B'C'$. Sei r der entsprechende Ähnlichkeitsfaktor. Dann gilt nach dem Cosinussatz:

$$\cos \alpha' = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'} = \frac{(rb)^2 + (rc)^2 - (ra)^2}{2(br)(cr)} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos \alpha,$$

woraus $\alpha' = \alpha$ folgt, da \cos gemäß Satz 4.113 injektiv ist. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Winkelpaare.

Es gelte nun die Gleichheit der drei Winkelpaare. Mit dem Sinussatz erhalten wir die Gleichung

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b},$$

also $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. Analog gilt: $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$, womit die Verhältnisleichheit und damit die Ähnlichkeit $ABC \sim A'B'C'$ nachgewiesen sind. \square

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Mithilfe der bisherigen Sätze gelingt nun bereits ein erfreulich schlichter Beweis der bekannten Additionstheoreme für die Sinus- und Cosinusfunktion:

Satz 4.122 (Additionstheoreme für Sinus und Cosinus). *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$ mit $\alpha + \beta < 180^\circ$. Dann gelten die beiden Gleichungen*

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Beweis. Nach Satz 4.114 gibt es ein Dreieck ABC derart, dass die Gleichungen $\angle CAB = \alpha$ bzw. $\angle ABC = \beta$ gelten. Wir wenden in diesem Dreieck den Winkelsummensatz, Definition 4.112, den Sinussatz, den Projektionssatz (für c) und nochmals den Sinussatz an und erhalten

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma = \sin \alpha \cdot \frac{c}{a} \\ &= \sin \alpha \cdot \frac{a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha}{a} = \sin \alpha \cos \beta + \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Für das Cosinus-Theorem verwenden wir zusätzlich den *trigonometrischen Pythagoras*:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma = -\frac{a - c \cdot \cos \beta}{b} \\ &= \frac{c}{b} \cdot \cos \beta - \frac{a}{b} = \frac{a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha}{b} \cdot \cos \beta - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} (\cos^2 \beta - 1) + \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot (-\sin^2 \beta) + \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

\square

Definition und Satz 4.123 (Tangens). Für alle $\alpha \in \mathbb{W}$ mit $\alpha \neq 90^\circ$ definieren wir $\tan \alpha := \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$ mit $\alpha + \beta < 90^\circ$:

$$\tan \alpha + \tan \beta < \tan(\alpha + \beta). \quad (4.63)$$

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$ mit $\alpha + \beta < 90^\circ$. Wir verwenden die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus und benutzen außerdem die Tatsache, dass alle hier auftretenden Werte von Sinus und Cosinus positiv sind, weil α und β jeweils kleiner als 90° sind. Es gilt somit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \tan \alpha + \tan \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \\ &< \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Man beachte, dass beim entscheidenden Abschätzungsschritt der Nenner des Quotienten $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$ positiv ist, denn er ist ja gleich $\cos(\alpha + \beta)$, und dieser Term ist wegen $\alpha + \beta < 90^\circ$ positiv. \square

Wir bemerken am Rande, dass aufgrund der Definition von \tan , die auf \sin und \cos zurückgreift, in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die bekannte Beziehung $\tan \angle CAB = \frac{|BC|}{|AC|}$ gilt.

Satz 4.124 (Monotonie von Sinus und Cosinus). Die Cosinusfunktion ist streng monoton fallend, und die auf $\mathbb{W}_{<90^\circ}$ eingeschränkte Sinusfunktion ist streng monoton wachsend.

Beweis. Wir beginnen mit der Cosinusfunktion und bemerken zunächst, dass wir uns wegen der Symmetrie dieser Funktion auf das Intervall $\mathbb{W}_{<90^\circ}$ beschränken können. Wie wir aus Ungleichung (4.63) ablesen können, ist die Tangensfunktion auf diesem Intervall streng monoton wachsend, und weil sie dort positiv ist, ist auch \tan^2 streng monoton wachsend. Dasselbe gilt dann auch für $1 + \tan^2$, und da diese Funktion identisch ist mit $\frac{1}{\cos^2}$ (das ist mit dem *trigonometrischen Pythagoras* leicht einzusehen), ist eben auch $\frac{1}{\cos^2}$ auf dem Intervall $\mathbb{W}_{<90^\circ}$ streng monoton wachsend. Da $\frac{1}{\cos}$ auf diesem Intervall positiv ist, ist dann auch diese Funktion streng monoton wachsend, und daraus folgt schließlich, dass \cos auf dem fraglichen Intervall streng monoton fallend ist.

Die strenge Monotonie des Sinus auf $\mathbb{W}_{<90^\circ}$ ergibt sich direkt aus dem *trigonometrischen Pythagoras*, der Monotonie des Cosinus sowie der Tatsache, dass auf $\mathbb{W}_{<90^\circ}$ mit \cos auch \cos^2 streng monoton ist, weil \cos dort nur nicht-negative Werte annimmt. \square

Der Peripheriewinkelsatz und Sätze über Sehnenvierecke

Der *Peripheriewinkelsatz* ist eine heikle Aussage. Seine Brisanz resultiert daraus, dass seine Aussage in ihrer traditionellen Form durch impliziten Bezug auf *Halbebenen* formuliert wird; also unter Verwendung der anschaulich plausiblen Aussage, dass jede Gerade die Punkte der Ebene in drei Klassen einteilt: die Gerade selbst und zwei Halbebenen. Daraus ergibt sich dann die Sprechweise, zwei Punkte lägen auf derselben Seite einer gewissen Geraden. Der Peripheriewinkelsatz erscheint dann meist etwa in einer der folgenden Fassungen:

Peripheriewinkel *über* derselben Sehne sind gleich.

Liegt ein Punkt X auf dem Umkreis eines echten Dreiecks ABC und *auf derselben Seite* von \overline{AB} wie C , so gilt $\angle ACB = \angle AXB$.

Heikel ist diese Aussage deshalb, weil die Formalisierung von Halbebenen eine ziemlich umständliche Angelegenheit ist und der übliche Beweis des Peripheriewinkelsatzes daher fast immer lediglich mithilfe der Anschauung geführt wird. Es bleibt ja auch nichts anderes übrig, wenn eine begriffliche Grundlage nicht vorhanden ist. Wir befinden uns hier zunächst in der Klemme: Einerseits möchten wir auf den Satz nicht verzichten – der Druck der Tradition ist groß, und der Satz ist kraftvoll –, andererseits wollen wir keine Sätze ohne geklärte Begriffe aussprechen. Der Mühe, Halbebenen tatsächlich begrifflich einzuführen, wollen wir uns allerdings auch nicht unterziehen. Als Kompromiss bieten wir zunächst den sogenannten *Sinus-Peripheriewinkelsatz* an, der allerdings nur eine Umformulierung des Sinussatzes ist:

Satz 4.125 (Sinus-Peripheriewinkelsatz). *Sei ABC ein echtes Dreieck mit dem Umkreis k , und sei X ein Punkt auf $k \setminus \{A, B\}$. Dann gilt $\sin \angle AXB = \sin \angle ACB$.*

In dieser Fassung steht der Peripheriewinkelsatz auf sicherem begrifflichen Fundament und ist problemlos beweisbar, doch ist seine Aussage natürlich schwächer als die Aussage der traditionellen Fassung. Statt der Gleichheit der Winkelmaße erhalten wir nur die Gleichheit der entsprechenden Sinuswerte.

Bei weiterer Analyse der Situation stellt sich heraus, dass der traditionelle Peripheriewinkelsatz sich viel besser fassen lässt, wenn man *zuerst* Sehnenvierecke behandelt, diese über ihre Winkel charakterisiert *und dann* den Peripheriewinkelsatz behandelt. Dies stellt eine Umkehrung der üblichen Reihenfolge in der Schule dar, doch wird sie uns zu einer bemerkenswerten Präzisierung des heiklen

Satzes verhelfen. Der Clou besteht darin, dass wir die anschauliche, aber etwas überdimensionierte Idee der Halbebenen auf etwas Einfacheres zurückführen: und zwar auf die *zwischen*-Beziehungen von Punkten auf einer Geraden. Sind nämlich ein Kreis und eine seiner Sehnen AB gegeben, so liegen zwei Kreispunkte Z und X (die von A und B verschieden sind) genau dann in verschiedenen Halbebenen, wenn \overline{ZX} und \overline{AB} einander in einem Punkt echt zwischen A und B schneiden (Bild 4.34). Es geht also letztlich um die Normalität des Vierecks $AXBZ$, und die entscheidende Aussage steckt im Satz 4.129 über normale Vierecke mit Umkreis:

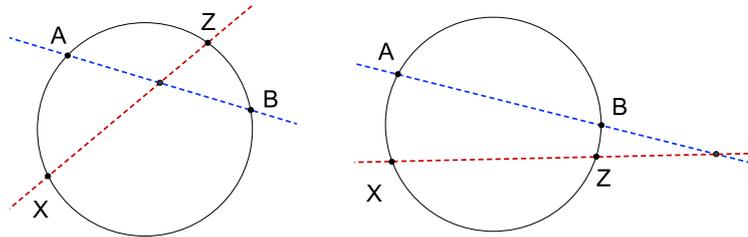


BILD 4.34: Die Erfassung von Halbebenen durch die *zwischen*-Beziehung

Definition 4.126 (Sehnenviereck). Ein Viereck heißt *Sehnenviereck*, wenn es normal ist und einen Umkreis besitzt.

Man beachte, dass nach unserer Definition die Normalität und damit auch die Echtheit im Begriff des Sehnenvierecks enthalten sind. Es folgt die traditionelle Kennzeichnung von Sehnenvierecken mithilfe ihrer Winkelmaße. Wir bereiten sie durch zwei Hilfsaussagen vor:

Hilfssatz 4.127. Sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r , und seien A, B zwei verschiedene Punkte auf k . Ferner sei X ein weiterer Punkt auf \overline{AB} mit $X \neq A, B$. Dann gilt die Äquivalenz: $|MX| < r \iff \overset{A}{\bullet} \overset{X}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$.

Beweis. Das entscheidende Hilfsmittel für den Beweis beider Implikationen ist der Hilfssatz 4.77. Wir beweisen zunächst die Vorwärtsrichtung; es gelte also $|MX| < r$. Würde nun etwa $\overset{A}{\bullet} \overset{B}{\bullet} \overset{X}{\bullet}$ gelten, so würde nach Voraussetzung sogar die *echte zwischen*-Beziehung gelten, und mit Hilfssatz 4.77 könnten wir schließen, dass $|MB| < r$ ist. Das wäre ein Widerspruch. Der Fall $\overset{X}{\bullet} \overset{A}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$ kann analog ausgeschlossen werden. Wegen der Kollinearität der Punkte A, B, X gilt also die einzig verbleibende *zwischen*-Beziehung, nämlich $\overset{A}{\bullet} \overset{X}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$.

Sei nun andersherum $\overset{A}{\bullet} \overset{X}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$ vorausgesetzt. Wegen $X \neq A, B$ gilt dann sogar die *echte zwischen*-Beziehung, und durch direkte Anwendung von Hilfssatz 4.77 folgt $|MX| < r$. \square

Satz 4.128 („Paschaxiom für Kreise“). *Sei k ein Kreis, und sei AB eine Sehne von k . Außerdem seien X ein Punkt von k , der von A und B verschieden ist, und S ein Punkt auf \overline{AB} . Dann gilt: Wenn S echt zwischen A und B liegt, dann hat \overline{XS} mit k einen zweiten (von X verschiedenen) Schnittpunkt.²³*

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von k , und sei r der Radius dieses Kreises. Wir beweisen die behauptete Implikation per Kontraposition. Wir setzen also voraus, dass \overline{XS} mit k keinen zweiten Schnittpunkt hat. Dann ist $S \neq A, B$, und \overline{XS} ist eine Tangente an k mit dem Berührungspunkt X . Nach dem Tangentenkriterium können wir also $\overline{XS} \perp \overline{MX}$ folgern. Dies lässt mit der Lot-Ungleichung die Schlussfolgerung

$$r = |MX| \leq |MS| \quad (4.64)$$

zu. Wegen $S \neq A, B$ gilt in (4.64) sogar das echte Ungleichheitszeichen. Gemäß Hilfssatz 4.127 bedeutet dies, dass S kein Zwischen-Punkt der Sehne AB ist. \square

Satz 4.129 (Kennzeichnungssatz für Sehnenvierecke). *Sei $ABCD$ ein normales Viereck. Dann gilt: $ABCD$ ist ein Sehnenviereck $\iff \alpha + \gamma = 180^\circ$.*

Beweis. Wir beweisen zunächst die Vorwärtsrichtung. Sei also $ABCD$ ein Sehnenviereck. Daraus ergibt sich mit dem Sinus-Peripheriewinkelsatz die Gleichung $\sin \angle BAD = \sin \angle BCD$, also $\sin \alpha = \sin \gamma$. Mit Implikation (4.52) aus Satz 4.113 folgt daraus die Aussage

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \text{oder} \quad \alpha = \gamma. \quad (4.65)$$

Im ersten Fall von (4.65) ist das Ziel dieses Beweisteils bereits erreicht. Im zweiten Fall, $\alpha = \gamma$, betrachten wir das zweite Winkelpaar von $ABCD$. Analog zu (4.65) erhalten wir die Aussage

$$\beta + \delta = 180^\circ \quad \text{oder} \quad \beta = \delta. \quad (4.66)$$

Im ersten Unterfall von (4.66) folgt wegen der 360° -Winkelsumme im normalen Viereck die Aussage $\alpha + \gamma = 180^\circ$, womit wir am Ziel wären. Im zweiten Unterfall gilt einerseits $\beta = \delta$, andererseits $\alpha = \gamma$. Gemäß Satz 4.106 ist $ABCD$ damit ein Parallelogramm. Weil es als Sehnenviereck einen Umkreis besitzt, ist es nach Satz 4.20 ein Rechteck. Also sind alle seine Winkel 90° groß, woraus sich die gewünschte Aussage $\alpha + \gamma = 180^\circ$ ergibt.

²³ Es gilt wohl auch die Umkehrung; wir benötigen diese aber nicht und lassen sie daher fort.

Der Beweis der anderen Implikation ist langwieriger: Sei also nun umgekehrt $ABCD$ ein normales Viereck, in dem $\alpha + \gamma = 180^\circ$ gilt. Die Normalität des Vierecks garantiert uns die Existenz eines Diagonalenschnittpunkts S , der echt zwischen A, C und echt zwischen B, D liegt. Sei k der Umkreis von ABC mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Das Paschaxiom für Kreise (Satz 4.128) garantiert, dass \overline{BS} mit k einen zweiten Schnittpunkt $D' (\neq B)$ besitzt. Die Punkte A, B, C und D' liegen also alle auf dem Kreis k .

Wir wollen jetzt die Normalität des Vierecks $ABCD'$ nachweisen. Die Echtheit von $ABCD'$ folgt aus seiner Konstruktion und aus der Normalität von $ABCD$.²⁴ Wir müssen also nur den Diagonalenschnittpunkt von $ABCD'$ untersuchen; weil die Diagonallinien in $ABCD$ dieselben sind wie in $ABCD'$, ist S zugleich der Diagonalenschnittpunkt von $ABCD'$. Weil $ABCD$ normal ist, liegt S echt zwischen A und C . Wir müssen noch zeigen, dass S auch echt zwischen B und D' liegt. Aus der echten *zwischen*-Beziehung $\overset{A}{\bullet} \overset{S}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ folgt mit Hilfssatz 4.127 die Ungleichung $|MS| < r$, und aus dieser Ungleichung ergibt sich zusammen mit $S \in \overline{BD'} \setminus \{B, D'\}$ aus demselben Hilfssatz die Beziehung $\overset{B}{\bullet} \overset{S}{\bullet} \overset{D'}{\bullet}$. Weil S von B und D' verschieden ist, liegt S *echt* zwischen B und D' , so dass die Normalität von $ABCD'$ damit gesichert ist.

Es ist nun erwiesen, dass $ABCD'$ ein Sehnenviereck ist. Wir haben damit einerseits dank der bereits bewiesenen Implikation die Winkelkennzeichnung von $ABCD'$ zur Verfügung, insbesondere

$$\angle D'AB + \angle D'CB = 180^\circ, \quad (4.67)$$

andererseits aber auch die Voraussetzung über das Viereck $ABCD$, nämlich

$$\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ. \quad (4.68)$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben offenbar

$$(\angle BAD' - \angle BAD) + (\angle BCD' - \angle BCD) = 0. \quad (4.69)$$

Wir müssen nun zeigen, dass sich aus diesen Gleichungen die Identität von D und D' ergibt. Erneut führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen

²⁴ Im Einzelnen geht die Argumentation hier folgendermaßen: Die Punkte A, B, C sind paarweise verschieden, weil $ABCD$ normal und damit echt ist; $D' \neq B$ gilt nach Konstruktion von D' ; und $D' \neq A$ bzw. $D' \neq C$ ergeben sich daraus, dass die Punkte B, A, D bzw. B, C, D nicht kollinear sind (das Viereck $ABCD$ ist ja normal). Also sind alle Ecken von $ABCD'$ paarweise verschieden. Und weil A, B, C nicht kollinear sind, ist auch das Viereck $ABCD'$ nicht kollinear. Insgesamt ist es also tatsächlich echt.

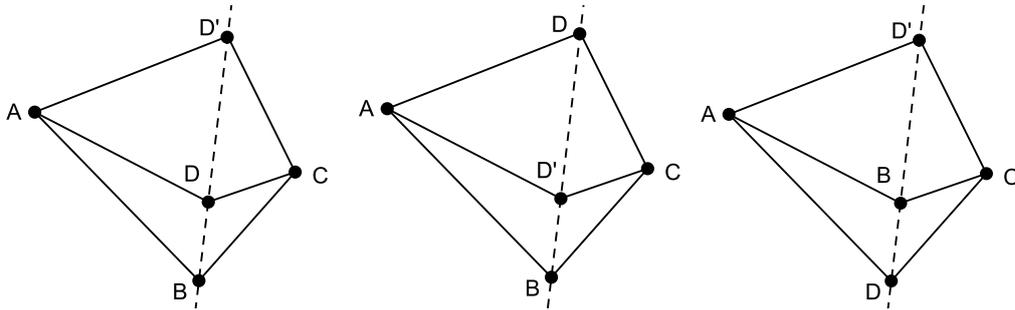


BILD 4.35: Die verschiedenen Fälle im Beweis der Rückwärtsrichtung von Satz 4.129

dazu $D \neq D'$ an. Aus der Kollinearität von B, D, D' ergeben sich die drei Fälle $\overset{B}{\bullet} - \overset{D}{\bullet} - \overset{D'}{\bullet}$, $\overset{D}{\bullet} - \overset{D'}{\bullet} - \overset{B}{\bullet}$ und $\overset{D'}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$ – und zwar hier jeweils mit der *echten zwischen*-Beziehung –, die wir nun nacheinander betrachten und jeweils einen Widerspruch anstreben. Wir benutzen dazu stets die Additionsregel für Winkel sowie die Gleichungen (4.67) und (4.68). Im ersten Fall, $\overset{B}{\bullet} - \overset{D}{\bullet} - \overset{D'}{\bullet}$ (Bild 4.35, links), gilt

$$(\angle BAD' - \angle BAD) + (\angle BCD' - \angle BCD) = \angle DAD' + \angle DCD' > 0,$$

was offenbar einen Widerspruch zu (4.69) darstellt. Auf die gleiche Weise kommen wir im Fall $\overset{D}{\bullet} - \overset{D'}{\bullet} - \overset{B}{\bullet}$ (Bild 4.35, Mitte) zum Widerspruch; dann gilt nämlich

$$(\angle BAD' - \angle BAD) + (\angle BCD' - \angle BCD) = -\angle DAD' - \angle D'CD < 0.$$

Im dritten Fall, $\overset{D'}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$ (Bild 4.35, rechts), gehen wir anders vor und stellen mithilfe von (4.67) und (4.68) sowie der Additionsregel fest, dass eine der beiden Summen

$$\angle D'AB + \angle DAB (= \angle D'AD) \quad \text{bzw.} \quad \angle D'CB + \angle DCB (= \angle D'CD)$$

größer oder gleich 180° ist. Damit ergibt sich in einem der beiden echten Dreiecke $D'AD$ bzw. $D'CD$ ein Widerspruch zur 180° -Winkelsumme.

Damit ist die Annahme $D \neq D'$ in jedem Fall widerlegt. Es gilt also $D = D'$, und somit ist $ABCD$ genau wie $ABCD'$ ein Sehnenviereck. \square

Definition 4.130 (Kreisbogen). Seien k ein Kreis, AB eine Sehne von k und Z ein Punkt auf k mit $Z \neq A, B$. Dann nennen wir die Menge

$$\{X \in k \setminus \{Z\} \mid \overline{XZ} \text{ schneidet } \overline{AB} \text{ in einem Punkt echt zwischen } A \text{ und } B\}$$

den *Kreisbogen von k , der Z bezüglich AB gegenüberliegt*.

Satz 4.131 (Peripheriewinkelsatz). *Seien k ein Kreis, AB eine Sehne von k und Z ein Punkt auf k mit $Z \neq A, B$. Ferner seien X und Y Punkte, die auf dem Kreisbogen von k liegen, der Z bezüglich AB gegenüberliegt. Dann gilt: $\angle AXB = \angle AYB$.*

Beweis. Da sowohl $AXBZ$ als auch $AYBZ$ nach Definition des Kreisbogens normal und somit Sehnenvierecke sind, gilt nach Satz 4.129

$$\angle AXB = 180^\circ - \angle AZB = \angle AYB.$$

□

Es gibt eine bestimmte Konfiguration, in der die Anwendung des Peripheriewinkelsatzes besonders naheliegt, nämlich in Teildreiecken von Sehnenvierecken. In einem Sehnenviereck $ABCD$ mit dem Umkreis k hoffen wir beispielsweise auf die Beziehung $\angle ACB = \angle ADB$ (Bild 4.36). Aber können wir den Peripheriewinkelsatz in der Form von Satz 4.131 hier anwenden? Wir müssten uns vorher vergewissern, dass C und D bezüglich der Sehne AB auf demselben Kreisbogen von k liegen. Dafür benötigen wir einen Punkt Z , der C und D im

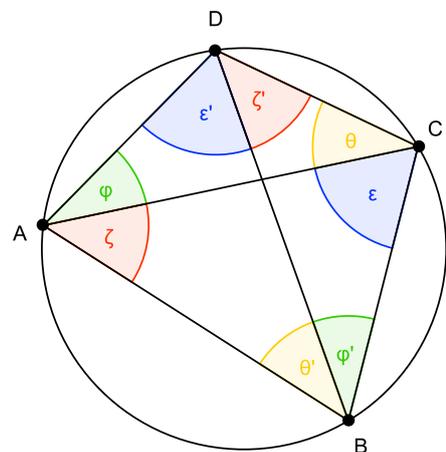


BILD 4.36

Sinne von Definition 4.130 gegenüberliegt. Es liegt nahe, den (von C verschiedenen) Schnittpunkt Z der inneren Winkelhalbierenden im Dreieck ABC bei C mit dem Kreis k zu betrachten. Nach dem Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz liegt Z auf dem Mittellot von AB . Außerdem schneidet \overline{CZ} die Gerade \overline{AB} echt zwischen A und B , so dass C also tatsächlich ein Element desjenigen Kreisbogens von k ist, der Z bezüglich AB gegenüberliegt. Genauso können wir mit D vorgehen: Wir betrachten den (von D verschiedenen) Schnittpunkt Z' der inneren Winkelhalbierenden im Dreieck ABD bei D mit k und erkennen, dass D zu demjenigen Kreisbogen von k gehört, der Z' bezüglich AB gegenüberliegt. Wir könnten also Satz 4.131 anwenden, wenn wir nur wüssten, dass $Z = Z'$ ist. Genau dies ist aber nicht klar, denn das Mittellot von AB hat mit k natürlich zwei Schnittpunkte, und Z und Z' könnten somit verschieden sein. Auch weitere konfigurative Überlegungen bringen uns einem Beweis von $Z = Z'$ nicht

näher. Glücklicherweise können wir die Winkelgleichung $\angle ACB = \angle ADB$ aber dennoch beweisen, allerdings auf ganz andere Weise:

Satz 4.132 (Peripheriewinkel im Sehnenviereck). *Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck (Bild 4.36). Wir definieren*

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \angle ACB, \quad \varepsilon' := \angle ADC, \quad \varsigma := \angle BAC, \quad \varsigma' := \angle BDC, \\ \varphi &:= \angle CAD, \quad \varphi' := \angle CBD, \quad \theta := \angle DCA, \quad \theta' := \angle DBA. \end{aligned}$$

Dann gilt $\varepsilon = \varepsilon'$, $\varsigma = \varsigma'$, $\varphi = \varphi'$, $\theta = \theta'$.

Beweis. Wegen der Normalität des Vierecks $ABCD$ gilt

$$\varepsilon + \varepsilon' + \varsigma + \varsigma' + \varphi + \varphi' + \theta + \theta' = 360^\circ. \quad (4.70)$$

Schon durch die Bezeichnungen haben wir die acht Winkel in vier Paare eingeteilt; nach dem Sinus-Peripheriewinkelsatz haben die beiden Winkel eines jeden Paares zumindest den gleichen Sinuswert und sind daher entweder gleich oder ergänzen einander zu 180° . Allerdings kann die 180° -Ergänzung für höchstens eines dieser Winkelpaare zutreffen, weil zwei oder mehr dieser 180° -Ergänzungen einen Widerspruch zu (4.70) darstellen würden. Nach dem Kennzeichnungssatz für Sehnenvierecke ergänzen sich die Winkel bei A und bei C zu 180° ; ebenso diejenigen bei B und D . Indem wir nun die Formregel und die Additionsregel anwenden, erhalten wir somit die Gleichung

$$\varepsilon + \varsigma + \varphi + \theta = 180^\circ = \varepsilon' + \varsigma' + \varphi' + \theta'. \quad (4.71)$$

Weil nun aber zumindest drei der vier Winkelpaare identische Winkelgrößen aufweisen, erzwingt (4.71) auch die Identität der beiden Winkelgrößen des vierten Paares. \square

Satz 4.133 (Ptolemäus). *In jedem Sehnenviereck $ABCD$ gilt mit den üblichen Bezeichnungen: $ac + bd = ef$.*

Beweis. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck. Nach Satz 4.129 ergänzen sich gegenüberliegende Winkel von $ABCD$ zu 180° , und solche Winkelpaare weisen nach Satz 4.113 a) additiv invertierte Cosinuswerte auf; insbesondere gilt $\cos \delta = -\cos \beta$. Der Cosinussatz liefert bei Anwendung auf die Dreiecke CDA und ABC somit die Gleichung

$$\frac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd} = -\frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab},$$

die durch Ausmultiplizieren und Umstellen nach e^2 in die Gleichung

$$e^2 = \frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd} \quad (4.72)$$

übergeht. Analog erhalten wir für f^2 die Gleichung

$$f^2 = \frac{(bd+ca)(cd+ba)}{bc+da}. \quad (4.73)$$

Die Multiplikation von (4.72) und (4.73) führt dann auf

$$e^2 \cdot f^2 = (ac + bd)^2.$$

Da alle quadrierten Teilterme dieser Gleichung positiv sind, folgt die gewünschte Gleichung

$$ef = ac + bd.$$

□

Aufgaben zur Geometrie und didaktischer Kommentar

Die in dieser Arbeit angebotene geometrische Hintergrundtheorie unterscheidet sich in ihrem Aufbau recht deutlich vom derzeit üblichen geometrischen Curriculum unserer Schulen. Insbesondere schert sich der Schulunterricht nicht um unsere Stufung der Theorie in

- die *abstrakte (maßfreie) Geometrie*, die sich auf affine Grundbegriffe, die Streckenkongruenz und die senkrecht-Relation beschränkt,
- die *Geometrie mit reellem Längenmaß*, also mit Streckenabtragung, Dreiecksgleichung und -ungleichung, Streckenabtragung etc.
- und die *Geometrie mit Winkelmaß*, die mit der schwierigen theoretischen Aufarbeitung der elementaren Winkelrechenregeln beginnt und schließlich in die Trigonometrie mündet.

Zwar hält sich die Schule mit der Einführung der Trigonometrie bis zum Ende der Sekundarstufe I zurück – wohl vor allem aus Respekt vor dem Funktionsbegriff (Sinus, Cosinus) –, doch im Hinblick auf den elementaren Umgang mit Winkeln gibt es dort keine Hemmungen. Im Vertrauen auf die anschauliche Eingängigkeit von Winkeln werden sehr früh Winkel gezeichnet, gemessen, verglichen, halbiert und addiert, und das jeweilige Vorgehen erscheint unter Berufung auf die Anschauung stets gerechtfertigt. In der Tat wäre eine theoretische Absicherung auf diesem Gebiet sicherlich eine Überforderung, wie wir bei unserem formalen Durchgang durch die Winkeltheorie selbst gesehen haben. Bezüglich der Längenrechnung ist die Situation ähnlich: Zwar ist die theoretische Grundlegung hier einfacher, dennoch gibt sich die Schule nicht mit einer bewussten Aufarbeitung der Grundlagen ab; kaum ein Schüler wird heutzutage in seinem Unterricht von der Dreiecksungleichung oder der Streckenabtragung hören.

Dieses Vorgehen der Schule mag durchaus seine didaktische Berechtigung haben, doch führt es zu einer Verwischung des geometrischen Aufbaus; in der Schule werden die Abhängigkeiten der Sätze voneinander und ihre jeweilige Entfernung vom geometrischen Fundament nicht mehr erkennbar gemacht. Nehmen wir als Beispiele die zwei wohl bekanntesten Sätze der Schulgeometrie: den Satz des Thales und den Satz des Pythagoras. Ein mittelmäßiger Schüler wird am Ende der Sekundarstufe I beide Sätze nennen und anwenden können, doch stehen

beide Sätze für ihn auf der gleichen Stufe und sind mit ähnlicher Leichtigkeit in den Unterricht eingebracht worden. Dem Schüler ist also nicht bewusst, dass der Satz des Thales wesentlich einfacher ist als der Satz des Pythagoras; während der erste ja gleich über dem Fundament der abstrakten Theorie liegt, gewissermaßen im Erdgeschoss des geometrischen Hauses, residiert der zweite im fünften Stockwerk (direkt über dem Strahlensatz), und ein Blick aus seinem Fenster dürfte Schwindel verursachen.

Unser Anliegen, die Stufung der geometrischen Theorie in dieser Arbeit zu betonen, soll durch die Gestaltung unseres geometrischen Aufgabenkatalogs reflektiert werden. Dessen Einteilung wird sich also am Aufbau der Theorie orientieren. Es gibt somit verschiedene Abschnitte mit

- (1) Aufgaben zur abstrakten Geometrie (Mittelparallelsatz, Diagonalsatz, Thales etc),
- (2) Aufgaben zu den Grundlagen des Längenmaßes und zum „nicht-quadratischen“ Teil der Längenrechnung, also dem Strahlensatz und dessen Folgerungen (Ceva, Apollonius etc),
- (3) Aufgaben zum Satz des Pythagoras und den anderen „quadratischen“ Längenformeln (Höhenformel, Seitenhalbierendenformel, Umkreisradiusformel, Sehnen-Sekanten-Satz etc)
- (4) Aufgaben zur elementaren Winkelrechnung
- (5) und schließlich Aufgaben zur Trigonometrie.

Dabei gilt natürlich das Prinzip, dass jeder Abschnitt auch die Gegenstände seiner Vorgänger aufgreifen darf. So finden sich Aufgaben zum Satz des Thales nicht nur im Abschnitt (1), sondern auch in (4), denn in vielen schulüblichen und wettbewerbsüblichen Aufgaben sind Aufgaben zu „abstrakten“ Gegenständen (etwa: Satz des Thales) mit Winkelrechnungen angereichert. In der Tat gehört unser Aufgabenabschnitt (4) zur Winkelrechnung aus schulischer Sicht zu weiten Teilen eher zwischen (1) und (2) angesiedelt, vielleicht sogar auf eine Stufe mit (1). Dass wir ihn an vorletzter Position führen, liegt ja nur daran, dass die dazugehörige Winkeltheorie verhältnismäßig mühsam ist und in unserem Aufbau erst spät entwickelt wird, wohingegen die Aufgaben aus (4) unseren Schülern eher leichtfallen dürften, da die Winkelargumentation sich bei ihnen auf die Anschauung verlässt.

Jedenfalls scheint die Hoffnung gerechtfertigt, dass sich die hier präsentierten Aufgaben trotz aller Differenzen des Theorieaufbaus auch für den Einsatz in der

Schule eignen. Um die Auswahl der Aufgaben zu erleichtern, sind die meisten von ihnen mit Stichworten versehen, die auf die für die Lösung benötigten Sätze hinweisen. So fällt es beispielsweise leicht, zur Vorbereitung einer „Thales-Trainingseinheit“ in der Schule Aufgaben aus verschiedenen Abschnitten des Katalogs schnell zusammenzusammeln. Natürlich besteht auch immer die Möglichkeit, dass abweichend ganz andere als die hier anvisierten Instrumente zu einer Aufgabenlösung führen können.

Zur abstrakten Geometrie

Zu den didaktischen Vorzügen der abstrakten Geometrie gehört sicherlich ihr Verzicht auf Anordnung. Der übliche Konflikt zwischen gezeichneter Figur und allgemeinem Argument, zwischen Anschauung und Begriff, wird hier deshalb leiser ausgetragen. Ob von drei kollinearen Punkten A, B, C tatsächlich B zwischen A und C liegt, wie es eine Handskizze suggerieren mag, oder ob nicht vielleicht doch C der Zwischen-Punkt sein könnte, ist eine Frage, die sich in der abstrakten Geometrie gar nicht erst stellt; denn es gibt hier kein Längenmaß und damit auch kein *zwischen*. Die abstrakten Phänomene der Inzidenz, der Parallelität, der Orthogonalität und der Längengleichheit von Strecken lassen zwar auch Spielraum für Fehlgriffe der Anschauung, wenn etwa zwei Geraden für parallel gehalten werden, nur weil sie auf dem Papier „beinahe“ parallel erscheinen. Doch bieten die genannten Phänomene bei ihrer Übertragung auf das Papier vergleichsweise wenig Interpretationsspielraum. Ist etwa die Höhe eines Dreiecks zu zeichnen, so ist das abstrakte Phänomen leicht übertragbar: Höhenlinie und Seitenlinie sind senkrecht, und die Situation auf dem Papier wird den abstrakten Begriff treu widerspiegeln. Im Rahmen der Längenrechnung aber muss sich das Papier zwangsläufig für eine von mehreren Möglichkeiten entscheiden: Liegt der Höhenfußpunkt zwischen den Eckpunkten des Dreiecks oder nicht? Das Papier und die Anschauung bieten mehr, als eigentlich vorhanden ist, und die auf dem Papier vorgegaukelte Information hinsichtlich der Lage des Höhenfußpunkts kann trügerisch sein und zu Fehlschlüssen führen.

Manch ein Begriff, der bereits in der abstrakten Geometrie vorkommt, hat durch den Einfluss der Schulgeometrie (mit Anordnung) eine fast unbemerkte Bedeutungsverengung erfahren. Das beste Beispiel ist vielleicht der Begriff der *Winkelhalbierenden*. Im Zusammenhang mit Dreiecken neigt der Schulunterricht

dazu, unter einer *Winkelhalbierenden* zwangsläufig eine *innere Winkelhalbierende* zu verstehen. Wenn wir nun also Aufgaben zur abstrakten Geometrie betrachten, müssen wir diese Verengung rückgängig machen; wir können hier in der Theorie mangels Anordnung gar nicht zwischen innerer und äußerer Winkelhalbierender (als Symmetrieachsen von Geradenpaaren) unterscheiden und sollten uns dieser Offenheit bewusst sein. Vielleicht ist es ratsam, entsprechende Zeichnungen diesbezüglich stets doppelt auszuführen: einmal mit der inneren, einmal mit der äußeren Winkelhalbierung. Unsere erste geometrische Aufgabe bietet dazu gleich eine gute Gelegenheit:

AUFGABE 244:

In einem echten Dreieck ABC sei w eine Winkelhalbierende bei C . Dann verlaufen die Gerade w , das Lot von B auf w und die Mittelparallelle zu AC durch einen gemeinsamen Punkt.

Wann immer der Nachweis gefordert ist, die Inzidenz von drei Geraden in einem Punkt zu zeigen, besteht eine naheliegende Strategie darin, den Schnittpunkt X von zwei dieser Geraden zu betrachten und dann zu zeigen, dass X auch auf der dritten fraglichen Geraden liegt. Üblicherweise stellt sich eine gewisse Unsicherheit ein, welche zwei Geraden zunächst betrachtet werden sollen und welches die dritte Gerade sein soll, die erst danach in das Geschehen eingreift. Manches Mal stellt sich später heraus, dass die Reihenfolge der Betrachtung keine besondere Rolle spielt; doch gelegentlich zeigt es sich, dass *eine* Verfahrensweise besonders geschickt ist.

Bei Aufgabe 244 ist es ausnahmsweise so, dass eine der Geraden, nämlich das Lot von B auf w , konstruktiv von einer der beiden anderen Geraden abhängt, nämlich w . Wenn wir eine Planfigur zu dieser Aufgabe entwerfen, können wir also nicht umhin, w vor dem Lot zu zeichnen, und es liegt daher heuristisch nahe, auch *gedanklich* mit w zu beginnen. Bei der Wahl der zweiten Geraden entscheiden wir uns für das Lot: Sei also X der Schnittpunkt von w und dem Lot von B auf w (Bild 4.37).

Weil w als Winkelhalbierende eine Symmetrieachse von \overline{CB} und \overline{CA} ist, liegt der Bildpunkt B' von B bei der Spiegelung an w auf \overline{CA} . Dann ist $BB'C$ ein gleichschenkliges Dreieck, und nach der Mittellotregel ist X der Mittelpunkt von BB' . Der Mittelparallelensatz zeigt somit bei seiner Anwendung auf die Dreiecke $AB'B$ und $CB'B$, dass die Parallele zu \overline{CA} durch X sowohl durch den Mittelpunkt von AB als auch durch den Mittelpunkt von CB geht; diese Parallele ist damit die Mittelparallelle zu AC im Dreieck ABC , und sie verläuft durch X ; genau dies war zu zeigen.

Man beachte, dass in Bild 4.37 nur der Fall mit w als *innerer* Winkelhalbierender dargestellt ist; die Aussage von Aufgabe 244 und der Beweis gelten jedoch natürlich auch für den anderen Fall, in dem w die *äußere* Winkelhalbierende ist. Es ist jedenfalls eine gute Übung zur Stärkung des begrifflichen Denkens, die Unabhängigkeit der Beweisargumentation von der Figur in Bild 4.37 zu überprüfen.

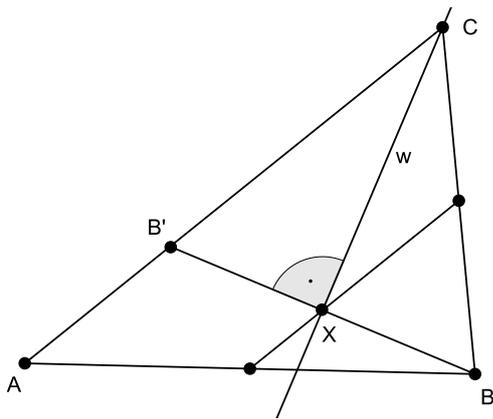


BILD 4.37: Zu Aufgabe 244

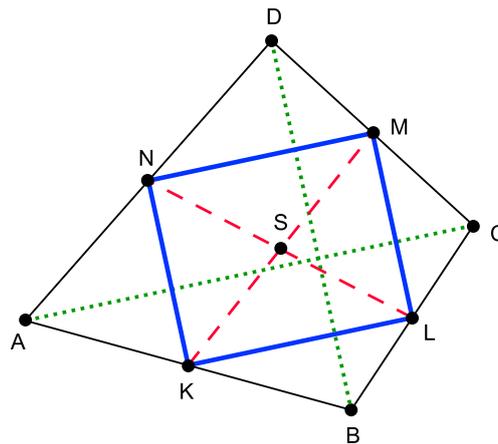


BILD 4.38: Zu Aufgabe 245

Es folgt eine Aufgabe, die trotz ihrer Schlichtheit drei der wichtigsten Sätze der abstrakten Geometrie aktivieren wird: den Mittelparallelsatz, den Diagonalensatz und den Satz des Thales:

AUFGABE 245:

Gegeben sei ein echtes Viereck $ABCD$ mit den Seitenmittelpunkten K, L, M, N (Bild 4.38), und wie in der Abbildung sei $KLMN$ ein echtes Viereck. Dann sind die Strecken KM und LN genau dann gleich lang, wenn die Diagonalen von $ABCD$ senkrecht aufeinander stehen.

Es liegt auf der Hand, dass wir angesichts der vier Seitenmitten einen wohl-bekannteren Ableger des Mittelparallelsatzes in Betracht ziehen, nämlich den Satz über das Seitenmittenviereck (Satz 4.5). Das Seitenmittenviereck $KLMN$ ist demnach ein Parallelogramm, und die fraglichen Strecken KM und LN sind dessen Diagonalen. Nach dem Diagonalensatz besitzen KM und LN einen gemeinsamen Mittelpunkt S .

Für unseren Beweis gehen wir zunächst davon aus, dass KM und LN gleich

lang sind. Weil S der Mittelpunkt dieser *beiden* Strecken ist, sind die Teilstrecken SK , SL , SM und SN ebenfalls gleich lang. Die sukzessive Anwendung des Satzes von Thales auf die Dreiecke KML , LMN , MKN und NLK ergibt, dass sie alle rechtwinklig sind, d.h. $KLMN$ ist ein Rechteck. Unter erneuter Verwendung des Mittelparallelsatzes erhalten wir also $\overline{AC} \parallel \overline{KL} \perp \overline{LM} \parallel \overline{BD}$; gemäß der Verträglichkeit von \perp und \parallel ergibt sich daraus, dass die Diagonallinien \overline{AC} und \overline{BD} senkrecht aufeinander stehen.

Für die Rückwärtsrichtung unseres Beweises setzen wir nun $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ voraus. Der Mittelparallelsatz ergibt in Verbindung mit der Verträglichkeit von \perp und \parallel , dass $KLMN$ ein Rechteck ist, und die Diagonalen eines Rechtecks sind nach dem Satz des Thales gleich lang. Damit ergibt sich hier, dass KM und LN gleich lang sind, womit der Beweis beendet ist.

Eigentlich besteht die Aussage der Aufgabe 245 in der Verknüpfung zweier Äquivalenzen; zum einen „Ein Parallelogramm (hier: das Seitenmittenviereck) ist genau dann ein Rechteck, wenn seine Diagonalen gleich lang sind“, zum anderen „Ein echtes Seitenmittenviereck ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen des Ausgangsvierecks senkrecht aufeinander stehen“. Diese Zerlegung der Gesamtaussage in zwei Teilaussagen macht Aufgabe 245 vermutlich durchsichtiger und verständlicher.

In Aufgabe 245 wurde unter anderem der Satz des Thales angewandt. In der Schule werden Gelegenheiten zur Anwendung dieses Satzes oft versäumt, weil er fälschlicherweise für eine Aussage über Kreise bzw. Halbkreise gehalten wird. Die klassische Formulierung „Alle Winkel im Halbkreis sind rechte“ ist durch ihre Kürze zwar sehr reizvoll, und das entsprechende Bild mit den rechten Winkel im Halbkreis entsprechend eingängig. Jedoch stellt diese Sichtweise eine einseitige Bevorzugung der Ortslinien-Fassung des Satzes dar. Meistens wird der Satz des Thales vielmehr in Situationen angewandt, in denen keine Kreise vorhanden sind (wie in Aufgabe 245). Im Unterricht sollte daher größerer Wert auf die kreislose Fassung des Satzes gelegt werden (Satz 4.9), und es sollte zur heuristischen Grundausbildung in Geometrie gehören, auf Figuren oder Teilfiguren wie in Bild 4.39 zu achten.

Die oben genannte klassische Formulierung des Satzes ist zusätzlich noch aus einem anderen Grunde zu bemängeln: Sie unterdrückt die „andere“ Implikation des Satzes über die Länge der Seitenhalbierenden (auf die Hypotenuse) in rechtwinkligen Dreiecken. Diese Defizite in der Wahrnehmung des Satzes veranlassen uns zu folgender Warnung:

THALES-WARNUNG:

Der Satz des Thales ist ein Satz über *rechtwinklige Dreiecke*, nicht über Kreise oder Halbkreise! Jedes rechtwinklige Dreieck, ja sogar jeder rechte Winkel ermuntert uns dazu, den Satz des Thales in Betracht zu ziehen. Auch jede Teilfigur wie in Bild 4.39 ist ein Thales-Signal!

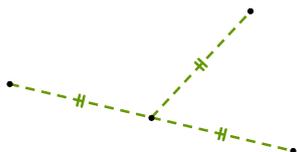


BILD 4.39: Zur Thales-Warnung

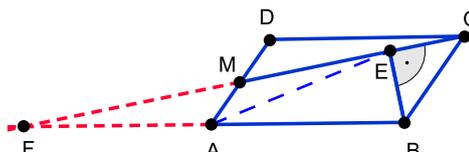


BILD 4.40: Zu Aufgabe 246

Bei der Lösung der folgenden Aufgabe werden wir erneut Gelegenheit haben, die Thales-Warnung zu beherzigen:

AUFGABE 246:

Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm; der Punkt M sei der Mittelpunkt der Seite DA ; und der Punkt E sei der Fußpunkt des Lotes von B auf \overline{MC} . Dann sind die Strecken AB und AE gleich lang.

Wenn wir eine Planfigur erstellen, die den Vorgaben der Aufgabe folgt, so erhalten wir den blauen Teil von Bild 4.40; der rechte Winkel bei E ist für uns ein Signal, die Konfiguration auf die Verwendbarkeit des Satzes von Thales zu untersuchen. Als rechtwinklige Dreiecke kommen zunächst MBE und CBE in Betracht, doch beide sind eher uninteressant, weil die jeweiligen Mittelpunkte der Hypotenusen für uns keine besondere Rolle spielen und die Thales-Implicationen daher nicht von Wert sind. Betrachten wir hingegen das (nicht-rechtwinklige) Dreieck ABE und denken dabei an die zu beweisende Aussage $|AB| = |AE|$, so erinnert uns dieses Dreieck an die rechte Hälfte einer typischen Thales-Figur: Wir müssen nur AB als „halbe Hypotenuse“ eines Dreiecks auffassen und AE als dessen Seitenhalbierende. Das eigentlich interessante rechtwinklige Dreieck ist also noch unvollständig; es fehlt der zweite Endpunkt der Hypotenuse. Diesen fehlenden Punkt verschaffen wir uns, indem wir den Schnittpunkt von \overline{EM} und \overline{AB} konstruieren und diesen F nennen. Die Figur wird durch die roten Hilfslinien vervollständigt (Bild 4.40).

Der Satz des Thales scheint jetzt bereits die gewünschte Längengleichheit $|AB| = |AE|$ zu liefern. Doch Vorsicht! Noch ist nicht erwiesen, dass A tatsächlich der Mittelpunkt von BF ist. Um diesen Nachweis zu erbringen, betrachten

wir das Viereck $FACD$; dieses ist ein Trapez (weil die Ausgangsfigur $ABCD$ ein Parallelogramm ist) und ebenso ein Drachen (weil M der Mittelpunkt von AD ist). Nach unseren Feststellungen zum Haus der Vierecke (Seite 252) ist $FACD$ somit ein Parallelogramm, und nach dem Diagonalensatz ist M daher der Mittelpunkt von CF . Wir wenden nun den Mittelparallelsatz auf das Dreieck FBC an. Es gilt ja $\overline{MA} \parallel \overline{BC}$, weil $ABCD$ ein Parallelogramm ist; und somit ist A wie erhofft der Mittelpunkt von BF . Jetzt endlich können wir den Satz des Thales anwenden und erhalten das gewünschte Ergebnis: AB und AE sind gleich lang.

Es mag kleinlich erscheinen, aber die soeben gelöste Aufgabe könnte uns unter didaktischen Gesichtspunkten dazu veranlassen, über die traditionelle Markierung von rechten Winkeln nachzudenken. In Bild 4.40 haben wir das Lot von B auf \overline{MC} durch das übliche Zeichen für den rechten Winkel markiert; wir haben das Zeichen jedoch so angebracht, dass die Rechtwinkligkeit von BCE betont wird, von einem Dreieck also, in dem wir den Satz des Thales gar nicht anwenden werden. Für uns zählt vielmehr zunächst die Rechtwinkligkeit von MBE , später von FBE . Die zufällige Entscheidung für die Platzierung der Winkelmarkierung in eines der zwei „Winkelfelder“ um E herum kann unser Augenmerk also nachteilig beeinflussen. (Vielleicht sind es bei „durchgezogenem“ Lot gar vier Winkelfelder.)

Welche Abhilfe bietet sich an? Würden wir stets *sämtliche* Winkelfelder markieren, so wären unsere Figuren schnell überfrachtet. Eine neue Art der Winkelmarkierung, etwa durch auffällige Färbung oder anderweitige Kennzeichnung des Punktes E (Bild 4.40) statt der Winkelfeld-Markierung wäre eine denkbare Maßnahme, doch hätte sie gegen den Druck der Tradition wohl keine Chance. Es bleibt wohl nur die didaktische Mahnung, unseren Schülern nahezu legen, mit jedem rechten Winkel auch die benachbarten rechten Winkel im Blick zu behalten.

Es folgt die letzte Aufgabe, die wir in diesem Abschnitt ausführlich besprechen. Auch sie hält mindestens eine allgemeine Einsicht für uns bereit:

AUFGABE 247:

Gegeben seien drei verschiedene Punkte A, B, C , die nicht alle auf derselben Geraden liegen. Gesucht wird ein Kreis k mit dem Mittelpunkt C und folgender Eigenschaft: Es gibt zwei *parallele* Tangenten t und u an k derart, dass A auf t liegt und B auf u . Zeige, dass ein solcher Kreis stets existiert.

Bild 4.41 zeigt eine Planfigur zu dieser Aufgabe; es ist jedoch unklar, durch welche Konstruktion der Kreis und die Tangenten zu finden sind. An dieser Stelle bewährt sich die allgemeine Devise, Kreise nach Möglichkeit aus unseren Figuren zu eliminieren:

AUFRUF ZUM ELIMINIEREN VON KREISEN:

Kreise stören oft. Ihre unendlich vielen Punkte betonen visuell die „Rundheit“ von Kreisen und verstellen den Blick auf das geometrisch Wesentliche; dieses besteht nämlich darin, dass alle Punkte eines Kreises von einem ausgezeichneten Punkte, dem Mittelpunkt des Kreises, den gleichen Abstand haben. Diese Abstandsgleichheit ist aber in der Regel nur für einige wenige Punktepaare relevant. Man prüfe daher, ob sich Kreise aus unseren geometrischen Figuren schadlos entfernen lassen, und ersetze sie gegebenenfalls durch einzelne bedeutungsvolle Kreispunkte und deren Radiusstrecken.

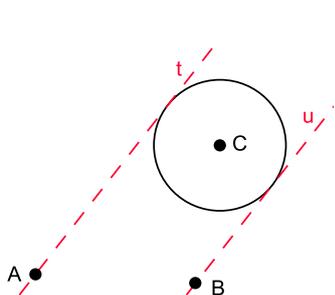


BILD 4.41

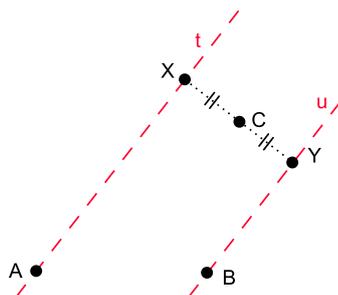


BILD 4.42

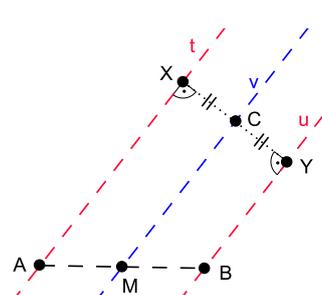


BILD 4.43

In der Tat lenkt der Kreis in Bild 4.41 durch seine Fülle und Rundheit von den wenigen wichtigen Kreispunkten auf ihm ab. Welche Kreispunkte könnten wichtig sein? In unserem Fall wohl nur die beiden Berührungspunkte der gesuchten Tangenten. Wir zeichnen sie ein, nennen sie X und Y , fügen die Radiusstrecken CX und CY hinzu und signalisieren durch eine Markierung die Gleichheit ihrer Längen; alle anderen Punkte des Kreises werden entfernt, und wir erhalten die Figur aus Bild 4.42. Sie sieht bereits etwas klarer aus als die Figur aus Bild 4.41 und leitet uns nun zielstrebig bei unserer Analyse.²⁵

Eine wesentliche Information ist in Bild 4.42 noch nicht dargestellt: Da t und u

²⁵ Man beachte aber auch die einschränkenden Bemerkungen hinsichtlich der Kreiselimination, die wir im Anschluss an die Diskussion von Aufgabe 310 im Rahmen der Längenrechnung machen.

den Kreis in X bzw. Y berühren sollen, erinnern wir uns an das Tangentenkriterium aus Satz 4.15; es sagt uns, dass t senkrecht auf \overline{CX} und u senkrecht auf \overline{CY} steht. Wegen $t \parallel u$ sind \overline{CX} und \overline{CY} also ihrerseits parallel zueinander und damit gleich (denn C liegt auf jeder dieser Geraden). Die Punkte X , C und Y sind also kollinear. Wir fügen die Markierungen der rechten Winkel hinzu (Bild 4.43). Da t und u durch ihre Parallelität eine gemeinsame Richtung haben und in unserem Bild geradezu zwischen den Strecken XY und AB zu vermitteln scheinen, liegt es nahe, auch den Punkt C mit seinem Pendant auf AB kommunizieren zu lassen; wir ergänzen also die Parallele v zu t durch C und deren Schnittpunkt mit \overline{AB} ; Hilfssatz 4.11 bzw. die Mittelpunktstreue der Parallelprojektion sagen uns, dass dieser Schnittpunkt seinerseits Mittelpunkt von AB ist; wir nennen ihn daher M .

Nun sind wir schließlich in der Lage, durch Umkehrung der Betrachtung die in Aufgabe 247 geforderte Konstruktion anzugeben. Sie ist erstaunlich einfach: Man konstruiere den Mittelpunkt M von AB , dann die Gerade v durch M und C , ferner die Parallele t zu v durch A und die Parallele u zu v durch B und schließlich das Lot von C auf v ; dessen Schnittpunkte X und Y mit t bzw. u sind die gesuchten Berührungspunkte und erlauben unmittelbar die Konstruktion des gesuchten Kreises.

Die Aufgabe 247 hat uns eine noch relativ bescheidene Gelegenheit zum *Eliminieren von Kreisen* geboten. Sicherlich hätte man die Aufgabe auch ohne Eliminierung des Kreises lösen können. Doch es gibt Situationen, in denen das Anwenden dieses heuristischen Prinzips fast zwingend erscheint; man betrachte etwa Aufgabe 278, deren vier Kreise dort gehörig Verwirrung zu stiften vermögen. Andererseits dürfen wir es auch nicht übertreiben; gerade im Rahmen der Geometrie *mit* Längenmaß sind Kreise oft wertvolle Signale zur Betrachtung bestimmter Sätze (etwa: Sehnensatz, Sekantensatz, Peripheriewinkelsatz) und sollten daher nicht vorschnell aus dem Weg geräumt werden. Innerhalb der abstrakten Geometrie *ohne* Längenmaß jedoch ist das *Eliminieren von Kreisen* fast immer eine günstige Maßnahme.

Weitere Aufgaben

Die folgenden Aufgaben können durchgängig mit den Methoden der abstrakten Geometrie gelöst werden. Als kleines Zugeständnis an die Schule unterstellen wir jedoch bei manchen Aufgaben stillschweigend gewisse Existenzaussagen, die erst in euklidischen Ebenen *mit Längenmaß* gesichert gelten. Dies betrifft etwa

die Existenz von Winkelhalbierenden sowie die Existenz des 2:1-Teilungspunkts einer Strecke.

AUFGABE 248 [Winkelhalbierende, Mittellotprinzip, Mittelparallelensatz]: In einem Dreieck ABC seien w_c eine Winkelhalbierende bei C , M der Mittelpunkt von AB und X der Fußpunkt der Höhe durch C . Ferner seien P und Q die Fußpunkte der Lote durch A bzw. B auf w_c . Zeige, dass die Punkte P, X, Q, M dann auf demselben Kreis liegen.

Hinweis: Man verwende die Aussage von Aufgabe 244.

AUFGABE 249 [Mittelparallelen, Diagonalensatz]: Sei $ABCD$ ein echtes Viereck, in dem die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der Seiten AB, BC, CD, DA und die Mittelpunkte M_5 und M_6 der Diagonalen AC bzw. BD sechs verschiedene Punkte sind. Dann gehen $\overline{M_1M_3}, \overline{M_2M_4}$ und $\overline{M_5M_6}$ durch einen gemeinsamen Punkt.

AUFGABE 250 [Mittelparallelen, Thales]: Die Kreise k und l mit den Mittelpunkten K bzw. L schneiden einander in zwei Punkten A und B . Die Gerade \overline{AK} schneidet k in einem weiteren Punkt C , und die Gerade \overline{AL} schneidet den Kreis l in einem weiteren Punkt D . Man zeige, dass die Geraden \overline{CD} und \overline{KL} parallel sind und dass B auf der Geraden \overline{CD} liegt.

AUFGABE 251 [Mittelparallelen, Diagonalensatz]: Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm. Die Mittelpunkte von BC bzw. DA bezeichnen wir mit M bzw. N . Dann ist auch $AMCN$ ein Parallelogramm.

AUFGABE 252 [Diagonalensatz]: In einem Kreis mit dem Mittelpunkt M seien A und C die Endpunkte eines Durchmessers. Durch A und durch C seien zwei Geraden gezogen, die zueinander parallel sind und die den Kreis in B bzw. D schneiden. Dann geht die Gerade \overline{BD} stets durch den Mittelpunkt M dieses Kreises.

AUFGABE 253 [Thales, Tangentenkriterium, Mittelparallelensatz]: Seien ACB ein rechtwinkliges Dreieck und M der Mittelpunkt von BC . Der zweite Schnittpunkt des Kreises $k(M, C)$ mit \overline{CA} heiße X , und die Tangente an den Kreis $k(M, C)$ im Punkt X schneide \overline{AB} in Y . Beweise die Parallelität von \overline{YM} und \overline{AC} .

AUFGABE 254 [Thales]: Von einem schiefen Drachen $ABCD$ mit Umkreis sind nur die Punkte A, B und C bekannt. Der Punkt D ist zu rekonstruieren.

AUFGABE 255 [Diagonalensatz, Thales, Umkreis-Höhen-Satz]: Gegeben sei ein echtes, nicht-rechtwinkliges Dreieck ABC . Der Umkreismittelpunkt heiße U , der Höhenschnittpunkt heiße H , und M sei der Mittelpunkt der Seite CA . Die Gerade \overline{UB} schneide den Umkreis außer in B noch im Punkt D . Dann gilt:

- a) Die Geraden \overline{CH} und \overline{AD} sind parallel.
- b) Die Punkte D, M und H liegen auf derselben Geraden.

AUFGABE 256 [Diagonalensatz]: Gegeben seien zwei Geraden g und h , die einander im Punkte S schneiden. Um S als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen; er schneide g in A und B sowie h in C und D . Dann gilt: Die Strecken AC und BD sind gleich lang, und \overline{AC} und \overline{BD} sind parallel.

AUFGABE 257 [Thales]: Es sei AB ein Durchmesser eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M . Ferner seien X ein weiterer Punkt von k und Y ein Schnittpunkt des Mittellots von AX mit k . Die zu \overline{XY} parallele Gerade durch M schneide die Gerade \overline{BX} in Z . Dann ist XZ genauso lang wie der Radius von k .

AUFGABE 258 [Thales, Sehnenregel]: Es seien k ein Kreis und X ein beliebiger Punkt. Jede Gerade durch X , die k schneidet, bestimmt eine Sehne von k . Beweise, dass die Mittelpunkte all dieser Sehnen auf demselben Kreis liegen.

AUFGABE 259 [Mittellotprinzip, Satz 4.30]: Sei ABC ein echtes Dreieck, und sei w eine Winkelhalbierende bei C , die \overline{AB} in einem Punkt X schneidet. Dann gilt:

$$ABC \text{ ist gleichschenkelig} \iff X \text{ ist der Mittelpunkt von } AB.$$

Hinweis: Man beweise zunächst die Vorwärtsrichtung und variiere für die Rückwärtsrichtung die Konfiguration.

AUFGABE 260 [Diagonalensatz, Mittellotprinzip]: Wir betrachten ein Parallelogramm $ABCD$. Dann gilt:

$$ABCD \text{ ist eine Raute} \iff \overline{AC} \text{ ist eine Winkelhalbierende von } \overline{AB}, \overline{AD}.$$

Hinweis: Man benutze die Aussage von Aufgabe 259.

AUFGABE 261 [Grundtatsache 4.14]: Sei $ABCD$ ein Trapez. Dann gilt:

$$|BC| = |DA| \implies ABCD \text{ ist ein symmetrisches Trapez oder eine Raute.}$$

Hinweis: Der Trick besteht darin, zunächst einzusehen, dass es bei erfüllter Prämisse jedenfalls zwei Punkte A' und A'' gibt derart, dass $A'BCD$ ein symmetrisches Trapez ist und $A''BCD$ eine Raute. Im Fall $A' = A''$ ist $ABCD$ ein Quadrat; andernfalls sind A' und A'' zwei verschiedene Schnittpunkte von \overline{AB} und $k(D, |BC|)$. Nach Voraussetzung ist A ein weiterer solcher Schnittpunkt und daher nach Grundtatsache 4.14 mit einem der Punkte A' bzw. A'' identisch.

AUFGABE 262 [Höhenschnittpunkt]: Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei H der Fußpunkt der auf \overline{AB} senkrechten Höhe. Ferner sei X ein beliebiger Punkt auf \overline{HC} , und Q sei der Schnittpunkt von \overline{AB} mit derjenigen Geraden, die durch X geht und parallel zu \overline{BC} ist. Dann gilt: $\overline{AX} \perp \overline{CQ}$.

Hinweis: Man betrachte das Dreieck AQC .

AUFGABE 263 [Tangentenkriterium, Winkelhalbierende als Ortslinie (4.29) und Satz 4.30]: Seien k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und $ABCD$ ein Trapez derart, dass jede Seitenlinie des Trapezes eine Tangente an k ist. Dann gilt $\overline{BM} \perp \overline{CM}$.

AUFGABE 264 [Winkelhalbierende als Ortslinie, Mittellotprinzip]: Gegeben ist ein echtes Dreieck ABC , und gesucht sind Punkte X mit folgender Eigenschaft: X ist von \overline{BC} und \overline{AB} gleich weit entfernt, und ebenso ist X von den Punkten A und B gleich weit entfernt. Zeige, wie man alle Punkte X mit dieser Eigenschaft finden kann, und untersuche, ob es stets mindestens einen solchen Punkt X gibt.

AUFGABE 265 [$D \cap T = P$, Diagonalensatz]: Es sei $ABCD$ ein Rechteck; und der Mittelpunkt der Diagonale AC sei M . Eine Gerade ($\neq \overline{AC}$) durch M schneide \overline{AB} in E und \overline{CD} in F . Dann sind die Dreiecke AEM und CFM kongruent.

AUFGABE 266 [$D \cap T = P$, Diagonalensatz]: Gegeben sei ein echtes Dreieck ABC . Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt M der Seite BC . Dann haben die Punkte B und C den gleichen Abstand von g .

AUFGABE 267 [Haus der Vierecke]: Mit den für das *Haus der Vierecke* vereinbarten Bezeichnungen gilt die Gleichung $sD \cap T = Ra$. Diese kleine Ergänzung zum *Haus der Vierecke* ist durch eine schlichte Mengenüberlegung beweisbar.

AUFGABE 268 [Thales, Umkreis-Höhen-Satz]: Das echte Dreieck ABC sei weder gleichschenkelig noch rechtwinklig. Sein Höhenschnittpunkt sei mit H bezeichnet, sein Umkreismittelpunkt mit U . Der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden \overline{CH} mit dem Umkreis $k(ABC)$ heiße F ; den von C verschiedenen Schnittpunkt der Geraden \overline{CU} mit $k(ABC)$ nennen wir G . Dann ist $AGBH$ ein Parallelogramm, und $AGFB$ ist ein symmetrisches Trapez.

AUFGABE 269 [Feuerbachkreis, Thales, Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz]: In einem echten Dreieck ABC mit den Höhenfußpunkten D, E, F sind die drei Höhenlinien und die drei Seitenlinien des Dreiecks ABC allesamt Winkelhalbierende im Dreieck DEF , sofern dieses echt ist. *Hinweis*: Der Satz des Thales und das Mittellotprinzip zeigen, dass das Mittellot zweier Höhenfußpunkte, falls diese überhaupt verschieden sind, durch den Mittelpunkt der dritten Seite von ABC geht.

AUFGABE 270 [Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz]: Es seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte eines Kreises, und es gelte: $|BA| = |BC|$. Es ist zu zeigen, dass \overline{BD} eine Winkelhalbierende von ADC bei D ist.

AUFGABE 271 [Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz]: Auf einem Kreis k liegen (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) die Punkte A, B, C und D . Ein weiterer Punkt X liege auf \overline{AD} , und die drei Strecken DB, DX und DC seien von gleicher Länge. Dann sind die Geraden $\overline{AX}, \overline{BX}$ und \overline{CX} allesamt Winkelhalbierende im Dreieck ABC . *Hinweis*: Man beachte die Aussagen von Aufgabe 272.

AUFGABE 272 [Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz, Zwei-Kreise-Satz]: Wir betrachten ein echtes Dreieck ABC mit dem Umkreis k . Die Gerade w sei eine Winkelhalbierende bei A , und v sei eine Winkelhalbierende bei C , die w im Punkte X schneidet. D sei der zweite Schnittpunkt von w und k ; entsprechend sei E der zweite Schnittpunkt von v und k . Zu beweisen sind nun folgende Aussagen:

- a) Die Gerade \overline{DE} ist eine „doppelte“ Winkelhalbierende: zum einen bei E im Dreieck BEC , zum anderen bei D im Dreieck ADB .
- b) Die Punkte B und X liegen spiegelbildlich zur Geraden \overline{DE} .
- c) Der Kreis l um D durch X geht durch die Punkte B und C .
- d) Ist Y der zweite Schnittpunkt von l und w , so sind auch die Geraden \overline{YB} und \overline{YC} Winkelhalbierende im Dreieck ABC , und XY ist ein Durchmesser von l .
- e) Der Umkreis von DEX hat denselben Radius wie k .

AUFGABE 273 [Umkreis-Höhen-Satz, Mittelparallelen]: In jedem Dreieck ist für jede seiner Ecken der Abstand des Höhenschnittpunktes zu dieser Ecke doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes von derjenigen Seite, die der betrachteten Ecke gegenüberliegt.²⁶

AUFGABE 274 [Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz]: In einem symmetrischen Trapez $ABCD$ mit dem Umkreismittelpunkt M und dem Diagonalschnittpunkt S liegt M auf dem Umkreis von ADS (und entsprechend auch auf dem Umkreis von BCS). *Hinweis:* Im Falle $S \neq M$ fasse man \overline{SM} als Winkelhalbierende von ASD bei S auf.

AUFGABE 275 [Tangentenkriterium, Satz 4.75]: In einem Kreis k betrachten wir zwei verschiedene Durchmesser. Durch jeden der vier Endpunkte beider Durchmesser sei die jeweilige Tangente an k gelegt. Dann haben diese Tangenten genau vier Schnittpunkte, die eine Raute bilden.

AUFGABE 276 [Zwei-Kreise-Satz]: Zwei gleich große Kreise k und l schneiden einander in zwei Punkten A und B . Eine Gerade durch B schneidet den Kreis k zusätzlich in K und den Kreis l zusätzlich in L . Zeige, dass die beiden Sehnen AK und AL gleich lang sind.

AUFGABE 277 [Zwei-Kreise-Satz]: Sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M , und seien A, B zwei verschiedene Punkte auf k . Ferner sei $Q \in k$ mit $Q \neq A, B$ gegeben. Durch die Punkte A, M und Q verlaufe der Kreis l , der den Kreis k außer in A noch in C schneidet. Dann sind die Strecken QB und QC gleich lang.

²⁶ Die Formulierung „doppelt so groß“ klingt nach Längenmaß, doch kann sie leicht auch in der abstrakten Geometrie formalisiert werden. Vgl. Satz 4.80 der Längenrechnung.

AUFGABE 278 [Eliminieren von Kreisen]: Beweise den *Satz von Johnson*: Wenn drei gleich große Kreise durch einen Punkt gehen, dann ist derjenige Kreis, der durch die drei anderen Schnittpunkte der Kreise geht, genauso groß.

Hinweis: Wir bezeichnen die drei Kreise mit j, k, l , ihre Mittelpunkte mit J, K, L und ihren gemeinsamen Punkt mit S . Die anderen Schnittpunkte von j, k bzw. j, l bzw. k, l werden mit X bzw. Y bzw. Z bezeichnet. Außerdem konstruieren wir denjenigen Punkt M , für den $JXMY$ eine Raute ist. Nun wende man die Technik des *Eliminierens von Kreisen* an und überzeuge sich in der kreisfreien Konfiguration davon, dass auch $KXMZ$ und $LYMZ$ Rauten sind. Daraus ergibt sich dann die Behauptung des Satzes.

AUFGABE 279 [Eliminieren von Kreisen]: Gegeben sind drei verschiedene, nicht auf derselben Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, dass sich diese Kreise paarweise berühren.

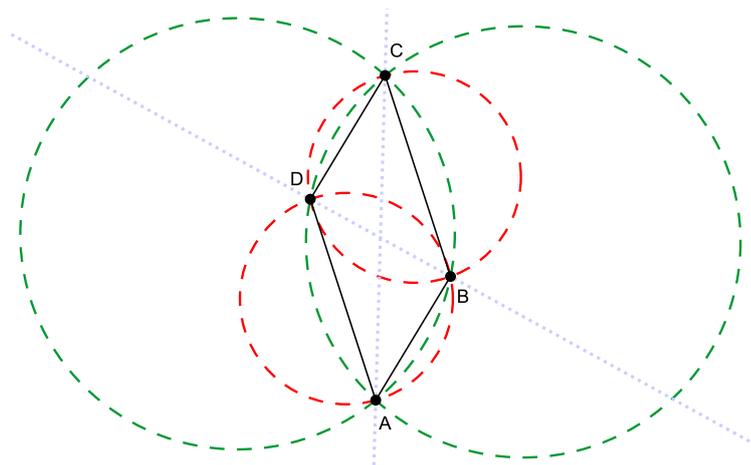


BILD 4.44: Zu Aufgabe 280

AUFGABE 280 [Zwei-Kreise-Satz]: Sei $ABCD$ ein echtes Viereck derart, dass je drei seiner Ecken ein *echtes* Dreieck bilden. Dann gilt: Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, so sind die Umkreise $k(ABC)$ und $k(ADC)$ Spiegelbilder voneinander an \overline{AC} ; und $k(BAD)$ und $k(BCD)$ sind Spiegelbilder voneinander an \overline{BD} (Bild 4.44).²⁷

Hinweis: Man betrachte im Parallelogramm $ABCD$ das Mittellot m von CD sowie den Bildpunkt A' von A bei der Spiegelung an m und zeige dann, dass – abgesehen vom Spezialfall $A' = B$, der gesondert behandelt werden muss – $A'BC$ ein gleichschenkliges Dreieck ist. Auf dieses gleichschenklige Dreieck und den Punkt A wende man dann den Zwei-Kreise-Satz an.

²⁷ Die Umkehrung dieser Implikation ist ebenfalls wahr. Allerdings ist dem Verfasser ein Beweis innerhalb der *abstrakten* Geometrie bislang nicht gelungen; wohl aber in der reellen Geometrie mit Winkelmaß: siehe Aufgabe 404.

Im Hauptfall $A \neq A'$ ist $AA'CD$ außerdem ein symmetrisches Trapez, das einen Umkreis besitzt (Satz 4.20), der natürlich identisch ist mit $k(AA'C)$. Weil D also auf $k(AA'C)$ liegt, gewinnt man durch den Übergang mittels Spiegelung an \overline{AC} die Einsicht, dass das Bild von D bei der Spiegelung an \overline{AC} auf $k(ABC)$ liegt. Daraus folgt leicht die volle Behauptung über die Spiegelung der Umkreise an \overline{AC} . Die Behauptung über die Spiegelung der Umkreise an \overline{BD} ergibt sich analog.

Zu den Grundlagen der Längenrechnung bis zum Strahlensatz

Die Einführung des Längenmaßes erfolgt in der Schule meist relativ geräuschlos. Das Konzept des Abstands und der Länge erscheint eben sehr natürlich und anschaulich. Dies gilt auch für die entsprechenden Axiome, die sich vollständig auf dem üblichen Evidenzniveau befinden: So grundlegend die *Streckenabtragung* für die Etablierung *reeller* Geometrie ist, so unspektakulär erscheint sie einem Schüler, der an Messen und Abmessen gewöhnt ist.

Die *Dreiecksungleichung* ist für Schüler ebenso wenig aufregend wie die Streckenabtragung; die allgemeine Erfahrung, dass Umwege länger sind als direkte Wege, sorgt hier für Akzeptanz. Bei unseren Aufgaben wird sie allerdings nur relativ selten explizit benutzt; die Aufgaben 284 bis 288 bieten immerhin einige solche Gelegenheiten.

Die *Dreiecksgleichung* entspricht in ähnlicher Weise der Alltagserfahrung, zwei oder mehrere Strecken entlang einer geraden Linie aneinanderzulegen und ihre Längen zu addieren; zu einem Gegenstand bewusster Auseinandersetzung wird sie im Allgemeinen erst dann, wenn in einer abstrakt dargelegten Situation Zweifel über die genaue Anordnung von gewissen Punkten entlang einer Geraden herrscht; wenn also nicht klar ist, welcher Punkt zwischen welchen anderen liegt. Wenn wir also die bewusste Konfrontation mit der Dreiecksgleichung suchen, so empfehlen sich Aufgaben, bei denen sich diese Unklarheit als Thema aufdrängt; die Aufgabe 281 gehört zu dieser Kategorie, aber auch die Aufgaben 289, 290 und 291. Auch bei der Umkehrung des Strahlensatzes ist die Anordnung von Belang; unsere Diskussion der Aufgabe 282 wird dies illustrieren. In anderen Aufgaben, etwa 292, 293, 294 und 295, tritt die Dreiecksgleichung eher am Rande auf.

Von Belang ist die Dreiecksgleichung auch immer dann, wenn die Normalität eines Vierecks eine Rolle spielt; in der Tat muss im Unterricht wohl eine be-

wusste Entscheidung herbeigeführt werden (zumindest auf Lehrerseite), ob überhaupt nur normale Vierecke in Frage kommen, ob also der Vierecksbegriff per Definition die Normalität enthalten soll. Ist dies (wie allgemein üblich) der Fall, so wird die *zwischen*-Eigenschaft des Diagonalschnittpunkts zum selbstverständlichen Standard. Viele schulübliche Aussagen, insbesondere über Winkel, sind ja in der Tat nur wahr, wenn die Normalität der Vierecke stillschweigend unterstellt wird (etwa bei der 360° -Winkelsumme im Viereck). Wir bleiben im Folgenden allerdings auf dem Standpunkt, dass die Normalität nicht automatisch vorausgesetzt ist.

Im Gefolge des Längenmaßes betritt üblicherweise auch das Flächenmaß die Bühne des Mathematikunterrichts. Auch wenn wir in unserem Theoriegebäude wegen der erheblichen Schwierigkeiten auf Flächenbetrachtungen verzichten, sind wir uns natürlich darüber im Klaren, dass viele Aufgaben auf Flächen Bezug nehmen (auch in Wettbewerben). Daher sind auch in unserem Katalog einige Flächenaufgaben vertreten. Wir verfahren dabei nach der Devise, dass wir die üblichen Flächenformeln zur Kenntnis nehmen, ohne dabei eine Garantie abzugeben, dass durch diese Formeln etwas in vernünftiger Weise gemessen wird. Wenn also zu zeigen ist, dass das Rechteck $ABCD$ eine Fläche der Größe 10 hat, so läuft dies eben auf den Nachweis von $|AB| \cdot |BC| = 10$ hinaus; ob dieses Produkt irgendetwas *bedeutet*, bleibt für uns außen vor. Sicherheitshalber setzen wir bei Flächenaufgaben über Vierecke stets die Normalität der Vierecke explizit voraus, um nicht auf Konfrontationskurs mit der Anschauung zu gehen.

Wir beginnen unser Aufgabenstudium mit einer Aufgabe zur Dreiecksgleichung:

AUFGABE 281:

Von fünf verschiedenen Punkten A, B, C, D, E wissen wir: Vier (aber nicht alle) dieser Punkte liegen auf derselben Geraden, und es gelte:

$$|CE| = 2, |AB| = 2, |CD| = 6, |AE| = 7, |BC| = \sqrt{94}, |AD| < 10, |BE| = 12.$$

Man bestimme alle möglichen Anordnungen dieser fünf Punkte.

Es ist naheliegend, die vorliegenden Informationen über die Streckenlängen zunächst daraufhin zu überprüfen, ob es unter den fünf Punkten drei solche gibt, über deren Abstände zueinander wir vollständig Bescheid wissen. Es stellt sich heraus, dass es genau zwei derartige Dreiermengen gibt: $\{A, B, E\}$ und $\{B, C, E\}$. Die Dreiecksgleichung ist für die jeweiligen Abstände in keinem

der beiden Fälle erfüllt, und beide Dreiermengen bestehen demnach aus nicht-kollinearen Punkten. Der „Abweichter“ muss also in beiden Dreiermengen enthalten sein; es handelt sich offensichtlich um B .

Für die vier verbleibenden, kollinearen Punkte sind alle Möglichkeiten der Anordnung zu ermitteln, und als Grundlage stehen vor allem die B -freien Informationen zur Verfügung:

$$|CE| = 2, \quad |CD| = 6, \quad |AE| = 7, \quad |AD| < 10.$$

Wir organisieren unsere Untersuchung nach den möglichen Anordnungen der drei Punkte A, C, E : Die Lage $\overset{C}{\bullet} - \overset{A}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$ ist nicht möglich, denn die Dreiecksungleichung $2 = |CE| = |CA| + |AE| = |CA| + 7$ enthält einen Widerspruch.

Wir betrachten nun den Fall $\overset{A}{\bullet} - \overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$. Wegen $|CE| = 2$ und $|CD| = 6$ ist $\overset{C}{\bullet} - \overset{D}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$ dann ausgeschlossen, aber auch $\overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$ ist dann nicht denkbar, denn die Verbindung von $\overset{A}{\bullet} - \overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$ und $\overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$ führt zu der Situation von Bild 4.45 a) mit $|AD| = 11$,²⁸ im Widerspruch zu $|AD| < 10$. Es bleibt dann also nur $\overset{D}{\bullet} - \overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$, und in Verbindung mit $\overset{A}{\bullet} - \overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$ und den vorhandenen Längenvorgaben ergibt sich die Situation aus Bild 4.45 b), die keinen Widerspruch verursacht.

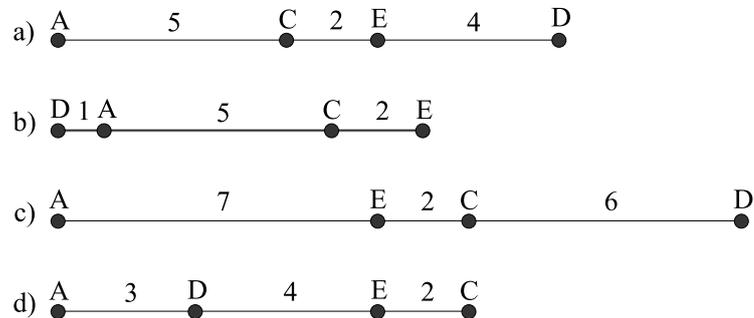


BILD 4.45: Verschiedene Anordnungen von Punkten bei Aufgabe 281

Schließlich ist der Fall $\overset{A}{\bullet} - \overset{E}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$ zu untersuchen. Der Unterfall $\overset{C}{\bullet} - \overset{D}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$ ist wie im vorherigen Fall ausgeschlossen, und der zweite Unterfall $\overset{E}{\bullet} - \overset{C}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$ führt zu der Situation aus Bild 4.45 c) und damit wiederum zu einem Widerspruch zu $|AD| < 10$. Es bleibt in diesem Fall also nur die Lösung $\overset{D}{\bullet} - \overset{E}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$ aus Bild 4.45 d).

²⁸ An dieser Stelle – und ebenso im nächsten Absatz – argumentieren wir unter Berufung auf unsere Anschauung von der *zwischen*-Relation. Ein entsprechender Satz ist in unserem Theoriegebäude nicht enthalten. Er hieße etwa: Aus $\overset{A}{\bullet} - \overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$ und $\overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$ folgt $\overset{A}{\bullet} - \overset{E}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$. Er wäre wohl beweisbar; wir belassen es hier aber bei dem Hinweis auf die Anschauung.

Hier entsteht aber ein Widerspruch, wenn wir schließlich wieder den Punkt B in die Betrachtung einbeziehen, denn im Dreieck AEB mit den Seitenlängen 7, 12 und 2 sind nicht alle Dreiecksungleichungen erfüllt.

Dass die einzig verbleibende Anordnung der Punkte D, A, C, E aus Bild 4.45 b) auch hinsichtlich des Punktes B widerspruchsfrei bleibt, lässt sich nur mit stärkeren Instrumenten der Längenrechnung zeigen, etwa mit Satz 4.73 und der Vier-Punkte-Formel.

Es ist bemerkenswert, dass unsere theoretischen Instrumente bei der Lösung der eigentlich schlichten Aufgabe 281 bereits überfordert sind. Schon der scheinbar harmlose Schluss von $\overset{A}{\bullet} - \overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$ und $\overset{C}{\bullet} - \overset{E}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$ auf $\overset{A}{\bullet} - \overset{E}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$ stützt sich im Wesentlichen auf die Anschauung. Die theoretische Analyse von *zwischen*-Beziehungen wird eben schnell schwierig, sobald mehr als drei Punkte im Spiel sind. In der folgenden Aufgabe kommen wir glücklicherweise mit nur jeweils drei kollinearen Punkten aus, so dass wir uns auf sicherem theoretischen Fundament befinden. Außerdem ist die Aufgabe durch ihren historischen Aspekt interessant:

AUFGABE 282:

Die Konstruktion einer Geraden, die durch einen vorgegebenen Punkt verläuft und einen gegebenen Kreis berührt, gehört zu den geometrischen Grundaufgaben. Eine Lösung ist wohlbekannt: Ist k der fragliche Kreis mit Mittelpunkt M und A ein Punkt außerhalb von k , so zeichne man den Kreis l mit dem Durchmesser AM und wähle einen Schnittpunkt S von k und l aus; der Satz des Thales garantiert dann im Zusammenspiel mit dem Tangentenkriterium, dass \overline{AS} eine Tangente an k ist.

Im dritten Buch seiner *Elemente* schlägt Euklid in § 17 eine andere Konstruktion vor (Bild 4.46, links): Man konstruiere den Schnittpunkt X von k und \overline{AM} , der zwischen A und M liegt, und wähle einen Schnittpunkt Y von k (M, A) und der Senkrechten auf \overline{AM} durch X ; schließlich konstruiere man den Schnittpunkt B von \overline{YM} und A , der zwischen Y und M liegt. Dann ist \overline{AB} eine Tangente an k .

Man zeige, dass diese Konstruktion korrekt ist.²⁹

²⁹ Es könnte hier zusätzlich der Nachweis verlangt werden, dass die Konstruktion überhaupt stets durchführbar ist, solange A tatsächlich außerhalb von k liegt; dass also die Schnittpunkte X, Y, B stets existieren. Diese Existenzen sind zwar vollkommen evident, doch ist ihr Beweis nicht trivial. Die Existenz von X und B ist kein großes Problem, denn schon die Streckenabtragung sorgt dafür, dass ein Kreis und eine Gerade durch dessen Mittelpunkt einander stets schneiden. Doch im Falle von Y ist ein Beweis wohl nur mit dem Satz des Pythagoras möglich – und natürlich mit Streckenabtragung.

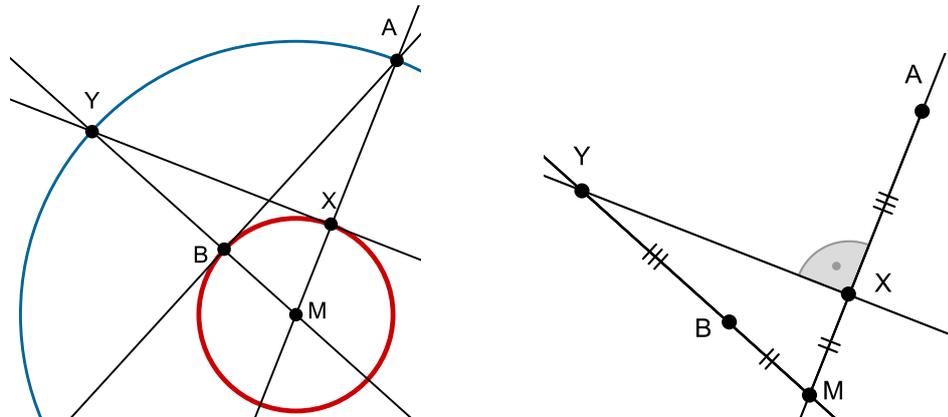


BILD 4.46: Zur Euklidischen Tangentenkonstruktion (Aufgabe 282)

Auch bei dieser Aufgabe sorgt das *Eliminieren von Kreisen* für bessere Übersicht (Bild 4.46, rechts): Weil einerseits A und Y und andererseits X und Y auf demselben Kreis um M liegen, gelten natürlich die Gleichungen $|AM| = |YM|$ und $|XM| = |BM|$. Außerdem – und das ist entscheidend! – gelten nach Konstruktion die Beziehungen $\overset{M}{\bullet} - \overset{X}{\bullet} - \overset{A}{\bullet}$ und $\overset{M}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{Y}{\bullet}$, so dass insgesamt die Voraussetzungen für die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes erfüllt sind (Satz 4.56); wir erhalten die Parallelität von \overline{AY} und \overline{XB} . Die Mittellote von AY und XB sind daher ihrerseits parallel (Verträglichkeit von \perp und \parallel) und gehen nach der Sehnenregel beide durch M ; also sind sie identisch. Das gemeinsame Mittellot dieser Strecken ist nach Satz und Definition 4.28 eine Winkelhalbierende bzw. Symmetrieachse von \overline{MA} und \overline{MB} .

Nach Konstruktion gilt $\overline{AX} \perp \overline{YX}$, und wegen der Senkrechttreue der Geraden Spiegelung überträgt sich diese Relation auf die entsprechenden Bildgeraden; wir erhalten somit $\overline{YB} \perp \overline{AB}$. Dies bedeutet nach dem Tangentenkriterium, dass \overline{AB} eine Tangente an den Kreis $k(M, X) = k$ ist; und da diese Tangente zusätzlich durch A geht, ist die Korrektheit der Konstruktion bewiesen.

Man beachte, dass man bei der Konstruktion von X und B auch jeweils den „anderen“ Schnittpunkt von Kreis und Gerade hätte wählen können – aber dann wirklich in *beiden* Fällen, denn nur so bleiben die Voraussetzungen für die Umkehrung des Strahlensatzes gewahrt. Bei der Konstruktion von Y hingegen hat man völlig freie Wahl.

Als dritte Aufgabe dieses Abschnitts betrachten wir eine Aufgabe, die neben der „Vorwärtsrichtung“ des Strahlensatzes auch eine von dessen Folgerungen ins Blickfeld rückt, nämlich den Winkelhalbierendensatz des Apollonius.

AUFGABE 283:

Es sei $ABCD$ ein normales Viereck. Der Punkt X liege echt zwischen A und B derart, dass $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AD|}{|DC|}$ gilt. Außerdem gelte $\overline{XD} \parallel \overline{BC}$. Dann ist \overline{DX} die innere Winkelhalbierende von ADC bei D .

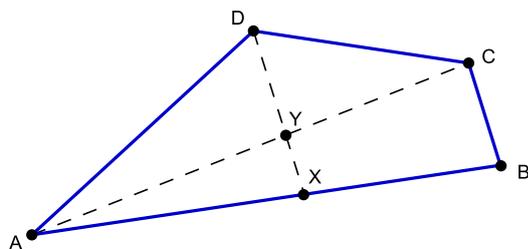


BILD 4.47: Zu Aufgabe 283

Die Quotientengleichung in der Voraussetzung der Aufgabe erinnert an die Gleichung aus dem Winkelhalbierendensatz des Apollonius. Allerdings gibt es kein Dreieck, in dem alle vier fraglichen Strecken auftreten würden. Es liegt daher nahe, die Strecken AX und XB auf \overline{AC} zu projizieren, um

eine entsprechende Quotientengleichung im Dreieck ACD zu erhalten; da trifft es sich gut, dass \overline{XD} und \overline{BC} parallel sind.

Den Schnittpunkt von \overline{XD} und \overline{AC} nennen wir Y (Bild 4.47), und indem wir zunächst den Strahlensatz und dann die vorausgesetzte Quotientengleichung aktivieren, bekommen wir die Gleichungskette

$$\frac{|AY|}{|YC|} = \frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AD|}{|DC|}. \quad (4.74)$$

Wegen $\overset{A}{\bullet} \overset{X}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$ und der Zwischentreue der Parallelprojektion gilt entsprechend $\overset{A}{\bullet} \overset{Y}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$, und dies bedeutet im Zusammenspiel mit (4.74), dass \overline{DY} die innere Winkelhalbierende bei D im Dreieck ADC ist. Wegen $\overline{DX} = \overline{DY}$ ist der geforderte Beweis damit erbracht.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 284 [Dreiecksungleichung]: Wenn es ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c gibt, dann gibt es auch eines mit den Seitenlängen $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}$.³⁰ Gilt auch die Umkehrung?

AUFGABE 285 [Dreiecksungleichung]: Die Summe der Diagonallängen eines normalen Vierecks ist stets kleiner als der Umfang, aber größer als der halbe Umfang dieses Vierecks.

³⁰ Man darf $a \leq b \leq c$ annehmen, ohne die Allgemeinheit des Beweises zu beeinträchtigen. Außerdem wird hier stillschweigend vorweggenommen, dass die Gültigkeit der drei Dreiecksungleichungen hinreichend für die Existenz eines entsprechenden Dreiecks ist; einen Beweis dafür gibt es im Theorieteil erst nach dem Satz des Pythagoras in Satz 4.73.

AUFGABE 286 [Dreiecksungleichung]: Die Summe der Diagonallängen eines Fünfecks ist nie größer als der doppelte Umfang dieses Fünfecks.

AUFGABE 287 [Dreiecksungleichung]: Wie viele verschiedene Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen haben den Umfang 50?

AUFGABE 288 [Dreiecksungleichung, Lot-Ungleichung]: Die Summe der drei Höhenlängen in einem echten Dreieck ist stets mindestens sechsmal so groß wie der Inkreisradius des Dreiecks.³¹

AUFGABE 289 [Dreiecksgleichung]: Auf einer Geraden sollen sechs Punkte A, B, C, D, E und F so angeordnet werden, dass $|AB| = 10$, $|BC| = 6$, $|BE| = 11$, $|CD| = 2$, $|DF| = 3$, $|AF| = 3$ und $|DE| = 7$ gilt. Untersuche, welche Möglichkeiten der Anordnung bestehen.

AUFGABE 290 [Dreiecksgleichung und -ungleichung]: Wir interessieren uns dafür, welche Vierecke $ABCD$ die Eigenschaften

$$a = 6, \quad d = 2, \quad e + f = 11 \tag{4.75}$$

erfüllen.

- a) Finde für *kollineare* Vierecke $ABCD$ alle Möglichkeiten der Anordnung derart, dass die Bedingungen aus (4.75) erfüllt sind. Bestimme unter diesen Vierecken den größten Wert g und den kleinsten Wert k , den der Umfang $u := a + b + c + d$ haben kann.
- b) Beweise, dass auch alle *nicht-kollinearen* Vierecke $ABCD$, die (4.75) erfüllen, mit ihrem Umfang u den Wert g nicht übertreffen.
- c) Zeige an einem Beispiel, dass es jedoch durchaus ein nicht-kollineares Viereck $ABCD$ gibt, das (4.75) erfüllt und dessen Umfang u *kleiner* als k ist.

AUFGABE 291 [Dreiecksgleichung]: Die Fläche eines normalen Vierecks, in dem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ist das halbe Produkt der beiden Diagonallängen (dies gilt also insbesondere für symmetrische Drachen und Rauten).

AUFGABE 292 [Mittellotprinzip]: Gegeben seien eine Gerade g , ein Punkt $A \in g$ sowie ein weiterer Punkt $B \notin g$ mit $|AB| < 9$. Man konstruiere einen Punkt X auf g mit der Eigenschaft $|AX| + |BX| = 9$.

AUFGABE 293 [Mittellotprinzip]: Gegeben seien zwei Geraden g und h mit dem Schnittpunkt A . Konstruiere drei Punkte B, C, D derart, dass $ABCD$ ein symmetrischer Drachen ist und die Gleichungen $|AC| = 7$ und $|AB| + |BC| = 10$ gelten.

³¹ Man beachte auch die verschärfte Aussage von Aufgabe 309, die mit stärkeren Instrumenten bewiesen werden muss.

AUFGABE 294 [Dreiecksgleichung]: Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Konstruiere die Menge aller Punkte X , für die die Summe der Abstände von X zu den vier Seitenlinien von $ABCD$ den Wert 4 hat.

AUFGABE 295 [Mittellotprinzip]: Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC . Konstruiere die Menge aller Punkte X , die die Eigenschaften $|XA| = |XB|$ und $|XB| + |XC| = |AB| + |AC|$ erfüllen.

AUFGABE 296 [Mittelparallelen, Sehnenregel]: Die sechs (inneren) Drittelungspunkte der drei Seiten eines gegebenen Dreiecks (je zwei pro Seite) liegen auf demselben Kreis. Zeige, dass das Dreieck dann gleichseitig ist.

AUFGABE 297 [Grundtatsache 4.89]: Es sei $ABCDEFGHIJ$ ein regelmäßiges Zehneck. Es wird nun nach Mengen von echten Dreiecken gesucht, deren Ecken allesamt aus der Eckenmenge des Zehnecks stammen. Die Dreiecke der Menge sollen paarweise nicht-kongruent sein, und je zwei solche Dreiecke dürfen nicht dieselbe Eckenmenge besitzen – die Dreiecke ABC und BCA (die ja nicht kongruent sind) können beispielsweise nicht beide in einer solchen Menge enthalten sein. Wie viele Dreiecke kann eine solche Menge maximal enthalten?

AUFGABE 298 [Grundtatsache 4.89, Mittellotprinzip]: Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 5$. Wir betrachten die Diagonallinien in regelmäßigen n -Ecken und sagen, zwei solche Diagonallinien *gehört derselben Richtung an*, wenn sie parallel sind. Die *Richtungsanzahl* $R(n)$ gebe die (nur von n abhängige) Anzahl verschiedener Richtungen von Diagonallinien in einem regelmäßigen n -Eck an.

- a) Man bestimme die Zahlen $R(5)$, $R(7)$ und $R(8)$.
- b) Man entwickle eine allgemeine *Vermutung* zur Berechnung von $R(n)$ und überprüfe diese in den Fällen $n = 3, 4, 6, 9$.

AUFGABE 299 [Strahlensatz]: Das Dreieck ABC sei rechtwinklig, und es gelte $|AB| = 25$ und $|BC| = 20$. D sei ein Punkt zwischen B und C mit $|BD| = 15$. Schließlich sei E der Fußpunkt des Lotes von D auf \overline{AB} . Berechne den Umfang des Dreiecks BDE .

AUFGABE 300 [Strahlensatz]: Es sei $ABCD$ ein normales (schiefes) Trapez mit dem Diagonalenschnittpunkt S , und AB sei doppelt so lang wie CD . Die Parallele zu \overline{AB} durch S zerlegt das Trapez in zwei Teilflächen. Berechne das Verhältnis dieser Teilflächen.

AUFGABE 301 [Tangentenkriterium, Strahlensatz]: Das Dreieck ABC sei rechtwinklig, und X sei ein Punkt zwischen A und B derart, dass es einen Kreis k um X gibt, der \overline{AC} und \overline{BC} berührt. Zeige, dass dann für den Radius r von k die Gleichung $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt.

AUFGABE 302 [Strahlensatz]: In einem echten Dreieck ABC liege der Fußpunkt D der Höhe durch C zwischen A und B , und es gelte $|AD| = 9$ und $|DB| = 7$. Eine Parallele g zu \overline{CD} zerlege das Dreieck in zwei Teilflächen gleicher Größe. Es sei X der Schnittpunkt von g mit \overline{AB} . Wie lang ist die Strecke AX ?

AUFGABE 303 [Strahlensatz]: In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt von AB . Ferner seien E, F, G, H Punkte mit $\overset{A}{\bullet} \overset{E}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$, $\overset{A}{\bullet} \overset{F}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$, $\overset{B}{\bullet} \overset{G}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ und $\overset{A}{\bullet} \overset{H}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ derart, dass $EFGH$ ein Quadrat ist. Man ermittle alle Verhältnisse $\frac{|CM|}{|AB|}$, für die sich die Flächeninhalte von Dreieck ABC und Quadrat $EFGH$ wie 9 zu 4 verhalten.

AUFGABE 304 [Winkelhalbierende, Apollonius]: Sei $ABCD$ ein symmetrischer Drachen. Beweise folgende Aussagen:

- Es gibt genau einen Punkt M zwischen A und C (den „Inkreismittelpunkt“), der von allen Seitenlinien des Drachens den gleichen Abstand hat.
- Für diesen Punkt M gilt: $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AM|}{|CM|} \cdot \frac{|BM|}{|DM|}$.

AUFGABE 305 [Tangentenkriterium, Umkehrung des Strahlensatzes]: Die Kreise k und l berühren einander im Punkte B . Eine Gerade durch B schneide die Kreise k und l zusätzlich in den Punkten A bzw. C . Sowohl in A als auch in C werden die Tangenten an den jeweiligen Kreis gelegt. Dann sind diese Tangenten parallel.³²

AUFGABE 306 [Apollonius]: Untersuche, ob es ein Rechteck $ABCD$ gibt, in dem die innere Winkelhalbierende von ACB bei C die Strecke AB halbiert.

AUFGABE 307 [Strahlensatz]: Beweise den Satz über die *Trapez-Drachen-Verwandtschaft*: Sei $ABCD$ ein (schiefes) Trapez mit dem Diagonalschnittpunkt S , und T sei der Schnittpunkt von \overline{AD} und \overline{BC} . Dann sind $SCTD$ und $SBTA$ (schiefe) Drachen.

AUFGABE 308 [Ceva, Apollonius]: In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der Höhe durch A ; E sei der Mittelpunkt von AC , und F sei der Schnittpunkt von \overline{AB} mit einer Winkelhalbierenden bei C . Zeige: Wenn \overline{AD} , \overline{BE} und \overline{CF} einen Punkt gemeinsam haben, so ist das Dreieck ABC sogar gleichseitig.

³² Der hier anvisierte Beweis mit Benutzung des Strahlensatzes ist einigermaßen schlicht. Doch gibt es auch einen interessanten abstrakten Beweis: Seien M, L die Mittelpunkte von k bzw. l . Es geht dann wegen des Tangentenkriteriums um den Nachweis von $\overline{MA} \parallel \overline{LC}$. Dafür spiegeln wir M und L an \overline{AC} und erhalten die Bildpunkte M' und L' . Wenn wir von dem Sonderfall absehen, dass \overline{AC} durch einen Kreismittelpunkt geht (und damit dann durch beide), so sind $AMBM'$ und $BLCL'$ jeweils Rauten und damit Parallelogramme. Wegen der Geradentreue der Spiegelung sind M', B und L' kollinear, und daher gilt nun $\overline{MA} \parallel \overline{M'B} = \overline{BL'} \parallel \overline{LC}$.

Zum Satz des Pythagoras und zu weiteren Längenformeln

Die Längenrechnung ist charakterisiert durch zahlreiche Längenformeln. Sie ergeben sich alle direkt oder indirekt aus dem Satz des Pythagoras: die Höhenformel, die Seitenhalbierendenformel, die Vier-Punkte-Formel, der Sehnen-Sekanten-Satz etc. Die Bearbeitung entsprechender Aufgaben verlangt neben geometrischen Einsichten meist auch algebraische Fähigkeiten, und in der Tat liegt der didaktische Wert der Längenrechnung wohl auch darin, dass sie ein reichhaltiges Übungsfeld für die elementare Algebra bietet.

Die allmähliche Ablösung von rein geometrischen Betrachtungen und die Hinwendung zu algebraischen Aktivitäten wird besonders bei jenen Aufgaben deutlich, die nach einem Beweis einer metrischen Aussage verlangen. Die folgende Aufgabe ist ein Beispiel dafür:

AUFGABE 309:

Die Summe der drei Höhenlängen in einem echten Dreieck ist stets mindestens neunmal so groß wie der Inkreisradius des Dreiecks.

Wir verwenden die Standardbezeichnungen für die Größen des Dreiecks, beachten die Höhenformel sowie die Inkreisradiusformel und erkennen, dass wir die Ungleichung

$$\sqrt{\frac{F(a^2, b^2, c^2)}{4a^2}} + \sqrt{\frac{F(a^2, b^2, c^2)}{4b^2}} + \sqrt{\frac{F(a^2, b^2, c^2)}{4c^2}} \geq 9 \cdot \sqrt{\frac{F(a^2, b^2, c^2)}{4(a+b+c)^2}} \quad (4.76)$$

beweisen müssen. Schon jetzt ist die Aufgabe zu einer algebraischen Übung geworden; von geometrischen Objekten ist nichts mehr zu sehen. Es zahlt sich nun aus, dass wir sowohl die Höhen- als auch die Inkreisradiusformel mithilfe der Funktion F notiert haben, denn wir können in (4.76) die Wurzeln jeweils auf Zähler und Nenner verteilen und dann durch $\sqrt{F(a^2, b^2, c^2)}$ dividieren – einen Term, der gemäß Satz 4.73 sicherlich positiv ist. Indem wir außerdem die Wurzeln in den Nennern „ausrechnen“ und die Ungleichung mit 2 multiplizieren, erhalten wir die zu (4.76) äquivalente Ungleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9 \cdot \frac{1}{a+b+c}. \quad (4.77)$$

Wie aber sehen wir die Gültigkeit dieser Gleichung ein? Die *erste* Möglichkeit besteht darin, die Verwandtschaft der Terme in (4.77) mit verschiedenen Mittelwerten zu erkennen; um diese Verwandtschaft klar herauszuarbeiten, gehen

wir in (4.77) zum Kehrwert über, multiplizieren mit 3 und erhalten

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}. \quad (4.78)$$

Links steht also der harmonische Mittelwert von a, b, c ; rechts der wohlbekannte arithmetische; und die AM-HM-Ungleichung aus dem Satz über Mittelwert-Ungleichungen (Seite 44) bestätigt die Allgemeingültigkeit von (4.78).

Die *zweite* Möglichkeit, die Gültigkeit von (4.77) einzusehen, besteht natürlich darin, die Ungleichung ad hoc durch Umformungen zu beweisen und damit den Beweis der AM-HM-Ungleichung für den Fall dreier Terme nachzuliefern. Auf Seite 44 hatten wir darauf nämlich noch verzichtet. Wir multiplizieren daher die Gleichung (4.77) mit $(a + b + c)$, multiplizieren aus, subtrahieren 3 und gelangen zu

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 6. \quad (4.79)$$

Die Klammerung auf der linken Seite von (4.79) deutet den Fortgang der Argumentation an: Für jede positive Zahl x ist die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ äquivalent zu $(x - 1)^2 \geq 0$ und damit wahr. Die drei Klammerterme auf der linken Seite von (4.79) sind jeweils genau von dieser Struktur; jede Summe aus Bruch und Kehrwert ist mindestens 2, und damit ist die Summe der drei Klammerterme mindestens 6. Damit ist auch der *direkte* Beweis für (4.77) erbracht, und Aufgabe 309 ist gelöst.

Auch die nächste Aufgabe enthält ein markant algebraisches Element:

AUFGABE 310:

Es sei AB ein Durchmesser eines Kreises k . Es seien $C, D \in k$, und X sei ein Punkt mit $\overset{C}{\bullet} \overset{X}{\bullet} \overset{D}{\bullet}$. Ferner sei Y der Fußpunkt des Lotes von X auf \overline{AB} . Dann gilt

$$|AY| \cdot |YB| - |CX| \cdot |XD| = |XY|^2. \quad (4.80)$$

Zunächst mag die Gleichung (4.80) für Verwirrung sorgen. Doch sind alle vier Strecken, die auf der linken Seite der Gleichung auftreten, korrespondierende Abschnitte von Sehnen des Kreises k (Bild 4.48). Es liegt daher nahe, zweimal den Sehnen-Sekanten-Satz anzuwenden; einmal auf die Sehne AB , ein anderes Mal auf die Sehne CD . Wir bezeichnen den Mittelpunkt von k mit M und erhalten die Gleichungen

$$|AY| \cdot |YB| = \left| |AM|^2 - |YM|^2 \right| = |AM|^2 - |YM|^2 \quad (4.81)$$

sowie

$$|CX| \cdot |XD| = ||AM|^2 - |MX|^2| = |AM|^2 - |MX|^2, \quad (4.82)$$

wobei das Fortlassen der äußeren Betragstriche dadurch gerechtfertigt ist, dass X innerhalb des Kreises liegt; die formale Rechtsgrundlage ist hier die Verbindung von $\overset{C}{\bullet} \overset{X}{\bullet} \overset{D}{\bullet}$ und Hilfssatz 4.77. Indem wir Gleichung (4.82) von Gleichung (4.81) subtrahieren, erhalten wir

$$|AY| \cdot |YB| - |CX| \cdot |XD| = |MX|^2 - |YM|^2 = |XY|^2, \quad (4.83)$$

wobei sich das letzte Gleichheitszeichen aus dem Satz des Pythagoras ergibt, denn das Dreieck MXY ist rechtwinklig. Damit ist die Aufgabe bereits gelöst.

Wir können aus unserer Lösung von Aufgabe 310 mindestens zwei allgemeine Einsichten gewinnen: *Erstens* müssen wir unseren Aufruf zum *Eliminieren von Kreisen* (Seite 346) relativieren: Die Aufforderung, Kreise aus geometrischen Figuren zu entfernen und an ihrer Stelle lediglich einige relevante Radiusstrecken zu betrachten, war im Rahmen der abstrakten Geometrie eine sehr zuverlässige Empfehlung; doch in der Längenrechnung müssen wir achtgeben, dass eine allzu eifrige Beachtung dieses Aufrufs uns nicht behindert. Hätten wir in Bild 4.48 den Kreis entfernt und an seiner Stelle die Radiusstrecken CM und DM in die Zeichnung aufgenommen, so hätten wir womöglich die Gelegenheit zur Anwendung des Sehnen-Sekanten-Satzes nicht genutzt, weil uns AB und vor allem CD nicht *als Sehnen* bewusst gewesen wären. Kreise sind eben auch heuristische Signale, und ihre Eliminierung kann ein derartiges Signal unterdrücken. Dies gilt zumindest dann, wenn es – wie in Aufgabe 310 – auch um Längen solcher Strecken geht, die keine Kreisradien sind. Zwar verfügen wir nur über wenige Sätze, die Aussagen über solche Situationen treffen: vor allem eben den Sehnen-Sekanten-Satz, den Tangentensatz und die Formeln für Umkreis- und Inkreisradius, doch sollten wir vor dem Eliminieren von Kreisen stets prüfen, ob diese Sätze hilfreich sein könnten.

Zweitens haben wir bei der Lösung von Aufgabe 310 gesehen, dass wir den Sehnen-Sekanten-Satz auch auf eine *einzelne* Sehne und ihren Teilungspunkt anwenden können: Das Produkt der Sehnenabschnitte wird gemäß (4.46) mit dem Radius und dem Abstand des Teilungspunkts vom Kreismittelpunkt in Beziehung gesetzt; eine zweite Sehne (bzw. Sekante) ist nicht unbedingt erforderlich. In der Tat haben wir den Satz auch genau in dieser Weise benutzt, und zwar zweimal separat in Bezug auf jeweils *eine* Sehne; die Gleichungen (4.81) und (4.82) waren die Ergebnisse dieser Anwendungen. Nicht selten besteht

hinsichtlich des Sehnen-Sekanten-Satzes das Missverständnis, dass auf jeden Fall zwei Sehnen (bzw. Sekanten) erforderlich seien, die wie in (4.48) zugleich betrachtet werden müssten. Um dieser verkürzten Sichtweise entgegenzutreten, ist es daher wünschenswert, dass die Fassung des Sehnen-Sekanten-Satzes aus (4.46) gegenüber derjenigen aus (4.48) stärker ins Bewusstsein tritt.

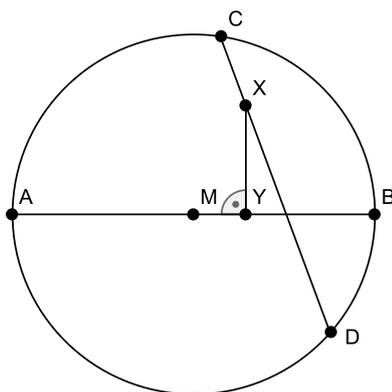


BILD 4.48: Zu Aufgabe 310

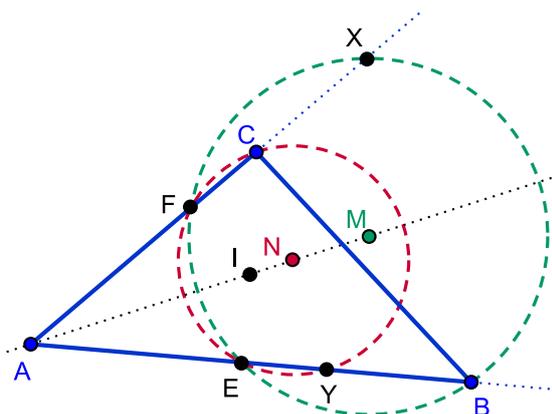


BILD 4.49: Zu Aufgabe 311

Auch in der folgenden Aufgabe tritt der Sehnen-Sekanten-Satz am Rande in Erscheinung:

AUFGABE 311:

Der Inkreis des Dreiecks ABC berühre \overline{AB} und \overline{AC} in E bzw. F . Der Umkreis $k(BFE)$ schneide die Gerade \overline{AC} außer in F noch in X , und analog bezeichne Y den zweiten Schnittpunkt von $k(CEF)$ mit \overline{AB} . Dann berührt die Gerade \overline{XY} den Inkreis des Dreiecks ABC .

Diese Aufgabe schüchtert uns bereits durch die Vielzahl der in ihr auftretenden Punkte und Kreise ein. Mit der Zahl der Punkte, Geraden und Kreise wächst aber auch die Zahl der potentiell wichtigen Beziehungen zwischen ihnen und damit auch die Gefahr, wichtige Beziehungen zu übersehen. Es kann in solchen Situationen besonders nützlich sein, eine präzise Zeichnung der Konfiguration zu erstellen; denn häufig weist uns eine solche Zeichnung auf eine Beziehung hin, die wir durch abstrakte Überlegung allein vielleicht gar nicht entdeckt hätten. Die Aufgabe 311 scheint tatsächlich ein solcher Fall zu sein, denn schon bei kurzer Betrachtung der Figur aus Bild 4.49 drängt sich deren *Symmetrie* auf: Die innere Winkelhalbierende w bei A scheint eine Symmetrieachse der Figur zu sein, zumal sogar die Mittelpunkte von $k(BFE)$ bzw. $k(CEF)$ offenbar

auf dieser Geraden liegen. Außerdem scheint es, dass die Punkte C und Y spiegelbildlich zu w liegen; ebenso X und B .

Was würden uns diese Symmetrieaussagen nützen? Wenn wir wirklich wüssten, dass die Geradenspiegelung an w den Punkt C auf Y abbildet sowie den Punkt B auf X , so wäre aufgrund der Geradentreue der Spiegelung klar, dass \overline{BC} auf \overline{XY} abgebildet wird; und da \overline{BC} den Inkreis von ABC berührt, würde sich diese Eigenschaft auf die Spiegelbilder übertragen:³³ Also würde \overline{XY} das Spiegelbild des Inkreises von ABC berühren; dies ist aber der Inkreis selbst, da I auf w liegt. Damit wäre die Aufgabe dann bereits gelöst.

Doch wie beweisen wir diese Symmetrieaussagen? Da die Tangentenabschnitte an den Inkreis nach Satz 4.75 gleich lang sind, gilt jedenfalls $|AE| = |AF|$, und damit ist nach dem Mittellotprinzip klar, dass w das Mittellot von EF ist. Nach der Sehnenregel geht w dann aber auch durch die Mittelpunkte M und N von $k(BFE)$ bzw. $k(CEF)$. Nach dem Sehnen-Sekanten-Satz gilt $|AE| \cdot |AY| = |AF| \cdot |AC|$, weswegen insgesamt die Gleichung $|AY| = |AC|$ folgt. Somit geht das Mittellot von YC ebenfalls durch A (Mittellotprinzip) und durch N (Sehnenregel) und ist daher identisch mit w ; analog schließen wir, dass w auch das Mittellot von BX ist. Dass w sowohl das Mittellot von YC als auch das Mittellot von BX ist, heißt aber, dass die Geradenspiegelung an w tatsächlich C auf Y abbildet und B auf X . Wie wir im vorigen Absatz gesehen haben, ist die Aufgabe damit gelöst.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 312 [Pythagoras, Dreiecksgleichung]: Die Diagonalen eines normalen Vierecks $ABCD$ schneiden einander genau dann senkrecht, wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ gilt.

AUFGABE 313: Es gibt ein Analogon zur *Antipythagoras*-Aussage über die Kollinearität von Vierecken (statt Dreiecken). Man zeige also, dass ein Viereck $ABCD$ genau dann kollinear ist, wenn die Gleichung

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 4(ab + cd)^2 = 0$$

gilt.

³³Die hier auftretende *Berührtreue* von Geradenspiegelungen ist ihrerseits beweisbedürftig. Sie ergibt sich allerdings direkt aus der Senkrechttreue von Geradenspiegelungen (Satz 4.48) und dem Tangentenkriterium.

AUFGABE 314 [Seitenhalbierendenformel, Sehnen-Sekanten-Satz]: Wir betrachten ein Sehnenviereck $ABCD$, das zugleich ein (schiefer) Drachen ist. Dann gilt die Gleichung $2e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

AUFGABE 315 [Satz 4.84 a), Pythagoras]: Wir betrachten ein echtes Viereck mit $\overline{AB} \perp \overline{CD}$. Außerdem seien E bzw. F die Mittelpunkte der beiden Diagonalen. Dann gilt die Gleichung $|AB|^2 + |CD|^2 = 4 \cdot |EF|^2$.

AUFGABE 316 [Eliminieren von Kreisen, Pythagoras]: Aus einem quadratischen Stück Papier mit der Seitenlänge 100 sollen möglichst viele Kreise mit dem Radius 3 so ausgeschnitten werden, dass je zwei Kreise einander nicht überschneiden. Zeige, dass man dabei (mindestens) 304 Kreise produzieren kann.

AUFGABE 317 [Pythagoras, Höhenformel]: Es sei ABC ein echtes Dreieck, und A', B', C' seien die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C . Dann gilt:

$$|AC'|^2 + |BA'|^2 + |CB'|^2 = |C'B|^2 + |A'C|^2 + |B'A|^2.$$

AUFGABE 318 [Höhenformel]: Seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $x \leq y \leq z$. Wir fragen uns, ob es ein echtes Dreieck mit den Höhenlängen x, y und z gibt.

- a) Beweise: Falls es ein solches Dreieck gibt, dann ist $\left(\frac{2}{x} \cdot t, \frac{2}{y} \cdot t, \frac{2}{z} \cdot t\right)$ das Seitenlängentripel dieses Dreiecks, wobei wir die Abkürzung $t := \sqrt{F\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{z^2}\right)}$ mit der Funktion F aus Definition und Satz 4.69 benutzen.
- b) Zeige, dass es genau dann ein Dreieck mit den gesuchten Eigenschaften gibt, wenn die Ungleichung $x > \frac{yz}{y+z}$ (bzw. die äquivalente Ungleichung $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{x}$) erfüllt ist.
- c) Ermittle alle natürlichen Zahlen n , für die ein echtes Dreieck mit den Höhenlängen 9, 29 und n existiert.

AUFGABE 319 [Seitenhalbierendenformel, 2:1-Teilung der Seitenhalbierenden durch den Schwerpunkt, Pythagoras]: In einem echten Dreieck gibt es genau dann ein Paar von senkrechten Seitenhalbierenden, wenn die Seitenlängen des Dreiecks im Verhältnis $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ stehen. In diesem Fall sind es die Seitenhalbierenden der beiden längeren Seiten, die aufeinander senkrecht stehen.

AUFGABE 320 [Thales, Sehnen-Sekanten-Satz]: Es sei ABC ein echtes Dreieck mit dem Höhenschnittpunkt H und den Höhenfußpunkten A', B', C' (bezüglich der Höhen durch A, B, C). Dann ist das Produkt der Höhenabschnitte konstant, d.h. es gilt

$$|AH| \cdot |HA'| = |BH| \cdot |HB'| = |CH| \cdot |HC'|.$$

AUFGABE 321 [Thales, Sehnen-Sekanten-Satz, Seitenhalbierendenformel, Satz 4.80]: Das Höhenabschnittsprodukt aus Aufgabe 320 ist $\frac{1}{2}|a^2 + b^2 + c^2 - 8r_u^2|$.

AUFGABE 322 [Seitenhalbierendenformel]: Es seien zwei verschiedene Punkte A und B festgelegt. Man bestimme die Menge aller Punkte C , für die die Gleichung $|AC|^2 + |BC|^2 = 2 \cdot |AB|^2$ gilt.

AUFGABE 323 [Apollonius, Höhenformel, Ceva]: Beweise folgende Aussagen:

- a) Haben in einem echten Dreieck ABC die Seitenhalbierende durch A , die innere Winkelhalbierende bei B und die Höhe durch C einen gemeinsamen Punkt, dann gilt die Gleichung

$$c \cdot (a^2 + c^2 - b^2) = a \cdot (b^2 + c^2 - a^2). \quad (4.84)$$

- b) Liegt der Fußpunkt der Höhe durch C in einem echten Dreieck ABC zwischen A und B , so folgt aus Gleichung (4.84) das in a) beschriebene Inzidenzphänomen.
- c) Für die beiden Dreiecke mit den Seitenlängen $a = 12$, $b = 13$, $c = 15$ bzw. $a = 35$, $b = 277$, $c = 308$ ist Gleichung (4.84) jeweils erfüllt, und die Inzidenz aus a) tritt ein.³⁴

AUFGABE 324 [Thales, Pythagoras, Strahlensatz]: Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck, in dem jeder Schenkel doppelt so lang ist wie die Basis. Die Punkte D bzw. E seien die inneren Punkte von AC bzw. BC , in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser AB schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks $ABED$ in Abhängigkeit von der Basislänge des Dreiecks ABC .

AUFGABE 325 [Eliminieren von Kreisen, Seitenhalbierendenformel]: Gegeben seien ein Kreis k und zwei Punkte A und B außerhalb von k , die symmetrisch zum Mittelpunkt von k liegen. Ein Punkt X liege auf k . Dann gilt: Die Summe der Quadrate der Abstände des Punktes X von den Punkten A und B hängt nicht von der Wahl des Punktes X ab.

AUFGABE 326 [Winkelhalbierende, Apollonius]: Es sei ABC ein echtes Dreieck. Es sei w die Länge der inneren Winkelhalbierenden bei C . X sei der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden mit \overline{AB} , und wir definieren außerdem $u := |AX|$ und $v := |BX|$. Zeige, dass dann $w^2 = (a + u) \cdot (b - v) = (b + v) \cdot (a - u)$ gilt.

Hinweis: Man beachte die Formeln von Folgerung 4.64.

AUFGABE 327 [Eliminieren von Kreisen, Seitenhalbierendenformel]: Gegeben seien zwei Kreise k und l mit demselben Mittelpunkt. Außerdem sei X ein Punkt auf k . Man zeige, dass die Summe der Quadrate der Abstände von X zu den Endpunkten eines Durchmessers von l weder von der Wahl von X noch von der Wahl des Durchmessers abhängt.

³⁴Die beiden genannten Tripel von Seitenlängen sind die einzigen ganzzahligen und teilerfremden Tripel unter 1000, die Gleichung (4.84) erfüllen.

AUFGABE 328 [Diagonalensatz, Dreiecksungleichung, Seitenhalbierendenformel]: In einem Parallelogramm $ABCD$ gilt stets $|a^2 - b^2| < ef$.

AUFGABE 329 [Pythagoras]: Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei X ein beliebiger Punkt. X habe vom Eckpunkt A den Abstand a , vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c . Man berechne den Abstand d des Punktes X vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes die Kenntnis der drei Abstände a, b, c bereits ausreicht.

Hinweis: Man betrachte die Fußpunkte der Lote durch X auf zwei gegenüberliegende Seitenlinien des Rechtecks.

AUFGABE 330 [Parallelogrammformel]: Ein echtes Viereck ist genau dann ein Rechteck, wenn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2ef$ gilt.

Hinweis: Man beachte insbesondere die Ungleichung aus Satz 4.84 b) und die Tatsache, dass für nicht-negative Zahlen x, y die Äquivalenz $x + y = 0 \iff x = y = 0$ gilt.

AUFGABE 331 [Vier-Punkte-Formel, Sehnen-Sekanten-Satz]: Wir betrachten ein gleichschenkliges Dreieck ABC und dessen Umkreis k . Eine Gerade g durch C schneide \overline{AB} im Punkte X und den Kreis k in einem weiteren von C verschiedenen Punkt Y . Dann ist das Produkt $|CX| \cdot |CY|$ unabhängig von der Lage von g .³⁵

AUFGABE 332 [Sehnen-Sekanten-Satz]: Es sei ABC ein echtes Dreieck mit dem Umkreis k . Eine Gerade durch den Umkreismittelpunkt verlaufe durch C und schneide \overline{AB} zwischen A und B im Punkte X . Es gelte $|AX| = 9, |BX| = 7$ und $|CX| = 3$. Berechne den Radius von k .

AUFGABE 333 [Inkreisradiusformel]: Der Inkreisradius eines echten Dreiecks ist der Quotient von dessen Fläche und dessen halbem Umfang.

AUFGABE 334 [Sehnenregel, Grundtatsache 4.89, Vier-Punkte-Formel, Umkreisradiusformel]: Sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck, und sei X der Schnittpunkt von \overline{AC} und \overline{BD} . Man zeige (und zwar ohne Benutzung von Winkeltheorie):

- a) Das Viereck $ADCB$ ist ein symmetrisches Trapez.
- b) Die Strecke AX ist genauso lang wie die Seitenlänge von $ABCDE$.
- c) Es seien s die Seitenlänge des Fünfecks, d die Länge der Diagonalen (erster Art) und r_u der Umkreisradius des Fünfecks. Dann gilt

$$d = \frac{\sqrt{5}+1}{2} s \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} r_u^2.$$

Hinweis: Für Aufgabe c) wende man die Umkreisradiusformel auf die Dreiecke ABC und ACE an.

³⁵ Um eine Fallunterscheidung überflüssig zu machen, kann hier zusätzlich $\overset{A}{\bullet} \text{---} \overset{X}{\bullet} \text{---} \overset{B}{\bullet}$ vorausgesetzt werden.

AUFGABE 335 [Sehnen-Sekanten-Satz]: Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und ein von M verschiedener Punkt N innerhalb von k . Man bestimme diejenige(n) Sehne(n) AB von k , für die $|NA|^2 + |NB|^2$ möglichst groß (bzw. möglichst klein) ist.

AUFGABE 336 [Vier-Punkte-Formel]: Im Dreieck ABC sei M ein Punkt mit $\overset{B}{\bullet} \overset{M}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$, $|BM| = 5$, $|CM| = 6$ und $|AM| = 3$. Berechne $|AC|$ in Abhängigkeit von $|AB|$.

AUFGABE 337 [Grundtatsache 4.89, Mittellotprinzip, Winkelhalbierende]: Sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck, und sei X der Schnittpunkt der Diagonallinien \overline{AC} und \overline{BE} . Der Kreis $k(B, A)$ schneide \overline{AE} außer in A noch im Punkte Y , und entsprechend schneide der Kreis $k(A, B)$ die Diagonallinie \overline{BC} außer in B noch im Punkte Z . Dann ist auch das Fünfeck $AYZBX$ regelmäßig.

Hinweis: Man betrachte das Mittellot von AB und überlege sich, dass es identisch mit dem Mittellot von CE und damit eine Winkelhalbierende von $\overline{AE}, \overline{BC}$ ist. Analog verfähre man mit dem gemeinsamen Mittellot von XY und BZ . Außerdem können die Aussagen von Aufgabe 334 hilfreich sein.

AUFGABE 338 [Vier-Punkte-Formel]: Gegeben sei eine Raute $ABCD$ derart, dass sowohl ABC als auch ADC gleichseitig sind. Ferner seien E und F Punkte mit $\overset{B}{\bullet} \overset{E}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$, $\overset{C}{\bullet} \overset{F}{\bullet} \overset{D}{\bullet}$ sowie $|BE| = |CF|$. Dann ist auch AEF gleichseitig.

AUFGABE 339 [Grundtatsache 4.89, Haus der Vierecke, Thales]: Sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck mit dem Umkreismittelpunkt U . Man zeige (und zwar wiederum ohne Benutzung von Winkeltheorie):

- a) Das Viereck $BCEF$ ist ein Rechteck.
- b) Jede Diagonale zweiter Art des Sechsecks geht durch U und ist doppelt so lang wie der Umkreisradius.
- c) Das Viereck $ABUF$ ist ein symmetrischer Drachen und ein Trapez und daher (gemäß der Aussage von Aufgabe 267) sogar eine Raute. Insbesondere stimmt die Seitenlänge des Sechsecks $ABCDEF$ mit dessen Umkreisradius überein.
- d) Für die Seitenlänge s des Sechsecks und die Länge d der Diagonalen erster Art gilt $d = \sqrt{3}s$.

AUFGABE 340 [Vier-Punkte-Formel]: In einem symmetrischen Drachen $ABCD$ gilt für jeden Punkt X zwischen B und D die Gleichung $|XA|^2 - |XC|^2 = a^2 - c^2$.

AUFGABE 341 [Tangentensatz]: Man betrachte zwei Kreise k und l , die einander in zwei Punkten schneiden. Eine gemeinsame Tangente beider Kreise berühre k in K ; die andere gemeinsame Tangente berühre l in L . Dann schneidet die Gerade \overline{KL} aus den Kreisen Sehnen gleicher Länge heraus.

AUFGABE 342 [2:1-Teilung der Seitenhalbierenden durch den Schwerpunkt, Vier-Punkte-Formel]: Sei ABC ein echtes Dreieck. Ein bekanntes Problem ist die Frage nach demjenigen Punkt X der Ebene, für den die Summe $|AX| + |BX| + |CX|$ minimal ist; diese Frage führt zu dem sogenannten *Fermat-Punkt* von ABC , und der dazugehörige Beweis ist nicht unkompliziert. Typischerweise wird die Angelegenheit einfacher, wenn wir stattdessen die quadrierten Abstände zu den Ecken betrachten. Man zeige also, dass für alle Punkte X die Gleichung

$$|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 = \frac{2}{3}(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2) + 9 \cdot |XS|^2$$

gilt, wobei S den Schwerpunkt des Dreiecks ABC bezeichnet. Aus dieser Gleichung lässt sich ablesen, dass die Summe der quadrierten Abstände zu den Ecken im Fall $X = S$ den kleinsten Wert annimmt.

AUFGABE 343 [Satz 4.73, Flächen-, Inkreisradius- und Umkreisradiusformel]: Seien n, m, k natürliche Zahlen mit

$$1 \leq n \leq m \quad \text{und} \quad \frac{m^2 n}{2m+n} \leq k^2 < mn.$$

Wir definieren dann die Zahlen a, b, c durch

$$a := (m+n)(mn - k^2), \quad b := m(n^2 + k^2), \quad c := n(m^2 + k^2).$$

- a) Dann gilt $a \leq b \leq c$.
- b) Dann gibt es ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c .
- c) Dann besitzt das Dreieck aus b) nicht nur ganzzahlige Seitenlängen, sondern auch einen ganzzahligen Flächeninhalt, einen ganzzahligen Inkreisradius und einen zumindest rationalen Umkreisradius. Solche Dreiecke werden als *Heronische Dreiecke* bezeichnet; durch geeignete Vervielfachung der Seitenlängen kann auch ein ganzzahliger Umkreisradius erreicht werden.
- d) Zeige, dass es ein Heronisches Dreieck gibt, dessen längste Seite die Länge 26 hat, und berechne dessen Flächeninhalt sowie dessen Inkreis- und Umkreisradius.

AUFGABE 344 [Tangentensatz]: Gegeben sind eine Gerade g und drei Punkte $A, B, C \in g$ mit $\overset{A}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$.

- a) Ermittle in Abhängigkeit von den Längen $|BC|, |AC|$ den Radius eines Kreises k , der durch A und B geht und eine Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht und durch C geht.
- b) Beweise, dass es einen Kreis mit dem Mittelpunkt C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangenten liegen, die von C aus an alle diejenigen Kreise gelegt werden, die durch A und B gehen.

Zur elementaren Winkellehre

Die elementare Winkellehre erscheint aus schulischer Sicht im Vergleich zur abstrakten Geometrie oder der Längenrechnung eher einfach. Ihre Aussagen, etwa der Basiswinkelsatz oder die Charakterisierung von Parallelogrammen und normalen Trapezen über ihre Winkel, sind meist ziemlich evident. Allerdings wird die Winkellehre doch zu einer Herausforderung, sobald ernsthafte Beweise ohne Verweis auf die Anschauung verlangt werden. Anschauungsfreie Argumentationen erfordern unter anderem die ständige Verwendung der Winkelrechenregeln, etwa der Formregel oder der Additionsregel, die ja ihrerseits Bezug nehmen auf die *zwischen*-Beziehung der Längenrechnung. Der Anspruch des rein begrifflichen Argumentierens innerhalb der Winkellehre ist daher nur dann sinnvoll, wenn auch die Anordnungsfragen der Längenrechnung ernstgenommen und rein begrifflich bewältigt werden. In jedem Fall ist die anschauungsfreie Beweisführung in der Winkellehre eine erhebliche didaktische Hürde, und als Lehrer wird man die Frage beantworten müssen, ob dieser Anspruch den Schülern gegenüber tatsächlich durchgesetzt werden soll. Die in diesem Abschnitt präsentierten Aufgaben sind natürlich unabhängig von dem in dieser Frage eingenommenen Standpunkt verwendbar. Bemerkenswert ist immerhin, dass es dank unserer Theorie überhaupt möglich ist, die Winkellehre völlig anschauungsfrei abzuhandeln, ohne dass der Aufwand dafür eskaliert. Natürlich werden wir im Folgenden von diesem mühsam errungenen Vorteil Gebrauch machen und die Beispielaufgaben im Sinne unserer Theorie lösen.

Wir beginnen mit einer Aufgabe, die bei lockerer und anschauungsgebundener Betrachtung in wenigen Augenblicken gelöst werden kann, die jedoch bei präziser und rein begrifflicher Bearbeitung große Sorgfalt erfordert, um sich die begrifflich-theoretischen Rechtfertigungen für die anschaulich einleuchtenden Aussagen ins Bewusstsein zu rufen:

AUFGABE 345:

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M . Ferner seien AB eine Sehne von k , die nicht Durchmesser von k ist, und C ein Punkt auf \overline{AB} derart, dass $\overset{A}{\bullet} \text{---} \overset{B}{\bullet} \text{---} \overset{C}{\bullet}$ gilt und $|BC| = |BM|$ ist. Schließlich sei D derjenige Schnittpunkt von \overline{CM} und k , für den $\overset{C}{\bullet} \text{---} \overset{M}{\bullet} \text{---} \overset{D}{\bullet}$ gilt. Dann ist die Gleichung $\angle AMD = 3 \cdot \angle ACM$ erfüllt.

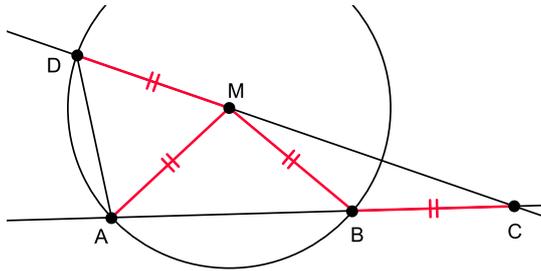


BILD 4.50: Zu Aufgabe 345

Da AB kein Durchmesser von k ist, sind die Dreiecke AMD und ACM echt, so dass Winkelbetrachtungen in ihnen überhaupt möglich sind. Auch die Echtheit der Dreiecke MBC und ABM ist auf diese Weise sichergestellt, und diese Dreiecke sind nach Voraussetzung sogar gleichschenkelig.

Wir erhalten dann unter Verwendung mehrerer Winkelrechenregeln die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \angle AMD &= 180^\circ - \angle AMC = \angle CAM + \angle ACM = \angle BAM + \angle ACM \\ &= \angle ABM + \angle ACM = (180^\circ - \angle CBM) + \angle ACM \\ &= \angle BMC + \angle BCM + \angle ACM = \angle BCM + \angle BCM + \angle ACM \\ &= \angle ACM + \angle ACM + \angle ACM = 3\angle ACM. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Beim ersten Gleichheitszeichen von (4.85) verwenden wir den Nebenwinkelsatz und $\overset{C}{\bullet} - \overset{M}{\bullet} - \overset{D}{\bullet}$; beim zweiten die 180° -Winkelsumme im Dreieck AMC ; beim dritten die Formregel und $\overset{A}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$; beim vierten den Basiswinkelsatz; beim fünften den Nebenwinkelsatz und nochmals $\overset{A}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$; beim sechsten die 180° -Winkelsumme im Dreieck CBM ; beim siebten den Basiswinkelsatz; beim achten die Formregel und erneut $\overset{A}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$. Die Figur von Aufgabe 345 ist auch deshalb interessant, weil sie die Idee der Neusis-Konstruktion zur Winkeldrittellung enthält (also mit „Einschiebelineal“, die auf Archimedes zurückgeht und in [ScSch, S. 46] ausführlich diskutiert wird.

AUFGABE 346:

Gegeben sei ein echtes Dreieck ABC . Zu konstruieren ist eine Parallele g zu \overline{AB} mit folgender Eigenschaft: Für den Schnittpunkt D von g und \overline{AC} und den Schnittpunkt E von g und \overline{BC} gilt $|AD| + |BE| = |DE|$.

Wir analysieren zunächst rückwärtsarbeitend die angestrebte Konfiguration auf informelle Weise mithilfe einer Planfigur (Bild 4.51, links) und gehen dabei vorläufig davon aus, dass D und E jeweils zwischen A, C bzw. B, C liegen werden. Da der Parallelenabschnitt DE so lang sein soll wie AD und BE zusammen, liegt es nahe, die Längen $|AD|$ und $|BE|$ entlang der Strecke DE zu realisieren; es muss ja in der anvisierten Figur einen Punkt X zwischen D und E geben mit $|DX| = |AD|$ und $|XE| = |BE|$. Wir erkennen nun zwei

gleichschenklige Dreiecke AXD und BXE und können jeweils den Basiswinkelsatz anwenden. Im Dreieck AXD schließen wir mit der Winkelsumme und dem Nebenwinkelsatz, dass der Winkel $\angle CDX$ doppelt so groß wie die Basiswinkel von AXD ist. Außerdem tritt wegen $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ der Stufenwinkel-Reflex in Aktion und zeigt uns, dass der Winkel $\angle BAC$ ebenso groß ist wie $\angle CDX$, also doppelt so groß wie die Basiswinkel von AXD . Das zeigt wiederum, dass \overline{AX} die innere Winkelhalbierende bei A ist. Diese Argumentation gilt analog auf der rechten Seite der Figur; also ist \overline{BX} die innere Winkelhalbierende bei B und der Punkt X damit der Inkreismittelpunkt von ABC . Damit ist die rückwärtsgerichtete Analyse am Ziel, denn da das Dreieck ABC ja gegeben ist, können wir die fraglichen Winkelhalbierenden problemlos konstruieren.

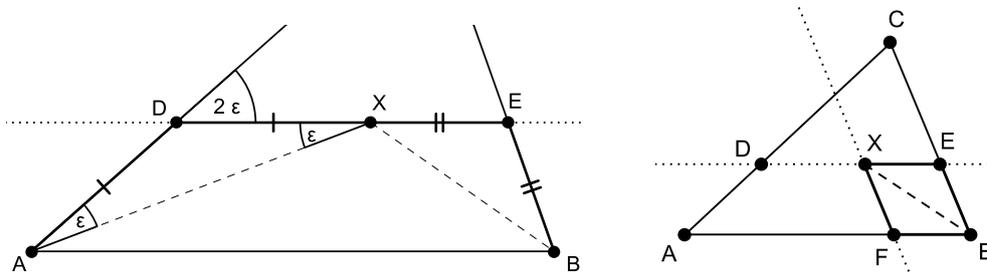


BILD 4.51: Zu Aufgabe 346

Die formelle Lösung der Aufgabe lautet also: Man konstruiere den Inkreismittelpunkt X von ABC , die Parallele g durch X zu \overline{AB} und deren Schnittpunkte D und E mit \overline{AC} bzw. \overline{BC} . Wir werden nun detailliert zeigen, dass g die gewünschten Eigenschaften besitzt. Dabei sind zunächst einige *zwischen*-Beziehungen zu klären; das Ziel ist $\overset{D}{\bullet} - \overset{X}{\bullet} - \overset{E}{\bullet}$. Sei also Y der Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden bei C mit \overline{AB} . Wie wir bei der Etablierung des Inkreises gezeigt haben, ist der Inkreismittelpunkt X ein innerer Punkt von CY . Wegen der Zwischentreue der Parallelprojektion sind somit auch D und E innere Punkte von AC bzw. BC . Wir können nun Satz 4.107 über Stufenwinkel am Trapez sowie diverse Winkelrechenregeln anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \angle AXD &= 180^\circ - \angle XDA - \angle DAX = (180^\circ - \angle EDA) - \angle DAX \\ &= \angle EDC - \frac{1}{2}\angle BAD = \angle BAC - \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle XAD, \end{aligned}$$

so dass das Dreieck AXD nach dem Basiswinkelsatz tatsächlich gleichschenkelig ist. Auf analoge Weise kann die Gleichschenkligkeit von BXE gezeigt werden, und da X ein innerer Punkt von DE ist, folgt schließlich mit der Dreiecksgleichung die gewünschte Beziehung $|DE| = |DX| + |XE| = |AD| + |BE|$.

Die soeben vorgestellte Lösung von Aufgabe 346 illustriert ein typisches Phänomen: Winkel sind ein gutes Werkzeug zum Entdecken von Zusammenhängen und zum Finden von Ideen, doch die akribische Beweisdurchführung mithilfe von Winkeln ist wegen der notwendigen Anordnungsbetrachtungen oft mühselig. Manchmal gibt es allerdings die Möglichkeit, eine über Winkelbetrachtungen gewonnene Einsicht in einen winkelfreien Beweis umzuwandeln. Auch Aufgabe 346 ist ein solcher Fall, auch wenn wir von Anordnungsbetrachtungen nicht vollständig befreit werden können – denn die Gleichung $|AD| + |BE| = |DE|$ aus der Aufgabenstellung läuft ja offenbar auf die Anwendung der Dreiecksungleichung und damit auf Anordnungsbetrachtungen hinaus. Die anfänglichen Winkelbetrachtungen haben ja gezeigt, dass es um die Parallele zu \overline{AB} durch den Inkreismitelpunkt X geht. Wir betrachten nun die innere Winkelhalbierende bei B (Bild 4.51, rechts) sowie den Punkt F auf \overline{AB} , der B, E, I zum Parallelogramm $BEIF$ ergänzt. Weil BX eine Winkelhalbierende bei B ist, ist das Parallelogramm $BEIF$ nach der Aussage von Aufgabe 260 sogar eine Raute, womit die gewünschte Gleichschenkligkeit des Dreiecks BXE winkelfrei gezeigt ist; analog wird die Gleichschenkligkeit von AXD nachgewiesen. Dass X ein innerer Punkt von DE ist und damit die gewünschte Dreiecksungleichung gilt, muss hier natürlich ebenso wie in der ersten Beweisvariante gezeigt werden.

Weitere Aufgaben

AUFGABE 347 [Basiswinkelsatz, Additionsregel]: Gegeben sei ein echtes Dreieck ABC mit $\angle ACB = 32^\circ$. Außerdem seien D, E Punkte mit den Eigenschaften $\overset{B}{\bullet} \text{---} \overset{A}{\bullet} \text{---} \overset{D}{\bullet}$ und $|AD| = |AC|$ sowie $\overset{A}{\bullet} \text{---} \overset{B}{\bullet} \text{---} \overset{E}{\bullet}$ und $|BE| = |BC|$. Bestimme $\angle DCE$.

AUFGABE 348 [Basiswinkelsatz, Nebenwinkelsatz]: Seien $a, c \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha \in \mathbb{W}$. Bei dem Versuch, ein Dreieck ABC mit $|AB| = c, |BC| = a$ und $\angle BAC = \alpha$ zu konstruieren (SSW-Konstruktion), seien zwei nicht-kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden, die den Bedingungen genügen. Dabei gilt $\angle AC_1B = 4 \cdot \angle AC_2B$. Ermittle $\angle AC_1B$.

AUFGABE 349 [Basiswinkelsatz]: Sei ABC ein echtes Dreieck, und die innere Winkelhalbierende bei C schneide \overline{AB} in einem Punkt D mit $|CD| = |BD|$. Außerdem gelte $\alpha = 60^\circ$. Bestimme β und γ .

AUFGABE 350 [Additionsregel]: In einem nicht-gleichschenkligen Dreieck ABC liege der Fußpunkt X der Höhe durch C echt zwischen A und B . Außerdem sei Y der Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden bei C mit \overline{AB} . Dann gilt $\angle XCY = \frac{1}{2} |\beta - \alpha|$.

AUFGABE 351 [Basiswinkelsatz]: Wir betrachten ein gleichschenkliges Dreieck ABC , bei dem die innere Winkelhalbierende bei A das Dreieck in zwei gleichschenklige Teildreiecke zerlegt (wobei zunächst nicht festgelegt sei, welche Strecken die gleichlangen Schenkel der Teildreiecke sind). Wie groß sind die Winkel eines solchen Dreiecks ABC ?

AUFGABE 352 [Basiswinkelsatz, Additionsregel]: In einem normalen Viereck $ABCD$ gelte $|AD| = |BD| = |CD|$ und $\angle ADB = \angle DCA = \angle CBD = \angle BAC$. Bestimme $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$.

AUFGABE 353 [Additionsregel, Nebenwinkelsatz]: Sei ABC ein echtes Dreieck mit $|BC| \leq |AC|$, und sei X ein Punkt zwischen A und B . Dann ist \overline{CX} genau dann die innere Winkelhalbierende bei C , wenn $\angle AXC = 90^\circ + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ gilt.

AUFGABE 354 [Thales]: Im Rechteck $ABCD$ gelte $\angle BDC = 30^\circ$, und E sei der Fußpunkt des Lotes von A auf \overline{BD} . Man berechne $|AE|$ in Abhängigkeit von $|AB|$.

AUFGABE 355 [Basiswinkelsatz, Additionsregel]: Sei ABC ein echtes Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt M derart, dass die Strecken MB und BC gleich lang sind und das Viereck $ABCM$ normal ist. Sei S der Diagonalschnittpunkt von $ABCM$. Bestimme $\angle CSB$.

AUFGABE 356 [Nebenwinkelsatz, Winkelsumme]: In einem echten Dreieck ABC schneide die Mittelsenkrechte von AB die innere Winkelhalbierende bei A im Punkt E sowie die Seitenlinie \overline{AC} in einem Punkte F zwischen A und C . Außerdem gelte $\angle FEA = 2 \cdot \beta$.

- a) Ermittle β und γ in Abhängigkeit von α .
- b) Beweise, dass unter den genannten Voraussetzungen stets $\beta < 60^\circ$ gilt.
- c) Bestimme γ im Fall $\beta = 55^\circ$.
- d) Untersuche, ob es möglich ist, dass einer der drei Winkel von ABC ein rechter Winkel ist.

AUFGABE 357 [Thales, Additionsregel, Basiswinkelsatz]: In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB . Die Strecken AM und CM seien gleich lang, und es gelte $\angle BCM = 35^\circ$. Ermittle die Größen der Winkel im Dreieck ABC .

AUFGABE 358 [Grundtatsachen 4.89 und 4.90, Mittellotprinzip, Basiswinkelsatz, Winkel im Trapez]: In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ bestimme man alle Winkel im Dreieck ACD und im Viereck $ABCD$.

AUFGABE 359 [Winkel im Trapez]: Jedes normale Viereck $ABCD$, dessen Winkel die Gleichungskette $\alpha = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{3}\gamma = \frac{1}{4}\delta$ erfüllen, ist ein Trapez.

AUFGABE 360 [Basiswinkelsatz, Winkel im Trapez]: Sei $ABCD$ ein normales Trapez. Wir untersuchen die Bedingung

$$|AD| = |BC| = |CD|. \quad (4.86)$$

- a) Zeige, dass (4.86) genau dann gilt, wenn \overline{AC} eine Winkelhalbierende bei A ist und \overline{BD} eine Winkelhalbierende bei B .³⁶
- b) Bestimme die Winkel im Trapez $ABCD$ unter der Voraussetzung, dass (4.86) sowie die Gleichung $|AB| = 2|CD|$ gelten.

AUFGABE 361 [Basiswinkelsatz, Winkel im Trapez]: In einem normalen Trapez $ABCD$ sei \overline{AC} eine Winkelhalbierende bei A und \overline{BD} eine Winkelhalbierende bei B . Außerdem sei AB länger als CD . Bestimme die Größen der Winkel des Trapezes, wenn zusätzlich vorausgesetzt ist, dass einer der Winkel 110° groß ist.

Hinweis: Man beachte die Aufgaben 360 und 261.

AUFGABE 362 [Streckenabtragung, Winkel in Parallelogrammen und Trapezen, Basiswinkelsatz]: In einem normalen Trapez $ABCD$ gelte

$$\angle BAD = 64^\circ, |AD| = 5, |CD| = 3, |AB| = |BC| + |CD|.$$

Bestimme die Winkelgrößen in diesem Trapez.

AUFGABE 363 [Mittelparallelensatz, Thales]: Im symmetrischen (und nicht-rechtwinkligen) Trapez $ABCD$ sei S der Diagonalschnittpunkt. Ferner seien X, Y, Z die Mittelpunkte der Strecken SA, SD bzw. BC , und es gelte $\angle BAC = 60^\circ$. Dann ist das Dreieck XYZ gleichseitig.

Hinweis: Man betrachte die Dreiecke BCX und BCY – sie sind beide rechtwinklig.³⁷

AUFGABE 364 [Thales, Apollonius]: In dem rechtwinkligen Dreieck ABC gelte $\alpha = 60^\circ$, und D sei der Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden bei A mit der Seitenlinie \overline{CB} . Dann ist D der 2:1-Teilungspunkt der Strecke CB .

AUFGABE 365 [Thales, Basiswinkelsatz, Additionsregel]: Das Dreieck ABC sei rechtwinklig; M sei der Mittelpunkt von AB ; D ein Punkt zwischen A und C mit $|CD| < |DA|$; und E der Schnittpunkt von \overline{BC} und \overline{MD} . Außerdem seien die Strecken DE und AB gleich lang. Man beweise die Gleichungen $\angle ABC = 3 \cdot \angle CED$ und $\angle CMA = 3 \cdot \angle CME$.

³⁶ vgl. Aufgabe 261.

³⁷ Diese Aufgabe ist unter anderem eine gute Illustration unserer Thales-Warnung. Allerdings handelt sie eigentlich nicht von Winkeln. Würden wir die 60° -Bedingung etwa durch die Vorgabe ersetzen, dass die Dreiecke ASB und CDS gleichseitig sind, wäre die Aufgabe in der abstrakten Geometrie beheimatet und dort lösbar. Tatsächlich wäre es noch etwas raffinierter – und völlig ausreichend –, nur die Gleichschenkligkeit der genannten Dreiecke explizit vorauszusetzen.

AUFGABE 366 [Basiswinkelsatz, Winkel im Parallelogramm, Thales, Winkel-Strecken-Vergleich]: Über ein normales Viereck $ABCD$ sei vorausgesetzt, dass die Seiten CD und DA gleich lang sind und die Gleichungen $\beta = 2 \cdot \alpha$, $\gamma = 3 \cdot \alpha$ und $\delta = 4 \cdot \alpha$ erfüllt sind. Man beweise die folgenden Aussagen:

- a) Die Gerade \overline{AC} ist die innere Winkelhalbierende bei A .
- b) Die Seite BC ist kürzer als die Seite DA .
- c) Die Seite AB ist doppelt so lang wie die Seite DA .

AUFGABE 367 [Basiswinkelsatz, Winkel im Parallelogramm]: In einem Parallelogramm $ABCD$ betrachten wir das Viereck $WXYZ$, dessen Ecken die Schnittpunkte von je zwei inneren Winkelhalbierenden des Parallelogramms $ABCD$ sind; es sei vorausgesetzt, dass $WXYZ$ echt ist.

- a) Zeige, dass dann $WXYZ$ stets ein Rechteck ist.
- b) Beweise, dass $WXYZ$ genau dann ein Quadrat ist, wenn $ABCD$ ein nicht-quadratisches Rechteck ist.
- c) Bestimme das Seitenverhältnis $\frac{|AB|}{|BC|}$ in dem Fall, dass die innere Winkelhalbierende bei A die innere Winkelhalbierende bei B auf \overline{CD} schneidet.

AUFGABE 368 [Tangentenkriterium, Pythagoras, Winkelhalbierende]: Gegeben seien ein Quadrat $ABCD$ sowie zwei Punkte $E, F \neq C$ mit $\overset{B}{\bullet} \text{---} \overset{E}{\bullet} \text{---} \overset{C}{\bullet}$ und $\overset{C}{\bullet} \text{---} \overset{F}{\bullet} \text{---} \overset{D}{\bullet}$. Dann berührt \overline{EF} den Kreis $k(A, B)$ genau dann, wenn $\angle EAF = 45^\circ$ gilt.

AUFGABE 369 [Winkel-Strecken-Vergleich]: In einem Land mit vielen Städten, das die Förderung regenerativer Energieformen demonstrieren möchte, seien die Entfernungen von je zwei Städten paarweise verschieden. Eines Tages startet in jeder Stadt dieses Landes genau ein solarbetriebenes Flugzeug und fliegt zur jeweils nächstgelegenen Stadt. Es ist zu beweisen, dass unter den genannten Voraussetzungen in keiner Stadt mehr als fünf dieser Flugzeuge landen werden.

Hinweis: Würden in der Stadt X sechs oder mehr Flugzeuge landen, die in den Städten A, B, C, \dots gestartet sind, so gäbe es unter diesen Städten zwei, etwa A und B , für die $\angle AXB \leq 60^\circ$ gelten würde.

AUFGABE 370 [Mittellotprinzip, Basiswinkelsatz]: Gegeben sind zwei Geraden g und h mit dem Schnittpunkt B . Gesucht sind ein Punkt A auf g und ein Punkt C auf h mit folgender Eigenschaft: Die innere Winkelhalbierende im Dreieck CAB bei A schneidet \overline{BC} in einem Punkt X , der von A und B den gleichen Abstand hat.

- a) Wie findet man den Punkt C , wenn A auf g schon vorgegeben ist?
- b) Gibt es auch dann eine Konstruktion, wenn andersherum C auf h gegeben ist und A gesucht wird?

AUFGABE 371 [Winkelhalbierende als Ortslinie (Satz 4.29), Mittellotprinzip]: Zu einem gegebenen echten Dreieck ABC sind zwei Punkte X und Y mit folgenden Eigenschaften gesucht: X liegt auf \overline{AC} , Y auf \overline{BC} , und die drei Strecken AX , XY und YC haben alle dieselbe Länge. Man finde eine geometrische Konstruktion für die gesuchten Punkte und begründe ihre Korrektheit.

AUFGABE 372 [Basiswinkelsatz]: In Bild 4.52 sehen wir ein gleichschenkliges Dreieck ABC und eine Punktfolge $(A, B, X_1, X_2, X_3, X_4, C)$ mit den Anfangsgliedern A, B und dem Endglied C derart, dass je zwei aufeinanderfolgende Punkte der Folge den Abstand $|AB|$ besitzen und die Zwischenglieder X_i abwechselnd zwischen A, C bzw. zwischen B, C liegen. Außerdem tritt kein Punkt in der Folge mehr als einmal auf.

- a) Die Punktfolge in Bild 4.52 hat die Länge 6, d.h. sie besteht aus sechs Strecken. Wie groß ist hier der Winkel $\angle BCA$?
- b) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wie groß ist der Winkel $\angle BCA$ eines gleichschenkligen Dreiecks, für das es eine solche Punktfolge der Länge n gibt?

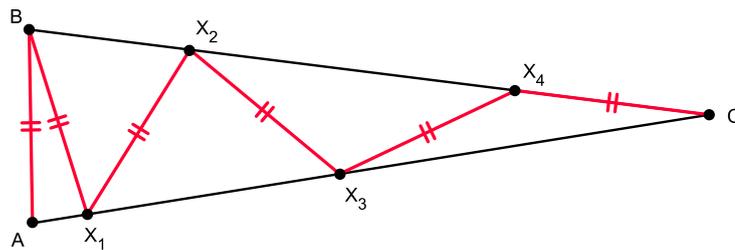


BILD 4.52: Zu Aufgabe 372

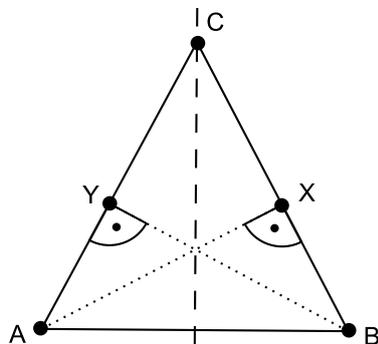
Zur Trigonometrie

Zu den Eigentümlichkeiten unseres geometrischen Theorieaufbaus gehört die späte Einführung des Winkelmaßes. Innerhalb der Winkeltheorie überrascht wiederum die untergeordnete Rolle der in der Schule so bedeutsamen Kongruenzsätze: Zum einen werden diese bei uns erst mithilfe der Trigonometrie bewiesen (weil es früher nicht machbar ist), und zum anderen verblasst ihre praktische Bedeutung beim Lösen von Aufgaben. Der Verfasser dieser Arbeit hat in dieser Hinsicht eine erstaunliche Erfahrung gemacht: Vor mehr als einem Jahrzehnt begann er mit dem Aufbau eines privaten Archivs von mathematischen Wettbewerbsaufgaben. Tausende von Aufgaben wurden gesammelt, und in einem langen Katalog wurden zu jeder Aufgabe Stichworte bezüglich der

wesentlichen Hilfsmittel zur Lösung der Aufgaben hinterlegt, etwa „Thales und Mittellotprinzip“ oder „Gaußsches Zählprinzip“. Viele der gesammelten Aufgaben waren geometrischer Natur, und unter diesen kamen zahlreiche Aufgaben vor, die damals mit dem Hinweis auf Kongruenzsätze katalogisiert wurden. Bei einer erneuten Sichtung dieser Aufgaben heute stellt sich regelmäßig heraus, dass Kongruenzsätze zu deren Lösung *nicht* notwendig sind. Das Bewusstsein des Verfassers für die Stufung der geometrischen Theorie ist gegenüber den Zeiten der Grundlegung des Archivs wesentlich geschärft, und erst jetzt fällt auf, dass praktisch alle diese Aufgaben ohne Verwendung von Kongruenzsätzen, in vielen Fällen sogar völlig winkelfrei bewiesen werden können. Diese Aufgaben können also gewissermaßen von der Stufe der Trigonometrie heruntergereicht werden zur elementaren Winkellehre, von dort oft weiter hinunter zur Längenrechnung (ohne Winkelmaß) und manchmal sogar ganz hinab bis zur Stufe der abstrakten Geometrie. Wir betrachten ein sehr schlichtes Beispiel:

AUFGABE 373:

Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck, und seien X und Y die Fußpunkte der Höhen durch A bzw. B . Dann sind AX und BY gleich lang.



Ursprünglich hat der Verfasser dieser Arbeit die Aufgabe 373 mit dem Hinweis auf die Kongruenzsätze SSW bzw. WSW verbunden. Und in der Tat: In den Dreiecken AXB und BYA stimmen die Winkel an der jeweils ersten Ecke wegen des Basiswinkelsatzes und an der jeweils zweiten Ecke nach Konstruktion (Höhen!) überein, und wegen der 180° -Winkelsumme gilt dies dann auch an der jeweils dritten Ecke; weil die beiden

Dreiecke außerdem in der Seite AB bzw. deren Länge übereinstimmen, kann der Kongruenzsatz WSW bemüht werden, um den Nachweis zu führen, dass auch AX und BY der Länge nach übereinstimmen.

Der Kongruenzsatz WSW, der in der Schule so harmlos daherkommt, ist aber der Struktur unserer Theorie nach in Wahrheit ein schweres Geschütz: Wir haben ihn erst weit *nach* dem Strahlensatz, *nach* dem Satz des Pythagoras und sogar *nach* Einführung der trigonometrischen Funktionen beweisen können. Tatsächlich war gar der Cosinussatz zum Beweis des Kongruenzsatzes vonnöten. Wir können die Aufgabe 373 nun aber auch auf den weiter unten liegenden Stufen der

geometrischen Theorie lösen. In diesem Fall ist es wohl so, dass der natürlichste Beweis gleich auf der untersten Stufe, der abstrakten Geometrie, angesiedelt ist. Auf den Zwischenstufen nämlich bietet die elementare Winkellehre in diesem Fall anscheinend keine Beweismittel an, und die Längenrechnung offeriert mit der Höhenformel ein zwar sehr schlagkräftiges Werkzeug, das die Aufgabe blitzartig löst, aber angesichts der Schlichtheit der Aufgabe überdimensioniert wirkt.

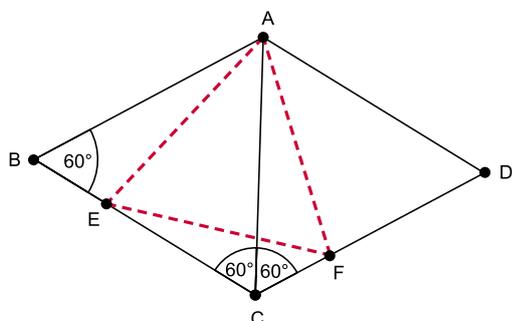
Wir begeben uns also in die abstrakte Geometrie hinunter und nutzen die Symmetrie des gleichschenkligen Dreiecks ABC aus: Nach dem Mittellotprinzip und gemäß der Definition der Winkelhalbierenden (4.28) ist nämlich das Mittellot m von AB eine Winkelhalbierende von \overline{AC} , \overline{BC} . Die Geradenspiegelung σ an m überführt also \overline{BC} in die Gerade \overline{AC} , und es gilt $B\sigma = A$. Weil X auf \overline{BC} liegt, liegt der Bildpunkt $X\sigma$ somit auf \overline{AC} ; und aus $\overline{AX} \perp \overline{BC}$ folgt mittels der Geraden- und Senkrechttreue von σ die Beziehung $\overline{A\sigma X\sigma} \perp \overline{B\sigma C\sigma}$, also $\overline{BX\sigma} \perp \overline{AC}$. Also ist $X\sigma$ der Fußpunkt des Lotes von B auf \overline{AC} , und die Eindeutigkeit des Lotes erzwingt damit die Identität $X\sigma = Y$. Damit sind AX und BY Bilder voneinander bei der Spiegelung σ und somit wegen der Längentreue der Geradenspiegelung gleich lang.

Aus schulischer Sicht wirkt der soeben vorgestellte Beweis der abstrakten Theorie sicherlich komplizierter als die Verwendung eines Kongruenzsatzes; immerhin mussten wir eine Abbildung betrachten, mit der entsprechenden Symbolik hantieren und die Eigenschaften einer solchen Abbildung ausnutzen: Geraden-, Längen- und Senkrechttreue der Geradenspiegelung σ . Außerdem mussten wir eine in der Schule unbeliebte Eindeutigkeitschlussfolgerung ziehen (Eindeutigkeit des Lotes). Der Beweis der abstrakten Theorie erscheint somit tatsächlich abstrakter als der Kongruenzbeweis; letzterer ist anschaulich leichter zugänglich. Doch müssen wir uns klarmachen, dass die anschauliche Eingängigkeit des Kongruenzbeweises nicht bedeutet, dass wir uns dabei in einem leicht erreichbaren Stockwerk der geometrischen Theorie bewegen; die formale Absicherung durch eine allein begrifflich fundierte Theorie ist beim Kongruenzsatz tatsächlich deutlich schwerer als beim abstrakten Beweis.

Als weitere Beispiele für Aufgaben, die in der Schule vermutlich eher durch Kongruenzsätze (also mithilfe von Trigonometrie) gelöst werden, obwohl eine vollständig abstrakte Lösung machbar ist, nennen wir die Aufgaben 265 und 266. Schon das Vokabular der jeweiligen Aufgabentexte, die ohne Längenmaß und ohne Winkelmaß auskommen, lässt die Vermutung zu, dass es einen abstrakten Beweis wohl geben wird. Verdächtig sind allerdings auch solche Aufgaben,

die zwar vordergründig Winkelinventar mit sich führen, sich dabei aber auf „besondere“ Winkelmaße wie 30° , 45° , 60° , 90° oder 120° beschränken; meist können diese Aufgaben leicht in die abstrakte Geometrie übersetzt werden, wobei dann in der Regel gleichseitige oder rechtwinklige Dreiecke auftreten, bei denen durch Winkelhalbierende oder durch Spiegelung Ersatz für die Winkelmaße 30° , 45° und 120° beschafft werden kann. Als Beispiel betrachten wir erneut die Aufgabe 338; im Aufgabenkatalog zur Längenrechnung haben wir eine winkelfreie Version dieser Aufgabe angeboten (Seite 370). In der 43. Mathematik-Olympiade trat sie etwa in folgender Fassung auf:

Gegeben seien eine Raute $ABCD$ mit $\angle ABC = 60^\circ$ sowie zwei Punkte E und F Punkte mit $\overset{B}{\bullet} \overset{E}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$, $\overset{C}{\bullet} \overset{F}{\bullet} \overset{D}{\bullet}$ sowie $|BE| = |CF|$. Dann ist das Dreieck AEF gleichseitig.



Auch bei dieser Aufgabe versuchen wir zunächst einen trigonometrischen Beweis. Dieser fällt besonders hinsichtlich der Gleichheit von $|AE|$ und $|AF|$ leicht, denn aus der Winkelbedingung folgt $|AB| = |AC|$, und der Kongruenzsatz SWS zeigt dann die Kongruenz der Dreiecke ABE und ACF . Um auch die

Gleichheit von $|AE|$ und $|EF|$ zu zeigen, greifen wir auf den Cosinussatz zurück und nutzen die Beziehung $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = -\cos 120^\circ$ aus; es gilt nämlich

$$\begin{aligned} |AE|^2 &= |AB|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BE| \cdot \cos 60^\circ \\ &= |AB|^2 + |BE|^2 - |AB| \cdot |BE| \\ &= |AB|^2 + |BE|^2 - 2|AB| \cdot |BE| + |BE|^2 + |AB| \cdot |BE| - |BE| \cdot |BE| \\ &= |BC|^2 + |BE|^2 - 2|BC| \cdot |BE| + |CF|^2 + |BC| \cdot |CF| - |BE| \cdot |CF| \\ &= (|BC| - |BE|)^2 + |CF|^2 - 2 \cdot (|BC| - |BE|) \cdot |CF| \cdot \cos 120^\circ \\ &= |EF|^2. \end{aligned}$$

Dass $\angle ECF = 120^\circ$ gilt, ergibt sich übrigens auch jenseits der Anschauung aus Bemerkung 4.108 b).

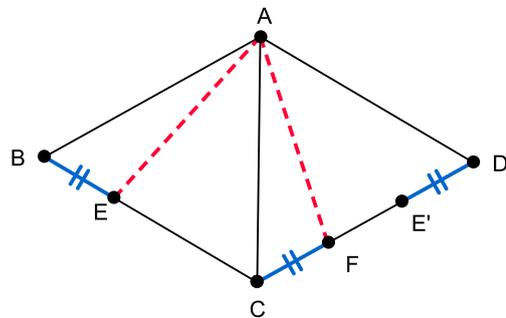
Wir reichen diese Aufgabe nun von der Stufe der Trigonometrie hinunter auf die einfacheren Stufen der geometrischen Theorie; wie auf Seite 370 nachzulesen ist, ersetzen wir dafür die 60° -Bedingung durch die Vorgabe gleichseitiger Dreiecke. Wir hantieren zunächst einmal mit bloßer Längenrechnung. Auch

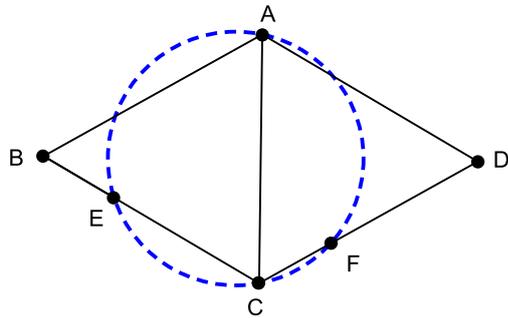
hier fällt der Nachweis von $|AE| = |AF|$ besonders leicht, denn gemäß der Vier-Punkte-Formel gilt

$$|AE|^2 = |AB|^2 - |BE| \cdot |EC| = |AC|^2 - |CF| \cdot |FD| = |AF|^2.$$

Der Längenrechnungsnachweis von $|AE| = |EF|$ ist technisch etwas mühselig; allerdings liegt die Idee auf der Hand: Wir wenden zwei weitere Male die Vier-Punkte-Formel an und berechnen zunächst die Strecke ED im Dreieck BCD , danach die Strecke EF im Dreieck CDE . Dabei ergibt sich die gewünschte Längengleichheit; wir führen die Rechnung hier aber nicht im Detail aus.

Wir probieren nun eine weitere Lösung unserer Aufgabe, diesmal im Wesentlichen mit Mitteln der abstrakten Geometrie. Das erste Teilziel ist erneut der Nachweis von $|AE| = |AF|$. Wir untersuchen dafür die Spiegelung an \overline{AC} : Der Punkt B geht dabei in D über, E in E' , und A sowie C sind Fixpunkte. Die Längentreue von Spiegelungen bewirkt zum einen die Gleichung $|BE| = |DE'|$, zum anderen bewirkt sie, dass E' zwischen C und D liegt. Wegen der Längentreue gilt außerdem $|AE| = |AE'|$, so dass uns nun also der Nachweis von $|AE'| = |AF|$ genügt. Diesen Nachweis führen wir mithilfe der Spiegelung am Mittellot von CD ; wir müssen lediglich zeigen, dass F bei dieser Spiegelung in E' übergeht; die Längentreue wird dann für die Beziehung $|AE'| = |AF|$ sorgen. Der Punkt F geht bei der Spiegelung am Mittellot von CD in einen Punkt F' über, der auf \overline{CD} liegt und für den außerdem $|DF'| = |CF|$ gilt, also $|DF'| = |BE|$. Aus der Eindeutigkeit der Streckenabtragung innerhalb einer Strecke folgt nun die gewünschte Identität $F' = E$. Damit haben wir den ersten Teil der Behauptung, nämlich $|AE| = |AF|$, im Wesentlichen mit abstrakten Instrumenten bewiesen. Lediglich der Eindeutigkeitschluss $F' = E$ kam mithilfe der *zwischen*-Beziehung zustande, also unter Verwendung des Längenmaßes. Dies ist aber sicherlich unvermeidbar, denn die Lage von E bzw. F wurde im Aufgabentext ja erst durch die *zwischen*-Beziehung eindeutig fixiert.





Es fehlt nur noch der abstrakte Beweis von $|AE| = |EF|$: Wir betrachten dazu den Umkreis k des Dreiecks CEF . Der Punkt A liegt auf einer Winkelhalbierenden von $\overline{CE}, \overline{CF}$ und außerdem – wegen $|AE| = |AF|$ – auch auf dem Mittellot von EF ; nach dem Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz liegt A also

ebenfalls auf k . Somit ist k auch der Umkreis von ACF . Die Gerade \overline{CE} ist eine Winkelhalbierende von $\overline{CA}, \overline{CF}$, weil sie senkrecht auf dem Mittellot von AD steht, das seinerseits eine Winkelhalbierende dieses Geradenpaares ist; dabei geht in die Argumentation mit ein, dass $ABCD$ eine Raute ist, also ein Parallelogramm, und dass ACD gleichseitig ist. Wir berufen uns erneut auf den Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz und erkennen mit seiner Hilfe, dass E auf dem Mittellot von AF liegt. Das Mittellotprinzip zeigt nun, dass die Strecken EA und EF tatsächlich gleich lang sind.

Wie wir gesehen haben, ist die Aufgabe 338 ein Paradebeispiel für das Bearbeiten einer Aufgabe auf verschiedenen geometrischen Stufen. Dass sich dabei die Kongruenzsätze als entbehrlich erweisen, ist eher die Regel als die Ausnahme. Allerdings bleibt natürlich das Problem bestehen, dass das Lösen einer Aufgabe auf elementarer Stufe (abstrakte Geometrie) mit zusätzlichen didaktischen Schwierigkeiten im Unterricht einhergehen wird. Während also wohl fast jeder Achtklässler unseren Kongruenzbeweis für $|AE| = |AF|$ bei Aufgabe 338 erfolgreich nachvollziehen könnte, ist dies beim abstrakten Beweis eher fraglich. Die Schlichtheit einer mathematischen Theorie ist eben nicht gleichzusetzen mit didaktischer Einfachheit.

So sehr wir hier betonen, dass die Kongruenzsätze beim Lösen von Aufgaben meist nicht notwendig sind, so sehr möchten wir doch darauf hinweisen, dass damit nicht die ganze Trigonometrie geringgeschätzt sein soll. Die Kongruenzsätze sind ja (in unserem Theorieaufbau) nur eines von vielen Ergebnissen der Trigonometrie, und viele der anderen trigonometrischen Sätze behalten ihre große Bedeutung. Während in der Schule vor allem mit dem Sinussatz und dem Cosinussatz hantiert wird, möchten wir auch auf die Bedeutung des beinahe vergessenen Projektionssatzes hinweisen. Dass er in mathematischen Schulbüchern schon lange nicht mehr auftritt, mag vor allem daran liegen, dass er anders als Sinus- und Cosinussatz in seiner Gleichung fünf (statt vier) Größen miteinander in Beziehung setzt; er erscheint somit vielleicht als minderwertig, weil sich mit

seiner Hilfe bei drei gegebenen Dreiecksgrößen keine weitere berechnen lässt. Diese Einschätzung mag für die Bewältigung von manchen Standardaufgaben nachvollziehbar sein, doch sollten wir nicht die herausragende Rolle des Projektionsatzes bei unserem Beweis der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus vergessen. Allein schon an dieser Stelle macht er sich bezahlt, denn wo gäbe es einen schlichteren, sogar nicht-konfigurativen Beweis der Additionstheoreme? Die trigonometrischen Additionstheoreme sind durchaus schlicht beweisbar; ihren Nimbus des Komplizierten, der vielleicht aus ihrer Nähe zur Differentialrechnung resultiert, wo sie zum Ableiten der trigonometrischen Funktionen benötigt werden, besitzen sie zu Unrecht. Da die bekannten trigonometrischen Sätze wie Sinus- und Cosinussatz hier wohl kaum der Demonstration bedürfen, beschließen wir unseren Kommentar zu trigonometrischen Aufgaben mit einer recht interessanten Aussage, die mit einem Additionstheorem bewiesen werden kann:

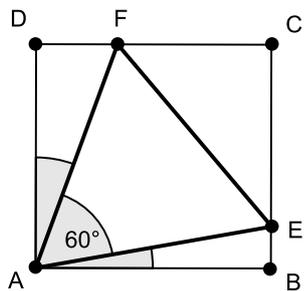
AUFGABE 374:

- a) Man beweise das Additionstheorem der Tangensfunktion: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$ mit $\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq 90^\circ$ und $\alpha + \beta < 180^\circ$ gilt die Gleichung $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$.
- b) Sei $ABCD$ ein Rechteck mit *rationalen* Seitenlängen, und seien E, F Punkte mit den Eigenschaften $\overset{B}{\bullet} \text{---} \overset{E}{\bullet} \text{---} \overset{C}{\bullet}$ und $\overset{C}{\bullet} \text{---} \overset{F}{\bullet} \text{---} \overset{D}{\bullet}$ derart, dass AEF ein gleichseitiges Dreieck ist. Dann ist zumindest eine der Zahlen $|BE|, |FD|$ *irrational*.

Das Additionstheorem für den Tangens kann bekanntlich auf diejenigen für Sinus und Cosinus zurückgeführt werden: Seien also $\alpha, \beta \in \mathbb{W}$ mit den Eigenschaften $\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq 90^\circ$ und $\alpha + \beta < 180^\circ$ gegeben. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}. \end{aligned}$$

Das Tangens-Additionstheorem zeigt insbesondere, dass $\tan(\alpha + \beta)$ rational ist, falls $\tan \alpha$ und $\tan \beta$ beide rational sind.



Wir wenden uns nun der eigentlich interessanten Aussage aus Teil b) zu. Seien also die Punkte A, B, C, D, E, F wie im Aufgabentext beschrieben. Mithilfe von Bemerkung 4.108 c) erkennen wir auch jenseits der Anschauung die Winkeldreiteilung

$$\begin{aligned} 90^\circ = \angle BAD &= \angle BAE + \angle EAF + \angle FAD \\ &= \angle BAE + 60^\circ + \angle FAD, \end{aligned}$$

aus der sich $\angle BAE + \angle FAD = 30^\circ$ ergibt. Wegen

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist auch klar, dass $\tan 30^\circ$ irrational ist. Wären nun die fraglichen Größen $|BE|$ und $|FD|$ beide rational, so wären sowohl

$$\tan \angle BAE \quad \left(= \frac{|BE|}{|AB|} \right)$$

als auch

$$\tan \angle FAD \quad \left(= \frac{|FD|}{|AD|} \right)$$

ihrerseits rational; damit wäre aber nach unserer Beobachtung von oben auch

$$\tan 30^\circ \quad \left(= \tan(\angle BAE + \angle FAD) \right)$$

rational, was eben nicht der Fall ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass eine der Zahlen $|BE|$ und $|FD|$ *nicht* rational ist, womit die Aufgabe 374 schließlich gelöst ist.

Die Aussage aus Teil b) von Aufgabe 374 ist deshalb interessant, weil sie zeigt, dass es in einem rechtwinkligen Koordinatensystem kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen Eckpunkte ausschließlich rationale Koordinaten besitzen. Dies wirft die naheliegende Frage auf, welche Dreiecke doch auf die beschriebene Weise in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingebettet werden können: Der unterhaltsame Artikel *Das Zentrum für extrem abstrakte Skulptur* von Ian Stewart³⁸ beschäftigt sich unter anderem mit dieser Frage und beantwortet sie auch: Für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{W}$ mit $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ gibt es in einem rechtwinkligen Koordinatensystem genau dann ein Dreieck mit diesen Winkelmaßen und ausschließlich rationalen Koordinaten, wenn eines der drei Winkelmaße gleich 90° ist oder andernfalls alle drei Winkel rationale Tangenswerte besitzen. Im Falle des gleichseitigen Dreiecks scheitert die Angelegenheit also an der Irrationalität von $\tan 60^\circ (= \sqrt{3})$.

³⁸ erschienen in: Spektrum der Wissenschaft, Juli 1993

Weitere Aufgaben

AUFGABE 375 [Cosinussatz, Trigonometrischer Pythagoras]: In jedem echten Dreieck ABC gilt $F(a^2, b^2, c^2) = 4 a^2 b^2 \cdot \sin^2 \gamma$. Diese trigonometrische Auflösung der Heronischen Funktion F erlaubt die Anpassung zahlreicher Längenformeln an die trigonometrische Sprache.

AUFGABE 376 [Verallgemeinerter Kathetensatz 4.76, Cosinussatz]: Sei ABC ein echtes Dreieck, und sei X der Fußpunkt der Höhe durch C . Dann liegt X echt zwischen A und B genau dann, wenn $\alpha, \beta < 90^\circ$ gilt.

AUFGABE 377 [Cosinussatz, Satz 4.73]: Man zeige, dass die folgenden Beschreibungen der *Spitzwinkligkeit* eines Dreiecks für jedes echte Dreieck ABC äquivalent sind:

- (1) Alle drei Winkel des Dreiecks ABC sind kleiner als 90° .
- (2) Alle drei Höhenfußpunkte von ABC sind innere Punkte der jeweiligen Seiten.
- (3) Die Summe zweier Seitenlängenquadrate ist stets größer als das dritte Seitenlängenquadrat.
- (4) Für die Seitenlängen gilt $F(a^4, b^4, c^4) > 0$ mit der Heronischen Funktion F .

Hinweis: Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich aus der Aussage von Aufgabe 376.

AUFGABE 378 [Mittelparallelsatz, Satz 4.107, Sinussatz]: In einem Kreis k betrachten wir einen Durchmesser AB und eine Sehne ST mit dem Mittelpunkt M , wobei S und T beide von A bzw. B verschieden sind. Sei X der Fußpunkt des Lots von S auf \overline{AB} . Zeige, dass $\sin \angle MXS$ nur von der Länge der Sehne ST abhängt (und nicht von der Lage dieser Sehne im Kreis).

Hinweis: Man betrachte den Verdopplungspunkt U von SX und weise nach, dass $UTMX$ ein Trapez ist.

AUFGABE 379 [Winkel im Trapez, Cosinussatz]: Eine Längenformel für das Trapez: Sei $ABCD$ ein normales Viereck. Dann gilt die Implikation:³⁹

$$ABCD \text{ ist ein Trapez oder } BCDA \text{ ist ein Trapez} \\ \implies (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(f^2 - e^2) = (a^2 - c^2)(b^2 - d^2).$$

AUFGABE 380 [Cosinussatz]: Ist jede Seitenlänge eines echten Dreiecks größer als 1 und kleiner als $\sqrt{2}$, so ist das Dreieck spitzwinklig, d.h. alle drei Winkelgrößen sind kleiner als 90° .

Hinweis: Diese Aussage ist lediglich eine Anwendung der Äquivalenz von (1) und (3) aus Aufgabe 377.

³⁹ Vermutlich gilt auch die Umkehrung dieser Implikation. Ein Beweis dafür liegt aber nicht vor.

AUFGABE 381 [Cosinussatz, Pythagoras]: Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein Punkt X liege außerhalb von g auf dem Lot auf g durch C . Außerdem seien die Strecken XC, AB, BC, CD, DE und EF allesamt gleich lang. Dann gilt $\angle AXF = 135^\circ$.

AUFGABE 382 [Ptolemäus]: Wenn ein normales Viereck einen Umkreis mit dem Radius 1 hat, so hat die kürzeste Seite des Vierecks höchstens die Länge $\sqrt{2}$.

AUFGABE 383 [Sinussatz, Sinus-Additionstheorem, Satz 4.73]: Wir interessieren uns für Dreiecke, in denen ein Winkel genau doppelt so groß ist wie ein anderer.

- a) Es gilt $\beta = 2\alpha$ genau dann, wenn die Gleichung $b^2 = ac + a^2$ erfüllt ist.
- b) Zur Herstellung solcher Dreiecke mit *ganzzahligen* Seitenlängen eignet sich folgende Parametrisierung:⁴⁰ Seien n, m positive (natürliche oder reelle) Zahlen mit $n < m < 2n$. Wir definieren dann

$$a := n^2, \quad b := mn, \quad c := m^2 - n^2.$$

Zeige, dass die derart definierten Zahlen a, b, c die Gleichung aus a) erfüllen und dass es tatsächlich ein Dreieck mit diesen Seitenlängen gibt.

- c) Man überzeuge sich davon, dass die beiden Dreiecke mit den Seitenlängen $a = 4, b = 6, c = 5$ bzw. $a = 9, b = 15, c = 16$ zu der hier diskutierten Klasse von Dreiecken gehören.

AUFGABE 384 [Cosinussatz, Monotonie des Cosinus]: Sei $ABCD$ ein normales Viereck mit $b = d$ und $\delta > \gamma$. Dann gilt auch $e > f$.

AUFGABE 385 [Sinussatz]: In einem Dreieck ABC sei D ein Punkt echt zwischen A und C derart, dass $\angle CAB = \angle CBD = 45^\circ$ und $\angle ABD = 15^\circ$ gilt. Dann ist DC doppelt so lang wie AD .

AUFGABE 386 [Cosinussatz]: In einem echten Dreieck ABC gilt $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ genau dann, wenn $\angle ABC = 60^\circ$ ist.

AUFGABE 387 [Cosinus im rechtwinkligen Dreieck]: In einem gleichschenkligen Dreieck sei die Schenkellänge s und die Basislänge b ; in einem anderen gleichschenkligen Dreieck sei die Schenkellänge b und die Basislänge s . Die Größe der Basiswinkel der beiden Dreiecke sei δ bzw. ε . Dann gilt $\cos \delta \cdot \cos \varepsilon = \frac{1}{4}$.

⁴⁰ Diese Parametrisierung stammt aus: Emil Knup, *Über eine spezielle Klasse von Dreiecken mit ganzzahligen Seiten*, in: Elemente der Mathematik, Band 33 (1978), Birkhäuser Verlag. Der Artikel ist auch im Internet verfügbar: http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=PPN378850199_0033&DMDID=dmdlog41 (Abrufdatum: 27. September 2012).

AUFGABE 388 [Symmetrie des Sinus, Sinus-Additionstheorem]: In jedem echten Dreieck gilt $\sin^2 \gamma \geq \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$.

AUFGABE 389 [Satz 4.132, Kennzeichnungssatz für Sehnenvierecke, Winkel im Trapez]: Es seien $ABCD$ ein Sehnenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Die Seitenlinien \overline{DA} und \overline{BC} mögen einander in einem Punkt X schneiden. Dann sind die innere Winkelhalbierende im Dreieck BSA bei S und die innere Winkelhalbierende im Dreieck AXB bei X parallel.

AUFGABE 390 [Pythagoras, Cosinus und Sinus im rechtwinkligen Dreieck, Additionstheorem für Cosinus⁴¹, Injektivität des Cosinus]: Sei $ABCD$ ein Rechteck mit $|BC| = 3|AB|$. Außerdem seien X und Y diejenigen Punkte zwischen B und C , für die $|BX| = |XY| = |YC|$ gilt. Dann gilt $\angle DBC + \angle DXC = \angle DQC$.

AUFGABE 391 [Sehnen-Sekanten-Satz, Cosinussatz]: Sei $AXYB$ ein Sehnenviereck, und sei C ein Punkt mit $\overset{X}{\bullet} - \overset{A}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$ und $\overset{Y}{\bullet} - \overset{B}{\bullet} - \overset{C}{\bullet}$. Ferner gelte $|AB| = 6$, $|BC| = 7$, $|CA| = 5$, $|AX| = 16$, $|YB| = 8$. Berechne $|XY|$.

AUFGABE 392 [Sinussatz, Monotonie des Sinus]: Seien k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und A ein Punkt, der innerhalb von k liegt und von M verschieden ist. Für alle $X \in k$, die nicht auf \overline{MA} liegen, betrachten wir die Winkelgröße $\angle MXA$.

- Zeige, dass alle diese Winkelgrößen kleiner als 90° sind (Thales, Additionsregel).
- Bestimme diejenigen Lagen von X , für die $\angle MXA$ maximal ist (Monotonie des Sinus auf $\mathbb{W}_{\leq 90^\circ}$, Sinussatz).

AUFGABE 393 [Basiswinkelsatz, Thales, Satz 4.132]: Sei k ein Kreis mit dem Durchmesser AB , und seien C, D, E weitere Punkte auf k derart, dass sowohl $ABEC$ als auch $BEDC$ normal sind. Außerdem seien die Sehnen AC und CD gleich lang. Für die Diagonalschnittpunkte X bzw. Y dieser beiden Vierecke gilt dann die Gleichung $\angle AXB = \angle BYC$.

AUFGABE 394 [Sehnenregel, Grundtatsachen 4.89 und 4.90, Ptolemäus]: Das Neuneck $ABCDEFGHI$ sei regelmäßig, und es seien x, y, z die Längen der Diagonalen erster bzw. zweiter bzw. dritter Art in diesem Neuneck. Außerdem sei s die Seitenlänge des Neunecks. Man zeige:

- Die Vierecke $DABC$ und $EABD$ sind symmetrische Trapeze.
- Es gilt: $y = \frac{x^2 - s^2}{s}$ und $z = x + s$.

Hinweis: Für b) wende man den Satz des Ptolemäus auf die Sehnenvierecke $ABCD$ und $ADEF$ an.

⁴¹ Wer die fraglichen Cosinuswerte bei dieser Aufgabe schlicht mit dem Taschenrechner ermittelt, kommt auch ohne Additionstheorem aus.

AUFGABE 395 [Kennzeichnungssatz für Sehnenvierecke, Satz 4.132, Winkel im Trapez, Axiom von Pasch, Paschaxiom für Kreise⁴²]: Sei ABC ein echtes Dreieck mit $\angle BAC = 60^\circ$, und seien D und E Punkte mit $\overset{A}{\bullet} \overset{D}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ bzw. $\overset{A}{\bullet} \overset{E}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$, und zwar jeweils mit der *echten zwischen*-Beziehung. Sei k der Umkreis von ABC . Der Schnittpunkt von \overline{BD} und k heiße X ; und der Schnittpunkt von \overline{CE} und k heiße Y . Den Schnittpunkt von \overline{BD} und \overline{CE} schließlich nennen wir S . Dann gilt: Die Geraden \overline{BY} und \overline{CX} sind genau dann parallel, wenn $AESD$ ein Sehnenviereck ist.

AUFGABE 396 [Ptolemäus]: Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, und sei X ein Punkt auf dessen Umkreis. Die größte der drei Zahlen $|AX|, |BX|, |CX|$ ist dann die Summe der beiden kleineren.

AUFGABE 397 [Thales, Kennzeichnungssatz für Sehnenvierecke, Additionsregel]: $ABCD$ sei ein Sehnenviereck mit dem Umkreismittelpunkt M derart, dass AB ein Durchmesser des Umkreises ist und die Gleichungen $|BD| = |AM|$ und $|BC| = |CD|$ gelten. Berechne die Größe der Winkel im Viereck $ABCD$.

AUFGABE 398 [Sinussatz]: Man beweise die folgende *trigonometrische Version des Satzes von Ceva*: Sei ABC ein echtes Dreieck, und seien $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{BC}$, $Z \in \overline{CA}$ Punkte, die von den Ecken A, B, C verschieden sind (siehe Bild 4.25 auf Seite 284). Dann gilt: Wenn die Geraden \overline{AX} , \overline{BY} und \overline{CZ} einander in einem Punkt schneiden, so ist

$$\sin \angle ACX \cdot \sin \angle BAY \cdot \sin \angle CBZ = \sin \angle XCB \cdot \sin \angle YAC \cdot \sin \angle ZBA.$$

Sind X, Y, Z *innere* Punkte der jeweiligen Seiten von ABC , so gilt auch die Umkehrung dieser Implikation.

AUFGABE 399 [Axiom von Pasch, Sinussatz, Ceva]: Sei ABC ein echtes Dreieck mit $\angle BAC = 40^\circ$ und $\angle ABC = 60^\circ$. Seien D und E außerdem Punkte mit den Eigenschaften $\overset{A}{\bullet} \overset{D}{\bullet} \overset{C}{\bullet}$ und $\angle CBD = 40^\circ$ bzw. $\overset{A}{\bullet} \overset{E}{\bullet} \overset{B}{\bullet}$ und $\angle BCE = 70^\circ$. Der Schnittpunkt von \overline{BD} und \overline{CE} heiße F . Dann gilt: $\overline{AF} \perp \overline{BC}$.

Hinweis: Wenn man die Umkehrung der Implikation aus Aufgabe 398 benutzt, so läuft diese Aufgabe auf den Nachweis der Identität $\sin 30^\circ \cdot \sin 40^\circ = \sin 70^\circ \cdot \sin 20^\circ$ hinaus. Diese Identität wiederum ist leicht einzusehen, wenn man $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ benutzt (Komplementarität von Sinus und Cosinus), das Sinus-Additionstheorem auf $\sin(20^\circ + 20^\circ)$ anwendet und die Beziehung $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ausnutzt.

AUFGABE 400 [Ptolemäus]: Seien ABC ein echtes Dreieck und X ein Punkt auf seinem Umkreis. Dann gilt: $\frac{|XA|}{|BC|} + \frac{|XB|}{|CA|} + \frac{|XC|}{|AB|} \geq 2$.

Hinweis: Abgesehen vom Fall $X \in \{A, B, C\}$ dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das Viereck $ABCX$ normal und damit ein Sehnenviereck ist.

⁴² Die beiden Pasch-Aussagen werden für den Nachweis benötigt, dass $AESD$ und $XCBY$ normal und damit Sehnenvierecke sind.

AUFGABE 401 [Ptolemäus]: Man zeige, dass in jedem regelmäßigen Siebeneck $ABCDEFG$ die Beziehung $\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}$ gilt.

Hinweis: Man berücksichtige die Grundtatsachen 4.89 und 4.90 und wende den Satz des Ptolemäus auf das Viereck $ABCE$ an.

AUFGABE 402 [Ptolemäus, Satz 4.132, Cosinus im rechtwinkligen Dreieck, Cosinussatz]: Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck derart, dass ACB gleichschenkelig ist. E sei der Fußpunkt des Lots von B auf \overline{AD} . Dann gilt $|CD| + |DA| = 2|DE|$.

AUFGABE 403 [Basiswinkelsatz, Thales, Ptolemäus, Sehnensatz]: Sei $ABCD$ ein Rechteck mit $|AB| = 6$ und $|BC| = 8$. Sei E ein Punkt zwischen A und D mit $|AE| = 2$. Schließlich sei F der (zweite) Schnittpunkt von \overline{CE} mit dem Umkreis von $ABCD$. Bestimme die Längen $|FB|$ und $|FD|$.

AUFGABE 404 [Sinussatz, Kennzeichnungssatz für Sehnenvierecke (Satz 4.129), Implikation (4.52) aus Satz 4.113, Winkel im Parallelogramm (Satz 4.106), Thales]: Man beweise, dass für jedes normale Viereck $ABCD$ auch die Umkehrung der Implikation aus Aufgabe 280 gilt.

Hinweis: Man zeige, dass unter den fraglichen Voraussetzungen jedenfalls einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

- $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$: Dann ist $ABCD$ nach Satz 4.106 ein Parallelogramm.
- $ABCD$ ist ein Sehnenviereck: Dann sind \overline{AC} und \overline{BD} Symmetrieachsen des Umkreises k von $ABCD$ und verlaufen damit durch den Mittelpunkt von k , womit $ABCD$ nach dem Satz des Thales ein Rechteck und insbesondere ein Parallelogramm ist.

Quellennachweis der Aufgaben

Im Folgenden werden die Quellen aller in dieser Arbeit verwendeten Aufgaben angegeben. In manchen Fällen wurde die Quelle fast unverändert übernommen, manchmal wurden leichte Änderungen vorgenommen; und in vielen Fällen dienten die Quellen eher als Anregung denn als konkrete Vorlage. Nicht selten haben die unten aufgeführten „Quellen“ eher den Charakter einer Ergänzung der in dieser Arbeit diskutierten Aufgaben und bieten sich als Vergleich oder als Weiterführung an. Ein Strich in der Liste unten bedeutet, dass keine Quelle zugeordnet werden konnte; entweder stammen diese Aufgaben dann vom Verfasser selbst oder sie wurden von ihm aus der Erinnerung an einige der vielen Aufgaben niedergeschrieben, denen er in der Vergangenheit begegnet ist.

Die bei weitem häufigste Quelle ist der *Deutsche Mathematik-Olympiaden Verein*. Die Aufgaben von dort sind in der Liste unten durch das vorangestellte Kürzel *MO* gekennzeichnet. Die Originalaufgaben können ab dem 37. MO-Jahrgang auf der offiziellen Vereins-Homepage <http://www.mathematik-olympiaden.de>⁴³ eingesehen werden; die älteren Aufgaben sind im privaten Aufgaben-Archiv von Manuela Kugel auf der Homepage <http://www.olympiade-mathematik.de> gesammelt.

Eine zweite Quelle sind die jährlich stattfindenden *Känguru-Wettbewerbe* (<http://www.mathe-kaenguru.de>). Aufgaben mit diesem Ursprung sind durch das Kürzel *Kän* gekennzeichnet; es folgen die Angabe des Jahres und der Klassenstufen.

Auch die *Canadian Mathematical Society* mit ihren zahlreichen Wettbewerben bietet im Internet sehr interessante Aufgaben in großer Zahl an (<http://cms.math.ca/Competitions>), zum Beispiel den *Euclid Contest*, die *Canadian Open Mathematics Challenge* und die *Canadian Mathematical Olympiad* (<http://cms.math.ca/Competitions/CMO>). Aufgaben aus der letztgenannten Quelle sind in der folgenden Liste mit den Buchstaben *CMO* markiert.

Weitere Kürzel wie *AW* oder *Nitz* beziehen sich auf die Angaben im Literaturverzeichnis.

⁴³ Alle Internetadressen dieses Quellenverzeichnisses wurden zuletzt am 1. Januar 2013 geprüft.

• 1 MO 430731 • 2 MO 500835 • 3 MO 391311 • 4 MO 411331 • 5 MO 421341 • 6 MO 420834 • 7 MO 480923 • 8 MO 451016 • 9 MO 490935 • 10 MO 291222 • 11 MO 270932 • 12 MO 321022 • 13 MO 470841 • 14 MO 310914 • 15 MO 261221 • 16 MO 471312 • 17 MO 451313 • 18 MO 430933 • 19 MO 481321 • 20 MO 411321 • 21 MO 471334 • 22 MO 471321 • 23 MO 411141 • 24 MO 410733 • 25 MO 470512 • 26 MO 120923 • 27 MO 421324 • 28 MO 470512 • 29 MO 411012 • 30 MO 420523 • 31 MO 380623 • 32 MO 410632 • 33 MO 440533 • 34 MO 410834 • 35 MO 240934 • 36 – • 37 – • 38 – • 39 – • 40 www.cut-the-knot.org/proofs/average.shtml • 41 MO 151024 • 42 www.cut-the-knot.org/arithmetric/Means.shtml • 43 ebendort • 44 MO 381043 • 45 MO 501332 • 46 MO 301211 • 47 MO 420712 • 48 – • 49 MO 400712 • 50 MO 361311 • 51 MO 310712 • 52 MO 440512 • 53 – • 54 – • 55 MO 420832 • 56 MO 070823 • 57 MO 450934 • 58 MO 241023 • 59 MO 200831 • 60 MO 450621 • 61 MO 311212 • 62 MO 240931 • 63 MO 390821 • 64 CMO 1985 • 65 MO 350736 • 66 MO 170724 • 67 MO 330712 • 68 MO 170724 • 69 MO 330731 • 70 MO 090831 • 71 MO 331012 • 72 Kän 2006 7-8 • 73 MO 280921 • 74 MO 120936 • 75 MO 190824 • 76 MO 070724 • 77 – • 78 MO 490714 • 79 Kän 2004 7-8 • 80 MO 500714 • 81 Kän 2001 7-8 • 82 MO 310732 • 83 MO 391011 • 84 MO 200921 • 85 MO 140923 • 86 Kän 2007 9-10 • 87 MO 301035 • 88 Kän 2004 7-8 • 89 MO 110721 • 90 MO 330822 • 91 MO 411033 • 92 MO 370735 • 93 MO 200723 • 94 Kän 2001 9-10 • 95 MO 490724 • 96 MO 070735 • 97 MO 110731 • 98 MO 360832 • 99 MO 471012 • 100 MO 370944 • 101 MO 451332 • 102 MO 360832 • 103 MO 300834 • 104 – • 105 MO 041035 • 106 Kän 2003 11-13 • 107 MO 430846 • 108 MO 290834 • 109 MO 380922 • 110 MO 370922 • 111 MO 440932 • 112 MO 390845 • 113 MO 280931 • 114 MO 061041 • 115 MO 380822 • 116 MO 470831 • 117 MO 370524 • 118 MO 310821 • 119 MO 360524 • 120 MO 350524 • 121 MO 340711 • 122 MO 371013 • 123 MO 400831 • 124 MO 460615 • 125 MO 111011 • 126 MO 440944 • 127 – • 128 – • 129 – • 130 – • 131 MO 251241 • 132 AW, S.76 ff. • 133 AW, S. 75/76 • 134 Nitz, S. 56/57 • 135 – • 136 – • 137 AW, S. 82 • 138 Nitz, S. 57 • 139 Nitz, S. 58 • 140 Nitz, S. 59 • 141 MO 321023 • 142 Nitz, S. 60 • 143 CH, S. 202/203 • 144 – • 145 – • 146 CH, S. 19 • 147 – • 148 – • 149 CH, S. 19 • 150 – • 151 – • 152 – • 153 – • 154 – • 155 Rudolf Schnabel, Examen für das Lehramt an Realschulen, Frühjahr 2010 • 156 – • 157 MO 311233 B • 158 MO 311233 B und Rudolf Schnabel • 159 MO 151236 A • 160 Rudolf Schnabel, Examen für das Lehramt an Realschulen, Sommer 2011 • 161 Rudolf Schnabel, Examen für das Lehramt an Realschulen, Frühjahr

2011 • 162 – • 163 – • 164 – • 165 – • 166 HW, S. 13 • 167 – •
 168 – • 169 – • 170 Nitz, S. 75 • 171 Rudolf Schnabel, Examen für das Lehramt
 an Realschulen, Frühjahr 2010 • 172 Peter Winkler, Mathematische Rätsel für Liebhaber,
 Spektrum Verlag, 2008, S. 31 • 173 MO 380611 • 174 – • 175 – • 176 – •
 177 MO 321243 und 271224 • 178 CH, S. 185 • 179 – • 180 CH, S. 185 •
 181 CH, S. 185 • 182 CH, S. 185 • 183 – • 184 – • 185 – • 186 MO
 310913 • 187 Wal, S. 111 • 188 – • 189 Wat, S. 2 ff. • 190 Rudolf Schnabel,
 Examen für das Lehramt an Realschulen, Sommer 2011 • 191 Rudolf Schnabel, Examen
 für das Lehramt an Realschulen, Sommer 2011 • 192 Rudolf Schnabel, Examen für das
 Lehramt an Realschulen, Frühjahr 2010 • 193 Rudolf Schnabel, Examen für das Lehramt
 an Realschulen, Frühjahr 2011 • 194 MO 450935 • 195 MO 071335 • 196 – •
 197 – • 198 Rudolf Schnabel, Examen für das Lehramt an Realschulen, Frühjahr 2011
 • 199 – • 200 – • 201 MO 141211 • 202 MO 091213 • 203 – • 204 MO
 191312 • 205 Internationaler Städtewettbewerb Mathematik, Mittelstufe, Frühjahr 2010
 • 206 Monatsaufgabe der Schweizer Mathematik-Olympiade, Oktober 2011 • 207 MO
 431312 • 208 MO 500933 • 209 Pen, Blatt 3, Aufgabe 6; und Schm, S. 98/99 • 210 –
 • 211 – • 212 MO 261223 • 213 MO 350831 • 214 – • 215 MO 491324
 • 216 – • 217 Crux Mathematicorum, September 2009 • 218 Baltic Way Team
 Contest 1992, Problem 15 • 219 MO 181242 • 220 MO 321246 A • 221 AW, S.
 277 • 222 MO 161013 • 223 MO 171014 • 224 Schweizer Mathematik-Olympiade,
 Vorrunde 2007 • 225 MO 490836, MO 250934 und Schweizer Mathematik-Olympiade,
 Vorrunde 2010 • 226 MO 471021, MO 471044 und MO 310931 • 227 MO 480936
 • 228 MO 431021 • 229 AW, S. 300 • 230 AW, S. 301 • 231 MO 431021 •
 232 HHM, S. 46 • 233 MO 060924 • 234 MO 350941 • 235 Wat, S. 7 und S.
 43 • 236 MO 420513 • 237 www.mathematische-basteleien.de/flussueberqueren.htm
 • 238 <http://www.inf.fh-flensburg.de/lang/fun/raetsel/guteboese.htm> • 239 Rieke
 Schulz, Arbeitsgemeinschaft Mathematik am Alten Gymnasium Flensburg • 240 – •
 241 – • 242 – • 243 Stefan Rollnik, Universität Flensburg • 244 – • 245 MO
 420923 • 246 MO 421322 • 247 CMO 1970, Problem 6 • 248 Monatsaufgabe der
 Schweizer Mathematik-Olympiade, Mai 2005 • 249 MO 330936 • 250 MO 471313 •
 251 MO 490943 • 252 MO 370732 • 253 Euclid Contest 2003, Problem 8 b •
 254 – • 255 MO 440833 • 256 MO 150713 • 257 MO 441014 • 258 CMO
 1991, Problem 3 • 259 – • 260 – • 261 – • 262 MO 350845 • 263 MO
 160832 • 264 – • 265 MO 230722 • 266 MO 170712 • 267 – • 268 MO
 480833 • 269 MO 351036 • 270 MO 140814 • 271 MO 421332 • 272 – •
 273 MO 321223 • 274 – • 275 MO 120823 • 276 – • 277 MO 441313 •
 278 <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/math4u/var/pdf/pk63.pdf> • 279 MO 040923
 • 280 – • 281 – • 282 – • 283 MO 461015 • 284 Crux Mathematicorum,

Problem 14 • **285** MO 390835 • **286** MO 390933 • **287** MO 330844 • **288** MO 380933 • **289** MO 181021 • **290** MO 390846 • **291** MO 300812 • **292** MO 400813 • **293** MO 460814 • **294** MO 051012 • **295** MO 400832 • **296** Estonian Autumn Open Contest, October 2003, Juniors, Problem 3 • **297** Kän 11-13, 2002 • **298** MO 490814 • **299** MO 040913 • **300** MO 360943 • **301** MO 130835 • **302** MO 351311 • **303** MO 121031 • **304** MO 141032 • **305** Euclid Contest 2005, Problem 8 b • **306** MO 280935 • **307** – • **308** MO 391024 • **309** MO 381033 • **310** MO 381036 • **311** MO 491312 • **312** MO 060923 • **313** – • **314** MO 261234 • **315** MO 370936 • **316** – • **317** MO 350946 • **318** MO 431033 und MO 440846 • **319** – • **320** MO 140922 • **321** – • **322** MO 501144 • **323** Monatsaufgabe der Schweizer Mathematik-Olympiade, März 2008 • **324** MO 160913 • **325** MO 381322 • **326** MO 420946 • **327** MO 051036 • **328** MO 221212 • **329** MO 080936 • **330** – • **331** MO 251212 • **332** CMO 1971, Problem 1 • **333** MO 320835 • **334** – • **335** MO 281223 • **336** Euclid Contest 1998, Problem 6 b • **337** MO 490835 • **338** MO 430844 • **339** – • **340** – • **341** MO 491141 • **342** MO 471043 • **343** <http://mathworld.wolfram.com/HeronianTriangle.html> • **344** MO 320933 • **345** MO 150823 • **346** MO 280733 • **347** MO 320735 • **348** MO 150924 • **349** MO 490713 • **350** MO 150723 • **351** MO 470812 • **352** Estonian Open Math Contest, 2009/2010, Problem 2 • **353** MO 150813 • **354** MO 440723 • **355** MO 210734 • **356** MO 430833 • **357** MO 320714 • **358** – • **359** MO 230732 • **360** MO 440733 • **361** MO 230922 • **362** MO 490822 • **363** MO 461013 • **364** MO 130922 • **365** MO 450836 • **366** MO 350822 • **367** MO 370824 • **368** MO 481322 • **369** MO 430845 • **370** MO 340712 • **371** MO 390833 • **372** Peter Gallin, 101 Mathematikaufgaben, Aulis Verlag 2006, S. 79 • **373** MO 200724 • **374** MO 201235 • **375** – • **376** – • **377** – • **378** CMO 1986, Problem 3 • **379** – • **380** MO 121212 • **381** MO 130933 • **382** CMO 1969, Problem 9 • **383** siehe Fußnote zu dieser Aufgabe • **384** CMO 1971, Problem 3 • **385** MO 231032 • **386** Estonian Open Math Contest, 2010/11 • **387** Fünfte Fürther Mathematik-Olympiade, 1. Runde, Klassenstufen 9/10, Aufgabe 3 • **388** MO 101231 • **389** MO 141223 • **390** CMO 1974, Problem 2 • **391** Canadian Open Mathematics Challenge, 2003, Teil B, Problem 3 a • **392** CMO 1977, Problem 2 • **393** MO 400935 • **394** MO 330832 • **395** Schweizer Mathematik-Olympiade, Vorrunde 2009 • **396** Ross Honsberger, Mathematical Morsels, S. 172, Mathematical Association of America, 1979 • **397** MO 430823 • **398** – • **399** CMO 1998, Problem 4 • **400** <http://www.yimin-ge.com/doc/geometrie-20070212.pdf>, Beispiel 6.4.1 • **401** <http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php>, Suchbegriff: Ptolemy • **402** Monatsaufgabe der Schweizer Mathematik-Olympiade, September 2004 • **403** <http://mathematicsbhilai.blogspot.de/2011/08/kvpy-practice-questions-iv.html> • **404** –

Literaturverzeichnis

- [AW] Aldous, John und Wilson, Robin: *Graphs and Applications: An Introductory Approach*, Springer, 2000.
- [Bick] Bickel, Klaus: *Die Summe der ersten n Quadratzahlen*, in: MNU 37 (1984), Seite 280.
- [CH] Clark, John und Holton, Derek Allan: *Graphentheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
- [Enz] Enzensberger, Hans Magnus: *Zugbrücke außer Betrieb – Die Mathematik im Jenseits der Kultur*, A K Peters Ltd, 1998.
<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/zugbruecke.html>
(Abrufdatum: 26. Dezember 2012)
- [FM] Fischer, Roland und Malle, Günther: *Mensch und Mathematik*, BI-Wissenschaftsverlag, 1985.
- [Fow] Fowler, David H.: *The Mathematics of Plato's Academy: a new reconstruction*, Clarendon Press, 1987.
- [FW] Franke, Marianne und Wynands, Alexander: *Zum Verständnis von Variablen – Testergebnisse in 9. Klassen Deutschlands*, in: Mathematik in der Schule 10 (1991), Seiten 674-675.
- [HHM] Harris, John; Hirst, Jeffrey und Mossinghoff, Michael: *Combinatorics and Graph Theory*, Springer, 2000.
- [Heu] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil I*, Teubner, 1991.
- [Hons] Honsberger, Ross: *Mathematische Juwelen*, Vieweg, 1982.
- [HW] Hußmann, Stephan und Lutz-Westphal, Brigitte (Hrsg.): *Kombinatorische Optimierung erleben*, Vieweg, 2007.
- [Jeck] Jecklin, Heinrich: *Quasiarithmetische Mittelwerte*, in: Elemente der Mathematik 4 (1949), Seiten 112-115.
www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=GDZPPN002072610
(Abrufdatum: 22. Juni 2011)

- [Lor] Lorenzen, Hinrich: *Zur Didaktik des begrifflichen Denkens in der Geometrieausbildung*, Habilitationsschrift, Universität Kiel, 2002.
- [LW] Lee, Lesley und Wheeler, David: *The Arithmetic Connection*, in: *Educational Studies in Mathematics* 1 (1989), Seiten 41-54.
- [Mal] Malle, Günther: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*, Vieweg, 1993.
- [MBS] Mason, John; Burton, Leone und Stacey, Kaye: *Mathematisch denken. Mathematik ist keine Hexerei*, Oldenbourg, 2006.
- [Metz] Metzler, Hans: *Die Summenformel für die Kubikzahlen*, in: *MNU* 48 (1995), Seiten 347-348.
- [Nitz] Nitzsche, Manfred: *Graphen für Einsteiger*, Vieweg, 2009.
- [Pen] Penso, Lucia Draque: *Übungsblätter zu einer Vorlesung über Graphentheorie an der Universität Ulm*, <http://www.uni-ulm.de/en/mawi/institute-of-optimization-and-operations-research/lehre/ws-201112/graphentheorie.html> (Abrufdatum: 24. Dezember 2011, URL mittlerweile ungültig).
- [Pin] Pinchuk, Moshe: *The sum of the s -th power of the integers*, in: *Elemente der Mathematik* 38 (1983), Seiten 24-25.
www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=PPN378850199_0038&DMDID=dmdlog11 (Abrufdatum: 14. Juni 2011)
- [Pol] Pólya, George: *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme*, Francke, 1995.
- [RC] Rosnick, Peter und Clement, John: *Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions*, in: *Journal of Mathematical Behavior* 3 (1980), Seiten 3-27.
- [Ru] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1964.
- [Schm] Schmitz, Werner: *Über längste Wege und Kreise in Graphen*, in: *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 53 (1975), Seiten 97-103.
http://archive.numdam.org/ARCHIVE/RSMUP/RSMUP_1975__53_/RSMUP_1975__53__97_0/RSMUP_1975__53__97_0.pdf (Abrufdatum: 25. Dezember 2011)

- [ScSch] Scriba, Christoph und Schreiber, Peter: *5000 Jahre Geometrie*, Springer, 2. Auflage, 2005.
- [SK] Schmersau, Dieter und Koepf, Wolfram: *Die reellen Zahlen als Fundament und Baustein der Analysis*, Oldenbourg, 2000.
- [Stew] Stewart, Ian: *Neue Wunder aus der Welt der Mathematik*, Piper, 2010.
- [Tar] Tarski, Alfred: *Einführung in die mathematische Logik*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1969.
- [Volk] Volkmann, Lutz: *Fundamente der Graphentheorie*, Springer, 1996.
- [Voll] Vollrath, Hans-Joachim: *Algebra in der Sekundarstufe*, BI-Wissenschaftsverlag, 1994.
- [vW] van der Waerden, Bartel Leendert: *Die Pythagoreer – religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*, Artemis, 1979.
- [Wal] Wallis, Walter: *A Beginner's Guide to Graph Theory*, Birkhäuser, 2000.
- [Wat] Watkins, John: *Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems*, Princeton University Press, 2004.
- [WM] Wittmann, Erich Christian und Müller, Gerhard: *Wann ist ein Beweis ein Beweis?*, in: *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis*. Festschrift für Heinrich Winter. Cornelsen, 1988.
<http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Verschie/Wittmann1/beweis.htm>
 (Abrufdatum: 22. Juni 2011, URL mittlerweile ungültig)

Schematische Darstellung des geometrischen Theoriegebäudes

Auf den folgenden drei Seiten ist der Aufbau unserer geometrischen Theorie schematisch dargestellt – zunächst die abstrakte Geometrie, dann die Geometrie mit Längenmaß und schließlich die Geometrie mit Längen- und Winkelmaß. Die Darstellung konzentriert sich dabei auf die Axiome der Theorie, die ableitbaren Grundtatsachen und die Sätze. Die drei verschiedenen Kategorien von Aussagen werden im Schema farblich unterschieden.

Dreieckslehre

Satz über das Umdreieck und Satz über den Höhenschnittpunkt

Satz über die 2:1-Teilung der Seitenhalbierenden

Umkreis-Höhen-Satz (mit Ergänzung)

Satz über die Euler-Gerade

Zweikreise-Satz

Umkreis-Winkelhalbierenden-Satz

Satz über den Feuerbachkreis

Eigenschaften von Punkt- und Geraden-spiegelungen

Winkelhalbierende

Charakterisierung (und Definition) von Winkelhalbierenden

Winkelhalbierende als Ortslinie Zweideutigkeit der Winkelhalbierenden

Hilfssatz für Apollonius

Kreise

Sehnenregel

Schnittverhalten von Kreis und Gerade bzw. von Kreis und Kreis

Tangentenkriterium

Umkreise: Existenz und Eindeutigkeit Umkreise von Trapezen

Der Satz des Thales als Ortslienaussage

Viereckslehre

Das Haus der Vierecke

Mittelparallelsatz für Trapeze

Die grundlegenden Sätze der abstrakten Geometrie

Satz über das Seitenmittenviereck

Diagonalsatz

Mittellothprinzip

Satz des Thales

Mittelparallelsatz (Rückwärtsrichtung)

Axiome / Grundtatsachen

Die Streckenkongruenz als Äquivalenzrelation auf $P \times P$, Definitheit, Symmetrie der Strecken

Die Orthogonalität als symmetrische Relation auf G , Existenz und Eind. des Lotes

Mittellorregel

Parallelogrammregel

Mittelparallelsatz (Vorwärtsrichtung)

Vertikgklichkeit von senkrecht und parallel

Die Axiome der affinen Ebene V, P, D (bzw. F statt D)

Längenrechnung

Parallelogrammformel

Sehnen-Sekanten-Satz, Tangentensatz

Regelmäßige n-Ecke

Die Hauptwerkzeuge der Längenrechnung

Pythagoras-Hilfssatz,
Satz des Pythagoras

Antipythagoras

Vier-Punkte-Formel
(mit vorangestelltem
Hilfssatz)

Formel für Seiten-
halbierende und
Winkelhalbierende

Formeln für
Umkreis- und Inkreisradius

Höhenformel,
Heronische
Flächenformel

Existenz von Dreiecken
mit vorgegebenen
Seitenlängen

Schnittverhalten zweier Kreise,
Satz über Tangenten
(-abschnitte)

Winkelhalbierende

Die Sätze von
Menelaos und Ceva

Existenz von
(genau zwei)
Winkelhalbierenden

Winkelhalbierenden-
satz des Apollonius

Satz über den
Inkreismittelpunkt

Folgerung aus dem
Satz des Apollonius

Parallelprojektionen / Strahlensätze

Erster Strahlensatz

Zwischentreue von
Parallelprojektionen

Das Axiom von Pasch

Zweiter Strahlensatz

Umkehrung
der Strahlensätze

Die Grundlagen der Längenrechnung

Dreiecksungleichung,
Dreiecksungleichung,
Streckenabtragung

Metrische
Grundtatsachen,
Lot-Ungleichung

Echte Dreiecksungl.,
Dreiecksungleichung
als Äquivalenz

Geradentreue, Paralleltreue
und Senkrechttreue
von Spiegelungen

Sätze am Kreis

Sinus-Peripheriewinkel­satz

Zwei-Hilfssätze

Kennzeichnungsatz für Sehnenvierecke

Peripheriewinkel­satz

Satz des Ptolemäus

Weiterführende Sätze der Trigonometrie

Allgemeine Kongruenzsätze für Dreiecke

Hauptsatz über ähnliche Dreiecke

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Satz über den Tangens

Monotonie von Sinus und Cosinus

Die grundlegenden Sätze der Trigonometrie

Trigonometrische Flächenformel

Erweiterter Sinussatz

Projektionssatz

Cosinussatz

Grundlagen der Trigonometrie

Kongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke

Vorbereitungssatz für Sinus und Cosinus

Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Realisierungssatz (für Winkelmaße)

Satz über Winkelabtragung

Elementare Winkelsätze, Teil II (Winkel in Vierecken)

Winkelsumme im normalen Viereck

Winkel im Parallelogramm (Vorwärtsrichtung)

Winkel im normalen Trapez

Winkel im Parallelogramm (vollständiger Satz)

Stufenwinkelsatz am Trapez

Elementare Winkelsätze, Teil I (Winkel in Dreiecken)

Winkel-Strecken-Vergleich

Basiswinkelsatz (Rückwärtsrichtung)

Winkelhalbierende halbiert Winkel

Die vier Regeln des Winkelmaßes

Rechte Winkel, Einführung Gradmaß

Basiswinkelsatz (Vorwärtsrichtung)

Winkelsumme im (rechtwinkl.) Dreieck

Sätze über Neben- und Scheitelwinkel

Grundlagen des Winkelmaßes